

**„HÜTTE“**  
**DES INGENIEURS TASCHENBUCH.**

---

HERAUSGEGEBEN  
VOM  
AKADEMISCHEN VEREIN HÜTTE, E. V.

---

**21. AUFLAGE.**

---

**I. BAND.**

---

---

BERLIN 1911.  
VERLAG VON WILHELM ERNST & SOHN.

---

*Alle Rechte und besonders  
das Recht der Uebertragung in fremde Sprachen sind vorbehalten  
Copyright 1911 by Akademischer Verein Hütte,  
Eingetragener Verein Berlin.*

---

## VORWORT ZUR 21. AUFLAGE.

Die vorliegende Auflage ist eingehend überarbeitet, ergänzt und durch Aufnahme neuer Abschnitte wesentlich erweitert worden. Wir hoffen, hiermit unserer Aufgabe gerecht geworden zu sein, das Taschenbuch auf einer dem gegenwärtigen Stande der Wissenschaft und Praxis entsprechenden Höhe zu erhalten.

Die Abschnitte „Mechanik luftförmiger Körper“, „Automobilbau“, „Beleuchtung“, „Grundbau“, „Baumaschinen“, „Städtebau“ und „Wasserkraftanlagen“ sind neu aufgenommen worden. Ferner sind an Unterabschnitten hinzugekommen: „Vektorrechnung und Fouriersche Reihen“ im Abschnitt „Mathematik“, „Kreiselbewegung“ im Abschnitt „Mechanik“, „Brennstoffe und Verbrennungslehre“ im Abschnitt „Wärme“, „Messkunde“ im Abschnitt „Kraftmaschinen“, „Schweißverfahren“ im Abschnitt „Stoffkunde“, „Schiffsturbinen“ im Abschnitt „Schiffbau und Schiffsmaschinenbau“, „Elektrische Fördermaschinen“ im Abschnitt „Elektrotechnik“ und „Triebwagen“ im Abschnitt „Eisenbahnwesen“.

Mehrere Abschnitte haben eine völlige Umgestaltung der Gliederung und eine entsprechende Umarbeitung erfahren. So ist an Stelle der Abschnitte „Eisenbahnbau“, „Eisenbahnbetriebsmittel“, „Zahnradbahnen“ und von Teilen des Abschnittes „Drahtseilbahnen“ ein Abschnitt „Eisenbahnwesen“ mit zahlreichen völlig neu bearbeiteten Unterabschnitten getreten. Die Abschnitte „Hochbau“ und „Brückenbau“ sind unter erheblicher Vermehrung des Raumfangs völlig neu verfasst und mit zahlreichen neuen Abbildungen ausgestattet worden. Die Kapitel „Statik der Baukonstruktionen“, „Lüftung und Heizung“, „Straßenbau“, „Dynamik fester Körper“, „Maschinenteile für Hebe- und Fördermaschinen“, „Regelnde Maschinenteile“, „Wasserturbinen“, „Straßenbahn-Oberbau“ sind in durchgreifender Weise umgearbeitet worden.

Der Abschnitt „Elektrotechnik“ ist insbesondere durch Ausgestaltung der Teile über Umformer und Transformatoren, Schaltung und Regelung der Stromerzeuger und Eigenschaften der Systeme an Text und Abbildungen wesentlich bereichert worden.

Die Gasfabrikation ist nicht mehr in einem besonderen Abschnitt behandelt, dagegen sind Teile dieses Gebietes im Abschnitt „Wärme“ und „Beleuchtung“ berücksichtigt worden. Der Abschnitt „Eisenhüttenkunde“ ist fortgelassen, da der Akademische Verein Hütte für das Eisenhüttenwesen ein besonderes Werk, das „Taschenbuch für Eisenhüttenleute“ vor Jahresfrist herausgegeben hat. Die Neubearbeitung und Erweiterung des Kapitels „Eisen“ im Abschnitt „Stoff-

kunde“ wird das Fehlen des Abschnitts „Eisenhüttenkunde“ nicht als Lücke empfinden lassen.

Die Bearbeitungen haben eine Vermehrung des Gesamtumfanges von 2846 auf 3366 Seiten und der Zahl der Abbildungen von 2380 auf 3480 erforderlich gemacht.

Die große Nachfrage nach dem III. Bande der „Hütte“ hat gezeigt, daß wir mit der bei der letzten Auflage vorgenommenen Abtrennung des III. Bandes auf dem richtigen Wege waren; wir sind daher auf diesem Wege weitergegangen, und haben den III. Band so ausgestaltet, daß er nun als „Hütte des Bauingenieurs“ auch in Sonderausgabe erscheint. Möge er den an ihn zu stellenden Anforderungen gerecht werden!

Um allen Wünschen nachzukommen, sind außer der dreibändigen Gesamtausgabe wie bisher auch die beiden ersten Bände zusammen erhältlich.

Wir haben uns auch diesmal des wertvollen Rates und der Unterstützung zahlreicher Fachleute zu erfreuen gehabt und sprechen ihnen an dieser Stelle unseren wärmsten Dank aus. Besonders fühlen wir uns folgenden Herren für ihre Mitarbeit verpflichtet:

**S. Abt**, Ingenieur, Winterthur, Schweiz.

**E. Ackermann**, Regierungsbaumeister, Stidende-Berlin.

**R. Anger**, Regierungsbaumeister, Berlin.

Dr.-Ing. **F. Bendemann**, Lindenberg, Kr. Beeskow.

**K. Böhm**, Ingenieur, Berlin.

**H. Bolstorff**, Regierungsbaumeister, Berlin-Wilmersdorf.

**R. Borchers**, Regierungsbaumeister, Duisburg.

Dr. Techn. **K. Brabbée**, Professor an der Technischen Hochschule zu Hannover.

Dr.-Ing. **E. Braun**, Professor an der Technischen Hochschule zu Hannover.

Dr.-Ing. h. c. **L. Brennecke**, Geh. Admiralitätsrat, Marine-Hafenbau-  
direktor a. D.

**J. Brix**, Stadtbaurat a. D., Professor an der Technischen Hochschule zu Berlin.

Dipl.-Ing. **M. Buhle**, Regierungsbaumeister a. D., Professor an der Technischen Hochschule zu Dresden.

Dr.-Ing. **M. Dietrich**, Betriebsleiter der Berliner städtischen Straß-  
bahnen, Halensee.

Dr. **R. Doerfel**, k. k. Hofrat, Professor an der Deutschen Technischen Hochschule zu Prag.

**C. Feldmann**, Professor an der Technischen Hochschule zu Delft.

Dr. **Ph. Forchheimer**, Professor an der Technischen Hochschule zu Graz.

Dipl.-Ing. **G. Forner**, Oberingenieur der A. E. G., Turbinenfabrik, Berlin.

**F. Generlich**, Ingenieur des Dampfkessel-Revisionsvereins „Berlin“.

Dr. **E. Glinzer**, Professor, Oberlehrer der staatlichen Baugewerkschule zu Hamburg.

- H. Güldner**, Direktor der Güldner-Motoren-Gesellschaft, Aschaffenburg.  
**G. Hammer**, Regierungsbaumeister, Berlin.  
**A. Heller**, Ingenieur, Mitglied der Redaktion der Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure, Berlin.  
 Dipl.-Ing. **K. Hiorth**, Oberlehrer an der Kgl. Baugewerkschule zu Frankfurt a. O.  
 Dr. **H. Hoffmann**, Lehrer an der Bergschule zu Bochum.  
 Mont. Dr. **J. Hrabák**, k. k. Hofrat, Professor an der Bergakademie zu Příbram.  
 Dipl.-Ing. **H. Idelberger**, OBERINGENIEUR bei den Siemens-Schuckertwerken, Berlin.  
 Dr. **E. Jahnke**, Professor an der Bergakademie zu Berlin.  
**O. Kammerer**, Geh. Regierungsrat, Professor an der Technischen Hochschule zu Berlin.  
**C. Kersten**, Kgl. Oberlehrer a. D., Filialleiter der A.-G. Dyckerhoff u. Widmann, Straßburg i. E.  
 Dipl.-Ing. **P. Kesten**, OBERINGENIEUR, Charlottenburg.  
**K. Körner**, Professor an der Deutschen Technischen Hochschule zu Prag.  
**E. Kraefft**, Regierungs- und Baurat, Breslau.  
**G. Landsberg**, Regierungsbaumeister a. D., Berlin-Wannsee.  
**H. Lang**, Regierungs- und Baurat, Köln-Nippes.  
**A. Laskus**, Regierungsrat, Friedenau.  
**W. Laudahn**, Regierungsbaumeister im Reichsmarineamt, Berlin.  
**O. Leitholf**, Zivilingenieur, Berlin.  
**F. Ludloff**, Ingenieur, Berlin.  
**H. Martens**, Ingenieur des Dampfkessel-Revisionsvereins „Berlin“.  
**E. Mattern**, Baurat, Privatdozent an der Technischen Hochschule zu Berlin.  
**K. Meier**, Magistratsbaurat, Halensee, Direktor der Kanalisationswerke von Berlin.  
**E. Metzeltin**, Regierungsbaumeister a. D., Direktor der Hannoverschen Maschinenbau A.-G. vorm. G. Egstorff.  
**F. Meyer**, Schiffbauingenieur bei der F. Schichau Schiffswerft zu Danzig.  
 Dr. **R. Mollier**, Geh. Hofrat, Professor an der Technischen Hochschule zu Dresden.  
**A. Müll'er**, Regierungsbaumeister, Potsdam.  
**W. Philippi**, OBERINGENIEUR, Professor an der Bergakademie zu Berlin.  
 Dipl.-Ing. **K. Preufs**, Kattowitz, Oberschlesien.  
 Dipl.-Ing. **R. Rahusen**, Gronau, Westfalen.  
**O. Rambuscheck**, Konstruktionsingenieur an der Technischen Hochschule zu Berlin.  
**L. Samans**, Regierungs- und Baurat, Berlin.

- Dipl.-Ing. **M. Schellewald**, Dahlbruch.  
**W. Schrader**, Direktor bei Carl Flohr, Berlin.  
**R. Seifert**, Regierungsbaumeister, Minden i. W.  
Dipl.-Ing. **C. Stumpf**, Konstruktionsingenieur an der Technischen Hochschule zu Berlin.  
**M. Tolle**, Professor an der Technischen Hochschule zu Karlsruhe.  
**W. Treptow**, Regierungsrat, Charlottenburg.  
**L. Troske**, Regierungsbaumeister a. D., Professor an der Technischen Hochschule zu Hannover.  
Dipl.-Ing. **R. Vogdt**, Regierungsbaumeister, Oberlehrer an der Kgl. höheren Maschinenbauschule zu Aachen.  
**W. Wagenbach**, Professor an der Technischen Hochschule zu Breslau.  
**H. Weihe**, Professor an der Technischen Hochschule zu Berlin.  
**M. Wentzel**, Ingenieur des Dampfkessel-Revisionsvereins „Berlin“.  
**W. Werner**, Geh. Reg.-Rat, Professor an der Technischen Hochschule zu Berlin.  
**K. Weyand**, Regierungsbaumeister, Berlin.

Herr Obergeringieur Dipl.-Ing. P. Kesten hat auch bei dieser Auflage die Schriftleitung des Abschnitts „Elektrotechnik“, Herr Regierungsbaumeister Bolstorff die des Abschnitts „Eisenbahnwesen“ in dankenswerter Weise übernommen.

Unser langjähriger Mitarbeiter, Herr Geheimer Baurat Professor Dr. Pfarr, war leider diesmal wegen starker Inanspruchnahme durch die Bearbeitung der zweiten Auflage seines Werkes „Turbinen“ nicht in der Lage, den Abschnitt „Wasserturbinen“ zu bearbeiten. Wir danken ihm an dieser Stelle verbindlichst für die bisherige wertvolle Unterstützung.

Der Verlagsbuchhandlung sei hiermit für die Sorgfalt gedankt, die sie in altbewährter Weise der schwierigen Herstellung und der gediegenen Ausstattung des Taschenbuches gewidmet hat.

Wir bitten schließlicly alle Freunde unseres Werkes um weitere Mitarbeit und Förderung und danken ihnen für die uns freundlichst mitgeteilten Abänderungsvorschläge und Berichtigungen. Mitteilungen von Irrtümern und Vorschläge zu Verbesserungen werden wir stets dankbar entgegennehmen und bitten, sie an die untenstehende Adresse zu richten.

Berlin NW 23, Bachstraße 9, im August 1911.

## **Akademischer Verein Hütte.**

### **Die Taschenbuchkommission.**

I. A. Der Schriftleiter:

**H. Hanemann.**

# INHALTSVERZEICHNIS

des ersten Bandes.

## ERSTER ABSCHNITT.

### Mathematik.

Bearbeitet von der „T. B. K.“ (I bis VI, IX u. X) und Professor Dr. Jahnke (VII u. VIII.).

I. Tafeln.	Seite
A. Tafel der Potenzen, Wurzeln, natürlichen Logarithmen, reziproken Werte, Kreisumfänge und Kreisflächen . . . . .	1
B. Mantissen der Briggs'schen Logarithmen . . . . .	24
C. Tafeln der Kreisfunktionen . . . . .	26
D. Tafeln der Hyperbelfunktionen . . . . .	30
E. Kugelinhalte für die Durchmesser $d=1$ bis 200 . . . . .	35
F. Bogenlängen, Bogenhöhen, Sehnenlängen und Kreisabschnitte für den Halbmesser 1 . . . . .	36
G. Länge der Kreisbogen für den Halbmesser 1 . . . . .	38
H. Tafel zum Uebergang aus der $90^\circ$ -Teilung in die $100^\circ$ -Teilung des Quadranten . . . . .	42
I. Die Binomialkoeffizienten $\binom{n}{1}$ bis $\binom{n}{15}$ . . . . .	43
K. Quadrat- und Kubikwurzeln einiger Brüche . . . . .	43
L. Wichtige Zahlenwerte . . . . .	43
II. Arithmetik.	
A. Potenzen, Wurzeln, Logarithmen . . . . .	45
B. Kombinationslehre . . . . .	48
C. Determinanten . . . . .	49
D. Gleichungen . . . . .	50
E. Zinseszins- und Rentenrechnung . . . . .	54
F. Reihen . . . . .	56
III. Kreis- und Hyperbelfunktionen.	
A. Kreisfunktionen . . . . .	58
B. Ebene Dreiecke . . . . .	62
C. Kugeldreiecke . . . . .	63
D. Hyperbelfunktionen . . . . .	65
IV. Differential- und Integralrechnung.	
A. Differentialformeln . . . . .	67
B. Reihen von Maclaurin und Taylor . . . . .	68
C. Unbestimmte Formen . . . . .	69
D. Maxima und Minima . . . . .	69
E. Zerlegung rationaler Brüche in Teilbrüche . . . . .	70
F. Integralformeln . . . . .	72
G. Differentialgleichungen . . . . .	81
V. Wahrscheinlichkeitsrechnung und Theorie der Beobachtungsfehler.	
a) Wahrscheinlichkeitsrechnung . . . . .	85
b) Theorie der Beobachtungsfehler . . . . .	86
c) Methode der kleinsten Quadrate . . . . .	87
VI. Analytische Geometrie.	
A. Punkt und gerade Linie in der Ebene . . . . .	90
B. Krumme Linien in der Ebene . . . . .	93
C. Punkt, gerade Linie und Ebene im Raum . . . . .	115
D. Kurven doppelter Krümmung . . . . .	119
E. Krumme Flächen . . . . .	121

	Seite
VII. Vektorrechnung . . . . .	124
VIII. Fouriersche Reihen und harmonische Analyse . . . . .	128
IX. Inhalte von Flächen und Körpern.	
A. Flächeninhalt ebener Gebilde . . . . .	133
B. Inhalte und Oberflächen von Körpern . . . . .	137
X. Parallelperspektive . . . . .	142

## ZWEITER ABSCHNITT.

### A. Mechanik starrer Körper.

Bearbeitet von Dipl.-Ing. Preufs (I. bis IV.) und Reg.-Baumeister Bolstorff (V.).

I. Geometrische Bewegungslehre (Phoronomie).	
A. Bewegung eines Punktes . . . . .	144
B. Bewegung starrer Körper . . . . .	154
C. Tafeln für Fallhöhen und Endgeschwindigkeiten . . . . .	1082
II. Physikalische Mechanik.	
A. Allgemeine Gesetze (Erfahrungsgesetze) . . . . .	164
B. Technisches und physikalisches Maßsystem . . . . .	165
III. Statik starrer Körper.	
A. Allgemeine Begriffe . . . . .	166
B. Zusammensetzung, Zerlegung und Gleichgewicht der Kräfte . . . . .	168
C. Kräfte an gestützten starren Körpern . . . . .	177
D. Grundaufgaben der graphischen Statik . . . . .	179
E. Mittelpunkt der Parallelkräfte, Schwerpunkt . . . . .	187
IV. Dynamik starrer Körper.	
A. Grundbegriffe und allgemeine Gesetze . . . . .	195
B. Bewegung des Massenpunktes unter dem Einfluß von Kräften . . . . .	204
C. Bewegung der Massenpunktgruppe unter der Einwirkung von Kräften . . . . .	214
D. Trägheits- und Zentrifugalmomente . . . . .	231
E. Der Stofs . . . . .	241
V. Reibungswiderstände.	
A. Reibungszahlen . . . . .	243
B. Kraft- und Arbeitsverhältnisse der Getriebe . . . . .	249

### B. Mechanik tropfbar flüssiger Körper.

Bearbeitet von Reg.- u. Baurat Lang.

I. Statik tropfbar flüssiger Körper . . . . .	265
II. Dynamik tropfbar flüssiger Körper.	
A. Allgemeines . . . . .	268
B. Ausfluß durch Oefnungen in Gefäßen oder Stauanlagen . . . . .	270
C. Durchfluß durch gefüllte Rohrleitungen . . . . .	281
D. Fließen in nicht gefüllten Rohrleitungen, in Flüssen und Kanälen . . . . .	310
E. Fließen des Wassers durch Erdreich . . . . .	314
F. Steighöhe und Sprungweite freier Wasserstrahlen . . . . .	317
G. Hydraulischer Druck und Arbeitsvermögen frei ausfließender Strahlen . . . . .	318
H. Widerstand von Flüssigkeiten gegen bewegte Flächen und Körper . . . . .	323
I. Flüssigkeitsmessung . . . . .	337

### C. Mechanik luftförmiger Körper.

Bearbeitet von Dr.-Ing. Bendemann.

I. Allgemeine Eigenschaften . . . . .	341
II. Statik luftförmiger Körper . . . . .	342
III. Dynamik luftförmiger Körper.	
A. Allgemeines . . . . .	347
B. Grundbegriffe und einige Lehrsätze der theoretischen Hydrodynamik . . . . .	349
C. Bewegung der unvollkommenen (wirklichen) Flüssigkeiten . . . . .	361
D. Erfahrungsangaben über Luftbewegung und Luftwiderstand . . . . .	368
IV. Geschwindigkeits- und Mengenummessung luftförmiger Körper . . . . .	383

**DRITTER ABSCHNITT.****Wärme.**

Bearbeitet von Geh. Hofrat Professor Dr. Mollier.

I. Allgemeine Wärmeigenschaften der Körper.	Seite
A. Temperaturmessung . . . . .	388
B. Ausdehnung der Körper durch die Wärme . . . . .	391
C. Spezifische Wärme . . . . .	393
D. Temperatur von Mischungen . . . . .	396
E. Aenderung der Aggregatform durch die Wärme . . . . .	397
F. Lösung von Gasen in Wasser . . . . .	399
II. Wärmeübergang . . . . .	401
III. Allgemeine Grundsätze der Thermodynamik . . . . .	411
IV. Vollkommene Gase.	
A. Allgemeines . . . . .	416
B. Gasmischungen . . . . .	420
C. Besondere Zustandsänderungen . . . . .	423
D. Besondere Arbeitsprozesse . . . . .	426
V. Dämpfe.	
A. Allgemeines . . . . .	430
B. Nasser Dampf . . . . .	431
C. Ueberhitzter Dampf . . . . .	440
D. Anwendung auf die Theorie der Dampfmaschine . . . . .	442
E. Anwendung auf die Theorie der Kältemaschinen . . . . .	446
VI. Strömende Bewegung von Gasen und Dämpfen.	
A. Allgemeines . . . . .	458
B. Ausfluß . . . . .	459
C. Zusammenstellung der Ausflußformeln für Luft und gesättigten Wasserdampf. Erfahrungswerte . . . . .	463
D. Bewegung der Gase und Dämpfe durch Rohrleitungen . . . . .	466
E. Drosseln . . . . .	471
VII. Verbrennung.	
A. Brennstoffe . . . . .	474
B. Verbrennung . . . . .	480
C. Verbrennung gasförmiger und flüssiger Brennstoffe . . . . .	489

**VIERTER ABSCHNITT.****Festigkeitslehre.**

Bearbeitet von Regierungsrat Laskus.

I. Allgemeines und Versuchswerte.	
A. Erklärungen und allgemeine Gesetze . . . . .	502
B. Elastizitäts- und Festigkeitszahlen . . . . .	513
C. Zulässige Spannungen . . . . .	522
II. Festigkeit gerader Stäbe.	
A. Zug- und Druckfestigkeit . . . . .	527
B. Knickfestigkeit . . . . .	533
C. Schubfestigkeit . . . . .	538
D. Biegungsfestigkeit . . . . .	540
E. Drehungsfestigkeit . . . . .	588
F. Zusammengesetzte Festigkeit . . . . .	592
III. Festigkeit einfach gekrümmter Stäbe . . . . .	608
IV. Festigkeit der Federn . . . . .	612
V. Festigkeit der Platten und Gefäße . . . . .	620

## FÜNFTER ABSCHNITT.

## Stoffkunde.

Bearbeitet von Professor Dr. Glinzer (II. Eisen 6, III bis XI), Konstruktionsingenieur Rambushek (II. Eisen 7), Dr.-Ing. Hanemann (II. Eisen 1 bis 5) und der „T. B. K.“ (I., II. B bis F).

	Seite
I. Allgemeines.	
A. Chemische Elemente und Verbindungen . . . . .	630
B. Spezifische Gewichte . . . . .	633
II. Metalle . . . . .	640
III. Natürliche Steine und Erden. . . . .	698
IV. Künstliche Steine . . . . .	701
V. Mörtel, Putz, Zement, Beton usw. . . . .	709
VI. Glas . . . . .	724
VII. Kautschuk und Guttapercha, Asbest . . . . .	729
VIII. Wasserglas, Kitte, Asphalt, Dachpappe . . . . .	731
IX. Nutzhölzer . . . . .	734
X. Schmiermittel . . . . .	744
XI. Ledertreibriemen . . . . .	750

## SECHSTER ABSCHNITT.

## Maschinenteile.

Bearbeitet von Regierungsrat Treptow (I., II., IV., V., VI.), Geh. Regierungsrat Professor Kammerer (III.), Professor Tolle (VII.).

I. Hilfsmittel zur Verbindung von Maschinenteilen.	
A. Keile . . . . .	753
B. Schrauben . . . . .	759
C. Niete . . . . .	772
II. Maschinenteile der drehenden Bewegung.	
A. Zahnräder . . . . .	784
B. Reib- und Keilräder . . . . .	813
C. Riemen- und Seiltrieb . . . . .	816
D. Zapfen . . . . .	845
E. Achsen und Wellen . . . . .	850
F. Kupplungen . . . . .	856
G. Lager . . . . .	872
III. Maschinenteile für Hebemaschinen.	
A. Rundeisenketten . . . . .	884
B. Kalibrierte Ketten . . . . .	887
C. Gallsche Kette . . . . .	889
D. Drahtseile . . . . .	890
E. Hanfseile . . . . .	898
F. Lasthaken . . . . .	899
G. Bremsen . . . . .	901
H. Gesperre . . . . .	906
J. Sperrradbremsen . . . . .	908
IV. Kolben, Kolbenstangen, Stopfbüchsen . . . . .	909
V. Kurbeltrieb.	
A. Bewegungsverhältnisse . . . . .	927
B. Kraft- und Arbeitsverhältnisse . . . . .	931
C. Kurbeln und Exzenter . . . . .	933
D. Schubstangen . . . . .	940
E. Kreuzköpfe . . . . .	948
F. Gelenkgeradfürungen . . . . .	950

VI. Maschinenteile zur Aufnahme und Fortleitung von Flüssigkeiten.	Seite
A. Zylinder . . . . .	954
B. Rohre . . . . .	962
C. Ventile . . . . .	984
VII. Regelnde Maschinenteile.	
A. Schwungräder . . . . .	999
B. Kraftmaschinenregler . . . . .	1015

### Anhang.

Bearbeitet von Ingenieur Ludloff.

A. Münztafel . . . . .	1037
B. Vergleich der Maße verschiedener Länder mit dem metrischen Maß . . . . .	1042
C. Maße und Gewichte verschiedener Länder . . . . .	1050
D. Vergleichungstabeln zusammengesetzter Maßeinheiten . . . . .	1056
E. Gebührenordnung der Architekten und Ingenieure . . . . .	1060
F. Gesetze zum Schutze des gewerblichen Eigentumes . . . . .	1067
G. Gebührenordnung für Zeugen und Sachverständige . . . . .	1078

### Sachverzeichnis.

Bearbeitet von Ingenieur Ludloff.

Sachverzeichnis des ersten, zweiten und dritten Bandes . . . . .	1082
------------------------------------------------------------------	------

## Berichtigungen.

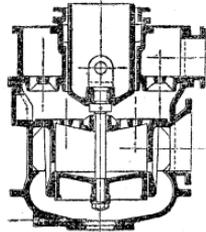
## I. Band

- Seite 30 Zeile 2 v. o. lies  $\frac{1}{2}(e^{\varphi} - e^{-\varphi})$  anstatt  $\frac{1}{2}(e^{\varphi} - e^{-\varphi})$ .
- „ 31 „ 1 v. o. lies  $\frac{1}{2}(e^{\varphi} - e^{-\varphi})$  anstatt  $\frac{1}{2}(e^{\varphi} - e^{-\varphi})$ .
- „ 112 „ 11 v. o. lies  $\cos^3 OTP$  u.  $\sin^3 u$  statt  $\sin^3 OTP$  u.  $\cos^3 u$ .
- „ 156 Abb. 12 die Pfeile der Drehung  $\omega$  um die Achsen  $A$  und  $O$  müssen umgekehrt werden (von oben gesehen: Rechtsdrehung!)
- „ 212 Zeile 15 v. o. lies  $p_z$  statt  $p_n$ .
- „ 282 „ 1 v. o. schalte ein: vrgl. Tafeln Seite 1080 u. 1081.
- „ 288 „ 4 v. o. „ 129 statt 133.
- „ 289 „ 21 v. u. „  $\lambda_{\text{gr}}$  „  $\lambda_w$ .
- „ 294 „ 16 v. o. „  $+v_k$  statt  $-v_k$ .
- „ 302 „ 14 v. o. „ 139 statt 142.
- „ 307 „ 20 v. o. „ eben statt oben.
- „ 320 „ 10 v. o. „ 2 statt 1.
- „ 320 „ 18 v. o. „  $2Fh\gamma$  statt  $0,5Fh\gamma$ .
- „ 320 „ 17 v. u. „  $\cos \alpha \sim 0,25$  statt  $\cos \alpha \sim 0,75$ .
- „ 321 „ 3 u. 17 v. o. lies 2 statt 1.
- „ 330 „ 22 u. 23 v. o. lies  $q_2 \frac{8}{2g}$  anstatt  $q_2$ .
- „ 333 „ 22 v. u. streiche die Worte „unabhängig von der Tiefe“.
- „ 339 „ 23 v. o. lies Leitungsdurchmesser statt Leitungsmesser.
- „ 376 „ 12 v. o.  
anstatt Kugel  $d=0,2$  m  $\psi=0,17$  T Gött. Anst.  
ist (infolge neuerer Versuche) zu setzen  
Kugel  $d=10, 20, 30$  cm  $\psi=0,22$  T Gött. Anst.
- „ 530 Zeile 2 v. o. lies 4,26 statt 0,45.
- „ 554 „ 6 v. o. „  $dH^2$  anstatt  $aH^2$ .
- „ 557 „ 12 v. u. „ 5234 „ 5344.
- „ 557 „ 12 v. u. „ 523 „ 534.
- „ 557 „ 11 v. u. „ 550 „ 556.
- „ 577 Fußnote lies: Eine Entscheid. des preufs. Min. d. öff. Arbeiten, anstatt: Die Berliner Baupolizei.
- „ 618 Zeile 5 v. o. lies  $(\xi^2 + 1)$  anstatt  $(\xi + 1)$ .
- „ 643 „ 6 v. u. lies Dehnbarkeit statt Zähigkeit.
- „ 824 Fußnote lies Heft 56/57 statt Heft 155.
- „ 930 Abb. 283 lies  $CD = 3\lambda \frac{v^2}{r}$  statt  $CD = \lambda \frac{v^2}{r}$ .
- „ 930 Zeile 3 v. u. lies  $CD = 3\lambda \frac{v^2}{r}$  statt  $CD = \frac{\lambda v^2}{r}$ .

## II. Band.

- Seite 33 Zeile 18 v. o. lies 23 anstatt 21; Zeile 19 v. o. lies 43 anstatt 47.
- „ 37 „ 9 v. o. „ 57 „ 61.
- „ 38 „ 1 v. o. „ 58 u. 59 anstatt 62 u. 63.
- „ 39 „ 2 v. o. „ 64 anstatt 67; Zeile 17 v. o. lies 65 anstatt 115; Zeile 22 v. o. lies A. P. B. anstatt A. B. B.; Zeile 35 v. o. lies 66 anstatt 69.
- „ 40 „ 18 v. o. lies 67 u. 69 anstatt 70 u. 71; Zeile 24 v. o. lies 68 anstatt 125.
- „ 46 Zeile 15 v. o. lies 75 anstatt 78; Zeile 40 v. o. lies 10, 12, 15 anstatt 35, 39, 42; Zeile 44 v. o. lies 5 anstatt 28.
- „ 47 Zeile 15 v. o. lies 76 anstatt 79.
- „ 48 „ 8 v. o. „ 77 „ 80.
- „ 72 „ 7 u. 17 v. u. lies  $\sqrt{\frac{1000}{p\gamma}}$  statt  $\frac{\sqrt{1000}}{p\gamma}$ .

Abb. 244.



Seite 215 Abb. 244. Unterteil rechts verzeichnet. Figur mufs wie nebenstehend aussehen.

Seite 777 Zeile 5 v. u. lies Abb. 55 statt Abb. 54.

**Abkürzungen.**

Außer den vom Bundesrat festgesetzten Mafs- und Gewichtsbezeichnungen (vgl. I. Bd. S. 1050 u. f.) sowie den Bezeichnungen der elektrischen Mafseinheiten (vgl. II. Bd. S. 857) sind folgende Abkürzungen angewendet worden.

- |                                                                                          |                        |
|------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------|
| sk = Sekunde(n).                                                                         | ♁ = Pfennig.           |
| min = Minute(n).                                                                         | PS = Pferdestärke(n).  |
| st = Stunde(n).                                                                          | at = Atmosphäre(n).    |
| M = Mark.                                                                                | WE = Wärmeeinheit(en). |
| HK = Hefner-Kerze(n).                                                                    |                        |
| Uml./sk (min, st) = Umdrehungen in der Sekunde (Minute, Stunde).                         |                        |
| R.-T. = Raunteil(e).                                                                     |                        |
| G.-T. = Gewichtsteil(e).                                                                 |                        |
| D. B. = Deutsche Bauzeitung.                                                             |                        |
| E. V. W. = Elektrotechnischer Verein Wien.                                               |                        |
| E. T. Z. = Elektrotechnische Zeitschrift.                                                |                        |
| Gl. A. = Glasers Annalen.                                                                |                        |
| H. d. A. = Handbuch der Architektur.                                                     |                        |
| H. d. B. = Handbuch der Baukunde.                                                        |                        |
| H. d. I. W. = Handbuch der Ingenieur-Wissenschaften.                                     |                        |
| J. G. W. = Journal für Gasbeleuchtung und Wasserversorgung.                              |                        |
| O. f. F. = Organ für die Fortschritte des Eisenbahnwesens.                               |                        |
| V. d. E. = Verein deutscher Elektrotechniker.                                            |                        |
| Z. d. B. = Zentralblatt der Bauverwaltung.                                               |                        |
| Z. f. B. = Zeitschrift für Bauwesen.                                                     |                        |
| Z. d. V. d. I. = Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure.                           |                        |
| Z. ö. I. u. A. V. = Zeitschrift des österreichischen Ingenieur- und Architekten-Vereins. |                        |

ERSTER ABSCHNITT.

---

# MATHEMATIK.

## I. TAFELN.

(Die Anmerkungen hierzu auf S. 44 sind zu beachten.)

**A. Tafel der Potenzen, Wurzeln,  
natürlichen Logarithmen, reziproken Werte,  
Kreisumfänge und Kreisflächen.**

---

$n$	$n^2$	$n^3$	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\ln n$	$\frac{1000}{n}$	$\pi n$	$\frac{\pi n^2}{4}$	$n$
1	1	1	1,0000	1,0000	0,00000	1000,000	3,142	0,7854	1
2	4	8	1,4142	1,2599	0,69315	500,000	6,283	3,1416	2
3	9	27	1,7321	1,4422	1,09861	333,333	9,425	7,0686	3
4	16	64	2,0000	1,5874	1,38629	250,000	12,566	12,5664	4
5	25	125	2,2361	1,7100	1,60944	200,000	15,708	19,6350	5
6	36	216	2,4495	1,8171	1,79176	166,667	18,850	28,2743	6
7	49	343	2,6458	1,9129	1,94591	142,857	21,991	38,4845	7
8	64	512	2,8284	2,0000	2,07944	125,000	25,133	50,2655	8
9	81	729	3,0000	2,0801	2,19722	111,111	28,274	63,6173	9
10	100	1000	3,1623	2,1544	2,30259	100,000	31,416	78,5398	10
11	121	1331	3,3166	2,2240	2,39790	90,9091	34,558	95,0332	11
12	144	1728	3,4641	2,2894	2,48491	83,3333	37,699	113,0977	12
13	169	2197	3,6056	2,3513	2,56495	76,9231	40,841	132,7323	13
14	196	2744	3,7417	2,4101	2,63906	71,4286	43,982	153,9384	14
15	225	3375	3,8730	2,4662	2,70805	66,6667	47,124	176,7151	15
16	256	4096	4,0000	2,5198	2,77259	62,5000	50,265	201,0626	16
17	289	4913	4,1231	2,5713	2,83321	58,8235	53,407	226,9807	17
18	324	5832	4,2426	2,6207	2,89037	55,5556	56,549	254,4697	18
19	361	6859	4,3589	2,6684	2,94444	52,6316	59,690	283,5297	19
20	400	8000	4,4721	2,7144	2,99573	50,0000	62,832	314,1592	20
21	441	9261	4,5826	2,7589	3,04452	47,6190	65,973	346,3612	21
22	484	10648	4,6904	2,8020	3,09104	45,4545	69,115	380,1332	22
23	529	12167	4,7958	2,8439	3,13549	43,4783	72,257	415,0762	23
24	576	13824	4,8990	2,8845	3,17805	41,6667	75,398	452,3892	24
25	625	15625	5,0000	2,9240	3,21888	40,0000	78,540	490,8742	25
26	676	17576	5,0990	2,9625	3,25810	38,4615	81,681	530,9295	26
27	729	19683	5,1962	3,0000	3,29584	37,0370	84,823	572,5552	27
28	784	21952	5,2915	3,0366	3,33220	35,7143	87,965	615,7522	28
29	841	24389	5,3852	3,0723	3,36730	34,4828	91,106	660,5202	29
30	900	27000	5,4772	3,1072	3,40120	33,3333	94,248	706,8583	30
31	961	29791	5,5678	3,1414	3,43399	32,2581	97,389	754,7683	31
32	1024	32768	5,6569	3,1748	3,46574	31,2500	100,531	804,2483	32
33	1089	35937	5,7446	3,2075	3,49651	30,3030	103,673	855,2993	33
34	1156	39304	5,8310	3,2396	3,52636	29,4118	106,814	907,9202	34
35	1225	42875	5,9161	3,2711	3,55535	28,5714	109,956	962,1133	35
36	1296	46656	6,0000	3,3019	3,58352	27,7778	113,097	1017,8836	36
37	1369	50653	6,0828	3,3322	3,61092	27,0270	116,239	1075,2137	37
38	1444	54872	6,1644	3,3620	3,63759	26,3158	119,381	1134,1138	38
39	1521	59319	6,2450	3,3912	3,66356	25,6410	122,522	1194,5939	39
40	1600	64000	6,3246	3,4200	3,68888	25,0000	125,66	1256,6440	40
41	1681	68921	6,4031	3,4482	3,71357	24,3902	128,81	1320,2541	41
42	1764	74088	6,4807	3,4760	3,73767	23,8095	131,95	1385,4442	42
43	1849	79507	6,5574	3,5034	3,76120	23,2558	135,09	1452,2043	43
44	1936	85184	6,6332	3,5303	3,78419	22,7273	138,23	1520,5344	44
45	2025	91125	6,7082	3,5569	3,80666	22,2222	141,37	1590,4345	45
46	2116	97336	6,7823	3,5830	3,82864	21,7391	144,51	1661,9046	46
47	2209	103823	6,8557	3,6088	3,85015	21,2766	147,65	1734,9447	47
48	2304	110592	6,9282	3,6342	3,87120	20,8333	150,80	1809,5648	48
49	2401	117649	7,0000	3,6593	3,89182	20,4082	153,94	1885,7449	49
50	2500	125000	7,0711	3,6840	3,91202	20,0000	157,08	1963,5050	50

$n$	$n^2$	$n^3$	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\ln n$	$\frac{1000}{n}$	$\pi n$	$\frac{\pi n^2}{4}$	$n$
50	25 00	125 000	7,0711	3,6840	3,91202	20,0000	157,08	19 63,50	50
51	26 01	132 651	7,1414	3,7084	3,93183	19,6078	160,22	20 42,82	51
52	27 04	140 608	7,2111	3,7325	3,95124	19,2308	163,36	21 23,72	52
53	28 09	148 877	7,2801	3,7563	3,97029	18,8679	166,50	22 06,18	53
54	29 16	157 464	7,3485	3,7798	3,98898	18,5185	169,65	22 90,22	54
55	30 25	166 375	7,4162	3,8030	4,00733	18,1818	172,79	23 75,83	55
56	31 36	175 616	7,4833	3,8259	4,02535	17,8571	175,93	24 63,01	56
57	32 49	185 193	7,5498	3,8485	4,04305	17,5439	179,07	25 51,76	57
58	33 64	195 112	7,6158	3,8709	4,06044	17,2414	182,21	26 42,08	58
59	34 81	205 379	7,6811	3,8930	4,07754	16,9492	185,35	27 33,97	59
60	36 00	216 000	7,7460	3,9149	4,09434	16,6667	188,50	28 27,43	60
61	37 21	226 981	7,8102	3,9365	4,11087	16,3934	191,64	29 22,47	61
62	38 44	238 328	7,8740	3,9579	4,12713	16,1290	194,78	30 19,07	62
63	39 69	250 047	7,9373	3,9791	4,14313	15,8730	197,92	31 17,25	63
64	40 96	262 144	8,0000	4,0000	4,15888	15,6250	201,06	32 16,99	64
65	42 25	274 625	8,0623	4,0207	4,17439	15,3846	204,20	33 18,31	65
66	43 56	287 496	8,1240	4,0412	4,18965	15,1515	207,35	34 21,19	66
67	44 89	300 763	8,1854	4,0615	4,20469	14,9254	210,49	35 25,65	67
68	46 24	314 432	8,2462	4,0817	4,21951	14,7059	213,63	36 31,68	68
69	47 61	328 509	8,3066	4,1016	4,23411	14,4928	216,77	37 39,28	69
70	49 00	343 000	8,3666	4,1213	4,24850	14,2857	219,91	38 48,45	70
71	50 41	357 911	8,4261	4,1408	4,26268	14,0845	223,05	39 59,19	71
72	51 84	373 248	8,4853	4,1602	4,27667	13,8889	226,19	40 71,50	72
73	53 29	389 017	8,5440	4,1793	4,29046	13,6986	229,34	41 85,39	73
74	54 76	405 224	8,6023	4,1983	4,30407	13,5135	232,48	43 00,84	74
75	56 25	421 875	8,6603	4,2172	4,31749	13,3333	235,62	44 17,86	75
76	57 76	438 976	8,7178	4,2358	4,33073	13,1579	238,76	45 36,46	76
77	59 29	456 533	8,7750	4,2543	4,34381	12,9870	241,90	46 56,63	77
78	60 84	474 552	8,8318	4,2727	4,35671	12,8205	245,04	47 78,36	78
79	62 41	493 039	8,8882	4,2908	4,36945	12,6582	248,19	49 01,67	79
80	64 00	512 000	8,9443	4,3089	4,38203	12,5000	251,33	50 26,55	80
81	65 61	531 441	9,0000	4,3267	4,39445	12,3457	254,47	51 53,00	81
82	67 24	551 368	9,0554	4,3445	4,40672	12,1951	257,61	52 81,02	82
83	68 89	571 787	9,1104	4,3621	4,41884	12,0482	260,75	54 10,61	83
84	70 56	592 704	9,1652	4,3795	4,43082	11,9048	263,89	55 41,77	84
85	72 25	614 125	9,2195	4,3968	4,44265	11,7647	267,04	56 74,50	85
86	73 96	636 056	9,2736	4,4140	4,45435	11,6279	270,18	58 08,80	86
87	75 69	658 503	9,3274	4,4310	4,46591	11,4943	273,32	59 44,68	87
88	77 44	681 472	9,3808	4,4480	4,47734	11,3636	276,46	60 82,12	88
89	79 21	704 969	9,4340	4,4647	4,48864	11,2360	279,60	62 21,14	89
90	81 00	729 000	9,4868	4,4814	4,49981	11,1111	282,74	63 61,73	90
91	82 81	753 571	9,5394	4,4979*	4,51086	10,9890	285,88	65 03,88	91
92	84 64	778 688	9,5917	4,5144	4,52179	10,8696	289,03	66 47,61	92
93	86 49	804 357	9,6437	4,5307	4,53260	10,7527	292,17	67 92,91	93
94	88 36	830 584	9,6954	4,5468	4,54329	10,6383	295,31	69 39,78	94
95	90 25	857 375	9,7468	4,5629	4,55388	10,5263	298,45	70 88,22	95
96	92 16	884 736	9,7980	4,5789	4,56435	10,4167	301,59	72 38,23	96
97	94 09	912 673	9,8489	4,5947	4,57471	10,3093	304,73	73 89,81	97
98	96 04	941 192	9,8995	4,6104	4,58497	10,2041	307,88	75 42,96	98
99	98 01	970 299	9,9499	4,6261	4,59512	10,1010	311,02	76 97,69	99
100	1 00 00	1 000 000	10,0000	4,6416	4,60517	10,0000	314,16	78 53,98	100

$n$	$n^2$	$n^3$	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\ln n$	$\frac{1000}{n}$	$\pi n$	$\frac{\pi n^2}{4}$	$n$
100	1 00 00	1 000 000	10,0000	4,6416	4,60517	10,0000	314,16	78 53, 98	100
101	1 02 01	1 030 301	10,0499	4,6570	4,61512	9,90099	317,30	80 11, 85	101
102	1 04 04	1 061 208	10,0995	4,6723	4,62497	9,80392	320,44	81 71, 28	102
103	1 06 09	1 092 727	10,1489	4,6875	4,63473	9,70874	323,58	83 32, 29	103
104	1 08 16	1 124 864	10,1980	4,7027	4,64439	9,61538	326,73	84 94, 87	104
105	1 10 25	1 157 625	10,2470	4,7177	4,65396	9,52381	329,87	86 59, 01	105
106	1 12 36	1 191 016	10,2956	4,7326	4,66344	9,43396	333,01	88 24, 73	106
107	1 14 49	1 225 043	10,3441	4,7475	4,67283	9,34579	336,15	89 92, 02	107
108	1 16 64	1 259 712	10,3923	4,7622	4,68213	9,25926	339,29	91 60, 88	108
109	1 18 81	1 295 029	10,4403	4,7769	4,69135	9,17431	342,43	93 31, 32	109
110	1 21 00	1 331 000	10,4881	4,7914	4,70048	9,09091	345,58	95 03, 32	110
111	1 23 21	1 367 631	10,5357	4,8059	4,70953	9,00901	348,72	96 76, 89	111
112	1 25 44	1 404 928	10,5830	4,8203	4,71850	8,92857	351,86	98 52, 03	112
113	1 27 69	1 442 897	10,6301	4,8346	4,72739	8,84956	355,00	1 00 28, 7	113
114	1 29 96	1 481 544	10,6771	4,8488	4,73620	8,77193	358,14	1 02 07, 0	114
115	1 32 25	1 520 875	10,7238	4,8629	4,74493	8,69565	361,28	1 03 86, 9	115
116	1 34 56	1 560 896	10,7703	4,8770	4,75359	8,62069	364,42	1 05 68, 3	116
117	1 36 89	1 601 613	10,8167	4,8910	4,76217	8,54701	367,57	1 07 51, 3	117
118	1 39 24	1 643 032	10,8628	4,9049	4,77068	8,47458	370,71	1 09 35, 9	118
119	1 41 61	1 685 159	10,9087	4,9187	4,77912	8,40336	373,85	1 11 22, 0	119
120	1 44 00	1 728 000	10,9545	4,9324	4,78749	8,33333	376,99	1 13 09, 7	120
121	1 46 41	1 771 561	11,0000	4,9461	4,79579	8,26446	380,13	1 14 99, 0	121
122	1 48 84	1 815 848	11,0454	4,9597	4,80402	8,19672	383,27	1 16 89, 9	122
123	1 51 29	1 860 867	11,0905	4,9732	4,81218	8,13008	386,42	1 18 82, 3	123
124	1 53 76	1 906 624	11,1355	4,9866	4,82028	8,06452	389,56	1 20 76, 3	124
125	1 56 25	1 953 125	11,1803	5,0000	4,82831	8,00000	392,70	1 22 71, 8	125
126	1 58 76	2 000 376	11,2250	5,0133	4,83628	7,93651	395,84	1 24 69, 0	126
127	1 61 29	2 048 383	11,2694	5,0265	4,84419	7,87402	398,98	1 26 67, 7	127
128	1 63 84	2 097 152	11,3137	5,0397	4,85203	7,81250	402,12	1 28 68, 0	128
129	1 66 41	2 146 689	11,3578	5,0528	4,85981	7,75194	405,27	1 30 69, 8	129
130	1 69 00	2 197 000	11,4018	5,0658	4,86753	7,69231	408,41	1 32 73, 2	130
131	1 71 61	2 248 091	11,4455	5,0788	4,87520	7,63359	411,55	1 34 78, 2	131
132	1 74 24	2 299 968	11,4891	5,0916	4,88280	7,57576	414,69	1 36 84, 8	132
133	1 76 89	2 352 637	11,5326	5,1045	4,89035	7,51880	417,83	1 38 92, 9	133
134	1 79 56	2 406 104	11,5758	5,1172	4,89784	7,46269	420,97	1 41 02, 6	134
135	1 82 25	2 460 375	11,6190	5,1299	4,90527	7,40741	424,12	1 43 13, 9	135
136	1 84 96	2 515 456	11,6619	5,1426	4,91265	7,35294	427,26	1 45 26, 7	136
137	1 87 69	2 571 353	11,7047	5,1551	4,91998	7,29927	430,40	1 47 41, 1	137
138	1 90 44	2 628 072	11,7473	5,1676	4,92725	7,24638	433,54	1 49 57, 1	138
139	1 93 21	2 685 619	11,7898	5,1801	4,93447	7,19424	436,68	1 51 74, 7	139
140	1 96 00	2 744 000	11,8322	5,1925	4,94164	7,14286	439,82	1 53 93, 8	140
141	1 98 81	2 803 221	11,8743	5,2048	4,94876	7,09220	442,96	1 56 14, 5	141
142	2 01 64	2 863 288	11,9164	5,2171	4,95583	7,04225	446,11	1 58 36, 8	142
143	2 04 49	2 924 207	11,9583	5,2293	4,96284	6,99301	449,25	1 60 60, 6	143
144	2 07 36	2 985 984	12,0000	5,2415	4,96981	6,94444	452,39	1 62 86, 0	144
145	2 10 25	3 048 625	12,0416	5,2536	4,97673	6,89655	455,53	1 65 13, 0	145
146	2 13 16	3 112 136	12,0830	5,2656	4,98361	6,84932	458,67	1 67 41, 5	146
147	2 16 09	3 176 523	12,1244	5,2776	4,99043	6,80272	461,81	1 69 71, 7	147
148	2 19 04	3 241 792	12,1655	5,2896	4,99721	6,75676	464,96	1 72 03, 4	148
149	2 22 01	3 307 949	12,2066	5,3015	5,00395	6,71141	468,10	1 74 36, 6	149
150	2 25 00	3 375 000	12,2474	5,3133	5,01064	6,66667	471,24	1 76 71, 5	150

$n$	$n^2$	$n^3$	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\ln n$	$\frac{1000}{n}$	$\pi n$	$\frac{\pi n^2}{4}$	$n$
150	2 25 00	3 375 000	12,2474	5,3133	5,01064	6,66667	471,24	1 76 71,5	150
151	2 28 01	3 442 951	12,2882	5,3251	5,01728	6,62252	474,38	1 79 07,9	151
152	2 31 04	3 511 808	12,3288	5,3368	5,02388	6,57895	477,52	1 81 45,8	152
153	2 34 09	3 581 577	12,3693	5,3485	5,03044	6,53595	480,66	1 83 85,4	153
154	2 37 16	3 652 264	12,4097	5,3601	5,03695	6,49351	483,81	1 86 26,5	154
155	2 40 25	3 723 875	12,4499	5,3717	5,04343	6,45161	486,95	1 88 69,2	155
156	2 43 36	3 796 416	12,4900	5,3832	5,04986	6,41026	490,09	1 91 13,4	156
157	2 46 49	3 869 893	12,5300	5,3947	5,05625	6,36943	493,23	1 93 59,3	157
158	2 49 64	3 944 312	12,5698	5,4061	5,06260	6,32911	496,37	1 96 06,7	158
159	2 52 81	4 019 679	12,6099	5,4175	5,06890	6,28931	499,51	1 98 55,7	159
160	2 56 00	4 096 000	12,6491	5,4288	5,07517	6,25000	502,65	2 01 06,2	160
161	2 59 21	4 173 281	12,6886	5,4401	5,08140	6,21118	505,80	2 03 58,3	161
162	2 62 44	4 251 528	12,7279	5,4514	5,08760	6,17284	508,94	2 06 12,0	162
163	2 65 69	4 330 747	12,7671	5,4626	5,09375	6,13497	512,08	2 08 67,2	163
164	2 68 96	4 410 944	12,8062	5,4737	5,09987	6,09756	515,22	2 11 24,1	164
165	2 72 25	4 492 125	12,8452	5,4848	5,10595	6,06061	518,36	2 13 82,5	165
166	2 75 56	4 574 296	12,8841	5,4959	5,11199	6,02410	521,50	2 16 42,4	166
167	2 78 89	4 657 463	12,9228	5,5069	5,11799	5,98802	524,65	2 19 04,0	167
168	2 82 24	4 741 632	12,9615	5,5178	5,12396	5,95238	527,79	2 21 67,1	168
169	2 85 61	4 826 809	13,0000	5,5288	5,12990	5,91716	530,93	2 24 31,8	169
170	2 89 00	4 913 000	13,0384	5,5397	5,13580	5,88235	534,07	2 26 98,0	170
171	2 92 41	5 000 211	13,0767	5,5505	5,14166	5,84795	537,21	2 29 65,8	171
172	2 95 84	5 088 448	13,1149	5,5613	5,14749	5,81395	540,35	2 32 35,2	172
173	2 99 29	5 177 717	13,1529	5,5721	5,15329	5,78035	543,50	2 35 06,2	173
174	3 02 76	5 268 024	13,1909	5,5828	5,15906	5,74713	546,64	2 37 78,7	174
175	3 06 25	5 359 375	13,2288	5,5934	5,16479	5,71429	549,78	2 40 52,8	175
176	3 09 76	5 451 776	13,2665	5,6041	5,17048	5,68182	552,92	2 43 28,5	176
177	3 13 29	5 545 233	13,3041	5,6147	5,17615	5,64972	556,06	2 46 05,7	177
178	3 16 84	5 639 752	13,3417	5,6252	5,18178	5,61798	559,20	2 48 84,6	178
179	3 20 41	5 735 339	13,3791	5,6357	5,18739	5,58659	562,35	2 51 64,9	179
180	3 24 00	5 832 000	13,4164	5,6462	5,19296	5,55556	565,49	2 54 46,9	180
181	3 27 61	5 929 741	13,4536	5,6567	5,19850	5,52486	568,63	2 57 30,4	181
182	3 31 24	6 028 568	13,4907	5,6671	5,20401	5,49451	571,77	2 60 15,5	182
183	3 34 89	6 128 487	13,5277	5,6774	5,20949	5,46448	574,91	2 63 02,2	183
184	3 38 56	6 229 504	13,5647	5,6877	5,21494	5,43478	578,05	2 65 90,4	184
185	3 42 25	6 331 625	13,6015	5,6980	5,22036	5,40541	581,19	2 68 80,3	185
186	3 45 96	6 434 856	13,6382	5,7083	5,22575	5,37634	584,34	2 71 71,6	186
187	3 49 69	6 539 203	13,6748	5,7185	5,23111	5,34759	587,48	2 74 64,6	187
188	3 53 44	6 644 672	13,7113	5,7287	5,23644	5,31915	590,62	2 77 59,1	188
189	3 57 21	6 751 269	13,7477	5,7388	5,24175	5,29101	593,76	2 80 55,2	189
190	3 61 00	6 859 000	13,7840	5,7489	5,24702	5,26316	596,90	2 83 52,9	190
191	3 64 81	6 967 871	13,8203	5,7590	5,25227	5,23560	600,04	2 86 52,1	191
192	3 68 64	7 077 888	13,8564	5,7690	5,25750	5,20833	603,19	2 89 52,9	192
193	3 72 49	7 189 057	13,8924	5,7790	5,26269	5,18135	606,33	2 92 55,3	193
194	3 76 36	7 301 384	13,9284	5,7890	5,26786	5,15464	609,47	2 95 59,2	194
195	3 80 25	7 414 875	13,9642	5,7989	5,27300	5,12821	612,61	2 98 64,8	195
196	3 84 16	7 529 536	14,0000	5,8088	5,27811	5,10204	615,75	3 01 71,9	196
197	3 88 09	7 645 373	14,0357	5,8186	5,28320	5,07614	618,89	3 04 80,5	197
198	3 92 04	7 762 392	14,0712	5,8285	5,28827	5,05051	622,04	3 07 90,7	198
199	3 96 01	7 880 599	14,1067	5,8383	5,29330	5,02513	625,18	3 11 02,6	199
200	4 00 00	8 000 000	14,1421	5,8480	5,29832	5,00000	628,32	3 14 15,9	200

$n$	$n^2$	$n^3$	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\ln n$	$\frac{1000}{n}$	$\pi n$	$\frac{\pi n^2}{4}$	$n$
200	4 00 00	8 000 000	14,1421	5,8480	5,29832	5,00000	628,32	3 14 15,9	200
201	4 04 01	8 120 601	14,1774	5,8578	5,30330	4,97512	631,46	3 17 30,9	201
202	4 08 04	8 242 408	14,2127	5,8675	5,30827	4,95050	634,60	3 20 47,4	202
203	4 12 09	8 365 427	14,2478	5,8771	5,31321	4,92611	637,74	3 23 65,5	203
204	4 16 16	8 489 664	14,2829	5,8868	5,31812	4,90196	640,88	3 26 85,1	204
205	4 20 25	8 615 125	14,3178	5,8964	5,32301	4,87805	644,03	3 30 06,4	205
206	4 24 36	8 741 816	14,3527	5,9059	5,32788	4,85437	647,17	3 33 29,2	206
207	4 28 49	8 869 743	14,3875	5,9155	5,33272	4,83092	650,31	3 36 53,5	207
208	4 32 64	8 998 912	14,4222	5,9250	5,33754	4,80769	653,45	3 39 79,5	208
209	4 36 81	9 129 329	14,4568	5,9345	5,34233	4,78469	656,59	3 43 07,0	209
210	4 41 00	9 261 000	14,4914	5,9439	5,34711	4,76190	659,73	3 46 36,1	210
211	4 45 21	9 393 931	14,5258	5,9533	5,35186	4,73934	662,88	3 49 66,7	211
212	4 49 44	9 528 128	14,5602	5,9627	5,35659	4,71698	666,02	3 52 98,9	212
213	4 53 69	9 663 597	14,5945	5,9721	5,36129	4,69484	669,16	3 56 32,7	213
214	4 57 96	9 800 344	14,6287	5,9814	5,36598	4,67290	672,30	3 59 68,1	214
215	4 62 25	9 938 375	14,6629	5,9907	5,37064	4,65116	675,44	3 63 05,0	215
216	4 66 56	10 077 696	14,6969	6,0000	5,37528	4,62963	678,58	3 66 43,5	216
217	4 70 89	10 218 313	14,7309	6,0092	5,37990	4,60829	681,73	3 69 83,6	217
218	4 75 24	10 360 232	14,7648	6,0185	5,38450	4,58716	684,87	3 73 25,3	218
219	4 79 61	10 503 459	14,7986	6,0277	5,38907	4,56621	688,01	3 76 68,5	219
220	4 84 00	10 648 000	14,8324	6,0368	5,39363	4,54545	691,15	3 80 13,3	220
221	4 88 41	10 793 861	14,8661	6,0459	5,39816	4,52489	694,29	3 83 59,6	221
222	4 92 84	10 941 048	14,8997	6,0550	5,40268	4,50450	697,43	3 87 07,6	222
223	4 97 29	11 089 567	14,9332	6,0641	5,40717	4,48430	700,58	3 90 57,1	223
224	5 01 76	11 239 424	14,9666	6,0732	5,41165	4,46429	703,72	3 94 08,1	224
225	5 06 25	11 390 625	15,0000	6,0822	5,41610	4,44444	706,86	3 97 60,8	225
226	5 10 76	11 543 176	15,0333	6,0912	5,42053	4,42478	710,00	4 01 15,0	226
227	5 15 29	11 697 083	15,0665	6,1002	5,42495	4,40529	713,14	4 04 70,8	227
228	5 19 84	11 852 352	15,0997	6,1091	5,42935	4,38596	716,28	4 08 28,1	228
229	5 24 41	12 008 989	15,1327	6,1180	5,43372	4,36681	719,42	4 11 87,1	229
230	5 29 00	12 167 000	15,1658	6,1269	5,43808	4,34783	722,57	4 15 47,6	230
231	5 33 61	12 326 391	15,1987	6,1358	5,44242	4,32900	725,71	4 19 09,6	231
232	5 38 24	12 487 168	15,2315	6,1446	5,44674	4,31034	728,85	4 22 73,3	232
233	5 42 89	12 649 337	15,2643	6,1534	5,45104	4,29185	731,99	4 26 38,5	233
234	5 47 56	12 812 904	15,2971	6,1622	5,45532	4,27350	735,13	4 30 05,3	234
235	5 52 25	12 977 875	15,3297	6,1710	5,45959	4,25532	738,27	4 33 73,6	235
236	5 56 96	13 144 256	15,3623	6,1797	5,46383	4,23729	741,42	4 37 43,5	236
237	5 61 69	13 312 053	15,3948	6,1885	5,46806	4,21941	744,56	4 41 15,0	237
238	5 66 44	13 481 272	15,4272	6,1972	5,47227	4,20168	747,70	4 44 88,1	238
239	5 71 21	13 651 919	15,4596	6,2058	5,47646	4,18410	750,84	4 48 62,7	239
240	5 76 00	13 824 000	15,4919	6,2145	5,48064	4,16667	753,98	4 52 38,9	240
241	5 80 81	13 997 521	15,5242	6,2231	5,48480	4,14938	757,12	4 56 16,7	241
242	5 85 64	14 172 488	15,5563	6,2317	5,48894	4,13223	760,27	4 59 96,1	242
243	5 90 49	14 348 907	15,5885	6,2403	5,49306	4,11523	763,41	4 63 77,0	243
244	5 95 36	14 526 784	15,6205	6,2488	5,49717	4,09836	766,55	4 67 59,5	244
245	6 00 25	14 706 125	15,6525	6,2573	5,50126	4,08163	769,69	4 71 43,5	245
246	6 05 16	14 886 936	15,6844	6,2658	5,50533	4,06504	772,83	4 75 29,2	246
247	6 10 09	15 069 223	15,7162	6,2743	5,50939	4,04858	775,97	4 79 16,4	247
248	6 15 04	15 252 992	15,7480	6,2828	5,51343	4,03226	779,11	4 83 05,1	248
249	6 20 01	15 438 249	15,7797	6,2912	5,51745	4,01606	782,26	4 86 95,5	249
250	6 25 00	15 625 000	15,8114	6,2996	5,52146	4,00000	785,40	4 90 87,4	250

$n$	$n^2$	$n^3$	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\ln n$	$\frac{1000}{n}$	$\pi n$	$\frac{\pi n^2}{4}$	$n$
250	6 25 00	15 625 000	15,8114	6,2996	5,52146	4,00000	785,40	4 90 87,4	250
251	6 30 01	15 813 251	15,8430	6,3080	5,52545	3,98406	788,54	4 94 80,9	251
252	6 35 04	16 003 008	15,8745	6,3164	5,52943	3,96825	791,68	4 98 75,9	252
253	6 40 09	16 194 277	15,9060	6,3247	5,53339	3,95257	794,82	5 02 72,6	253
254	6 45 16	16 387 064	15,9374	6,3330	5,53733	3,93701	797,96	5 06 70,7	254
255	6 50 25	16 581 375	15,9687	6,3413	5,54126	3,92157	801,11	5 10 70,5	255
256	6 55 36	16 777 216	16,0000	6,3496	5,54518	3,90625	804,25	5 14 71,9	256
257	6 60 49	16 974 593	16,0312	6,3579	5,54908	3,89105	807,39	5 18 74,8	257
258	6 65 64	17 173 512	16,0624	6,3661	5,55296	3,87597	810,53	5 22 79,2	258
259	6 70 81	17 373 979	16,0935	6,3743	5,55683	3,86100	813,67	5 26 85,3	259
260	6 76 00	17 576 000	16,1245	6,3825	5,56068	3,84615	816,81	5 30 92,9	260
261	6 81 21	17 779 581	16,1555	6,3907	5,56452	3,83142	819,96	5 35 02,1	261
262	6 86 44	17 984 728	16,1864	6,3988	5,56834	3,81679	823,10	5 39 12,9	262
263	6 91 69	18 191 447	16,2173	6,4070	5,57215	3,80228	826,24	5 43 25,2	263
264	6 96 96	18 399 744	16,2481	6,4151	5,57595	3,78788	829,38	5 47 39,1	264
265	7 02 25	18 609 625	16,2788	6,4232	5,57973	3,77358	832,52	5 51 54,6	265
266	7 07 56	18 821 096	16,3095	6,4312	5,58350	3,75940	835,66	5 55 71,6	266
267	7 12 89	19 034 163	16,3401	6,4393	5,58725	3,74532	838,81	5 59 90,2	267
268	7 18 24	19 248 832	16,3707	6,4473	5,59099	3,73134	841,95	5 64 10,4	268
269	7 23 61	19 465 109	16,4012	6,4553	5,59471	3,71747	845,09	5 68 32,2	269
270	7 29 00	19 683 000	16,4317	6,4633	5,59842	3,70370	848,23	5 72 55,5	270
271	7 34 41	19 902 511	16,4621	6,4713	5,60212	3,69004	851,37	5 76 80,4	271
272	7 39 84	20 123 648	16,4924	6,4792	5,60580	3,67647	854,51	5 81 06,9	272
273	7 45 29	20 346 417	16,5227	6,4872	5,60947	3,66300	857,65	5 85 34,9	273
274	7 50 76	20 570 824	16,5529	6,4951	5,61313	3,64964	860,80	5 89 64,6	274
275	7 56 25	20 796 875	16,5831	6,5030	5,61677	3,63636	863,94	5 93 95,7	275
276	7 61 76	21 024 576	16,6132	6,5108	5,62040	3,62319	867,08	5 98 28,5	276
277	7 67 29	21 253 933	16,6433	6,5187	5,62402	3,61011	870,22	6 02 62,8	277
278	7 72 84	21 484 952	16,6733	6,5265	5,62762	3,59712	873,36	6 06 98,7	278
279	7 78 41	21 717 639	16,7033	6,5343	5,63121	3,58423	876,50	6 11 36,2	279
280	7 84 00	21 952 000	16,7332	6,5421	5,63479	3,57143	879,65	6 15 75,2	280
281	7 89 61	22 188 041	16,7631	6,5499	5,63835	3,55872	882,79	6 20 15,8	281
282	7 95 24	22 425 768	16,7929	6,5577	5,64191	3,54610	885,93	6 24 58,0	282
283	8 00 89	22 665 187	16,8226	6,5654	5,64545	3,53357	889,07	6 29 01,8	283
284	8 06 56	22 906 304	16,8523	6,5731	5,64897	3,52113	892,21	6 33 47,1	284
285	8 12 25	23 149 125	16,8819	6,5808	5,65249	3,50877	895,35	6 37 94,0	285
286	8 17 96	23 393 656	16,9115	6,5885	5,65599	3,49650	898,50	6 42 42,4	286
287	8 23 69	23 639 903	16,9411	6,5962	5,65948	3,48432	901,64	6 46 92,5	287
288	8 29 44	23 887 872	16,9706	6,6039	5,66296	3,47222	904,78	6 51 44,1	288
289	8 35 21	24 137 569	17,0000	6,6115	5,66643	3,46021	907,92	6 55 97,2	289
290	8 41 00	24 389 000	17,0294	6,6191	5,66988	3,44828	911,06	6 60 52,0	290
291	8 46 81	24 642 171	17,0587	6,6267	5,67332	3,43643	914,20	6 65 08,3	291
292	8 52 64	24 897 088	17,0880	6,6343	5,67675	3,42466	917,35	6 69 66,2	292
293	8 58 49	25 153 757	17,1172	6,6419	5,68017	3,41297	920,49	6 74 25,6	293
294	8 64 36	25 412 184	17,1464	6,6494	5,68358	3,40136	923,63	6 78 86,7	294
295	8 70 25	25 672 375	17,1756	6,6569	5,68698	3,38983	926,77	6 83 49,3	295
296	8 76 16	25 934 336	17,2047	6,6644	5,69036	3,37838	929,91	6 88 13,4	296
297	8 82 09	26 198 073	17,2337	6,6719	5,69373	3,36700	933,05	6 92 79,2	297
298	8 88 04	26 463 592	17,2627	6,6794	5,69709	3,35570	936,19	6 97 46,5	298
299	8 94 01	26 730 899	17,2916	6,6869	5,70044	3,34448	939,34	7 02 15,4	299
300	9 00 00	27 000 000	17,3205	6,6943	5,70378	3,33333	942,48	7 06 85,8	300

$n$	$n^2$	$n^3$	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\ln n$	$\frac{1000}{n}$	$\pi n$	$\frac{\pi n^2}{4}$	$n$
<b>300</b>	9 00 00	27 000 000	17,3205	6,6943	5,70378	3,33333	942,48	7 06 85,8	<b>300</b>
301	9 06 01	27 270 901	17,3494	6,7018	5,70711	3,32226	945,62	7 11 57,9	301
302	9 12 04	27 543 608	17,3781	6,7092	5,71043	3,31126	948,76	7 16 31,5	302
303	9 18 09	27 818 127	17,4069	6,7166	5,71373	3,30033	951,90	7 21 06,6	303
304	9 24 16	28 094 464	17,4356	6,7240	5,71703	3,28947	955,04	7 25 83,4	304
305	9 30 25	28 372 625	17,4642	6,7313	5,72031	3,27869	958,19	7 30 61,7	305
306	9 36 36	28 652 616	17,4929	6,7387	5,72359	3,26797	961,33	7 35 41,5	306
307	9 42 49	28 934 443	17,5214	6,7460	5,72685	3,25733	964,47	7 40 23,0	307
308	9 48 64	29 218 112	17,5499	6,7533	5,73010	3,24675	967,61	7 45 06,0	308
309	9 54 81	29 503 629	17,5784	6,7606	5,73334	3,23625	970,75	7 49 90,6	309
<b>310</b>	9 61 00	29 791 000	17,6068	6,7679	5,73657	3,22581	973,89	7 54 76,8	<b>310</b>
311	9 67 21	30 080 231	17,6352	6,7752	5,73979	3,21543	977,04	7 59 64,5	311
312	9 73 44	30 371 328	17,6635	6,7824	5,74300	3,20513	980,18	7 64 53,8	312
313	9 79 69	30 664 297	17,6918	6,7897	5,74620	3,19489	983,32	7 69 44,7	313
314	9 85 96	30 959 144	17,7200	6,7969	5,74939	3,18471	986,46	7 74 37,1	314
315	9 92 25	31 255 875	17,7482	6,8041	5,75257	3,17460	989,60	7 79 31,1	315
316	9 98 56	31 554 496	17,7764	6,8113	5,75574	3,16456	992,74	7 84 26,7	316
317	10 04 89	31 855 013	17,8045	6,8185	5,75890	3,15457	995,88	7 89 23,9	317
318	10 11 24	32 157 432	17,8326	6,8256	5,76205	3,14465	999,03	7 94 22,6	318
319	10 17 61	32 461 759	17,8606	6,8328	5,76519	3,13480	1002,2	7 99 22,9	319
<b>320</b>	10 24 00	32 768 000	17,8885	6,8399	5,76832	3,12500	1005,3	8 04 24,8	<b>320</b>
321	10 30 41	33 076 161	17,9165	6,8470	5,77144	3,11526	1008,5	8 09 28,2	321
322	10 36 84	33 386 248	17,9444	6,8541	5,77455	3,10559	1011,6	8 14 33,2	322
323	10 43 29	33 698 267	17,9722	6,8612	5,77765	3,09598	1014,7	8 19 39,8	323
324	10 49 76	34 012 224	18,0000	6,8683	5,78074	3,08642	1017,9	8 24 48,0	324
325	10 56 25	34 328 125	18,0278	6,8753	5,78383	3,07692	1021,0	8 29 57,7	325
326	10 62 76	34 645 976	18,0555	6,8824	5,78690	3,06748	1024,2	8 34 69,0	326
327	10 69 29	34 965 783	18,0831	6,8894	5,78996	3,05810	1027,3	8 39 81,8	327
328	10 75 84	35 287 552	18,1108	6,8964	5,79301	3,04878	1030,4	8 44 96,3	328
329	10 82 41	35 611 289	18,1384	6,9034	5,79606	3,03951	1033,6	8 50 12,3	329
<b>330</b>	10 89 00	35 937 000	18,1659	6,9104	5,79909	3,03030	1036,7	8 55 29,9	<b>330</b>
331	10 95 61	36 264 691	18,1934	6,9174	5,80212	3,02115	1039,9	8 60 49,0	331
332	11 02 24	36 594 368	18,2209	6,9244	5,80513	3,01205	1043,0	8 65 69,7	332
333	11 08 89	36 926 037	18,2483	6,9313	5,80814	3,00300	1046,2	8 70 92,0	333
334	11 15 56	37 259 704	18,2757	6,9382	5,81114	2,99401	1049,3	8 76 15,9	334
335	11 22 25	37 595 375	18,3030	6,9451	5,81413	2,98507	1052,4	8 81 41,3	335
336	11 28 96	37 933 056	18,3303	6,9521	5,81711	2,97619	1055,6	8 86 68,3	336
337	11 35 69	38 272 753	18,3576	6,9589	5,82008	2,96736	1058,7	8 91 96,9	337
338	11 42 44	38 614 472	18,3848	6,9658	5,82305	2,95858	1061,9	8 97 27,0	338
339	11 49 21	38 958 219	18,4120	6,9727	5,82600	2,94985	1065,0	9 02 58,7	339
<b>340</b>	11 56 00	39 304 000	18,4391	6,9795	5,82895	2,94118	1068,1	9 07 92,0	<b>340</b>
341	11 62 81	39 651 821	18,4662	6,9864	5,83188	2,93255	1071,3	9 13 26,9	341
342	11 69 64	40 001 688	18,4932	6,9932	5,83481	2,92398	1074,4	9 18 63,3	342
343	11 76 49	40 353 607	18,5203	7,0000	5,83773	2,91545	1077,6	9 24 01,3	343
344	11 83 36	40 707 584	18,5472	7,0068	5,84064	2,90698	1080,7	9 29 40,9	344
345	11 90 25	41 063 625	18,5742	7,0136	5,84354	2,89855	1083,8	9 34 82,0	345
346	11 97 16	41 421 736	18,6011	7,0203	5,84644	2,89017	1087,0	9 40 24,7	346
347	12 04 09	41 781 923	18,6279	7,0271	5,84932	2,88184	1090,1	9 45 69,0	347
348	12 11 04	42 144 192	18,6548	7,0338	5,85220	2,87356	1093,3	9 51 14,9	348
349	12 18 01	42 508 549	18,6815	7,0406	5,85507	2,86533	1096,4	9 56 62,3	349
<b>350</b>	12 25 00	42 875 000	18,7083	7,0473	5,85793	2,85714	1099,6	9 62 11,3	<b>350</b>

$n$	$n^2$	$n^3$	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\ln n$	$\frac{1000}{n}$	$\pi n$	$\frac{\pi n^2}{4}$	$n$
<b>350</b>	12 25 00	42 875 000	18,7083	7,0473	5,85793	2,85714	1099,6	9 62 11,3	<b>350</b>
351	12 32 01	43 243 551	18,7350	7,0540	5,86079	2,84900	1102,7	9 67 61,8	351
352	12 39 04	43 614 208	18,7617	7,0607	5,86363	2,84091	1105,8	9 73 14,0	352
353	12 46 09	43 986 977	18,7883	7,0674	5,86647	2,83286	1109,0	9 78 67,7	353
354	12 53 16	44 361 864	18,8149	7,0740	5,86930	2,82486	1112,1	9 84 23,0	354
355	12 60 25	44 738 875	18,8414	7,0807	5,87212	2,81690	1115,3	9 89 79,8	355
356	12 67 36	45 118 016	18,8680	7,0873	5,87493	2,80899	1118,4	9 95 38,2	356
357	12 74 49	45 499 293	18,8944	7,0940	5,87774	2,80112	1121,5	10 00 98	357
358	12 81 64	45 882 712	18,9209	7,1006	5,88053	2,79330	1124,7	10 06 60	358
359	12 88 81	46 268 279	18,9473	7,1072	5,88332	2,78552	1127,8	10 12 23	359
<b>360</b>	12 96 00	46 656 000	18,9737	7,1138	5,88610	2,77778	1131,0	10 17 88	<b>360</b>
361	13 03 21	47 045 881	19,0000	7,1204	5,88888	2,77008	1134,1	10 23 54	361
362	13 10 44	47 437 928	19,0263	7,1269	5,89164	2,76243	1137,3	10 29 22	362
363	13 17 69	47 832 147	19,0526	7,1335	5,89440	2,75482	1140,4	10 34 91	363
364	13 24 96	48 228 544	19,0788	7,1400	5,89715	2,74725	1143,5	10 40 62	364
365	13 32 25	48 627 125	19,1050	7,1466	5,89990	2,73973	1146,7	10 46 35	365
366	13 39 56	49 027 896	19,1311	7,1531	5,90263	2,73224	1149,8	10 52 09	366
367	13 46 89	49 430 863	19,1572	7,1596	5,90536	2,72480	1153,0	10 57 85	367
368	13 54 24	49 836 032	19,1833	7,1661	5,90808	2,71739	1156,1	10 63 62	368
369	13 61 61	50 243 409	19,2094	7,1726	5,91080	2,71003	1159,2	10 69 41	369
<b>370</b>	13 69 00	50 653 000	19,2354	7,1791	5,91350	2,70270	1162,4	10 75 21	<b>370</b>
371	13 76 41	51 064 811	19,2614	7,1855	5,91620	2,69542	1165,5	10 81 03	371
372	13 83 84	51 478 848	19,2873	7,1920	5,91889	2,68817	1168,7	10 86 87	372
373	13 91 29	51 895 117	19,3132	7,1984	5,92158	2,68097	1171,8	10 92 72	373
374	13 98 76	52 313 624	19,3391	7,2048	5,92426	2,67380	1175,0	10 98 58	374
375	14 06 25	52 734 375	19,3649	7,2112	5,92693	2,66667	1178,1	11 04 47	375
376	14 13 76	53 157 376	19,3907	7,2177	5,92959	2,65957	1181,2	11 10 36	376
377	14 21 29	53 582 633	19,4165	7,2240	5,93225	2,65252	1184,4	11 16 28	377
378	14 28 84	54 010 152	19,4422	7,2304	5,93489	2,64550	1187,5	11 22 21	378
379	14 36 41	54 439 939	19,4679	7,2368	5,93754	2,63852	1190,7	11 28 15	379
<b>380</b>	14 44 00	54 872 000	19,4936	7,2432	5,94017	2,63158	1193,8	11 34 11	<b>380</b>
381	14 51 61	55 306 341	19,5192	7,2495	5,94280	2,62467	1196,9	11 40 09	381
382	14 59 24	55 742 968	19,5448	7,2558	5,94542	2,61780	1200,1	11 46 08	382
383	14 66 89	56 181 887	19,5704	7,2622	5,94803	2,61097	1203,2	11 52 09	383
384	14 74 56	56 623 104	19,5959	7,2685	5,95064	2,60417	1206,4	11 58 12	384
385	14 82 25	57 066 625	19,6214	7,2748	5,95324	2,59740	1209,5	11 64 16	385
386	14 89 96	57 512 456	19,6469	7,2811	5,95584	2,59067	1212,7	11 70 21	386
387	14 97 69	57 960 603	19,6723	7,2874	5,95842	2,58398	1215,8	11 76 28	387
388	15 05 44	58 411 072	19,6977	7,2936	5,96101	2,57732	1218,9	11 82 37	388
389	15 13 21	58 863 869	19,7231	7,2999	5,96358	2,57069	1222,1	11 88 47	389
<b>390</b>	15 21 00	59 319 000	19,7484	7,3061	5,96615	2,56410	1225,2	11 94 59	<b>390</b>
391	15 28 81	59 776 471	19,7737	7,3124	5,96871	2,55754	1228,4	12 00 72	391
392	15 36 64	60 236 288	19,7990	7,3186	5,97126	2,55102	1231,5	12 06 87	392
393	15 44 49	60 698 457	19,8242	7,3248	5,97381	2,54453	1234,6	12 13 04	393
394	15 52 36	61 162 984	19,8494	7,3310	5,97635	2,53807	1237,8	12 19 22	394
395	15 60 25	61 629 875	19,8746	7,3372	5,97889	2,53165	1240,9	12 25 42	395
396	15 68 16	62 099 136	19,8997	7,3434	5,98141	2,52525	1244,1	12 31 63	396
397	15 76 09	62 570 773	19,9249	7,3496	5,98394	2,51889	1247,2	12 37 86	397
398	15 84 04	63 044 792	19,9499	7,3558	5,98645	2,51256	1250,4	12 44 10	398
399	15 92 01	63 521 199	19,9750	7,3619	5,98896	2,50627	1253,5	12 50 36	399
<b>400</b>	16 00 00	64 000 000	20,0000	7,3681	5,99146	2,50000	1256,6	12 56 64	<b>400</b>

$n$	$n^2$	$n^3$	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\ln n$	$\frac{1000}{n}$	$\pi n$	$\frac{\pi n^2}{4}$	$n$
400	16 00 00	64 000 000	20,0000	7,3681	5,99146	2,50000	1256,6	12 56 64	400
401	16 08 01	64 481 201	20,0250	7,3742	5,99396	2,49377	1259,8	12 62 93	401
402	16 16 04	64 964 808	20,0499	7,3803	5,99645	2,48756	1262,9	12 69 23	402
403	16 24 09	65 450 827	20,0749	7,3864	5,99894	2,48139	1266,1	12 75 56	403
404	16 32 16	65 939 264	20,0998	7,3925	6,00141	2,47525	1269,2	12 81 90	404
405	16 40 25	66 430 125	20,1246	7,3986	6,00389	2,46914	1272,3	12 88 25	405
406	16 48 36	66 923 416	20,1494	7,4047	6,00635	2,46305	1275,5	12 94 62	406
407	16 56 49	67 419 143	20,1742	7,4108	6,00881	2,45700	1278,6	13 01 00	407
408	16 64 64	67 917 312	20,1990	7,4169	6,01127	2,45098	1281,8	13 07 41	408
409	16 72 81	68 417 929	20,2237	7,4229	6,01372	2,44499	1284,9	13 13 82	409
410	16 81 00	68 921 000	20,2485	7,4290	6,01616	2,43902	1288,1	13 20 25	410
411	16 89 21	69 426 531	20,2731	7,4350	6,01859	2,43309	1291,2	13 26 70	411
412	16 97 44	69 934 528	20,2978	7,4410	6,02102	2,42718	1294,3	13 33 17	412
413	17 05 69	70 444 997	20,3224	7,4470	6,02345	2,42131	1297,5	13 39 65	413
414	17 14 96	70 957 944	20,3470	7,4530	6,02587	2,41546	1300,6	13 46 14	414
415	17 22 25	71 473 375	20,3715	7,4590	6,02828	2,40964	1303,8	13 52 65	415
416	17 30 56	71 991 296	20,3961	7,4650	6,03069	2,40385	1306,9	13 59 18	416
417	17 38 89	72 511 713	20,4206	7,4710	6,03309	2,39808	1310,0	13 65 72	417
418	17 47 24	73 034 632	20,4450	7,4770	6,03548	2,39234	1313,2	13 72 28	418
419	17 55 61	73 560 059	20,4695	7,4829	6,03787	2,38663	1316,3	13 78 85	419
420	17 64 00	74 088 000	20,4939	7,4889	6,04025	2,38095	1319,5	13 85 44	420
421	17 72 41	74 618 461	20,5183	7,4948	6,04263	2,37530	1322,6	13 92 05	421
422	17 80 84	75 151 448	20,5426	7,5007	6,04501	2,36967	1325,8	13 98 67	422
423	17 89 29	75 686 967	20,5670	7,5066	6,04737	2,36407	1328,9	14 05 31	423
424	17 97 76	76 225 024	20,5913	7,5126	6,04973	2,35849	1332,0	14 11 96	424
425	18 06 25	76 765 625	20,6155	7,5185	6,05209	2,35294	1335,2	14 18 63	425
426	18 14 76	77 308 776	20,6398	7,5244	6,05444	2,34742	1338,3	14 25 31	426
427	18 23 29	77 854 483	20,6640	7,5302	6,05678	2,34192	1341,5	14 32 01	427
428	18 31 84	78 402 752	20,6882	7,5361	6,05912	2,33645	1344,6	14 38 72	428
429	18 40 41	78 953 589	20,7123	7,5420	6,06146	2,33100	1347,7	14 45 45	429
430	18 49 00	79 507 000	20,7364	7,5478	6,06379	2,32558	1350,9	14 52 20	430
431	18 57 61	80 062 991	20,7605	7,5537	6,06611	2,32019	1354,0	14 58 96	431
432	18 66 24	80 621 568	20,7846	7,5595	6,06843	2,31481	1357,2	14 65 74	432
433	18 74 89	81 182 737	20,8087	7,5654	6,07074	2,30947	1360,3	14 72 54	433
434	18 83 56	81 746 504	20,8327	7,5712	6,07304	2,30415	1363,5	14 79 34	434
435	18 92 25	82 312 875	20,8567	7,5770	6,07535	2,29885	1366,6	14 86 17	435
436	19 00 96	82 881 856	20,8806	7,5828	6,07764	2,29358	1369,7	14 93 01	436
437	19 09 69	83 453 453	20,9045	7,5886	6,07993	2,28833	1372,9	14 99 87	437
438	19 18 44	84 027 672	20,9284	7,5944	6,08222	2,28311	1376,0	15 06 74	438
439	19 27 21	84 604 519	20,9523	7,6001	6,08450	2,27790	1379,2	15 13 63	439
440	19 36 00	85 184 000	20,9762	7,6059	6,08677	2,27273	1382,3	15 20 53	440
441	19 44 81	85 766 121	21,0000	7,6117	6,08904	2,26757	1385,4	15 27 45	441
442	19 53 64	86 350 888	21,0238	7,6174	6,09131	2,26244	1388,6	15 34 39	442
443	19 62 49	86 938 307	21,0476	7,6232	6,09357	2,25734	1391,7	15 41 34	443
444	19 71 36	87 528 384	21,0713	7,6289	6,09582	2,25225	1394,9	15 48 30	444
445	19 80 25	88 121 125	21,0950	7,6346	6,09807	2,24719	1398,0	15 55 28	445
446	19 89 16	88 716 536	21,1187	7,6403	6,10032	2,24215	1401,2	15 62 28	446
447	19 98 09	89 314 623	21,1424	7,6460	6,10256	2,23714	1404,3	15 69 30	447
448	20 07 04	89 915 392	21,1660	7,6517	6,10479	2,23214	1407,4	15 76 33	448
449	20 16 01	90 518 849	21,1896	7,6574	6,10702	2,22717	1410,6	15 83 37	449
450	20 25 00	91 125 000	21,2132	7,6631	6,10925	2,22222	1413,7	15 90 43	450

$n$	$n^2$	$\sqrt[3]{n^3}$	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\ln n$	$\frac{1000}{n}$	$\pi n$	$\frac{\pi n^2}{4}$	$n$
450	20 25 00	91 125 000	21,2132	7,6631	6,10925	2,22222	1413,7	15 90 43	450
451	20 34 01	91 733 851	21,2368	7,6688	6,11147	2,21729	1416,9	15 97 51	451
452	20 43 04	92 345 408	21,2603	7,6744	6,11368	2,21239	1420,0	16 04 60	452
453	20 52 09	92 959 677	21,2838	7,6801	6,11589	2,20751	1423,1	16 11 71	453
454	20 61 16	93 576 664	21,3073	7,6857	6,11810	2,20264	1426,3	16 18 83	454
455	20 70 25	94 196 375	21,3307	7,6914	6,12030	2,19780	1429,4	16 25 97	455
456	20 79 36	94 818 816	21,3542	7,6970	6,12249	2,19298	1432,6	16 33 13	456
457	20 88 49	95 443 993	21,3776	7,7026	6,12468	2,18818	1435,7	16 40 30	457
458	20 97 64	96 071 912	21,4009	7,7082	6,12687	2,18341	1438,8	16 47 48	458
459	21 06 81	96 702 579	21,4243	7,7138	6,12905	2,17865	1442,0	16 54 68	459
460	21 16 00	97 336 000	21,4476	7,7194	6,13123	2,17391	1445,1	16 61 90	460
461	21 25 21	97 972 181	21,4709	7,7250	6,13340	2,16920	1448,3	16 69 14	461
462	21 34 44	98 611 128	21,4942	7,7306	6,13556	2,16450	1451,4	16 76 39	462
463	21 43 69	99 252 847	21,5174	7,7362	6,13773	2,15983	1454,6	16 83 65	463
464	21 52 96	99 897 344	21,5407	7,7418	6,13988	2,15517	1457,7	16 90 93	464
465	21 62 25	100 544 625	21,5639	7,7473	6,14204	2,15054	1460,8	16 98 23	465
466	21 71 56	101 194 696	21,5870	7,7529	6,14419	2,14592	1464,0	17 05 54	466
467	21 80 89	101 847 563	21,6102	7,7584	6,14633	2,14133	1467,1	17 12 87	467
468	21 90 24	102 503 232	21,6333	7,7639	6,14847	2,13675	1470,3	17 20 21	468
469	21 99 61	103 161 709	21,6564	7,7695	6,15060	2,13220	1473,4	17 27 57	469
470	22 09 00	103 823 000	21,6795	7,7750	6,15273	2,12766	1476,5	17 34 94	470
471	22 18 41	104 487 111	21,7025	7,7805	6,15486	2,12314	1479,7	17 42 34	471
472	22 27 84	105 154 048	21,7256	7,7860	6,15698	2,11864	1482,8	17 49 74	472
473	22 37 29	105 823 817	21,7486	7,7915	6,15910	2,11416	1486,0	17 57 16	473
474	22 46 76	106 496 424	21,7715	7,7970	6,16121	2,10970	1489,1	17 64 60	474
475	22 56 25	107 171 875	21,7945	7,8025	6,16331	2,10526	1492,3	17 72 05	475
476	22 65 76	107 850 176	21,8174	7,8079	6,16542	2,10084	1495,4	17 79 52	476
477	22 75 29	108 531 333	21,8403	7,8134	6,16752	2,09644	1498,5	17 87 01	477
478	22 84 84	109 215 352	21,8632	7,8188	6,16961	2,09205	1501,7	17 94 51	478
479	22 94 41	109 902 239	21,8861	7,8243	6,17170	2,08768	1504,8	18 02 03	479
480	23 04 00	110 592 000	21,9089	7,8297	6,17379	2,08333	1508,0	18 09 56	480
481	23 13 61	111 284 641	21,9317	7,8352	6,17587	2,07900	1511,1	18 17 11	481
482	23 23 24	111 980 168	21,9545	7,8406	6,17794	2,07469	1514,2	18 24 67	482
483	23 32 89	112 678 587	21,9773	7,8460	6,18002	2,07039	1517,4	18 32 25	483
484	23 42 56	113 379 904	22,0000	7,8514	6,18208	2,06612	1520,5	18 39 84	484
485	23 52 25	114 084 125	22,0227	7,8568	6,18415	2,06186	1523,7	18 47 45	485
486	23 61 96	114 791 256	22,0454	7,8622	6,18621	2,05761	1526,8	18 55 08	486
487	23 71 69	115 501 303	22,0681	7,8676	6,18826	2,05339	1530,0	18 62 72	487
488	23 81 44	116 214 272	22,0907	7,8730	6,19032	2,04918	1533,1	18 70 38	488
489	23 91 21	116 930 169	22,1133	7,8784	6,19236	2,04499	1536,2	18 78 05	489
490	24 01 00	117 649 000	22,1359	7,8837	6,19441	2,04082	1539,4	18 85 74	490
491	24 10 81	118 370 771	22,1585	7,8891	6,19644	2,03666	1542,5	18 93 45	491
492	24 20 64	119 095 488	22,1811	7,8944	6,19848	2,03252	1545,7	19 01 17	492
493	24 30 49	119 823 157	22,2036	7,8998	6,20051	2,02840	1548,8	19 08 90	493
494	24 40 36	120 553 784	22,2261	7,9051	6,20254	2,02429	1551,9	19 16 65	494
495	24 50 25	121 287 375	22,2486	7,9105	6,20456	2,02020	1555,1	19 24 42	495
496	24 60 16	122 023 936	22,2711	7,9158	6,20658	2,01613	1558,2	19 32 21	496
497	24 70 09	122 763 473	22,2935	7,9211	6,20859	2,01207	1561,4	19 40 00	497
498	24 80 04	123 505 992	22,3159	7,9264	6,21060	2,00803	1564,5	19 47 82	498
499	24 90 01	124 251 499	22,3383	7,9317	6,21261	2,00401	1567,7	19 55 65	499
500	25 00 00	125 000 000	22,3607	7,9370	6,21461	2,00000	1570,8	19 63 50	500

$n$	$n^2$	$n^3$	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\ln n$	$\frac{1000}{n}$	$\pi n$	$\frac{\pi n^2}{4}$	$n$
<b>500</b>	25 00 00	125 000 000	22,3607	7,9370	6,21461	2,00000	1570,8	19 63 50	<b>500</b>
501	25 10 01	125 751 501	22,3830	7,9423	6,21661	1,99601	1573,9	19 71 36	501
502	25 20 04	126 506 008	22,4054	7,9476	6,21860	1,99203	1577,1	19 79 23	502
503	25 30 09	127 263 527	22,4277	7,9528	6,22059	1,98807	1580,2	19 87 13	503
504	25 40 16	128 024 064	22,4499	7,9581	6,22258	1,98413	1583,4	19 95 04	504
505	25 50 25	128 787 625	22,4722	7,9634	6,22456	1,98020	1586,5	20 02 96	505
506	25 60 36	129 554 216	22,4944	7,9686	6,22654	1,97628	1589,6	20 10 90	506
507	25 70 49	130 323 843	22,5167	7,9739	6,22851	1,97239	1592,8	20 18 86	507
508	25 80 64	131 096 512	22,5389	7,9791	6,23048	1,96850	1595,9	20 26 83	508
509	25 90 81	131 872 229	22,5610	7,9843	6,23245	1,96464	1599,1	20 34 82	509
<b>510</b>	26 01 00	132 651 000	22,5832	7,9896	6,23441	1,96078	1602,2	20 42 82	<b>510</b>
511	26 11 21	133 432 831	22,6053	7,9948	6,23637	1,95695	1605,4	20 50 84	511
512	26 21 44	134 217 728	22,6274	8,0000	6,23832	1,95312	1608,5	20 58 87	512
513	26 31 69	135 005 697	22,6495	8,0052	6,24028	1,94932	1611,6	20 66 92	513
514	26 41 96	135 796 744	22,6716	8,0104	6,24222	1,94553	1614,8	20 74 99	514
515	26 52 25	136 590 875	22,6936	8,0156	6,24417	1,94175	1617,9	20 83 07	515
516	26 62 56	137 388 096	22,7156	8,0208	6,24611	1,93798	1621,1	20 91 17	516
517	26 72 89	138 188 413	22,7376	8,0260	6,24804	1,93424	1624,2	20 99 28	517
518	26 83 24	138 991 832	22,7596	8,0311	6,24998	1,93050	1627,3	21 07 41	518
519	26 93 61	139 798 359	22,7816	8,0363	6,25190	1,92678	1630,5	21 15 56	519
<b>520</b>	27 04 00	140 608 000	22,8035	8,0415	6,25383	1,92308	1633,6	21 23 72	<b>520</b>
521	27 14 41	141 420 761	22,8254	8,0466	6,25575	1,91939	1636,8	21 31 89	521
522	27 24 84	142 236 632	22,8473	8,0517	6,25767	1,91571	1639,9	21 40 08	522
523	27 35 29	143 055 667	22,8692	8,0569	6,25958	1,91205	1643,1	21 48 29	523
524	27 45 76	143 877 824	22,8910	8,0620	6,26149	1,90840	1646,2	21 56 51	524
525	27 56 25	144 703 125	22,9129	8,0671	6,26340	1,90476	1649,3	21 64 75	525
526	27 66 76	145 531 576	22,9347	8,0723	6,26530	1,90114	1652,5	21 73 01	526
527	27 77 29	146 363 183	22,9565	8,0774	6,26720	1,89753	1655,6	21 81 28	527
528	27 87 84	147 197 952	22,9783	8,0825	6,26910	1,89394	1658,8	21 89 56	528
529	27 98 41	148 035 889	23,0000	8,0876	6,27099	1,89036	1661,9	21 97 87	529
<b>530</b>	28 09 00	148 877 000	23,0217	8,0927	6,27288	1,88679	1665,0	22 06 18	<b>530</b>
531	28 19 61	149 721 291	23,0434	8,0978	6,27476	1,88324	1668,2	22 14 52	531
532	28 30 24	150 568 768	23,0651	8,1028	6,27664	1,87970	1671,3	22 22 87	532
533	28 40 89	151 419 437	23,0868	8,1079	6,27852	1,87617	1674,5	22 31 23	533
534	28 51 56	152 273 304	23,1084	8,1130	6,28040	1,87266	1677,6	22 39 61	534
535	28 62 25	153 130 375	23,1301	8,1180	6,28227	1,86916	1680,8	22 48 01	535
536	28 72 96	153 990 656	23,1517	8,1231	6,28413	1,86567	1683,9	22 56 42	536
537	28 83 69	154 854 153	23,1733	8,1281	6,28600	1,86220	1687,0	22 64 84	537
538	28 94 44	155 720 872	23,1948	8,1332	6,28786	1,85874	1690,2	22 73 29	538
539	29 05 21	156 590 819	23,2164	8,1382	6,28972	1,85529	1693,3	22 81 75	539
<b>540</b>	29 16 00	157 464 000	23,2379	8,1433	6,29157	1,85185	1696,5	22 90 22	<b>540</b>
541	29 26 81	158 340 421	23,2594	8,1483	6,29342	1,84843	1699,6	22 98 71	541
542	29 37 64	159 220 088	23,2809	8,1533	6,29527	1,84502	1702,7	23 07 22	542
543	29 48 49	160 103 007	23,3024	8,1583	6,29711	1,84162	1705,9	23 15 74	543
544	29 59 36	160 989 184	23,3238	8,1633	6,29895	1,83824	1709,0	23 24 28	544
545	29 70 25	161 878 625	23,3452	8,1683	6,30079	1,83486	1712,2	23 32 83	545
546	29 81 16	162 771 336	23,3666	8,1733	6,30262	1,83150	1715,3	23 41 40	546
547	29 92 09	163 667 323	23,3880	8,1783	6,30445	1,82815	1718,5	23 49 98	547
548	30 03 04	164 566 592	23,4094	8,1833	6,30628	1,82482	1721,6	23 58 58	548
549	30 14 01	165 469 149	23,4307	8,1882	6,30810	1,82149	1724,7	23 67 20	549
<b>550</b>	30 25 00	166 375 000	23,4521	8,1932	6,30992	1,81818	1727,9	23 75 83	<b>550</b>

$n$	$n^2$	$n^3$	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\ln n$	$\frac{1000}{n}$	$\pi n$	$\frac{\pi n^2}{4}$	$n$
<b>550</b>	30 25 00	166 375 000	23,4521	8,1932	6,30992	1,81818	1727,9	23 75 83	<b>550</b>
551	30 36 01	167 284 151	23,4734	8,1982	6,31173	1,81848	1731,0	23 84 48	551
552	30 47 04	168 196 608	23,4947	8,2031	6,31355	1,81159	1734,2	23 93 14	552
553	30 58 09	169 112 377	23,5160	8,2081	6,31536	1,80832	1737,3	24 01 82	553
554	30 69 16	170 031 464	23,5372	8,2130	6,31716	1,80505	1740,4	24 10 51	554
555	30 80 25	170 953 875	23,5584	8,2180	6,31897	1,80180	1743,6	24 19 22	555
556	30 91 36	171 879 616	23,5797	8,2229	6,32077	1,79856	1746,7	24 27 95	556
557	31 02 49	172 808 693	23,6008	8,2278	6,32257	1,79533	1749,9	24 36 69	557
558	31 13 64	173 741 112	23,6220	8,2327	6,32436	1,79211	1753,0	24 45 45	558
559	31 24 81	174 676 879	23,6432	8,2377	6,32615	1,78891	1756,2	24 54 22	559
<b>560</b>	31 36 00	175 616 000	23,6643	8,2426	6,32794	1,78571	1759,3	24 63 01	<b>560</b>
561	31 47 21	176 558 481	23,6854	8,2475	6,32972	1,78253	1762,4	24 71 81	561
562	31 58 44	177 504 328	23,7065	8,2524	6,33150	1,77936	1765,6	24 80 63	562
563	31 69 69	178 453 547	23,7276	8,2573	6,33328	1,77620	1768,7	24 89 47	563
564	31 80 96	179 406 144	23,7487	8,2621	6,33505	1,77305	1771,9	24 98 32	564
565	31 92 25	180 362 125	23,7697	8,2670	6,33683	1,76991	1775,0	25 07 19	565
566	32 03 56	181 321 496	23,7908	8,2719	6,33859	1,76678	1778,1	25 16 07	566
567	32 14 89	182 284 263	23,8118	8,2768	6,34036	1,76367	1781,3	25 24 97	567
568	32 26 24	183 250 432	23,8328	8,2816	6,34212	1,76056	1784,4	25 33 88	568
569	32 37 61	184 220 009	23,8537	8,2865	6,34388	1,75747	1787,6	25 42 81	569
<b>570</b>	32 49 00	185 193 000	23,8747	8,2913	6,34564	1,75439	1790,7	25 51 76	<b>570</b>
571	32 60 41	186 169 411	23,8956	8,2962	6,34739	1,75131	1793,8	25 60 72	571
572	32 71 84	187 149 248	23,9165	8,3010	6,34914	1,74825	1797,0	25 69 70	572
573	32 83 29	188 132 517	23,9374	8,3059	6,35089	1,74520	1800,1	25 78 69	573
574	32 94 76	189 119 224	23,9583	8,3107	6,35263	1,74216	1803,3	25 87 70	574
575	33 06 25	190 109 375	23,9792	8,3155	6,35437	1,73913	1806,4	25 96 72	575
576	33 17 76	191 102 976	24,0000	8,3203	6,35611	1,73611	1809,6	26 05 76	576
577	33 29 29	192 100 033	24,0208	8,3251	6,35784	1,73310	1812,7	26 14 82	577
578	33 40 84	193 100 552	24,0416	8,3300	6,35957	1,73010	1815,8	26 23 89	578
579	33 52 41	194 104 539	24,0624	8,3348	6,36130	1,72712	1819,0	26 32 98	579
<b>580</b>	33 64 00	195 112 000	24,0832	8,3396	6,36303	1,72414	1822,1	26 42 08	<b>580</b>
581	33 75 61	196 122 941	24,1039	8,3443	6,36475	1,72117	1825,3	26 51 20	581
582	33 87 24	197 137 368	24,1247	8,3491	6,36647	1,71821	1828,4	26 60 33	582
583	33 98 89	198 155 287	24,1454	8,3539	6,36819	1,71527	1831,6	26 69 48	583
584	34 10 56	199 176 704	24,1661	8,3587	6,36990	1,71233	1834,7	26 78 65	584
585	34 22 25	200 201 625	24,1868	8,3634	6,37161	1,70940	1837,8	26 87 83	585
586	34 33 96	201 230 056	24,2074	8,3682	6,37332	1,70648	1841,0	26 97 03	586
587	34 45 69	202 262 003	24,2281	8,3730	6,37502	1,70358	1844,1	27 06 24	587
588	34 57 44	203 297 472	24,2487	8,3777	6,37673	1,70068	1847,3	27 15 47	588
589	34 69 21	204 336 469	24,2693	8,3825	6,37843	1,69779	1850,4	27 24 71	589
<b>590</b>	34 81 00	205 379 000	24,2899	8,3872	6,38012	1,69492	1853,5	27 33 97	<b>590</b>
591	34 92 81	206 425 071	24,3105	8,3919	6,38182	1,69205	1856,7	27 43 25	591
592	35 04 64	207 474 688	24,3311	8,3967	6,38351	1,68919	1859,9	27 52 54	592
593	35 16 49	208 527 857	24,3516	8,4014	6,38519	1,68634	1863,0	27 61 84	593
594	35 28 36	209 584 584	24,3721	8,4061	6,38688	1,68350	1866,1	27 71 17	594
595	35 40 25	210 644 875	24,3926	8,4108	6,38856	1,68067	1869,2	27 80 51	595
596	35 52 16	211 708 736	24,4131	8,4155	6,39024	1,67785	1872,4	27 89 86	596
597	35 64 09	212 776 173	24,4336	8,4202	6,39192	1,67504	1875,5	27 99 23	597
598	35 76 04	213 847 192	24,4540	8,4249	6,39359	1,67224	1878,7	28 08 62	598
599	35 88 01	214 921 799	24,4745	8,4296	6,39526	1,66945	1881,8	28 18 02	599
<b>600</b>	36 00 00	216 000 000	24,4949	8,4343	6,39693	1,66667	1885,0	28 27 43	<b>600</b>

$n$	$n^2$	$n^3$	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\ln n$	$\frac{1000}{n}$	$\pi n$	$\frac{\pi n^2}{4}$	$n$
600	36 00 00	216 000 000	24,4949	8,4343	6,39693	1,66667	1885,0	28 27 43	600
601	36 12 01	217 081 801	24,5153	8,4390	6,39859	1,66389	1888,1	28 36 87	601
602	36 24 04	218 167 208	24,5357	8,4437	6,40026	1,66113	1891,2	28 46 31	602
603	36 36 09	219 256 227	24,5561	8,4484	6,40192	1,65837	1894,4	28 55 78	603
604	36 48 16	220 348 864	24,5764	8,4530	6,40357	1,65563	1897,5	28 65 26	604
605	36 60 25	221 445 125	24,5967	8,4577	6,40523	1,65289	1900,7	28 74 75	605
606	36 72 36	222 545 016	24,6171	8,4623	6,40688	1,65017	1903,8	28 84 26	606
607	36 84 49	223 648 543	24,6374	8,4670	6,40853	1,64745	1906,9	28 93 79	607
608	36 96 64	224 755 712	24,6577	8,4716	6,41017	1,64474	1910,1	29 03 33	608
609	37 08 81	225 866 529	24,6779	8,4763	6,41182	1,64204	1913,2	29 12 89	609
610	37 21 00	226 981 000	24,6982	8,4809	6,41346	1,63934	1916,4	29 22 47	610
611	37 33 21	228 099 131	24,7184	8,4856	6,41510	1,63666	1919,5	29 32 06	611
612	37 45 44	229 220 928	24,7386	8,4902	6,41673	1,63399	1922,7	29 41 66	612
613	37 57 69	230 346 397	24,7588	8,4948	6,41836	1,63132	1925,8	29 51 28	613
614	37 69 96	231 475 544	24,7790	8,4994	6,41999	1,62866	1928,9	29 60 92	614
615	37 82 25	232 608 375	24,7992	8,5040	6,42162	1,62602	1932,1	29 70 57	615
616	37 94 56	233 744 896	24,8193	8,5086	6,42325	1,62338	1935,2	29 80 24	616
617	38 06 89	234 885 113	24,8395	8,5132	6,42487	1,62075	1938,4	29 89 92	617
618	38 19 24	236 029 032	24,8596	8,5178	6,42649	1,61812	1941,5	29 99 62	618
619	38 31 61	237 176 659	24,8797	8,5224	6,42811	1,61551	1944,6	30 09 34	619
620	38 44 00	238 328 000	24,8998	8,5270	6,42972	1,61290	1947,8	30 19 07	620
621	38 56 41	239 483 061	24,9199	8,5316	6,43133	1,61031	1950,9	30 28 82	621
622	38 68 84	240 641 848	24,9399	8,5362	6,43294	1,60772	1954,1	30 38 58	622
623	38 81 29	241 804 367	24,9600	8,5408	6,43455	1,60514	1957,2	30 48 36	623
624	38 93 76	242 970 624	24,9800	8,5453	6,43615	1,60256	1960,4	30 58 15	624
625	39 06 25	244 140 625	25,0000	8,5499	6,43775	1,60000	1963,5	30 67 96	625
626	39 18 76	245 314 376	25,0200	8,5544	6,43935	1,59744	1966,6	30 77 79	626
627	39 31 29	246 491 883	25,0400	8,5590	6,44095	1,59490	1969,8	30 87 63	627
628	39 43 84	247 673 152	25,0599	8,5635	6,44254	1,59236	1972,9	30 97 48	628
629	39 56 41	248 858 189	25,0799	8,5681	6,44413	1,58983	1976,1	31 07 36	629
630	39 69 00	250 047 000	25,0998	8,5726	6,44572	1,58730	1979,2	31 17 25	630
631	39 81 61	251 239 591	25,1197	8,5772	6,44731	1,58479	1982,3	31 27 15	631
632	39 94 24	252 435 968	25,1396	8,5817	6,44889	1,58228	1985,5	31 37 07	632
633	40 06 89	253 636 137	25,1595	8,5862	6,45047	1,57978	1988,6	31 47 00	633
634	40 19 56	254 840 104	25,1794	8,5907	6,45205	1,57729	1991,8	31 56 96	634
635	40 32 25	256 048 875	25,1992	8,5952	6,45362	1,57480	1994,9	31 66 92	635
636	40 44 96	257 259 456	25,2190	8,5997	6,45520	1,57233	1998,1	31 76 90	636
637	40 57 69	258 474 853	25,2389	8,6043	6,45677	1,56986	2001,2	31 86 90	637
638	40 70 44	259 694 072	25,2587	8,6088	6,45834	1,56740	2004,3	31 96 92	638
639	40 83 21	260 917 119	25,2784	8,6132	6,45990	1,56495	2007,5	32 06 95	639
640	40 96 00	262 144 000	25,2982	8,6177	6,46147	1,56250	2010,6	32 16 99	640
641	41 08 81	263 374 721	25,3180	8,6222	6,46303	1,56006	2013,8	32 27 05	641
642	41 21 64	264 609 288	25,3377	8,6267	6,46459	1,55763	2016,9	32 37 13	642
643	41 34 49	265 847 707	25,3574	8,6312	6,46614	1,55521	2020,0	32 47 22	643
644	41 47 36	267 089 984	25,3772	8,6357	6,46770	1,55280	2023,2	32 57 33	644
645	41 60 25	268 336 125	25,3969	8,6401	6,46925	1,55039	2026,3	32 67 45	645
646	41 73 16	269 586 136	25,4165	8,6446	6,47080	1,54799	2029,5	32 77 59	646
647	41 86 09	270 840 023	25,4362	8,6490	6,47235	1,54560	2032,6	32 87 75	647
648	41 99 04	272 097 792	25,4558	8,6535	6,47389	1,54321	2035,8	32 97 92	648
649	42 12 01	273 359 449	25,4755	8,6579	6,47543	1,54083	2038,9	33 08 10	649
650	42 25 00	274 625 000	25,4951	8,6624	6,47697	1,53846	2042,0	33 18 31	650

$n$	$n^2$	$n^3$	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\ln n$	$\frac{1000}{n}$	$\pi n$	$\frac{\pi n^2}{4}$	$n$
650	42 25 00	274 625 000	25,4951	8,6624	6,47697	1,53846	2042,0	33 18 31	650
651	42 38 01	275 894 451	25,5147	8,6668	6,47851	1,53610	2045,2	33 28 53	651
652	42 51 04	277 167 808	25,5343	8,6713	6,48004	1,53374	2048,3	33 38 76	652
653	42 64 09	278 445 077	25,5539	8,6757	6,48158	1,53139	2051,5	33 49 01	653
654	42 77 16	279 726 264	25,5734	8,6801	6,48311	1,52905	2054,6	33 59 27	654
655	42 90 25	281 011 375	25,5930	8,6845	6,48464	1,52672	2057,7	33 69 55	655
656	43 03 36	282 300 416	25,6125	8,6890	6,48616	1,52439	2060,9	33 79 85	656
657	43 16 49	283 593 393	25,6320	8,6934	6,48768	1,52207	2064,0	33 90 16	657
658	43 29 64	284 890 312	25,6515	8,6978	6,48920	1,51976	2067,2	34 00 49	658
659	43 42 81	286 191 179	25,6710	8,7022	6,49072	1,51745	2070,3	34 10 83	659
660	43 56 00	287 496 000	25,6905	8,7066	6,49224	1,51515	2073,5	34 21 19	660
661	43 69 21	288 804 781	25,7099	8,7110	6,49375	1,51286	2076,6	34 31 57	661
662	43 82 44	290 117 528	25,7294	8,7154	6,49527	1,51057	2079,7	34 41 96	662
663	43 95 69	291 434 247	25,7488	8,7198	6,49677	1,50830	2082,9	34 52 37	663
664	44 08 96	292 754 944	25,7682	8,7241	6,49828	1,50602	2086,0	34 62 79	664
665	44 22 25	294 079 625	25,7876	8,7285	6,49979	1,50376	2089,2	34 73 23	665
666	44 35 56	295 408 296	25,8070	8,7329	6,50129	1,50150	2092,3	34 83 68	666
667	44 48 89	296 740 963	25,8263	8,7373	6,50279	1,49925	2095,4	34 94 15	667
668	44 62 24	298 077 632	25,8457	8,7416	6,50429	1,49701	2098,6	35 04 64	668
669	44 75 61	299 418 309	25,8650	8,7460	6,50578	1,49477	2101,7	35 15 14	669
670	44 89 00	300 763 000	25,8844	8,7503	6,50728	1,49254	2104,9	35 25 65	670
671	45 02 41	302 111 711	25,9037	8,7547	6,50877	1,49031	2108,0	35 36 18	671
672	45 15 84	303 464 448	25,9230	8,7590	6,51026	1,48810	2111,2	35 46 73	672
673	45 29 29	304 821 217	25,9422	8,7634	6,51175	1,48588	2114,3	35 57 30	673
674	45 42 76	306 182 024	25,9615	8,7677	6,51323	1,48368	2117,4	35 67 88	674
675	45 56 25	307 546 875	25,9808	8,7721	6,51471	1,48148	2120,6	35 78 47	675
676	45 69 76	308 915 776	26,0000	8,7764	6,51619	1,47929	2123,7	35 89 08	676
677	45 83 29	310 288 733	26,0192	8,7807	6,51767	1,47710	2126,9	35 99 71	677
678	45 96 84	311 665 752	26,0384	8,7850	6,51915	1,47493	2130,0	36 10 35	678
679	46 10 41	313 046 839	26,0576	8,7893	6,52062	1,47275	2133,1	36 21 01	679
680	46 24 00	314 432 000	26,0768	8,7937	6,52209	1,47059	2136,3	36 31 68	680
681	46 37 61	315 821 241	26,0960	8,7980	6,52356	1,46843	2139,4	36 42 37	681
682	46 51 24	317 214 568	26,1151	8,8023	6,52503	1,46628	2142,6	36 53 08	682
683	46 64 89	318 611 987	26,1343	8,8066	6,52649	1,46413	2145,7	36 63 80	683
684	46 78 56	320 013 504	26,1534	8,8109	6,52796	1,46199	2148,8	36 74 54	684
685	46 92 25	321 419 125	26,1725	8,8152	6,52942	1,45985	2152,0	36 85 28	685
686	47 05 96	322 828 856	26,1916	8,8194	6,53088	1,45773	2155,1	36 96 05	686
687	47 19 69	324 242 703	26,2107	8,8237	6,53233	1,45560	2158,3	37 06 84	687
688	47 33 44	325 660 672	26,2298	8,8280	6,53379	1,45349	2161,4	37 17 64	688
689	47 47 21	327 082 769	26,2488	8,8323	6,53524	1,45138	2164,6	37 28 45	689
690	47 61 00	328 509 000	26,2679	8,8366	6,53669	1,44928	2167,7	37 39 28	690
691	47 74 81	329 939 371	26,2869	8,8408	6,53814	1,44718	2170,8	37 50 13	691
692	47 88 64	331 373 888	26,3059	8,8451	6,53959	1,44509	2174,0	37 60 99	692
693	48 02 49	332 812 557	26,3249	8,8493	6,54103	1,44300	2177,1	37 71 87	693
694	48 16 36	334 255 334	26,3439	8,8536	6,54247	1,44092	2180,3	37 82 76	694
695	48 30 25	335 702 375	26,3629	8,8578	6,54391	1,43885	2183,4	37 93 67	695
696	48 44 16	337 153 536	26,3818	8,8621	6,54535	1,43678	2186,5	38 04 59	696
697	48 58 09	338 608 873	26,4008	8,8663	6,54679	1,43472	2189,7	38 15 53	697
698	48 72 04	340 068 392	26,4197	8,8706	6,54822	1,43266	2192,8	38 26 49	698
699	48 86 01	341 532 099	26,4386	8,8748	6,54965	1,43062	2196,0	38 37 46	699
700	49 00 00	343 000 000	26,4575	8,8790	6,55108	1,42857	2199,1	38 48 47	700

$n$	$n^2$	$n^3$	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\ln n$	$\frac{1000}{n}$	$\pi n$	$\frac{\pi n^3}{4}$	$n$
<b>700</b>	49 00 00	343 000 000	26,4575	8,8790	6,55108	1,42857	2199,1	38 48 45	<b>700</b>
<b>701</b>	49 14 01	344 472 101	26,4764	8,8833	6,55251	1,42653	2202,3	38 59 45	<b>701</b>
<b>702</b>	49 28 04	345 948 408	26,4953	8,8875	6,55393	1,42450	2205,4	38 70 47	<b>702</b>
<b>703</b>	49 42 09	347 428 927	26,5141	8,8917	6,55536	1,42248	2208,5	38 81 51	<b>703</b>
<b>704</b>	49 56 16	348 913 664	26,5330	8,8959	6,55678	1,42045	2211,7	38 92 56	<b>704</b>
<b>705</b>	49 70 25	350 402 625	26,5518	8,9001	6,55820	1,41844	2214,8	39 03 63	<b>705</b>
<b>706</b>	49 84 36	351 895 816	26,5707	8,9043	6,55962	1,41643	2218,0	39 14 71	<b>706</b>
<b>707</b>	49 98 49	353 393 243	26,5895	8,9085	6,56103	1,41443	2221,1	39 25 80	<b>707</b>
<b>708</b>	50 12 64	354 894 912	26,6083	8,9127	6,56244	1,41243	2224,2	39 36 92	<b>708</b>
<b>709</b>	50 26 81	356 400 829	26,6271	8,9169	6,56386	1,41044	2227,4	39 48 05	<b>709</b>
<b>710</b>	50 41 00	357 911 000	26,6458	8,9211	6,56526	1,40845	2230,5	39 59 19	<b>710</b>
<b>711</b>	50 55 21	359 425 431	26,6646	8,9253	6,56667	1,40647	2233,7	39 70 35	<b>711</b>
<b>712</b>	50 69 44	360 944 128	26,6833	8,9295	6,56808	1,40449	2236,8	39 81 53	<b>712</b>
<b>713</b>	50 83 69	362 467 097	26,7021	8,9337	6,56948	1,40252	2240,0	39 92 74	<b>713</b>
<b>714</b>	50 97 96	363 994 344	26,7208	8,9378	6,57088	1,40056	2243,1	40 03 93	<b>714</b>
<b>715</b>	51 12 25	365 525 875	26,7395	8,9420	6,57228	1,39860	2246,2	40 15 15	<b>715</b>
<b>716</b>	51 26 56	367 061 696	26,7582	8,9462	6,57368	1,39665	2249,4	40 26 39	<b>716</b>
<b>717</b>	51 40 89	368 601 813	26,7769	8,9503	6,57508	1,39470	2252,5	40 37 65	<b>717</b>
<b>718</b>	51 55 24	370 146 232	26,7955	8,9545	6,57647	1,39276	2255,7	40 48 92	<b>718</b>
<b>719</b>	51 69 61	371 694 959	26,8142	8,9587	6,57786	1,39082	2258,8	40 60 20	<b>719</b>
<b>720</b>	51 84 00	373 248 000	26,8328	8,9628	6,57925	1,38889	2261,9	40 71 50	<b>720</b>
<b>721</b>	51 98 41	374 805 361	26,8514	8,9670	6,58064	1,38696	2265,1	40 82 82	<b>721</b>
<b>722</b>	52 12 84	376 367 048	26,8701	8,9711	6,58203	1,38504	2268,2	40 94 15	<b>722</b>
<b>723</b>	52 27 29	377 933 067	26,8887	8,9752	6,58341	1,38313	2271,4	41 05 50	<b>723</b>
<b>724</b>	52 41 76	379 503 424	26,9072	8,9794	6,58479	1,38122	2274,5	41 16 87	<b>724</b>
<b>725</b>	52 56 25	381 078 125	26,9258	8,9835	6,58617	1,37931	2277,7	41 28 25	<b>725</b>
<b>726</b>	52 70 76	382 657 176	26,9444	8,9876	6,58755	1,37741	2280,8	41 39 65	<b>726</b>
<b>727</b>	52 85 29	384 240 583	26,9629	8,9918	6,58893	1,37552	2283,9	41 51 06	<b>727</b>
<b>728</b>	52 99 84	385 828 352	26,9815	8,9959	6,59030	1,37363	2287,1	41 62 48	<b>728</b>
<b>729</b>	53 14 41	387 420 489	27,0000	9,0000	6,59167	1,37174	2290,2	41 73 93	<b>729</b>
<b>730</b>	53 29 00	389 017 000	27,0185	9,0041	6,59304	1,36986	2293,4	41 85 39	<b>730</b>
<b>731</b>	53 43 61	390 617 891	27,0370	9,0082	6,59441	1,36799	2296,5	41 96 86	<b>731</b>
<b>732</b>	53 58 24	392 223 168	27,0555	9,0123	6,59578	1,36612	2299,6	42 08 35	<b>732</b>
<b>733</b>	53 72 89	393 832 837	27,0740	9,0164	6,59715	1,36426	2302,8	42 19 86	<b>733</b>
<b>734</b>	53 87 56	395 446 904	27,0924	9,0205	6,59851	1,36240	2305,9	42 31 38	<b>734</b>
<b>735</b>	54 02 25	397 065 375	27,1109	9,0246	6,59987	1,36054	2309,1	42 42 93	<b>735</b>
<b>736</b>	54 16 96	398 688 256	27,1293	9,0287	6,60123	1,35870	2312,2	42 54 47	<b>736</b>
<b>737</b>	54 31 69	400 315 553	27,1477	9,0328	6,60259	1,35685	2315,4	42 66 04	<b>737</b>
<b>738</b>	54 46 44	401 947 272	27,1662	9,0369	6,60394	1,35501	2318,5	42 77 62	<b>738</b>
<b>739</b>	54 61 21	403 583 419	27,1846	9,0410	6,60530	1,35318	2321,6	42 89 22	<b>739</b>
<b>740</b>	54 76 00	405 224 000	27,2029	9,0450	6,60665	1,35135	2324,8	43 00 84	<b>740</b>
<b>741</b>	54 90 81	406 869 021	27,2213	9,0491	6,60800	1,34953	2327,9	43 12 47	<b>741</b>
<b>742</b>	55 05 64	408 518 488	27,2397	9,0532	6,60935	1,34771	2331,1	43 24 12	<b>742</b>
<b>743</b>	55 20 49	410 172 407	27,2580	9,0572	6,61070	1,34590	2334,2	43 35 78	<b>743</b>
<b>744</b>	55 35 36	411 830 784	27,2764	9,0613	6,61204	1,34409	2337,3	43 47 46	<b>744</b>
<b>745</b>	55 50 25	413 493 625	27,2947	9,0654	6,61338	1,34228	2340,5	43 59 16	<b>745</b>
<b>746</b>	55 65 16	415 160 936	27,3130	9,0694	6,61473	1,34048	2343,6	43 70 87	<b>746</b>
<b>747</b>	55 80 09	416 832 723	27,3313	9,0735	6,61607	1,33869	2346,8	43 82 59	<b>747</b>
<b>748</b>	55 95 04	418 508 992	27,3496	9,0775	6,61740	1,33690	2349,9	43 94 33	<b>748</b>
<b>749</b>	56 10 01	420 189 749	27,3679	9,0816	6,61874	1,33511	2353,1	44 06 09	<b>749</b>
<b>750</b>	56 25 00	421 875 000	27,3861	9,0856	6,62007	1,33333	2356,2	44 17 86	<b>750</b>

$n$	$n^2$	$n^3$	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\ln n$	$\frac{1000}{n}$	$\pi n$	$\frac{\pi n^2}{4}$	$n$
750	56 25 00	421 875 000	27,3861	9,0856	6,62007	1,33333	2356,2	44 17 86	750
751	56 40 01	423 564 751	27,4044	9,0896	6,62141	1,33156	2359,3	44 29 65	751
752	56 55 04	425 259 008	27,4226	9,0937	6,62274	1,32979	2362,5	44 41 46	752
753	56 70 09	426 957 777	27,4408	9,0977	6,62407	1,32802	2365,6	44 53 28	753
754	56 85 16	428 661 064	27,4591	9,1017	6,62539	1,32626	2368,8	44 65 11	754
755	57 00 25	430 368 875	27,4773	9,1057	6,62672	1,32450	2371,9	44 76 97	755
756	57 15 36	432 081 216	27,4955	9,1098	6,62804	1,32275	2375,0	44 88 83	756
757	57 30 49	433 798 093	27,5136	9,1138	6,62936	1,32100	2378,2	45 00 72	757
758	57 45 64	435 519 512	27,5318	9,1178	6,63068	1,31926	2381,3	45 12 62	758
759	57 60 81	437 245 479	27,5500	9,1218	6,63200	1,31752	2384,5	45 24 53	759
760	57 76 00	438 976 000	27,5681	9,1258	6,63332	1,31579	2387,6	45 36 46	760
761	57 91 21	440 711 081	27,5862	9,1298	6,63463	1,31406	2390,8	45 48 41	761
762	58 06 44	442 450 728	27,6043	9,1338	6,63595	1,31234	2393,9	45 60 37	762
763	58 21 69	444 194 947	27,6225	9,1378	6,63726	1,31062	2397,0	45 72 34	763
764	58 36 96	445 943 744	27,6405	9,1418	6,63857	1,30890	2400,2	45 84 34	764
765	58 52 25	447 697 125	27,6586	9,1458	6,63988	1,30719	2403,3	45 96 35	765
766	58 67 56	449 455 096	27,6767	9,1498	6,64118	1,30548	2406,5	46 08 37	766
767	58 82 89	451 217 663	27,6948	9,1537	6,64249	1,30378	2409,6	46 20 41	767
768	58 98 24	452 984 832	27,7128	9,1577	6,64379	1,30208	2412,7	46 32 47	768
769	59 13 61	454 756 609	27,7308	9,1617	6,64509	1,30039	2415,9	46 44 54	769
770	59 29 00	456 533 000	27,7489	9,1657	6,64639	1,29870	2419,0	46 56 63	770
771	59 44 41	458 314 011	27,7669	9,1696	6,64769	1,29702	2422,2	46 68 73	771
772	59 59 84	460 099 648	27,7849	9,1736	6,64898	1,29534	2425,3	46 80 85	772
773	59 75 29	461 889 917	27,8029	9,1775	6,65028	1,29366	2428,5	46 92 98	773
774	59 90 76	463 684 824	27,8209	9,1815	6,65157	1,29199	2431,6	47 05 13	774
775	60 06 25	465 484 375	27,8388	9,1855	6,65286	1,29032	2434,7	47 17 30	775
776	60 21 76	467 288 576	27,8568	9,1894	6,65415	1,28866	2437,9	47 29 48	776
777	60 37 29	469 097 433	27,8747	9,1933	6,65544	1,28700	2441,0	47 41 68	777
778	60 52 84	470 910 952	27,8927	9,1973	6,65673	1,28535	2444,2	47 53 89	778
779	60 68 41	472 729 139	27,9106	9,2012	6,65801	1,28370	2447,3	47 66 12	779
780	60 84 00	474 552 000	27,9285	9,2052	6,65929	1,28205	2450,4	47 78 36	780
781	60 99 61	476 379 541	27,9464	9,2091	6,66058	1,28041	2453,6	47 90 62	781
782	61 15 24	478 211 768	27,9643	9,2130	6,66185	1,27877	2456,7	48 02 90	782
783	61 30 89	480 048 687	27,9821	9,2170	6,66313	1,27714	2459,9	48 15 19	783
784	61 46 56	481 890 304	28,0000	9,2209	6,66441	1,27551	2463,0	48 27 50	784
785	61 62 25	483 736 625	28,0179	9,2248	6,66568	1,27389	2466,2	48 39 82	785
786	61 77 96	485 587 656	28,0357	9,2287	6,66696	1,27226	2469,3	48 52 16	786
787	61 93 69	487 443 403	28,0535	9,2326	6,66823	1,27065	2472,4	48 64 51	787
788	62 09 44	489 303 872	28,0713	9,2365	6,66950	1,26904	2475,6	48 76 88	788
789	62 25 21	491 169 069	28,0891	9,2404	6,67077	1,26743	2478,7	48 89 27	789
790	62 41 00	493 039 000	28,1069	9,2443	6,67203	1,26582	2481,9	49 01 67	790
791	62 56 81	494 913 671	28,1247	9,2482	6,67330	1,26422	2485,0	49 14 09	791
792	62 72 64	496 793 088	28,1425	9,2521	6,67456	1,26263	2488,1	49 26 52	792
793	62 88 49	498 677 257	28,1603	9,2560	6,67582	1,26103	2491,3	49 38 97	793
794	63 04 36	500 566 184	28,1780	9,2599	6,67708	1,25945	2494,4	49 51 43	794
795	63 20 25	502 459 875	28,1957	9,2638	6,67834	1,25786	2497,6	49 63 91	795
796	63 36 16	504 358 336	28,2135	9,2677	6,67960	1,25628	2500,7	49 76 41	796
797	63 52 09	506 261 573	28,2312	9,2716	6,68085	1,25471	2503,8	49 88 92	797
798	63 68 04	508 169 592	28,2489	9,2754	6,68211	1,25313	2507,0	50 01 45	798
799	63 84 01	510 082 399	28,2666	9,2793	6,68336	1,25156	2510,1	50 13 99	799
800	64 00 00	512 000 000	28,2843	9,2832	6,68461	1,25000	2513,3	50 26 55	800

$n$	$n^2$	$n^3$	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\ln n$	$\frac{1000}{n}$	$\pi n$	$\frac{\pi n^2}{4}$	$n$
<b>800</b>	64 00 00	512 000 000	28,2843	9,2832	6,68461	1,25000	2513,3	50 26 55	<b>800</b>
801	64 16 01	513 922 401	28,3019	9,2870	6,68586	1,24844	2516,4	50 39 12	801
802	64 32 04	515 849 608	28,3196	9,2909	6,68711	1,24688	2519,6	50 51 71	802
803	64 48 09	517 781 627	28,3373	9,2948	6,68835	1,24533	2522,7	50 64 32	803
804	64 64 16	519 718 464	28,3549	9,2986	6,68960	1,24378	2525,8	50 76 94	804
805	64 80 25	521 660 125	28,3725	9,3025	6,69084	1,24224	2529,0	50 89 58	805
806	64 96 36	523 606 616	28,3901	9,3063	6,69208	1,24069	2532,1	51 02 23	806
807	65 12 49	525 557 943	28,4077	9,3102	6,69332	1,23916	2535,3	51 14 90	807
808	65 28 64	527 514 112	28,4253	9,3140	6,69456	1,23762	2538,4	51 27 58	808
809	65 44 81	529 475 129	28,4429	9,3179	6,69580	1,23609	2541,5	51 40 28	809
<b>810</b>	65 61 00	531 441 000	28,4605	9,3217	6,69703	1,23457	2544,7	51 53 00	<b>810</b>
811	65 77 21	533 411 731	28,4781	9,3255	6,69827	1,23305	2547,8	51 65 73	811
812	65 93 44	535 387 328	28,4956	9,3294	6,69950	1,23153	2551,0	51 78 48	812
813	66 09 69	537 367 797	28,5132	9,3332	6,70073	1,23001	2554,1	51 91 24	813
814	66 25 96	539 353 144	28,5307	9,3370	6,70196	1,22850	2557,3	52 04 02	814
815	66 42 25	541 343 375	28,5482	9,3408	6,70319	1,22699	2560,4	52 16 81	815
816	66 58 56	543 338 496	28,5657	9,3447	6,70441	1,22549	2563,5	52 29 62	816
817	66 74 89	545 338 513	28,5832	9,3485	6,70564	1,22399	2566,7	52 42 45	817
818	66 91 24	547 343 432	28,6007	9,3523	6,70686	1,22249	2569,8	52 55 29	818
819	67 07 61	549 353 259	28,6182	9,3561	6,70808	1,22100	2573,0	52 68 14	819
<b>820</b>	67 24 00	551 368 000	28,6356	9,3599	6,70930	1,21951	2576,1	52 81 02	<b>820</b>
821	67 40 41	553 387 661	28,6531	9,3637	6,71052	1,21803	2579,2	52 93 91	821
822	67 56 84	555 412 248	28,6705	9,3675	6,71174	1,21655	2582,4	53 06 81	822
823	67 73 29	557 441 767	28,6880	9,3713	6,71296	1,21507	2585,5	53 19 73	823
824	67 89 76	559 476 224	28,7054	9,3751	6,71417	1,21359	2588,7	53 32 67	824
825	68 06 25	561 515 625	28,7228	9,3789	6,71538	1,21212	2591,8	53 45 62	825
826	68 22 76	563 559 976	28,7402	9,3827	6,71659	1,21065	2595,0	53 58 58	826
827	68 39 29	565 609 283	28,7576	9,3865	6,71780	1,20919	2598,1	53 71 57	827
828	68 55 84	567 663 552	28,7750	9,3902	6,71901	1,20773	2601,2	53 84 56	828
829	68 72 41	569 722 789	28,7924	9,3940	6,72022	1,20627	2604,4	53 97 58	829
<b>830</b>	68 89 00	571 787 000	28,8097	9,3978	6,72143	1,20482	2607,5	54 10 61	<b>830</b>
831	69 05 61	573 856 191	28,8271	9,4016	6,72263	1,20337	2610,7	54 23 65	831
832	69 22 24	575 930 368	28,8444	9,4053	6,72383	1,20191	2613,8	54 36 71	832
833	69 38 89	578 009 537	28,8617	9,4091	6,72503	1,20048	2616,9	54 49 79	833
834	69 55 56	580 093 704	28,8791	9,4129	6,72623	1,19904	2620,1	54 62 88	834
835	69 72 25	582 182 875	28,8964	9,4166	6,72743	1,19760	2623,2	54 75 99	835
836	69 88 96	584 277 056	28,9137	9,4204	6,72863	1,19617	2626,4	54 89 12	836
837	70 05 69	586 376 253	28,9310	9,4241	6,72982	1,19474	2629,5	55 02 26	837
838	70 22 44	588 480 472	28,9482	9,4279	6,73102	1,19332	2632,7	55 15 41	838
839	70 39 21	590 589 719	28,9655	9,4316	6,73221	1,19190	2635,8	55 28 58	839
<b>840</b>	70 56 00	592 704 000	28,9828	9,4354	6,73340	1,19048	2638,9	55 41 77	<b>840</b>
841	70 72 81	594 823 321	29,0000	9,4391	6,73459	1,18906	2642,1	55 54 97	841
842	70 89 64	596 947 688	29,0172	9,4429	6,73578	1,18765	2645,2	55 68 19	842
843	71 06 49	599 077 107	29,0345	9,4466	6,73697	1,18624	2648,4	55 81 42	843
844	71 23 36	601 211 584	29,0517	9,4503	6,73815	1,18483	2651,5	55 94 67	844
845	71 40 25	603 351 125	29,0689	9,4541	6,73934	1,18343	2654,6	56 07 94	845
846	71 57 16	605 495 736	29,0861	9,4578	6,74052	1,18203	2657,8	56 21 22	846
847	71 74 09	607 645 423	29,1033	9,4615	6,74170	1,18064	2660,9	56 34 52	847
848	71 91 04	609 800 192	29,1204	9,4652	6,74288	1,17925	2664,1	56 47 83	848
849	72 08 01	611 960 049	29,1376	9,4690	6,74406	1,17786	2667,2	56 61 16	849
<b>850</b>	72 25 00	614 125 000	29,1548	9,4727	6,74524	1,17647	2670,4	56 74 50	<b>850</b>

$n$	$n^2$	$n^3$	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\ln n$	$\frac{1000}{n}$	$\pi n$	$\frac{\pi n^2}{4}$	$n$
850	72 25 00	614 125 000	29,1548	9,4727	6,74524	1,17647	2670,4	56 74 50	850
851	72 42 01	616 295 051	29,1719	9,4764	6,74641	1,17509	2673,5	56 87 86	851
852	72 59 04	618 470 208	29,1890	9,4801	6,74759	1,17371	2676,6	57 01 24	852
853	72 76 09	620 650 477	29,2062	9,4838	6,74876	1,17233	2679,8	57 14 63	853
854	72 93 16	622 835 864	29,2233	9,4875	6,74993	1,17096	2682,9	57 28 03	854
855	73 10 25	625 026 375	29,2404	9,4912	6,75110	1,16959	2686,1	57 41 46	855
856	73 27 36	627 222 016	29,2575	9,4949	6,75227	1,16822	2689,2	57 54 90	856
857	73 44 49	629 422 793	29,2746	9,4986	6,75344	1,16686	2692,3	57 68 35	857
858	73 61 64	631 628 712	29,2916	9,5023	6,75460	1,16550	2695,5	57 81 82	858
859	73 78 81	633 839 779	29,3087	9,5060	6,75577	1,16414	2698,6	57 95 30	859
860	73 96 00	636 056 000	29,3258	9,5097	6,75693	1,16279	2701,8	58 08 80	860
861	74 13 21	638 277 381	29,3428	9,5134	6,75809	1,16144	2704,9	58 22 32	861
862	74 30 44	640 503 928	29,3598	9,5171	6,75926	1,16009	2708,1	58 35 85	862
863	74 47 69	642 735 647	29,3769	9,5207	6,76041	1,15875	2711,2	58 49 40	863
864	74 64 96	644 972 544	29,3939	9,5244	6,76157	1,15741	2714,3	58 62 97	864
865	74 82 25	647 214 625	29,4109	9,5281	6,76273	1,15607	2717,5	58 76 55	865
866	74 99 56	649 461 896	29,4279	9,5317	6,76388	1,15473	2720,6	58 90 14	866
867	75 16 89	651 714 363	29,4449	9,5354	6,76504	1,15340	2723,8	59 03 75	867
868	75 34 24	653 972 032	29,4618	9,5391	6,76619	1,15207	2726,9	59 17 38	868
869	75 51 61	656 234 909	29,4788	9,5427	6,76734	1,15075	2730,0	59 31 02	869
870	75 69 00	658 503 000	29,4958	9,5464	6,76849	1,14943	2733,2	59 44 68	870
871	75 86 41	660 776 311	29,5127	9,5501	6,76964	1,14811	2736,3	59 58 35	871
872	76 03 84	663 054 848	29,5296	9,5537	6,77079	1,14679	2739,5	59 72 04	872
873	76 21 29	665 338 617	29,5466	9,5574	6,77194	1,14548	2742,6	59 85 75	873
874	76 38 76	667 627 624	29,5635	9,5610	6,77308	1,14416	2745,8	59 99 47	874
875	76 56 25	669 921 875	29,5804	9,5647	6,77422	1,14286	2748,9	60 13 20	875
876	76 73 76	672 221 376	29,5973	9,5683	6,77537	1,14155	2752,0	60 26 96	876
877	76 91 29	674 526 133	29,6142	9,5719	6,77651	1,14025	2755,2	60 40 73	877
878	77 08 84	676 836 152	29,6311	9,5756	6,77765	1,13895	2758,3	60 54 51	878
879	77 26 41	679 151 439	29,6479	9,5792	6,77878	1,13766	2761,5	60 68 31	879
880	77 44 00	681 472 000	29,6648	9,5828	6,77992	1,13636	2764,6	60 82 12	880
881	77 61 61	683 797 841	29,6816	9,5865	6,78106	1,13507	2767,7	60 95 95	881
882	77 79 24	686 128 968	29,6985	9,5901	6,78219	1,13379	2770,9	61 09 80	882
883	77 96 89	688 465 387	29,7153	9,5937	6,78333	1,13250	2774,0	61 23 66	883
884	78 14 56	690 807 104	29,7321	9,5973	6,78446	1,13122	2777,2	61 37 54	884
885	78 32 25	693 154 125	29,7489	9,6010	6,78559	1,12994	2780,3	61 51 43	885
886	78 49 96	695 506 456	29,7658	9,6046	6,78672	1,12867	2783,5	61 65 34	886
887	78 67 69	697 864 103	29,7825	9,6082	6,78784	1,12740	2786,6	61 79 27	887
888	78 85 44	700 227 072	29,7993	9,6118	6,78897	1,12613	2789,7	61 93 21	888
889	79 03 21	702 595 369	29,8161	9,6154	6,79010	1,12486	2792,9	62 07 17	889
890	79 21 00	704 969 000	29,8329	9,6190	6,79122	1,12360	2796,0	62 21 14	890
891	79 38 81	707 347 971	29,8496	9,6226	6,79234	1,12233	2799,2	62 35 13	891
892	79 56 64	709 732 288	29,8664	9,6262	6,79347	1,12108	2802,3	62 49 13	892
893	79 74 49	712 121 957	29,8831	9,6298	6,79459	1,11982	2805,4	62 63 15	893
894	79 92 36	714 516 984	29,8998	9,6334	6,79571	1,11857	2808,6	62 77 18	894
895	80 10 25	716 917 375	29,9166	9,6370	6,79682	1,11732	2811,7	62 91 24	895
896	80 28 16	719 323 136	29,9333	9,6406	6,79794	1,11607	2814,9	63 05 30	896
897	80 46 09	721 734 273	29,9500	9,6442	6,79906	1,11483	2818,0	63 19 38	897
898	80 64 04	724 150 792	29,9666	9,6477	6,80017	1,11359	2821,2	63 33 48	898
899	80 82 01	726 572 699	29,9833	9,6513	6,80128	1,11235	2824,3	63 47 60	899
900	81 00 00	729 000 000	30,0000	9,6549	6,80239	1,11111	2827,4	63 61 73	900

$n$	$n^2$	$n^3$	$\sqrt[n]{n}$	$\sqrt[n]{n^3}$	$\ln n$	$\frac{1000}{n}$	$\pi n$	$\frac{\pi n^2}{4}$	$n$
<b>900</b>	81 00 00	729 000 000	30,0000	9,6549	6,80239	I,11111	2827,4	63 61 73	<b>900</b>
901	81 18 01	731 432 701	30,0167	9,6585	6,80351	I,10988	2830,6	63 75 87	901
902	81 36 04	733 870 808	30,0333	9,6620	6,80461	I,10865	2833,7	63 90 03	902
903	81 54 09	736 314 327	30,0500	9,6656	6,80572	I,10742	2836,9	64 04 21	903
904	81 72 16	738 763 264	30,0666	9,6692	6,80683	I,10619	2840,0	64 18 40	904
905	81 90 25	741 217 625	30,0832	9,6727	6,80793	I,10497	2843,1	64 32 61	905
906	82 08 36	743 677 416	30,0998	9,6763	6,80904	I,10375	2846,3	64 46 83	906
907	82 26 49	746 142 643	30,1164	9,6799	6,81014	I,10254	2849,4	64 61 07	907
908	82 44 64	748 613 312	30,1330	9,6834	6,81124	I,10132	2852,6	64 75 33	908
909	82 62 81	751 089 429	30,1496	9,6870	6,81235	I,10011	2855,7	64 89 60	909
<b>910</b>	82 81 00	753 571 000	30,1662	9,6905	6,81344	I,09890	2858,8	65 03 88	<b>910</b>
911	82 99 21	756 058 031	30,1828	9,6941	6,81454	I,09769	2862,0	65 18 18	911
912	83 17 44	758 550 528	30,1993	9,6976	6,81564	I,09649	2865,1	65 32 50	912
913	83 35 69	761 048 497	30,2159	9,7012	6,81674	I,09529	2868,3	65 46 84	913
914	83 53 96	763 551 944	30,2324	9,7047	6,81783	I,09409	2871,4	65 61 18	914
915	83 72 25	766 060 875	30,2490	9,7082	6,81892	I,09290	2874,6	65 75 55	915
916	83 90 56	768 575 296	30,2655	9,7118	6,82002	I,09170	2877,7	65 89 93	916
917	84 08 89	771 095 213	30,2820	9,7153	6,82111	I,09051	2880,8	66 04 33	917
918	84 27 24	773 620 632	30,2985	9,7188	6,82220	I,08932	2884,0	66 18 74	918
919	84 45 61	776 151 559	30,3150	9,7224	6,82329	I,08814	2887,1	66 33 17	919
<b>920</b>	84 64 00	778 688 000	30,3315	9,7259	6,82437	I,08696	2890,3	66 47 61	<b>920</b>
921	84 82 41	781 229 961	30,3480	9,7294	6,82546	I,08578	2893,4	66 62 07	921
922	85 00 84	783 777 448	30,3645	9,7329	6,82655	I,08460	2896,5	66 76 54	922
923	85 19 29	786 330 467	30,3809	9,7364	6,82763	I,08342	2899,7	66 91 03	923
924	85 37 76	788 889 024	30,3974	9,7400	6,82871	I,08225	2902,8	67 05 54	924
925	85 56 25	791 453 125	30,4138	9,7435	6,82979	I,08108	2906,0	67 20 06	925
926	85 74 76	794 022 776	30,4302	9,7470	6,83087	I,07991	2909,1	67 34 60	926
927	85 93 29	796 597 983	30,4467	9,7505	6,83195	I,07875	2912,3	67 49 15	927
928	86 11 84	799 178 752	30,4631	9,7540	6,83303	I,07759	2915,4	67 63 72	928
929	86 30 41	801 765 089	30,4795	9,7575	6,83411	I,07643	2918,5	67 78 31	929
<b>930</b>	86 49 00	804 357 000	30,4959	9,7610	6,83518	I,07527	2921,7	67 92 91	<b>930</b>
931	86 67 61	806 954 491	30,5123	9,7645	6,83626	I,07411	2924,8	68 07 52	931
932	86 86 24	809 557 568	30,5287	9,7680	6,83733	I,07296	2928,0	68 22 16	932
933	87 04 89	812 166 237	30,5450	9,7715	6,83841	I,07181	2931,1	68 36 80	933
934	87 23 56	814 780 504	30,5614	9,7750	6,83948	I,07066	2934,2	68 51 47	934
935	87 42 25	817 400 375	30,5778	9,7785	6,84055	I,06952	2937,4	68 66 15	935
936	87 60 96	820 025 856	30,5941	9,7819	6,84162	I,06838	2940,5	68 80 84	936
937	87 79 69	822 656 953	30,6105	9,7854	6,84268	I,06724	2943,7	68 95 55	937
938	87 98 44	825 293 672	30,6268	9,7889	6,84375	I,06610	2946,8	69 10 28	938
939	88 17 21	827 936 019	30,6431	9,7924	6,84482	I,06496	2950,0	69 25 02	939
<b>940</b>	88 36 00	830 584 000	30,6594	9,7959	6,84588	I,06383	2953,1	69 39 78	<b>940</b>
941	88 54 81	833 237 621	30,6757	9,7993	6,84694	I,06270	2956,2	69 54 55	941
942	88 73 64	835 896 888	30,6920	9,8028	6,84801	I,06157	2959,4	69 69 34	942
943	88 92 49	838 561 807	30,7083	9,8063	6,84907	I,06045	2962,5	69 84 15	943
944	89 11 36	841 232 384	30,7246	9,8097	6,85013	I,05932	2965,7	69 98 97	944
945	89 30 25	843 908 625	30,7409	9,8132	6,85118	I,05820	2968,8	70 13 80	945
946	89 49 16	846 590 536	30,7571	9,8167	6,85224	I,05708	2971,9	70 28 65	946
947	89 68 09	849 278 123	30,7734	9,8201	6,85330	I,05597	2975,1	70 43 52	947
948	89 87 04	851 971 392	30,7896	9,8236	6,85435	I,05485	2978,2	70 58 40	948
949	90 06 01	854 670 349	30,8058	9,8270	6,85541	I,05374	2981,4	70 73 30	949
<b>950</b>	90 25 00	857 375 000	30,8221	9,8305	6,85646	I,05263	2984,5	70 88 22	<b>950</b>

$n$	$n^2$	$n^3$	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\ln n$	$\frac{1000}{n}$	$\pi n$	$\frac{\pi n^2}{4}$	$n$
950	90 25 00	857 375 000	30,8221	9,8305	6,85646	1,05263	2984,5	70 88 22	950
951	90 44 01	860 085 351	30,8383	9,8339	6,85751	1,05152	2987,7	71 03 15	951
952	90 63 04	862 801 408	30,8545	9,8374	6,85857	1,05042	2990,8	71 18 09	952
953	90 82 09	865 523 177	30,8707	9,8408	6,85961	1,04932	2993,9	71 33 06	953
954	91 01 16	868 250 664	30,8869	9,8443	6,86066	1,04822	2997,1	71 48 03	954
955	91 20 25	870 983 875	30,9031	9,8477	6,86171	1,04712	3000,2	71 63 03	955
956	91 39 36	873 722 816	30,9192	9,8511	6,86276	1,04603	3003,4	71 78 04	956
957	91 58 49	876 467 493	30,9354	9,8546	6,86380	1,04493	3006,5	71 93 06	957
958	91 77 64	879 217 912	30,9516	9,8580	6,86485	1,04384	3009,6	72 08 10	958
959	91 96 81	881 974 079	30,9677	9,8614	6,86589	1,04275	3012,8	72 23 16	959
960	92 16 00	884 736 000	30,9839	9,8648	6,86693	1,04167	3015,9	72 38 23	960
961	92 35 21	887 503 681	31,0000	9,8683	6,86797	1,04058	3019,1	72 53 32	961
962	92 54 44	890 277 128	31,0161	9,8717	6,86901	1,03950	3022,2	72 68 42	962
963	92 73 69	893 056 347	31,0322	9,8751	6,87005	1,03842	3025,4	72 83 54	963
964	92 92 96	895 841 344	31,0483	9,8785	6,87109	1,03734	3028,5	72 98 67	964
965	93 12 25	898 632 125	31,0644	9,8819	6,87213	1,03627	3031,6	73 13 82	965
966	93 31 56	901 428 696	31,0805	9,8854	6,87316	1,03520	3034,8	73 28 99	966
967	93 50 89	904 231 063	31,0966	9,8888	6,87420	1,03413	3037,9	73 44 17	967
968	93 70 24	907 039 232	31,1127	9,8922	6,87523	1,03306	3041,1	73 59 37	968
969	93 89 61	909 853 209	31,1288	9,8956	6,87626	1,03199	3044,2	73 74 58	969
970	94 09 00	912 673 000	31,1448	9,8990	6,87730	1,03093	3047,3	73 89 81	970
971	94 28 41	915 498 611	31,1609	9,9024	6,87833	1,02987	3050,5	74 05 06	971
972	94 47 84	918 330 048	31,1769	9,9058	6,87936	1,02881	3053,6	74 20 32	972
973	94 67 29	921 167 317	31,1929	9,9092	6,88038	1,02775	3056,8	74 35 59	973
974	94 86 76	924 010 424	31,2090	9,9126	6,88141	1,02669	3059,9	74 50 88	974
975	95 06 25	926 859 375	31,2250	9,9160	6,88244	1,02564	3063,1	74 66 19	975
976	95 25 76	929 714 176	31,2410	9,9194	6,88346	1,02459	3066,2	74 81 51	976
977	95 45 29	932 574 833	31,2570	9,9227	6,88449	1,02354	3069,3	74 96 85	977
978	95 64 84	935 441 352	31,2730	9,9261	6,88551	1,02249	3072,5	75 12 21	978
979	95 84 41	938 313 739	31,2890	9,9295	6,88653	1,02145	3075,6	75 27 52	979
980	96 04 00	941 192 000	31,3050	9,9329	6,88755	1,02041	3078,8	75 42 96	980
981	96 23 61	944 076 141	31,3209	9,9363	6,88857	1,01937	3081,9	75 58 37	981
982	96 43 24	946 966 168	31,3369	9,9396	6,88959	1,01833	3085,0	75 73 78	982
983	96 62 89	949 862 087	31,3528	9,9430	6,89061	1,01729	3088,2	75 89 22	983
984	96 82 56	952 763 904	31,3688	9,9464	6,89163	1,01626	3091,3	76 04 66	984
985	97 02 25	955 671 625	31,3847	9,9497	6,89264	1,01523	3094,5	76 20 13	985
986	97 21 96	958 585 256	31,4006	9,9531	6,89366	1,01420	3097,6	76 35 61	986
987	97 41 69	961 504 803	31,4166	9,9565	6,89467	1,01317	3100,8	76 51 11	987
988	97 61 44	964 430 272	31,4325	9,9598	6,89568	1,01215	3103,9	76 66 62	988
989	97 81 21	967 361 669	31,4484	9,9632	6,89669	1,01112	3107,0	76 82 14	989
990	98 01 00	970 299 000	31,4643	9,9666	6,89770	1,01010	3110,2	76 97 69	990
991	98 20 81	973 242 271	31,4802	9,9699	6,89871	1,00908	3113,3	77 13 25	991
992	98 40 64	976 191 488	31,4960	9,9733	6,89972	1,00806	3116,5	77 28 82	992
993	98 60 49	979 146 657	31,5119	9,9766	6,90073	1,00705	3119,6	77 44 41	993
994	98 80 36	982 107 784	31,5278	9,9800	6,90174	1,00604	3122,7	77 60 02	994
995	99 00 25	985 074 875	31,5436	9,9833	6,90274	1,00503	3125,9	77 75 64	995
996	99 20 16	988 047 936	31,5595	9,9866	6,90375	1,00402	3129,0	77 91 28	996
997	99 40 09	991 026 973	31,5753	9,9900	6,90475	1,00301	3132,2	78 06 93	997
998	99 60 04	994 011 992	31,5911	9,9933	6,90575	1,00200	3135,3	78 22 60	998
999	99 80 01	997 002 999	31,6070	9,9967	6,90675	1,00100	3138,5	78 38 28	999
1000	100 00 00	1000 000 000	31,6228	10,0000	6,90776	1,00000	3141,6	78 53 98	1000

$n$	$n^2$	$n^3$	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\ln n$	$\frac{1000}{n}$	$\pi n$	$\frac{\pi n^2}{4}$	$n$
<b>1000</b>	I 000 000	I 000 000 000	31,6228	10,0000	6,90776	1,00000	3141,6	78 53 98	<b>1000</b>
1001	I 002 001	I 003 003 001	31,6386	10,0033	6,90875	0,99900	3144,7	78 69 70	1001
1002	I 004 004	I 006 012 008	31,6544	10,0067	6,90975	0,99800	3147,9	78 85 43	1002
1003	I 006 009	I 009 027 027	31,6702	10,0100	6,91075	0,99701	3151,0	79 01 18	1003
1004	I 008 016	I 012 048 064	31,6860	10,0133	6,91175	0,99602	3154,2	79 16 94	1004
1005	I 010 025	I 015 075 125	31,7017	10,0166	6,91275	0,99502	3157,3	79 32 72	1005
1006	I 012 036	I 018 108 216	31,7175	10,0200	6,91374	0,99404	3160,4	79 48 51	1006
1007	I 014 049	I 021 147 343	31,7333	10,0233	6,91474	0,99305	3163,6	79 64 32	1007
1008	I 016 064	I 024 192 512	31,7490	10,0266	6,91573	0,99206	3166,7	79 80 15	1008
1009	I 018 081	I 027 243 729	31,7648	10,0299	6,91672	0,99108	3169,9	79 95 99	1009
<b>1010</b>	I 020 100	I 030 301 000	31,7805	10,0332	6,91771	0,99010	3173,0	80 11 84	<b>1010</b>
1011	I 022 121	I 033 364 331	31,7962	10,0365	6,91869	0,98912	3176,2	80 27 72	1011
1012	I 024 144	I 036 433 728	31,8119	10,0398	6,91968	0,98814	3179,3	80 43 61	1012
1013	I 026 169	I 039 509 197	31,8277	10,0431	6,92067	0,98717	3182,4	80 59 51	1013
1014	I 028 196	I 042 590 744	31,8434	10,0465	6,92166	0,98619	3185,6	80 75 43	1014
1015	I 030 225	I 045 678 375	31,8591	10,0498	6,92264	0,98522	3188,7	80 91 37	1015
1016	I 032 256	I 048 772 096	31,8748	10,0531	6,92363	0,98425	3191,9	81 07 32	1016
1017	I 034 289	I 051 871 913	31,8904	10,0563	6,92461	0,98328	3195,0	81 23 29	1017
1018	I 036 324	I 054 977 832	31,9061	10,0596	6,92559	0,98232	3198,1	81 39 27	1018
1019	I 038 361	I 058 089 859	31,9218	10,0629	6,92658	0,98135	3201,3	81 55 27	1019
<b>1020</b>	I 040 400	I 061 208 000	31,9374	10,0662	6,92756	0,98039	3204,4	81 71 28	<b>1020</b>
1021	I 042 441	I 064 332 261	31,9531	10,0695	6,92854	0,97943	3207,6	81 87 31	1021
1022	I 044 484	I 067 462 648	31,9687	10,0728	6,92952	0,97847	3210,7	82 03 36	1022
1023	I 046 529	I 070 599 167	31,9844	10,0761	6,93049	0,97752	3213,9	82 19 42	1023
1024	I 048 576	I 073 741 824	32,0000	10,0794	6,93147	0,97656	3217,0	82 35 49	1024
1025	I 050 625	I 076 890 625	32,0156	10,0826	6,93245	0,97561	3220,1	82 51 59	1025
1026	I 052 676	I 080 045 576	32,0312	10,0859	6,93342	0,97466	3223,3	82 67 70	1026
1027	I 054 729	I 083 206 683	32,0468	10,0892	6,93440	0,97371	3226,4	82 83 82	1027
1028	I 056 784	I 086 373 952	32,0624	10,0925	6,93537	0,97276	3229,6	82 99 96	1028
1029	I 058 841	I 089 547 389	32,0780	10,0957	6,93634	0,97182	3232,7	83 16 12	1029
<b>1030</b>	I 060 900	I 092 727 000	32,0936	10,0990	6,93731	0,97087	3235,8	83 32 29	<b>1030</b>
1031	I 062 961	I 095 912 791	32,1092	10,1023	6,93828	0,96993	3239,0	83 48 47	1031
1032	I 065 024	I 099 104 768	32,1248	10,1055	6,93925	0,96899	3242,1	83 64 68	1032
1033	I 067 089	I 102 302 937	32,1403	10,1088	6,94022	0,96805	3245,3	83 80 90	1033
1034	I 069 156	I 105 507 304	32,1559	10,1121	6,94119	0,96712	3248,4	83 97 13	1034
1035	I 071 225	I 108 717 875	32,1714	10,1153	6,94216	0,96618	3251,5	84 13 38	1035
1036	I 073 296	I 111 934 656	32,1870	10,1186	6,94312	0,96525	3254,7	84 29 65	1036
1037	I 075 369	I 115 157 653	32,2025	10,1218	6,94409	0,96432	3257,8	84 45 93	1037
1038	I 077 444	I 118 386 872	32,2180	10,1251	6,94505	0,96339	3261,0	84 62 22	1038
1039	I 079 521	I 121 622 319	32,2335	10,1283	6,94601	0,96246	3264,1	84 78 54	1039
<b>1040</b>	I 081 600	I 124 864 000	32,2490	10,1316	6,94698	0,96154	3267,3	84 94 87	<b>1040</b>
1041	I 083 681	I 128 111 921	32,2645	10,1348	6,94794	0,96061	3270,4	85 11 21	1041
1042	I 085 764	I 131 366 088	32,2800	10,1381	6,94890	0,95969	3273,5	85 27 57	1042
1043	I 087 849	I 134 626 507	32,2955	10,1413	6,94986	0,95877	3276,7	85 43 94	1043
1044	I 089 936	I 137 893 184	32,3110	10,1446	6,95081	0,95785	3279,8	85 60 34	1044
1045	I 092 025	I 141 166 125	32,3265	10,1478	6,95177	0,95694	3283,0	85 76 74	1045
1046	I 094 116	I 144 445 336	32,3419	10,1510	6,95273	0,95602	3286,1	85 93 17	1046
1047	I 096 209	I 147 730 823	32,3574	10,1543	6,95368	0,95511	3289,2	86 09 60	1047
1048	I 098 304	I 151 022 592	32,3728	10,1575	6,95464	0,95420	3292,4	86 26 06	1048
1049	I 100 401	I 154 320 649	32,3883	10,1607	6,95559	0,95329	3295,5	86 42 53	1049
<b>1050</b>	I 102 500	I 157 625 000	32,4037	10,1640	6,95655	0,95238	3298,7	86 59 01	<b>1050</b>

$n$	$n^2$	$n^3$	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\ln n$	$\frac{1000}{n}$	$\pi n$	$\frac{\pi n^2}{4}$	$n$
<b>1050</b>	I 102 500	I 157 625 000	32,4037	10,1640	6,95655	0,95238	3298,7	86 59 01	<b>1050</b>
1051	I 104 601	I 160 935 651	32,4191	10,1672	6,95750	0,95147	3301,8	86 75 51	1051
1052	I 106 704	I 164 252 608	32,4345	10,1704	6,95845	0,95057	3305,0	86 92 03	1052
1053	I 108 809	I 167 575 877	32,4490	10,1736	6,95940	0,94967	3308,1	87 08 56	1053
1054	I 110 916	I 170 905 464	32,4654	10,1769	6,96035	0,94877	3311,2	87 25 11	1054
1055	I 113 025	I 174 241 375	32,4808	10,1801	6,96130	0,94787	3314,4	87 41 68	1055
1056	I 115 136	I 177 583 616	32,4962	10,1833	6,96224	0,94697	3317,5	87 58 26	1056
1057	I 117 249	I 180 932 193	32,5115	10,1865	6,96319	0,94607	3320,7	87 74 85	1057
1058	I 119 364	I 184 287 112	32,5269	10,1897	6,96414	0,94518	3323,8	87 91 46	1058
1059	I 121 481	I 187 648 379	32,5423	10,1929	6,96508	0,94429	3326,9	88 08 09	1059
<b>1060</b>	I 123 600	I 191 016 000	32,5576	10,1961	6,96602	0,94340	3330,1	88 24 73	<b>1060</b>
1061	I 125 721	I 194 389 981	32,5730	10,1993	6,96697	0,94251	3333,2	88 41 39	1061
1062	I 127 844	I 197 770 328	32,5883	10,2025	6,96791	0,94162	3336,4	88 58 06	1062
1063	I 129 969	I 201 157 047	32,6037	10,2057	6,96885	0,94073	3339,5	88 74 75	1063
1064	I 132 096	I 204 550 144	32,6190	10,2089	6,96979	0,93985	3342,7	88 91 46	1064
1065	I 134 225	I 207 949 625	32,6343	10,2121	6,97073	0,93897	3345,8	89 08 18	1065
1066	I 136 356	I 211 355 496	32,6497	10,2153	6,97167	0,93809	3348,9	89 24 92	1066
1067	I 138 489	I 214 767 763	32,6650	10,2185	6,97261	0,93721	3352,1	89 41 67	1067
1068	I 140 624	I 218 186 432	32,6803	10,2217	6,97354	0,93633	3355,2	89 58 43	1068
1069	I 142 761	I 221 611 509	32,6956	10,2249	6,97448	0,93545	3358,4	89 75 22	1069
<b>1070</b>	I 144 900	I 225 043 000	32,7109	10,2281	6,97541	0,93458	3361,5	89 92 02	<b>1070</b>
1071	I 147 041	I 228 480 911	32,7261	10,2313	6,97635	0,93371	3364,6	90 08 84	1071
1072	I 149 184	I 231 925 248	32,7414	10,2345	6,97728	0,93284	3367,8	90 25 67	1072
1073	I 151 329	I 235 376 017	32,7567	10,2376	6,97821	0,93197	3370,9	90 42 51	1073
1074	I 153 476	I 238 833 224	32,7719	10,2408	6,97914	0,93110	3374,1	90 59 38	1074
1075	I 155 625	I 242 296 875	32,7872	10,2440	6,98008	0,93023	3377,2	90 76 26	1075
1076	I 157 776	I 245 766 976	32,8024	10,2472	6,98101	0,92937	3380,4	90 93 15	1076
1077	I 159 929	I 249 243 533	32,8177	10,2503	6,98193	0,92851	3383,5	91 10 06	1077
1078	I 162 084	I 252 726 552	32,8329	10,2535	6,98286	0,92764	3386,6	91 26 98	1078
1079	I 164 241	I 256 216 039	32,8481	10,2567	6,98379	0,92678	3389,8	91 43 92	1079
<b>1080</b>	I 166 400	I 259 712 000	32,8634	10,2599	6,98472	0,92593	3392,9	91 60 88	<b>1080</b>
1081	I 168 561	I 263 214 441	32,8786	10,2630	6,98564	0,92507	3396,1	91 77 85	1081
1082	I 170 724	I 266 723 368	32,8938	10,2662	6,98657	0,92421	3399,2	91 94 84	1082
1083	I 172 889	I 270 238 787	32,9090	10,2693	6,98749	0,92336	3402,3	92 11 85	1083
1084	I 175 056	I 273 760 704	32,9242	10,2725	6,98841	0,92251	3405,5	92 28 87	1084
1085	I 177 225	I 277 289 125	32,9393	10,2757	6,98933	0,92166	3408,6	92 45 90	1085
1086	I 179 396	I 280 824 056	32,9545	10,2788	6,99026	0,92081	3411,8	92 62 95	1086
1087	I 181 569	I 284 365 503	32,9697	10,2820	6,99118	0,91996	3414,9	92 80 02	1087
1088	I 183 744	I 287 913 472	32,9848	10,2851	6,99210	0,91912	3418,1	92 97 10	1088
1089	I 185 921	I 291 467 969	33,0000	10,2883	6,99301	0,91827	3421,2	93 14 20	1089
<b>1090</b>	I 188 100	I 295 029 000	33,0151	10,2914	6,99393	0,91743	3424,3	93 31 31	<b>1090</b>
1091	I 190 281	I 298 596 571	33,0303	10,2946	6,99485	0,91659	3427,5	93 48 44	1091
1092	I 192 464	I 302 170 688	33,0454	10,2977	6,99577	0,91575	3430,6	93 65 59	1092
1093	I 194 649	I 305 751 357	33,0606	10,3009	6,99668	0,91491	3433,8	93 82 75	1093
1094	I 196 836	I 309 338 584	33,0757	10,3040	6,99760	0,91408	3436,9	93 99 93	1094
1095	I 199 025	I 312 932 375	33,0908	10,3071	6,99851	0,91324	3440,0	94 17 12	1095
1096	I 201 216	I 316 532 736	33,1059	10,3103	6,99942	0,91240	3443,2	94 34 33	1096
1097	I 203 409	I 320 139 673	33,1210	10,3134	7,00033	0,91158	3446,3	94 51 55	1097
1098	I 205 604	I 323 753 192	33,1361	10,3165	7,00125	0,91075	3449,5	94 68 79	1098
1099	I 207 801	I 327 373 299	33,1512	10,3197	7,00216	0,90992	3452,6	94 86 04	1099
<b>1100</b>	I 210 000	I 331 000 000	33,1662	10,3228	7,00307	0,90909	3455,8	95 03 32	<b>1100</b>

## B. Mantissen der Briggs-

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
100	0000	0004	0009	0013	0017	0022	0026	0030	0035	0039
101	0043	0048	0052	0056	0060	0065	0069	0073	0077	0082
102	0086	0090	0095	0099	0103	0107	0111	0116	0120	0124
103	0128	0133	0137	0141	0145	0149	0154	0158	0162	0166
104	0170	0175	0179	0183	0187	0191	0195	0199	0204	0208
105	0212	0216	0220	0224	0228	0233	0237	0241	0245	0249
106	0253	0257	0261	0265	0269	0273	0278	0282	0286	0290
107	0294	0298	0302	0306	0310	0314	0318	0322	0326	0330
108	0334	0338	0342	0346	0350	0354	0358	0362	0366	0370
109	0374	0378	0382	0386	0390	0394	0398	0402	0406	0410
110	0414	0418	0422	0426	0430	0434	0438	0441	0445	0449
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981

## schen Logarithmen.

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996

Grad	Sinus							
	0'	10'	20'	30'	40'	50'	60'	
0	0,00000	0,00291	0,00582	0,00873	0,01164	0,01454	0,01745	89
1	0,01745	0,02036	0,02327	0,02618	0,02908	0,03199	0,03490	88
2	0,03490	0,03781	0,04071	0,04362	0,04653	0,04943	0,05234	87
3	0,05234	0,05524	0,05814	0,06105	0,06395	0,06685	0,06976	86
4	0,06976	0,07266	0,07556	0,07846	0,08136	0,08426	0,08716	85
5	0,08716	0,09005	0,09295	0,09585	0,09874	0,10164	0,10453	84
6	0,10453	0,10742	0,11031	0,11320	0,11609	0,11898	0,12187	83
7	0,12187	0,12476	0,12764	0,13053	0,13341	0,13629	0,13917	81
8	0,13917	0,14205	0,14493	0,14781	0,15069	0,15356	0,15643	81
9	0,15643	0,15931	0,16218	0,16505	0,16792	0,17078	0,17365	80
10	0,17365	0,17651	0,17937	0,18224	0,18509	0,18795	0,19081	79
11	0,19081	0,19366	0,19652	0,19937	0,20222	0,20507	0,20791	78
12	0,20791	0,21076	0,21360	0,21644	0,21928	0,22212	0,22495	77
13	0,22495	0,22778	0,23062	0,23345	0,23627	0,23910	0,24192	76
14	0,24192	0,24474	0,24756	0,25038	0,25320	0,25601	0,25882	75
15	0,25882	0,26163	0,26443	0,26724	0,27004	0,27284	0,27564	74
16	0,27564	0,27843	0,28123	0,28402	0,28680	0,28959	0,29237	73
17	0,29237	0,29515	0,29793	0,30071	0,30348	0,30625	0,30902	72
18	0,30902	0,31178	0,31454	0,31730	0,32006	0,32282	0,32557	71
19	0,32557	0,32832	0,33106	0,33381	0,33655	0,33929	0,34202	70
20	0,34202	0,34475	0,34748	0,35021	0,35293	0,35565	0,35837	69
21	0,35837	0,36108	0,36379	0,36650	0,36921	0,37191	0,37461	68
22	0,37461	0,37730	0,37999	0,38268	0,38537	0,38805	0,39073	67
23	0,39073	0,39341	0,39608	0,39875	0,40142	0,40408	0,40674	66
24	0,40674	0,40939	0,41204	0,41469	0,41734	0,41998	0,42262	65
25	0,42262	0,42525	0,42788	0,43051	0,43313	0,43575	0,43837	64
26	0,43837	0,44098	0,44359	0,44620	0,44880	0,45140	0,45399	63
27	0,45399	0,45658	0,45917	0,46175	0,46433	0,46690	0,46947	62
28	0,46947	0,47204	0,47460	0,47716	0,47971	0,48226	0,48481	61
29	0,48481	0,48735	0,48989	0,49242	0,49495	0,49748	0,50000	60
30	0,50000	0,50252	0,50503	0,50754	0,51004	0,51254	0,51504	59
31	0,51504	0,51753	0,52002	0,52250	0,52498	0,52745	0,52992	58
32	0,52992	0,53238	0,53484	0,53730	0,53975	0,54220	0,54464	57
33	0,54464	0,54708	0,54951	0,55194	0,55436	0,55678	0,55919	56
34	0,55919	0,56160	0,56401	0,56641	0,56880	0,57119	0,57358	55
35	0,57358	0,57596	0,57833	0,58070	0,58307	0,58543	0,58779	54
36	0,58779	0,59014	0,59248	0,59482	0,59716	0,59949	0,60182	53
37	0,60182	0,60414	0,60645	0,60876	0,61107	0,61337	0,61566	52
38	0,61566	0,61795	0,62024	0,62251	0,62479	0,62706	0,62932	51
39	0,62932	0,63158	0,63383	0,63608	0,63832	0,64056	0,64279	50
40	0,64279	0,64501	0,64723	0,64945	0,65166	0,65386	0,65606	49
41	0,65606	0,65825	0,66044	0,66262	0,66480	0,66697	0,66913	48
42	0,66913	0,67129	0,67344	0,67559	0,67773	0,67987	0,68200	47
43	0,68200	0,68412	0,68624	0,68835	0,69046	0,69256	0,69466	46
44	0,69466	0,69675	0,69883	0,70091	0,70298	0,70505	0,70711	45
	60'	50'	40'	30'	20'	10'	0'	Grad
Cosinus								

Grad	Cosinus							Grad
	0'	10'	20'	30'	40'	50'	60'	
0	1,00000	1,00000	0,99998	0,99996	0,99993	0,99989	0,99985	89
1	0,99985	0,99979	0,99973	0,99966	0,99958	0,99949	0,99939	88
2	0,99939	0,99929	0,99917	0,99905	0,99892	0,99878	0,99863	87
3	0,99863	0,99847	0,99831	0,99813	0,99795	0,99776	0,99756	86
4	0,99756	0,99736	0,99714	0,99692	0,99668	0,99644	0,99619	85
5	0,99619	0,99594	0,99567	0,99540	0,99511	0,99482	0,99452	84
6	0,99452	0,99421	0,99390	0,99357	0,99324	0,99290	0,99255	83
7	0,99255	0,99219	0,99182	0,99144	0,99106	0,99067	0,99027	82
8	0,99027	0,98986	0,98944	0,98902	0,98858	0,98814	0,98769	81
9	0,98769	0,98723	0,98676	0,98629	0,98580	0,98531	0,98481	80
10	0,98481	0,98430	0,98378	0,98325	0,98272	0,98218	0,98163	79
11	0,98163	0,98107	0,98050	0,97992	0,97934	0,97875	0,97815	78
12	0,97815	0,97754	0,97692	0,97630	0,97566	0,97502	0,97437	77
13	0,97437	0,97371	0,97304	0,97237	0,97169	0,97100	0,97030	76
14	0,97030	0,96959	0,96887	0,96815	0,96742	0,96667	0,96593	75
15	0,96593	0,96517	0,96440	0,96363	0,96285	0,96206	0,96126	74
16	0,96126	0,96046	0,95964	0,95882	0,95799	0,95715	0,95630	73
17	0,95630	0,95545	0,95459	0,95372	0,95284	0,95195	0,95106	72
18	0,95106	0,95015	0,94924	0,94832	0,94740	0,94646	0,94552	71
19	0,94552	0,94457	0,94361	0,94264	0,94167	0,94068	0,93969	70
20	0,93969	0,93869	0,93769	0,93667	0,93565	0,93462	0,93358	69
21	0,93358	0,93253	0,93148	0,93042	0,92935	0,92827	0,92718	68
22	0,92718	0,92609	0,92499	0,92388	0,92276	0,92164	0,92050	67
23	0,92050	0,91936	0,91822	0,91706	0,91590	0,91472	0,91355	66
24	0,91355	0,91236	0,91116	0,90996	0,90875	0,90753	0,90631	65
25	0,90631	0,90507	0,90383	0,90259	0,90133	0,90007	0,89879	64
26	0,89879	0,89752	0,89623	0,89493	0,89363	0,89232	0,89101	63
27	0,89101	0,88968	0,88835	0,88701	0,88566	0,88431	0,88295	62
28	0,88295	0,88158	0,88020	0,87882	0,87743	0,87603	0,87462	61
29	0,87462	0,87321	0,87178	0,87036	0,86892	0,86748	0,86603	60
30	0,86603	0,86457	0,86310	0,86163	0,86015	0,85866	0,85717	59
31	0,85717	0,85567	0,85416	0,85264	0,85112	0,84959	0,84805	58
32	0,84805	0,84650	0,84495	0,84339	0,84182	0,84025	0,83867	57
33	0,83867	0,83708	0,83549	0,83389	0,83228	0,83066	0,82904	56
34	0,82904	0,82741	0,82577	0,82413	0,82248	0,82082	0,81915	55
35	0,81915	0,81748	0,81580	0,81412	0,81244	0,81072	0,80902	54
36	0,80902	0,80730	0,80558	0,80386	0,80212	0,80038	0,79864	53
37	0,79864	0,79688	0,79512	0,79335	0,79158	0,78980	0,78801	52
38	0,78801	0,78622	0,78442	0,78261	0,78079	0,77897	0,77715	51
39	0,77715	0,77531	0,77347	0,77162	0,76977	0,76791	0,76604	50
40	0,76604	0,76417	0,76229	0,76041	0,75851	0,75661	0,75471	49
41	0,75471	0,75280	0,75088	0,74896	0,74703	0,74509	0,74314	48
42	0,74314	0,74120	0,73924	0,73728	0,73531	0,73333	0,73135	47
43	0,73135	0,72937	0,72737	0,72537	0,72337	0,72136	0,71934	46
44	0,71934	0,71732	0,71529	0,71325	0,71121	0,70916	0,70711	45
	60'	50'	40'	30'	20'	10'	0'	
Sinus								Grad

Grad	Tangens							Grad
	0'	10'	20'	30'	40'	50'	60'	
0	0,00000	0,00291	0,00582	0,00873	0,01164	0,01455	0,01746	89
1	0,01746	0,02036	0,02328	0,02619	0,02910	0,03201	0,03492	88
2	0,03492	0,03783	0,04075	0,04366	0,04658	0,04949	0,05241	87
3	0,05241	0,05533	0,05824	0,06116	0,06408	0,06700	0,06993	86
4	0,06993	0,07285	0,07578	0,07870	0,08163	0,08456	0,08749	85
5	0,08749	0,09042	0,09335	0,09629	0,09923	0,10216	0,10510	84
6	0,10510	0,10805	0,11099	0,11394	0,11688	0,11983	0,12278	83
7	0,12278	0,12574	0,12869	0,13165	0,13461	0,13758	0,14054	82
8	0,14054	0,14351	0,14648	0,14945	0,15243	0,15540	0,15838	81
9	0,15838	0,16137	0,16435	0,16734	0,17033	0,17333	0,17633	80
10	0,17633	0,17933	0,18233	0,18534	0,18835	0,19136	0,19438	79
11	0,19438	0,19740	0,20042	0,20345	0,20648	0,20952	0,21256	78
12	0,21256	0,21560	0,21864	0,22169	0,22475	0,22781	0,23087	77
13	0,23087	0,23393	0,23700	0,24008	0,24316	0,24624	0,24933	76
14	0,24933	0,25242	0,25552	0,25862	0,26172	0,26483	0,26795	75
15	0,26795	0,27107	0,27419	0,27732	0,28046	0,28360	0,28675	74
16	0,28675	0,28990	0,29305	0,29621	0,29938	0,30255	0,30573	73
17	0,30573	0,30891	0,31210	0,31530	0,31850	0,32171	0,32492	72
18	0,32492	0,32814	0,33136	0,33460	0,33783	0,34108	0,34433	71
19	0,34433	0,34758	0,35085	0,35412	0,35740	0,36068	0,36397	70
20	0,36397	0,36727	0,37057	0,37388	0,37720	0,38053	0,38386	69
21	0,38386	0,38721	0,39055	0,39391	0,39727	0,40065	0,40403	68
22	0,40403	0,40741	0,41081	0,41421	0,41763	0,42105	0,42447	67
23	0,42447	0,42791	0,43136	0,43481	0,43828	0,44175	0,44523	66
24	0,44523	0,44872	0,45222	0,45573	0,45924	0,46277	0,46631	65
25	0,46631	0,46985	0,47341	0,47698	0,48055	0,48414	0,48773	64
26	0,48773	0,49134	0,49495	0,49858	0,50222	0,50587	0,50953	63
27	0,50953	0,51320	0,51688	0,52057	0,52427	0,52798	0,53171	62
28	0,53171	0,53545	0,53920	0,54296	0,54673	0,55051	0,55431	61
29	0,55431	0,55812	0,56194	0,56577	0,56962	0,57348	0,57735	60
30	0,57735	0,58124	0,58513	0,58905	0,59297	0,59691	0,60086	59
31	0,60086	0,60483	0,60881	0,61280	0,61681	0,62083	0,62487	58
32	0,62487	0,62892	0,63299	0,63707	0,64117	0,64528	0,64941	57
33	0,64941	0,65355	0,65771	0,66189	0,66608	0,67028	0,67451	56
34	0,67451	0,67875	0,68301	0,68728	0,69157	0,69588	0,70021	55
35	0,70021	0,70455	0,70891	0,71329	0,71769	0,72211	0,72654	54
36	0,72654	0,73100	0,73547	0,73996	0,74447	0,74900	0,75355	53
37	0,75355	0,75812	0,76272	0,76733	0,77196	0,77661	0,78129	52
38	0,78129	0,78598	0,79070	0,79544	0,80020	0,80498	0,80978	51
39	0,80978	0,81461	0,81946	0,82434	0,82923	0,83415	0,83910	50
40	0,83910	0,84407	0,84906	0,85408	0,85912	0,86419	0,86929	49
41	0,86929	0,87441	0,87955	0,88473	0,88992	0,89515	0,90040	48
42	0,90040	0,90569	0,91099	0,91633	0,92170	0,92709	0,93252	47
43	0,93252	0,93797	0,94345	0,94896	0,95451	0,96008	0,96569	46
44	0,96569	0,97133	0,97700	0,98270	0,98843	0,99420	1,00000	45
	60'	50'	40'	30'	20'	10'	0'	Grad
Cotangens								

Grad	Cotangens							Grad
	0'	10'	20'	30'	40'	50'	60'	
0	∞	343,77371	171,88540	114,58865	85,93979	68,75009	57,28996	89
1	57,28996	49,10388	42,96408	38,18846	34,36777	31,24158	28,63625	88
2	28,63625	26,43160	24,54176	22,90377	21,47040	20,20555	19,08114	87
3	19,08114	18,07498	17,16934	16,34986	15,60478	14,92442	14,30067	86
4	14,30067	13,72674	13,19688	12,70621	12,25051	11,82617	11,43005	85
5	11,43005	11,05943	10,71191	10,38540	10,07803	9,78817	9,51436	84
6	9,51436	9,25530	9,00983	8,77689	8,55555	8,34496	8,14435	83
7	8,14435	7,95302	7,77035	7,59575	7,42871	7,26873	7,11537	82
8	7,11537	6,96823	6,82694	6,69116	6,56055	6,43484	6,31375	81
9	6,31375	6,19703	6,08444	5,97576	5,87080	5,76937	5,67128	80
10	5,67128	5,57638	5,48451	5,39552	5,30928	5,22566	5,14455	79
11	5,14455	5,06584	4,98940	4,91516	4,84300	4,77286	4,70463	78
12	4,70463	4,63825	4,57363	4,51071	4,44942	4,38969	4,33148	77
13	4,33148	4,27471	4,21933	4,16530	4,11266	4,06107	4,01078	76
14	4,01078	3,96165	3,91364	3,86671	3,82083	3,77595	3,73205	75
15	3,73205	3,68909	3,64705	3,60588	3,56557	3,52609	3,48741	74
16	3,48741	3,44951	3,41236	3,37594	3,34023	3,30521	3,27085	73
17	3,27085	3,23714	3,20406	3,17159	3,13972	3,10842	3,07768	72
18	3,07768	3,04749	3,01783	2,98869	2,96004	2,93189	2,90421	71
19	2,90421	2,87700	2,85023	2,82391	2,79802	2,77254	2,74748	70
20	2,74748	2,72281	2,69853	2,67462	2,65109	2,62791	2,60509	69
21	2,60509	2,58261	2,56046	2,53865	2,51715	2,49597	2,47509	68
22	2,47509	2,45451	2,43422	2,41421	2,39449	2,37504	2,35585	67
23	2,35585	2,33693	2,31826	2,29984	2,28167	2,26374	2,24604	66
24	2,24604	2,22857	2,21132	2,19430	2,17749	2,16090	2,14451	65
25	2,14451	2,12832	2,11233	2,09654	2,08094	2,06553	2,05030	64
26	2,05030	2,03526	2,02039	2,00569	1,99116	1,97680	1,96261	63
27	1,96261	1,94858	1,93470	1,92098	1,90741	1,89400	1,88073	62
28	1,88073	1,86760	1,85462	1,84177	1,82906	1,81649	1,80405	61
29	1,80405	1,79174	1,77955	1,76749	1,75556	1,74375	1,73205	60
30	1,73205	1,72047	1,70901	1,69766	1,68643	1,67530	1,66428	59
31	1,66428	1,65337	1,64256	1,63185	1,62125	1,61074	1,60033	58
32	1,60033	1,59002	1,57981	1,56969	1,55966	1,54972	1,53987	57
33	1,53987	1,53010	1,52043	1,51084	1,50133	1,49190	1,48256	56
34	1,48256	1,47330	1,46411	1,45501	1,44598	1,43703	1,42815	55
35	1,42815	1,41934	1,41061	1,40195	1,39336	1,38484	1,37638	54
36	1,37638	1,36800	1,35968	1,35142	1,34323	1,33511	1,32704	53
37	1,32704	1,31904	1,31110	1,30323	1,29541	1,28764	1,27994	52
38	1,27994	1,27230	1,26471	1,25717	1,24969	1,24227	1,23490	51
39	1,23490	1,22758	1,22031	1,21310	1,20593	1,19882	1,19175	50
40	1,19175	1,18474	1,17777	1,17085	1,16398	1,15715	1,15037	49
41	1,15037	1,14363	1,13694	1,13029	1,12369	1,11713	1,11061	48
42	1,11061	1,10414	1,09770	1,09131	1,08496	1,07864	1,07237	47
43	1,07237	1,06613	1,05994	1,05378	1,04766	1,04158	1,03553	46
44	1,03553	1,02952	1,02355	1,01761	1,01170	1,00583	1,00000	45
	60'	50'	40'	30'	20'	10'	0'	
Tangens								

## D. Tafeln der Hyperbelfunktionen.

Hyperbelfunktion  $\text{Sin } \varphi = \frac{1}{2}(e^\varphi - e^{-\varphi})$  für  $\varphi = 0$  bis  $5,09$ .

$\varphi$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D
0,0	0,0000	0100	0200	0300	0400	0500	0600	0701	0801	0901	101
0,1	0,1002	1102	1203	1304	1405	1506	1607	1708	1810	1911	102
0,2	0,2013	2115	2218	2320	2423	2526	2629	2733	2837	2941	104
0,3	0,3045	3150	3255	3360	3466	3572	3678	3785	3892	4000	108
0,4	0,4108	4216	4325	4434	4543	4653	4764	4875	4986	5098	113
0,5	0,5211	5324	5438	5552	5666	5782	5897	6014	6131	6248	119
0,6	0,6367	6485	6605	6725	6846	6967	7090	7213	7336	7461	125
0,7	0,7586	7712	7838	7966	8094	8223	8353	8484	8615	8748	133
0,8	0,8881	9015	9150	9286	9423	9561	9700	9840	9981	0122*	143
0,9	1,0265	0409	0554	0700	0847	0995	1144	1294	1446	1598	154
1,0	1,1752	1907	2063	2220	2379	2539	2700	2862	3025	3190	166
1,1	1,3356	3524	3693	3863	4035	4208	4382	4558	4735	4914	181
1,2	1,5095	5276	5460	5645	5831	6019	6209	6400	6593	6788	196
1,3	1,6984	7182	7381	7583	7786	7991	8198	8406	8617	8829	214
1,4	1,9043	9259	9477	9697	9919	0143*	0369*	0597*	0827*	1059*	234
1,5	2,1293	1529	1768	2008	2251	2496	2743	2993	3245	3499	257
1,6	2,3750	4015	4276	4540	4806	5075	5346	5620	5896	6175	281
1,7	2,6456	6740	7027	7317	7609	7904	8202	8503	8806	9112	310
1,8	2,9422	9734	0049*	0367*	0689*	1013*	1340*	1671*	2005*	2341*	341
1,9	3,2682	3025	3372	3722	4075	4432	4792	5156	5523	5894	375
2,0	3,6269	6647	7028	7414	7803	8196	8593	8993	9398	9806	413
2,1	4,0219	0635	1056	1480	1909	2342	2779	3221	3666	4117	454
2,2	4,4571	5030	5494	5962	6434	6912	7394	7880	8372	8868	502
2,3	4,9370	9876	0387*	0903*	1425*	1951*	2483*	3020*	3562*	4109*	553
2,4	5,4662	5221	5785	6354	6929	7510	8097	8689	9286	9889	610
2,5	6,0502	1118	1741	2369	3004	3645	4293	4946	5607	6274	673
2,6	6,6947	7628	8315	9009	9709	0417*	1132*	1854*	2583*	3319*	744
2,7	7,4063	4814	5572	6338	7112	7894	8683	9480	0285*	1098*	821
2,8	8,1919	2749	3586	4432	5287	6150	7021	7902	8791	9689	907
2,9	9,0596	1512	2437	3371	4315	5268	6231	7203	8185	9177	1002
3,0	10,0179	1191	2212	3245	4287	5340	6403	7477	8562	9658	1107
3,1	11,0765	1882	3011	4151	5303	6466	7641	8827	0026*	1236*	1223
3,2	12,2459	3694	4941	6201	7473	8758	0056*	1367*	2691*	4028*	1351
3,3	13,5379	6743	8121	9513	0919*	2338*	3772*	5221*	6684*	8161*	1493
3,4	14,9665	15,116	15,268	15,422	15,577	15,734	15,893	16,053	16,214	16,378	165
3,5	16,543	16,709	16,877	17,047	17,219	17,392	17,567	17,744	17,923	18,103	182
3,6	18,285	18,470	18,655	18,843	19,033	19,224	19,418	19,613	19,811	20,010	201
3,7	20,211	20,415	20,620	20,828	21,037	21,249	21,463	21,679	21,897	22,117	222
3,8	22,339	22,564	22,791	23,020	23,252	23,486	23,722	23,961	24,202	24,445	246
3,9	24,691	24,939	25,190	25,444	25,700	25,958	26,219	26,483	26,749	27,018	272
4,0	27,290	27,564	27,842	28,122	28,404	28,690	28,979	29,270	29,564	29,862	300
4,1	30,162	30,465	30,772	31,081	31,393	31,709	32,028	32,350	32,675	33,004	332
4,2	33,336	33,671	34,009	34,351	34,697	35,046	35,398	35,754	36,113	36,476	367
4,3	36,843	37,214	37,588	37,966	38,347	38,733	39,122	39,515	39,913	40,314	405
4,4	40,719	41,129	41,542	41,960	42,382	42,808	43,238	43,673	44,112	44,555	448
4,5	45,003	45,455	45,912	46,374	46,840	47,311	47,787	48,267	48,752	49,242	495
4,6	49,737	50,237	50,742	51,252	51,767	52,288	52,813	53,344	53,880	54,422	547
4,7	54,969	55,522	56,080	56,643	57,213	57,788	58,369	58,955	59,548	60,147	604
4,8	60,751	61,362	61,979	62,601	63,231	63,866	64,508	65,157	65,812	66,473	668
4,9	67,141	67,816	68,498	69,186	69,882	70,584	71,293	72,009	72,734	73,465	738
5,0	74,203	74,949	75,702	76,463	77,232	78,008	78,792	79,584	80,384	81,192	816

Hyperbelfunktion  $\text{Co}f \varphi = \frac{1}{2} (e^\varphi + e^{-\varphi})$  für  $\varphi = 0$  bis 5,09.

$\varphi$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D
0,0	1,0000	0001	0002	0005	0008	0013	0018	0025	0032	0041	9
0,1	1,0050	0061	0072	0085	0098	0113	0128	0145	0162	0181	20
0,2	1,0201	0221	0243	0266	0289	0314	0340	0367	0395	0423	30
0,3	1,0453	0484	0516	0549	0584	0619	0655	0692	0731	0770	41
0,4	1,0811	0852	0895	0939	0984	1030	1077	1125	1174	1225	51
0,5	1,1276	1329	1383	1438	1494	1551	1609	1669	1730	1792	63
0,6	1,1855	1919	1984	2051	2119	2188	2258	2330	2402	2476	76
0,7	1,2552	2628	2706	2785	2865	2947	3030	3114	3199	3286	88
0,8	1,3374	3464	3555	3647	3740	3835	3932	4029	4128	4229	102
0,9	1,4331	4434	4539	4645	4753	4862	4973	5085	5199	5314	117
1,0	1,5431	5549	5669	5790	5913	6038	6164	6292	6421	6552	133
1,1	1,6685	6820	6956	7093	7233	7374	7517	7662	7808	7956	151
1,2	1,8107	8258	8412	8568	8725	8884	9045	9208	9373	9540	169
1,3	1,9709	9880	0053*	0228*	0404*	0583*	0764*	0947*	1132*	1320*	189
1,4	2,1509	1700	1894	2090	2288	2488	2691	2896	3103	3312	212
1,5	2,3524	3738	3955	4174	4395	4619	4845	5073	5305	5538	237
1,6	2,5775	6013	6255	6499	6746	6995	7247	7502	7760	8020	263
1,7	2,8283	8549	8818	9090	9364	9642	9922	0206*	0492*	0782*	293
1,8	3,1075	1371	1669	1972	2277	2585	2897	3212	3530	3852	325
1,9	3,4177	4506	4838	5173	5512	5855	6201	6551	6904	7261	361
2,0	3,7622	7987	8355	8727	9103	9483	9867	0255*	0647*	1043*	400
2,1	4,1443	1847	2256	2668	3085	3507	3932	4362	4797	5236	443
2,2	4,5679	6127	6580	7037	7499	7966	8437	8914	9395	9881	491
2,3	5,0372	0868	1370	1876	2388	2905	3427	3954	4487	5026	543
2,4	5,5569	6119	6674	7235	7801	8373	8951	9535	0125*	0721*	602
2,5	6,1323	1921	2545	3166	3793	4426	5066	5712	6365	7024	666
2,6	6,7690	8363	9043	9729	0423*	1123*	1831*	2546*	3268*	3998*	737
2,7	7,4735	5479	6231	6990	7758	8533	9316	0106*	0905*	1712*	815
2,8	8,2527	3351	4182	5022	5872	6728	7594	8469	9352	0244*	902
2,9	9,1146	2056	2976	3905	4844	5791	6749	7716	8693	9680	998
3,0	10,0678	1683	2700	3728	4765	5813	6872	7942	9022	0113*	1102
3,1	11,1215	2328	3453	4588	5736	6895	8065	9247	0442*	1648*	1218
3,2	12,2866	4097	5340	6596	7864	9146	0440*	1747*	3067*	4402*	1347
3,3	13,5748	7108	8482	9871	1273*	1679*	2100*	2536*	3087*	3754*	1489
3,4	14,9999	15,149	15,301	15,455	15,610	15,766	15,922	16,084	16,245	16,408	165
3,5	16,573	16,739	16,907	17,077	17,248	17,421	17,596	17,772	17,951	18,131	182
3,6	18,313	18,497	18,682	18,870	19,059	19,250	19,441	19,639	19,836	20,035	201
3,7	20,236	20,439	20,644	20,852	21,061	21,272	21,486	21,702	21,919	22,139	222
3,8	22,362	22,586	22,813	23,042	23,273	23,507	23,743	23,982	24,222	24,466	245
3,9	24,711	24,959	25,210	25,463	25,719	25,977	26,238	26,502	26,768	27,037	271
4,0	27,308	27,582	27,860	28,139	28,422	28,707	28,996	29,287	29,581	29,878	300
4,1	30,178	30,482	30,788	31,097	31,409	31,725	32,044	32,365	32,691	33,019	332
4,2	33,351	33,686	34,024	34,366	34,711	35,060	35,412	35,768	36,127	36,490	367
4,3	36,857	37,227	37,601	37,979	38,360	38,746	39,125	39,528	39,925	40,326	406
4,4	40,732	41,141	41,554	41,972	42,393	42,819	43,250	43,684	44,123	44,566	448
4,5	45,074	45,466	45,892	46,325	46,851	47,327	47,797	48,277	48,762	49,252	495
4,6	49,747	50,247	50,752	51,262	51,777	52,297	52,823	53,354	53,890	54,431	547
4,7	54,978	55,531	56,089	56,652	57,221	57,796	58,377	58,964	59,556	60,155	604
4,8	60,759	61,370	61,987	62,609	63,239	63,874	64,516	65,164	65,819	66,481	668
4,9	67,149	67,823	68,505	69,193	69,889	70,591	71,300	72,017	72,741	73,472	738
5,0	74,210	74,956	75,709	76,470	77,238	78,014	78,798	79,590	80,390	81,198	816

**Briggsche Logarithmen der Hyperbelfunktion  $\text{Ein } \varphi$**   
für  $\varphi = 0$  bis  $5,09$ ; um 10 vergrößert.

$\varphi$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D
0,0	—∞	8,0000	3011	4772	6022	6992	7784	8455	9036	9548	459
0,1	9,0007	0423	0802	1152	1475	1777	2060	2325	2576	2814	225
0,2	9,3039	3254	3459	3656	3844	4025	4199	4366	4528	4685	151
0,3	9,4836	4983	5125	5264	5398	5529	5656	5781	5902	6020	116
0,4	9,6136	6249	6359	6468	6574	6678	6780	6880	6978	7074	95
0,5	9,7169	7262	7354	7444	7533	7620	7707	7791	7875	7958	81
0,6	9,8039	8119	8199	8277	8354	8431	8506	8581	8655	8728	72
0,7	9,8800	8872	8942	9012	9082	9150	9218	9286	9353	9419	66
0,8	9,9485	9550	9614	9678	9742	9805	9868	9930	9992	0053*	61
0,9	10,0114	0174	0234	0294	0353	0412	0470	0529	0586	0644	57
1,0	10,0701	0758	0815	0871	0927	0982	1038	1093	1148	1203	54
1,1	10,1257	1311	1365	1419	1472	1525	1578	1631	1684	1736	52
1,2	10,1788	1840	1892	1944	1995	2046	2098	2148	2199	2250	50
1,3	10,2300	2351	2401	2451	2501	2551	2600	2650	2699	2748	49
1,4	10,2797	2846	2895	2944	2993	3041	3090	3138	3186	3234	48
1,5	10,3282	3330	3378	3426	3474	3521	3569	3616	3663	3711	47
1,6	10,3758	3805	3852	3899	3946	3992	4039	4086	4132	4179	46
1,7	10,4225	4272	4318	4364	4411	4457	4503	4549	4595	4641	46
1,8	10,4687	4733	4778	4824	4870	4915	4961	5007	5052	5098	45
1,9	10,5143	5188	5234	5279	5324	5370	5415	5460	5505	5550	45
2,0	10,5595	5640	5685	5730	5775	5820	5865	5910	5955	6000	45
2,1	10,6044	6089	6134	6178	6223	6268	6312	6357	6401	6446	45
2,2	10,6491	6535	6580	6624	6668	6713	6757	6802	6846	6890	45
2,3	10,6935	6979	7023	7067	7112	7156	7200	7244	7289	7333	44
2,4	10,7377	7421	7465	7509	7553	7597	7642	7686	7730	7774	44
2,5	10,7818	7862	7906	7950	7994	8038	8082	8126	8169	8213	44
2,6	10,8257	8301	8345	8389	8433	8477	8521	8564	8608	8652	44
2,7	10,8696	8740	8784	8827	8871	8915	8959	9003	9046	9090	44
2,8	10,9134	9178	9221	9265	9309	9353	9396	9440	9484	9527	44
2,9	10,9571	9615	9658	9702	9746	9789	9833	9877	9920	9964	44
3,0	11,0008	0051	0095	0139	0182	0226	0270	0313	0357	0400	44
3,1	11,0444	0488	0531	0575	0618	0662	0706	0749	0793	0836	44
3,2	11,0880	0923	0967	1011	1054	1098	1141	1185	1228	1272	44
3,3	11,1316	1359	1403	1446	1490	1533	1577	1620	1664	1707	44
3,4	11,1751	1794	1838	1881	1925	1968	2012	2056	2099	2143	43
3,5	11,2186	2230	2273	2317	2360	2404	2447	2491	2534	2578	43
3,6	11,2621	2665	2708	2752	2795	2839	2882	2925	2969	3012	44
3,7	11,3056	3099	3143	3186	3230	3273	3317	3360	3404	3447	44
3,8	11,3491	3534	3578	3621	3665	3708	3752	3795	3838	3882	43
3,9	11,3925	3969	4012	4056	4099	4143	4186	4230	4273	4317	43
4,0	11,4360	4403	4447	4490	4534	4577	4621	4664	4708	4751	44
4,1	11,4795	4838	4881	4925	4968	5012	5055	5099	5142	5186	43
4,2	11,5229	5273	5316	5359	5403	5446	5490	5533	5577	5620	44
4,3	11,5664	5707	5750	5794	5837	5881	5924	5968	6011	6055	43
4,4	11,6098	6141	6185	6228	6272	6315	6359	6402	6446	6489	43
4,5	11,6532	6576	6619	6663	6706	6750	6793	6836	6880	6923	44
4,6	11,6967	7010	7054	7097	7141	7184	7227	7271	7314	7358	43
4,7	11,7401	7445	7488	7531	7575	7618	7662	7705	7749	7792	44
4,8	11,7836	7879	7922	7966	8009	8053	8096	8140	8183	8226	44
4,9	11,8270	8313	8357	8400	8444	8487	8530	8574	8617	8661	43
5,0	11,8704	8748	8791	8835	8878	8921	8965	9008	9052	9095	43

**Briggssche Logarithmen der Hyperbelfunktion  $\coth \varphi$**   
für  $\varphi = 0$  bis 5,00.

$\varphi$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D
0,0	0,0000	0000	0001	0002	0003	0005	0008	0011	0014	0018	4
0,1	0,0022	0026	0031	0037	0042	0049	0055	0062	0070	0078	8
0,2	0,0086	0095	0104	0114	0124	0134	0145	0156	0168	0180	13
0,3	0,0193	0205	0219	0232	0246	0261	0276	0291	0306	0322	17
0,4	0,0339	0355	0372	0390	0407	0426	0444	0463	0482	0502	20
0,5	0,0522	0542	0562	0583	0605	0626	0648	0670	0693	0716	23
0,6	0,0739	0762	0786	0810	0835	0859	0884	0910	0935	0961	26
0,7	0,0987	1013	1040	1067	1094	1122	1149	1177	1206	1234	29
0,8	0,1263	1292	1321	1350	1380	1410	1440	1470	1501	1532	31
0,9	0,1563	1594	1625	1657	1689	1721	1753	1785	1818	1851	33
1,0	0,1884	1917	1950	1984	2018	2051	2086	2120	2154	2189	34
1,1	0,2223	2258	2293	2328	2364	2399	2435	2470	2506	2542	36
1,2	0,2578	2615	2651	2688	2724	2761	2798	2835	2872	2909	38
1,3	0,2947	2984	3022	3059	3097	3135	3173	3211	3249	3288	38
1,4	0,3326	3365	3403	3442	3481	3520	3559	3598	3637	3676	39
1,5	0,3715	3754	3794	3833	3873	3913	3952	3992	4032	4072	40
1,6	0,4112	4152	4192	4232	4273	4313	4353	4394	4434	4475	40
1,7	0,4515	4556	4597	4637	4678	4719	4760	4801	4842	4883	41
1,8	0,4924	4965	5006	5048	5089	5130	5172	5213	5254	5296	41
1,9	0,5337	5379	5421	5462	5504	5545	5587	5629	5671	5713	41
2,0	0,5754	5796	5838	5880	5922	5964	6006	6048	6090	6132	43
2,1	0,6175	6217	6259	6301	6343	6386	6428	6470	6512	6555	42
2,2	0,6597	6640	6682	6724	6767	6809	6852	6894	6937	6979	43
2,3	0,7022	7064	7107	7150	7192	7235	7278	7320	7363	7406	42
2,4	0,7448	7491	7534	7577	7619	7662	7705	7748	7791	7833	43
2,5	0,7876	7919	7962	8005	8048	8091	8134	8176	8219	8262	43
2,6	0,8305	8348	8391	8434	8477	8520	8563	8606	8649	8692	43
2,7	0,8735	8778	8821	8864	8907	8951	8994	9037	9080	9123	43
2,8	0,9166	9209	9252	9295	9338	9382	9425	9468	9511	9554	43
2,9	0,9597	9641	9684	9727	9770	9813	9856	9900	9943	9986	43
3,0	1,0029	0073	0116	0159	0202	0245	0289	0332	0375	0418	44
3,1	1,0462	0505	0548	0591	0635	0678	0721	0764	0808	0851	43
3,2	1,0894	0938	0981	1024	1067	1111	1154	1197	1241	1284	43
3,3	1,1327	1371	1414	1457	1501	1544	1587	1631	1674	1717	44
3,4	1,1761	1804	1847	1891	1934	1977	2021	2064	2107	2151	43
3,5	1,2194	2237	2281	2324	2367	2411	2454	2497	2541	2584	44
3,6	1,2628	2671	2714	2758	2801	2844	2888	2931	2974	3018	43
3,7	1,3061	3105	3148	3191	3235	3278	3322	3365	3408	3452	43
3,8	1,3495	3538	3582	3625	3669	3712	3755	3799	3842	3886	43
3,9	1,3929	3972	4016	4059	4103	4146	4189	4233	4276	4320	43
4,0	1,4363	4406	4450	4493	4537	4580	4623	4667	4710	4754	43
4,1	1,4797	4840	4884	4927	4971	5014	5057	5101	5144	5188	43
4,2	1,5231	5274	5318	5361	5405	5448	5492	5535	5578	5622	43
4,3	1,5665	5709	5752	5795	5839	5882	5926	5969	6012	6056	43
4,4	1,6099	6143	6186	6230	6273	6316	6360	6403	6447	6490	43
4,5	1,6533	6577	6620	6664	6707	6751	6794	6837	6881	6924	44
4,6	1,6968	7011	7055	7098	7141	7185	7228	7272	7315	7358	44
4,7	1,7402	7445	7489	7532	7576	7619	7662	7706	7749	7793	43
4,8	1,7836	7880	7923	7966	8010	8053	8097	8140	8184	8227	43
4,9	1,8270	8314	8357	8401	8444	8487	8531	8574	8618	8661	44
5,0	1,8705	8748	8791	8835	8878	8922	8965	9009	9052	9095	43

Hyperbelfunktion  $\mathfrak{L}\varphi$  für  $\varphi = 0$  bis  $2,39$ .

$\varphi$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D
0,0	0,0000	0100	0200	0300	0400	0500	0599	0699	0798	0898	99
0,1	0,0997	1096	1194	1293	1391	1489	1587	1684	1781	1878	96
0,2	0,1974	2070	2165	2260	2355	2449	2543	2636	2729	2821	92
0,3	0,2943	3004	3095	3185	3275	3364	3452	3540	3627	3714	86
0,4	0,3800	3885	3969	4053	4137	4219	4301	4382	4462	4542	79
0,5	0,4621	4700	4777	4854	4930	5005	5080	5154	5227	5299	71
0,6	0,5370	5441	5511	5581	5649	5717	5784	5850	5915	5980	64
0,7	0,6044	6107	6169	6231	6291	6352	6411	6469	6527	6584	56
0,8	0,6640	6696	6751	6805	6858	6911	6963	7014	7064	7114	49
0,9	0,7163	7211	7259	7306	7352	7398	7443	7487	7531	7574	42
1,0	0,7616	7658	7699	7739	7779	7818	7857	7895	7932	7969	36
1,1	0,8005	8041	8076	8110	8144	8178	8210	8243	8275	8306	31
1,2	0,8337	8367	8397	8426	8455	8483	8511	8538	8565	8591	26
1,3	0,8617	8643	8668	8693	8717	8741	8764	8787	8810	8832	22
1,4	0,8854	8875	8896	8917	8937	8957	8977	8996	9015	9033	19
1,5	0,9052	9069	9087	9104	9121	9138	9154	9170	9186	9202	15
1,6	0,9217	9232	9246	9261	9275	9289	9302	9316	9329	9342	12
1,7	0,9354	9367	9379	9391	9402	9414	9425	9436	9447	9458	10
1,8	0,9468	9478	9488	9498	9508	9518	9527	9536	9545	9554	8
1,9	0,9562	9571	9579	9587	9595	9603	9611	9619	9626	9633	7
2,0	0,9640	9647	9654	9661	9668	9674	9680	9687	9693	9699	6
2,1	0,9705	9710	9716	9722	9727	9732	9738	9743	9748	9753	5
2,2	0,9757	9762	9767	9771	9776	9780	9785	9789	9793	9797	4
2,3	0,9801	9805	9809	9812	9816	9820	9823	9827	9830	9834	3

Briggsche Logarithmen der Hyperbelfunktion  $\mathfrak{L}\varphi$   
für  $\varphi = 0$  bis  $2,39$ ; um 10 vergrößert.

$\varphi$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D
0,0	— ∞	8,0000	3010	4770	6018	6986	7776	8444	9022	9531	455
0,1	8,9986	0396*	0771*	1115*	1433*	1729*	2004*	2263*	2506*	2736*	217
0,2	9,2953	3159	3355	3542	3720	3890	4053	4210	4360	4505	139
0,3	9,4644	4778	4907	5031	5152	5268	5381	5490	5596	5698	99
0,4	9,5797	5894	5987	6078	6166	6252	6336	6417	6496	6573	75
0,5	9,6648	6720	6792	6861	6928	6994	7058	7121	7182	7242	58
0,6	9,7300	7357	7413	7467	7520	7571	7622	7671	7720	7767	46
0,7	9,7813	7858	7902	7945	7988	8029	8069	8109	8147	8185	37
0,8	9,8222	8258	8293	8328	8362	8395	8428	8459	8491	8521	30
0,9	9,8551	8580	8609	8637	8664	8691	8717	8743	8768	8793	24
1,0	9,8817	8841	8864	8887	8909	8931	8952	8973	8994	9014	20
1,1	9,9034	9053	9072	9090	9108	9126	9144	9161	9177	9194	16
1,2	9,9210	9226	9241	9256	9271	9285	9300	9314	9327	9341	13
1,3	9,9354	9367	9379	9391	9404	9415	9427	9438	9450	9460	11
1,4	9,9471	9482	9492	9502	9512	9522	9531	9540	9550	9558	9
1,5	9,9567	9576	9584	9592	9601	9608	9616	9624	9631	9639	7
1,6	9,9646	9653	9660	9666	9673	9679	9686	9692	9698	9704	6
1,7	9,9710	9716	9721	9727	9732	9738	9743	9748	9753	9758	5
1,8	9,9763	9767	9772	9776	9781	9785	9789	9794	9798	9802	4
1,9	9,9806	9810	9813	9817	9821	9824	9828	9831	9834	9838	3
2,0	9,9841	9844	9847	9850	9853	9856	9859	9862	9864	9867	3
2,1	9,9870	9872	9875	9877	9880	9882	9884	9887	9889	9891	2
2,2	9,9893	9895	9898	9900	9902	9904	9905	9907	9909	9911	2
2,3	9,9913	9914	9916	9918	9919	9921	9923	9924	9926	9927	2

E. Kugelinhalte für die Durchmesser  $d = 1$  bis 200.

$d$	$\frac{\pi}{6} d^3$								
1	0,523599	41	36086,95	81	278261,8	121	927587,2	161	2185125
2	4,188790	42	38792,39	82	288695,6	122	950775,8	162	2226094
3	14,13717	43	41629,77	83	299387,0	123	974347,7	163	2267574
4	33,51032	44	44602,24	84	310339,1	124	998305,9	164	2309565
5	65,44985	45	47712,94	85	321555,1	125	1022654	165	2352071
6	113,0973	46	50965,01	86	333038,2	126	1047394	166	2395096
7	179,5944	47	54361,60	87	344791,4	127	1072531	167	2438642
8	268,0826	48	57905,84	88	356817,9	128	1098066	168	2482713
9	381,7035	49	61600,87	89	369120,9	129	1124004	169	2527311
10	523,5988	50	65449,85	90	381703,5	130	1150347	170	2572441
11	696,9100	51	69455,91	91	394568,9	131	1177098	171	2618104
12	904,7787	52	73622,18	92	407720,1	132	1204260	172	2664305
13	1150,347	53	77951,81	93	421160,3	133	1231838	173	2711046
14	1436,755	54	82447,92	94	434892,8	134	1259833	174	2758331
15	1767,146	55	87113,75	95	448920,5	135	1288249	175	2806162
16	2144,660	56	91952,32	96	463246,7	136	1317090	176	2854543
17	2572,441	57	96966,83	97	477874,5	137	1346357	177	2903477
18	3053,628	58	102160,4	98	492807,0	138	1376055	178	2952967
19	3591,364	59	107536,2	99	508047,4	139	1406187	179	3003006
20	4188,790	60	113097,3	100	523598,8	140	1436755	180	3053628
21	4849,048	61	118847,0	101	539464,3	141	1467763	181	3104805
22	5575,280	62	124788,2	102	555647,2	142	1499214	182	3156551
23	6370,626	63	130924,3	103	572150,5	143	1531112	183	3208869
24	7238,229	64	137258,2	104	588977,4	144	1563457	184	3261761
25	8181,231	65	143793,3	105	606131,0	145	1596256	185	3315231
26	9202,772	66	150532,6	106	623614,5	146	1629511	186	3369282
27	10305,99	67	157479,1	107	641431,0	147	1663224	187	3423919
28	11494,04	68	164636,2	108	659583,7	148	1697398	188	3479142
29	12770,05	69	172006,9	109	678075,6	149	1732038	189	3534956
30	14137,17	70	179594,4	110	696910,0	150	1767146	190	3591364
31	15598,53	71	187401,8	111	716090,0	151	1802725	191	3648369
32	17157,28	72	195432,2	112	735618,6	152	1838778	192	3705973
33	18816,57	73	203688,8	113	755499,1	153	1875309	193	3764181
34	20579,53	74	212174,8	114	775734,6	154	1912321	194	3822996
35	22449,30	75	220893,2	115	796328,3	155	1949816	195	3882419
36	24429,02	76	229847,3	116	817283,2	156	1987799	196	3942456
37	26521,85	77	239040,1	117	838602,7	157	2026271	197	4003108
38	28730,91	78	248474,9	118	860289,5	158	2065237	198	4064379
39	31059,36	79	258154,6	119	882347,3	159	2104699	199	4126272
40	33510,32	80	268082,6	120	904778,7	160	2144660	200	4188790

**F. Bogenlängen, Bogenhöhen,**

Zentriwinkel in Grad	Bogen- länge $l$	Bogen- höhe $h$	$\frac{l}{h}$	Sehnen- länge $s$	Inhalt des Kreis- abschn.	Zentriwinkel in Grad	Bogen- länge $l$	Bogen- höhe $h$	$\frac{l}{h}$	Sehnen- länge $s$	Inhalt des Kreis- abschn.
1	0,0175	0,0000	458,36	0,0175	0,00000	46	0,8029	0,0795	10,10	0,7815	0,04176
2	0,0349	0,0002	229,19	0,0349	0,00000	47	0,8203	0,0829	9,99	0,7975	0,04448
3	0,0524	0,0003	152,79	0,0524	0,00001	48	0,8378	0,0865	9,99	0,8135	0,04731
4	0,0698	0,0006	114,60	0,0698	0,00003	49	0,8552	0,0900	9,50	0,8294	0,05025
5	0,0873	0,0010	91,69	0,0872	0,00006	50	0,8727	0,0937	9,31	0,8452	0,05331
6	0,1047	0,0014	76,41	0,1047	0,00010	51	0,8901	0,0974	9,14	0,8610	0,05649
7	0,1222	0,0019	64,01	0,1221	0,00015	52	0,9076	0,1012	8,97	0,8767	0,05978
8	0,1396	0,0024	56,01	0,1395	0,00023	53	0,9250	0,1051	8,80	0,8924	0,06319
9	0,1571	0,0031	50,96	0,1569	0,00032	54	0,9425	0,1090	8,65	0,9080	0,06673
10	0,1745	0,0038	45,87	0,1743	0,00044	55	0,9599	0,1130	8,49	0,9235	0,07039
11	0,1920	0,0046	41,70	0,1917	0,00059	56	0,9774	0,1171	8,35	0,9389	0,07417
12	0,2094	0,0055	38,23	0,2091	0,00076	57	0,9948	0,1212	8,21	0,9543	0,07808
13	0,2269	0,0064	35,28	0,2264	0,00097	58	1,0123	0,1254	8,07	0,9696	0,08212
14	0,2443	0,0075	32,78	0,2437	0,00121	59	1,0297	0,1296	7,94	0,9848	0,08629
15	0,2618	0,0086	30,60	0,2611	0,00149	60	1,0472	0,1340	7,81	1,0000	0,09059
16	0,2793	0,0097	28,04	0,2783	0,00181	61	1,0647	0,1384	7,69	1,0151	0,09502
17	0,2967	0,0110	27,01	0,2956	0,00217	62	1,0821	0,1428	7,56	1,0301	0,09958
18	0,3142	0,0123	25,35	0,3129	0,00257	63	1,0996	0,1474	7,46	1,0450	0,10428
19	0,3316	0,0137	24,17	0,3301	0,00302	64	1,1170	0,1520	7,35	1,0598	0,10911
20	0,3491	0,0152	22,98	0,3473	0,00352	65	1,1345	0,1566	7,24	1,0746	0,11408
21	0,3665	0,0167	21,95	0,3645	0,00408	66	1,1519	0,1613	7,14	1,0893	0,11919
22	0,3840	0,0184	20,90	0,3816	0,00468	67	1,1694	0,1661	7,04	1,1039	0,12443
23	0,4014	0,0201	20,00	0,3987	0,00535	68	1,1868	0,1710	6,94	1,1184	0,12982
24	0,4189	0,0219	19,17	0,4158	0,00607	69	1,2043	0,1759	6,85	1,1328	0,13535
25	0,4363	0,0237	18,47	0,4329	0,00686	70	1,2217	0,1808	6,76	1,1472	0,14102
26	0,4538	0,0256	17,71	0,4499	0,00771	71	1,2392	0,1859	6,67	1,1614	0,14683
27	0,4712	0,0276	17,06	0,4669	0,00862	72	1,2566	0,1910	6,58	1,1756	0,15279
28	0,4887	0,0297	16,45	0,4838	0,00959	73	1,2741	0,1961	6,50	1,1896	0,15889
29	0,5061	0,0319	15,89	0,5008	0,01067	74	1,2915	0,2014	6,41	1,2036	0,16514
30	0,5236	0,0341	15,37	0,5176	0,01180	75	1,3090	0,2066	6,34	1,2175	0,17154
31	0,5411	0,0364	14,88	0,5345	0,01301	76	1,3265	0,2120	6,26	1,2313	0,17808
32	0,5585	0,0387	14,42	0,5512	0,01429	77	1,3439	0,2174	6,18	1,2450	0,18477
33	0,5760	0,0412	13,99	0,5680	0,01566	78	1,3614	0,2229	6,11	1,2586	0,19160
34	0,5934	0,0437	13,58	0,5847	0,01711	79	1,3788	0,2284	6,04	1,2722	0,19859
35	0,6109	0,0463	13,20	0,6014	0,01864	80	1,3963	0,2340	5,97	1,2856	0,20573
36	0,6283	0,0489	12,84	0,6180	0,02027	81	1,4137	0,2396	5,90	1,2989	0,21301
37	0,6458	0,0517	12,50	0,6346	0,02198	82	1,4312	0,2453	5,83	1,3121	0,22045
38	0,6632	0,0545	12,17	0,6511	0,02378	83	1,4486	0,2510	5,77	1,3252	0,22804
39	0,6807	0,0574	11,87	0,6676	0,02568	84	1,4661	0,2569	5,71	1,3383	0,23578
40	0,6981	0,0603	11,58	0,6840	0,02767	85	1,4835	0,2627	5,65	1,3512	0,24367
41	0,7156	0,0633	11,30	0,7004	0,02976	86	1,5010	0,2686	5,59	1,3640	0,25171
42	0,7330	0,0664	11,04	0,7167	0,03195	87	1,5184	0,2746	5,53	1,3767	0,25990
43	0,7505	0,0696	10,78	0,7330	0,03425	88	1,5359	0,2807	5,47	1,3893	0,26825
44	0,7679	0,0728	10,55	0,7492	0,03664	89	1,5533	0,2867	5,42	1,4018	0,27675
45	0,7854	0,0761	10,32	0,7654	0,03915	90	1,5708	0,2929	5,36	1,4142	0,28540

Zu einer gegebenen Bogenlänge  $l$  und Bogenhöhe  $h$  findet man den Halbmesser  $r$  aus  $r = l : l_0$ , wo  $l_0$  die Bogenlänge ist, die beim Halbmesser 1 zu dem gegebenen  $\frac{l}{h}$  gehört. Ist  $r$  der Kreishalbmesser und  $\varphi$  der Zentriwinkel in Grad, so ergibt sich

1) die Sehnenlänge  $s = 2r \sin \frac{\varphi}{2}$

2) die Bogenhöhe  $h = r \left(1 - \cos \frac{\varphi}{2}\right) = \frac{s}{2} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{4} = 2r \sin^2 \frac{\varphi}{4}$

3) die Bogenlänge  $l = \pi r \frac{\varphi}{180} = 0,017453 r \varphi = \sqrt{s^2 + \frac{16}{3} h^2}$  (angenähert)

### Sehnenlängen und Kreisabschnitte für den Halbmesser 1.

Zentriwinkel in Grad	Bogen- länge $l$	Bogen- höhe $h$	$\frac{l}{h}$	Sehnen- länge $s$	Inhalt des Kreis- abschn.	Zentriwinkel in Grad	Bogen- länge $l$	Bogen- höhe $h$	$\frac{l}{h}$	Sehnen- länge $s$	Inhalt des Kreis- abschn.
91	1,5882	0,2991	5,31	1,4265	0,29240	136	2,3736	0,6254	3,80	1,8544	0,83949
92	1,6057	0,3053	5,26	1,4387	0,30316	137	2,3911	0,6335	3,77	1,8608	0,85455
93	1,6232	0,3116	5,21	1,4507	0,31226	138	2,4086	0,6416	3,75	1,8672	0,86911
94	1,6406	0,3180	5,16	1,4627	0,32152	139	2,4260	0,6498	3,73	1,8733	0,88497
95	1,6580	0,3244	5,11	1,4746	0,33093	140	2,4435	0,6580	3,71	1,8794	0,90034
96	1,6755	0,3309	5,06	1,4863	0,34050	141	2,4609	0,6662	3,69	1,8853	0,91580
97	1,6930	0,3374	5,02	1,4979	0,35021	142	2,4784	0,6744	3,67	1,8910	0,93135
98	1,7104	0,3439	4,97	1,5094	0,36008	143	2,4958	0,6827	3,66	1,8966	0,94700
99	1,7279	0,3506	4,93	1,5208	0,37009	144	2,5133	0,6910	3,64	1,9021	0,96274
100	1,7453	0,3572	4,89	1,5321	0,38026	145	2,5307	0,6993	3,62	1,9074	0,97858
101	1,7628	0,3639	4,84	1,5433	0,39058	146	2,5482	0,7076	3,60	1,9126	0,99449
102	1,7802	0,3707	4,80	1,5543	0,40104	147	2,5656	0,7160	3,58	1,9176	1,01050
103	1,7977	0,3775	4,76	1,5652	0,41166	148	2,5831	0,7244	3,57	1,9225	1,02658
104	1,8151	0,3843	4,72	1,5760	0,42242	149	2,6005	0,7328	3,55	1,9273	1,04275
105	1,8326	0,3912	4,68	1,5867	0,43333	150	2,6180	0,7412	3,53	1,9319	1,05900
106	1,8500	0,3982	4,65	1,5973	0,44439	151	2,6354	0,7496	3,52	1,9363	1,07532
107	1,8675	0,4052	4,61	1,6077	0,45560	152	2,6529	0,7581	3,50	1,9406	1,09171
108	1,8850	0,4122	4,57	1,6180	0,46695	153	2,6704	0,7666	3,48	1,9447	1,10818
109	1,9024	0,4193	4,54	1,6282	0,47844	154	2,6878	0,7750	3,47	1,9487	1,12472
110	1,9199	0,4264	4,50	1,6383	0,49008	155	2,7053	0,7836	3,45	1,9526	1,14132
111	1,9373	0,4336	4,47	1,6483	0,50187	156	2,7227	0,7921	3,44	1,9563	1,15799
112	1,9548	0,4408	4,43	1,6581	0,51379	157	2,7402	0,8006	3,42	1,9598	1,17472
113	1,9722	0,4481	4,40	1,6678	0,52586	158	2,7576	0,8092	3,41	1,9633	1,19151
114	1,9897	0,4554	4,37	1,6773	0,53807	159	2,7751	0,8178	3,39	1,9665	1,20835
115	2,0071	0,4627	4,34	1,6868	0,55041	160	2,7925	0,8264	3,38	1,9696	1,22525
116	2,0246	0,4701	4,31	1,6961	0,56289	161	2,8100	0,8350	3,37	1,9726	1,24221
117	2,0420	0,4775	4,28	1,7053	0,57551	162	2,8274	0,8436	3,35	1,9754	1,25921
118	2,0595	0,4850	4,25	1,7143	0,58827	163	2,8449	0,8522	3,34	1,9780	1,27626
119	2,0769	0,4925	4,22	1,7233	0,60116	164	2,8623	0,8608	3,33	1,9805	1,29335
120	2,0944	0,5000	4,19	1,7321	0,61418	165	2,8797	0,8695	3,31	1,9829	1,31046
121	2,1118	0,5076	4,16	1,7407	0,62734	166	2,8972	0,8781	3,30	1,9851	1,32760
122	2,1293	0,5152	4,13	1,7492	0,64063	167	2,9147	0,8868	3,28	1,9871	1,34487
123	2,1468	0,5228	4,11	1,7576	0,65404	168	2,9322	0,8955	3,27	1,9890	1,36212
124	2,1642	0,5305	4,08	1,7659	0,66759	169	2,9496	0,9042	3,26	1,9908	1,37940
125	2,1817	0,5383	4,05	1,7740	0,68125	170	2,9671	0,9128	3,25	1,9924	1,39671
126	2,1991	0,5460	4,03	1,7820	0,69505	171	2,9845	0,9215	3,24	1,9938	1,41404
127	2,2166	0,5538	4,00	1,7899	0,70897	172	3,0020	0,9302	3,23	1,9951	1,43140
128	2,2340	0,5616	3,98	1,7976	0,72301	173	3,0194	0,9390	3,22	1,9963	1,44878
129	2,2515	0,5695	3,95	1,8052	0,73716	174	3,0369	0,9477	3,20	1,9973	1,46617
130	2,2689	0,5774	3,93	1,8126	0,75144	175	3,0543	0,9564	3,19	1,9981	1,48359
131	2,2864	0,5853	3,91	1,8199	0,76584	176	3,0718	0,9651	3,18	1,9988	1,50101
132	2,3038	0,5933	3,88	1,8271	0,78034	177	3,0892	0,9738	3,17	1,9993	1,51845
133	2,3213	0,6013	3,86	1,8341	0,79497	178	3,1067	0,9825	3,16	1,9997	1,53589
134	2,3387	0,6093	3,84	1,8410	0,80970	179	3,1241	0,9913	3,15	1,9999	1,55334
135	2,3562	0,6173	3,82	1,8478	0,82454	180	3,1416	1,0000	3,14	2,0000	1,57080

4) der Inhalt des Kreisabschnittes =  $\frac{r^2}{2} \left( \frac{\pi}{180} \varphi - \sin \varphi \right)$

5) „ „ „ Kreisabschnittes =  $\frac{\varphi}{360} \pi r^2 = 0,00872665 \varphi r^2$

6)  $l = r$  entspricht  $\varphi = 57^\circ 17' 44,806'' = 57,2957795^\circ = 206264,806''$

7)  $\text{arc } 1^\circ = \pi : 180 = 0,01745329252$ ;  $\text{lg arc } 1^\circ = 0,2418773676 - 2$

8)  $\text{arc } 1' = \pi : 10800 = 0,0002908821$ ;  $\text{lg arc } 1' = 0,4637261172 - 4$

9)  $\text{arc } 1'' = \pi : 648000 = 0,00000484814$ ;  $\text{lg arc } 1'' = 0,6855748668 - 6$ .

**G. Länge der Kreisbogen**

Grad	0'	10'	20'	30'	40'	50'	Grad
<b>0</b>	0,00000	0,00291	0,00582	0,00873	0,01164	0,01454	<b>0</b>
1	0,01745	0,02036	0,02327	0,02618	0,02909	0,03200	1
2	0,03491	0,03782	0,04072	0,04363	0,04654	0,04945	2
3	0,05236	0,05527	0,05818	0,06109	0,06400	0,06690	3
4	0,06981	0,07272	0,07563	0,07854	0,08145	0,08436	4
5	0,08727	0,09017	0,09308	0,09599	0,09890	0,10181	5
6	0,10472	0,10763	0,11054	0,11345	0,11636	0,11926	6
7	0,12217	0,12508	0,12799	0,13090	0,13381	0,13672	7
8	0,13963	0,14253	0,14544	0,14835	0,15126	0,15417	8
9	0,15708	0,15999	0,16290	0,16581	0,16872	0,17162	9
<b>10</b>	0,17453	0,17744	0,18035	0,18326	0,18617	0,18908	<b>10</b>
11	0,19199	0,19489	0,19780	0,20071	0,20362	0,20653	11
12	0,20944	0,21235	0,21526	0,21817	0,22108	0,22398	12
13	0,22689	0,22980	0,23271	0,23562	0,23853	0,24144	13
14	0,24435	0,24725	0,25016	0,25307	0,25598	0,25889	14
15	0,26180	0,26471	0,26762	0,27053	0,27343	0,27634	15
16	0,27925	0,28216	0,28507	0,28798	0,29089	0,29380	16
17	0,29671	0,29961	0,30252	0,30543	0,30834	0,31125	17
18	0,31416	0,31707	0,31998	0,32289	0,32579	0,32870	18
19	0,33161	0,33452	0,33743	0,34034	0,34325	0,34616	19
<b>20</b>	0,34907	0,35197	0,35488	0,35779	0,36070	0,36361	<b>20</b>
21	0,36652	0,36943	0,37234	0,37525	0,37816	0,38106	21
22	0,38397	0,38688	0,38979	0,39270	0,39561	0,39852	22
23	0,40143	0,40433	0,40724	0,41015	0,41306	0,41597	23
24	0,41888	0,42179	0,42470	0,42761	0,43051	0,43342	24
25	0,43633	0,43924	0,44215	0,44506	0,44797	0,45088	25
26	0,45379	0,45669	0,45960	0,46251	0,46542	0,46833	26
27	0,47124	0,47415	0,47706	0,47997	0,48287	0,48578	27
28	0,48869	0,49160	0,49451	0,49742	0,50033	0,50324	28
29	0,50615	0,50905	0,51196	0,51487	0,51778	0,52069	29
<b>30</b>	0,52360	0,52651	0,52942	0,53233	0,53523	0,53814	<b>30</b>
31	0,54105	0,54396	0,54687	0,54978	0,55269	0,55560	31
32	0,55851	0,56141	0,56432	0,56723	0,57014	0,57305	32
33	0,57596	0,57887	0,58178	0,58479	0,58770	0,59060	33
34	0,59341	0,59632	0,59923	0,60214	0,60505	0,60796	34
35	0,61087	0,61377	0,61668	0,61959	0,62250	0,62541	35
36	0,62832	0,63123	0,63414	0,63705	0,63995	0,64286	36
37	0,64577	0,64868	0,65159	0,65450	0,65741	0,66032	37
38	0,66323	0,66613	0,66904	0,67195	0,67486	0,67777	38
39	0,68068	0,68359	0,68650	0,68941	0,69231	0,69522	39
<b>40</b>	0,69813	0,70104	0,70395	0,70686	0,70977	0,71268	<b>40</b>
41	0,71558	0,71849	0,72140	0,72431	0,72722	0,73013	41
42	0,73304	0,73595	0,73886	0,74176	0,74467	0,74758	42
43	0,75049	0,75340	0,75631	0,75922	0,76213	0,76504	43
44	0,76794	0,77085	0,77376	0,77667	0,77958	0,78249	44
	0'	10'	20'	30'	40'	50'	

## für den Halbmesser 1.

Grad	0'	10'	20'	30'	40'	50'	Grad
45	0,78540	0,78831	0,79122	0,79412	0,79703	0,79994	45
46	0,80285	0,80576	0,80867	0,81158	0,81449	0,81740	46
47	0,82030	0,82322	0,82612	0,82903	0,83194	0,83485	47
48	0,83776	0,84067	0,84358	0,84648	0,84939	0,85230	48
49	0,85521	0,85812	0,86109	0,86394	0,86685	0,86976	49
<b>50</b>	0,87266	0,87557	0,87848	0,88139	0,88430	0,88721	<b>50</b>
51	0,89012	0,89303	0,89594	0,89884	0,90175	0,90466	51
52	0,90757	0,91048	0,91339	0,91630	0,91921	0,92212	52
53	0,92503	0,92793	0,93084	0,93375	0,93666	0,93957	53
54	0,94248	0,94539	0,94830	0,95120	0,95411	0,95702	54
55	0,95993	0,96284	0,96575	0,96866	0,97157	0,97448	55
56	0,97738	0,98029	0,98320	0,98611	0,98902	0,99193	56
57	0,99484	0,99775	1,00066	1,00356	1,00647	1,00938	57
58	1,01229	1,01520	1,01811	1,02102	1,02393	1,02684	58
59	1,02974	1,03265	1,03556	1,03847	1,04138	1,04429	59
<b>60</b>	1,04720	1,05011	1,05302	1,05592	1,05883	1,06174	<b>60</b>
61	1,06465	1,06756	1,07047	1,07338	1,07629	1,07920	61
62	1,08210	1,08501	1,08792	1,09083	1,09374	1,09665	62
63	1,09956	1,10247	1,10537	1,10828	1,11119	1,11410	63
64	1,11701	1,11992	1,12283	1,12574	1,12865	1,13156	64
65	1,13446	1,13737	1,14028	1,14319	1,14610	1,14901	65
66	1,15192	1,15483	1,15773	1,16064	1,16355	1,16646	66
67	1,16937	1,17228	1,17519	1,17810	1,18101	1,18392	67
68	1,18682	1,18973	1,19264	1,19555	1,19846	1,20137	68
69	1,20428	1,20719	1,21009	1,21300	1,21591	1,21882	69
<b>70</b>	1,22173	1,22464	1,22755	1,23046	1,23337	1,23627	<b>70</b>
71	1,23918	1,24209	1,24500	1,24791	1,25082	1,25373	71
72	1,25664	1,25955	1,26245	1,26536	1,26827	1,27118	72
73	1,27409	1,27700	1,27991	1,28282	1,28573	1,28863	73
74	1,29154	1,29445	1,29736	1,30027	1,30318	1,30609	74
75	1,30900	1,31191	1,31481	1,31772	1,32063	1,32354	75
76	1,32645	1,32936	1,33227	1,33518	1,33809	1,34099	76
77	1,34390	1,34681	1,34972	1,35263	1,35554	1,35845	77
78	1,36136	1,36427	1,36717	1,37008	1,37299	1,37590	78
79	1,37881	1,38172	1,38463	1,38754	1,39045	1,39335	79
<b>80</b>	1,39626	1,39917	1,40208	1,40499	1,40790	1,41081	<b>80</b>
81	1,41372	1,41663	1,41953	1,42244	1,42535	1,42826	81
82	1,43117	1,43408	1,43699	1,43990	1,44281	1,44571	82
83	1,44862	1,45153	1,45444	1,45735	1,46026	1,46317	83
84	1,46608	1,46899	1,47189	1,47480	1,47771	1,48062	84
85	1,48353	1,48644	1,48935	1,49226	1,49517	1,49807	85
86	1,50098	1,50389	1,50680	1,50971	1,51262	1,51553	86
87	1,51844	1,52134	1,52425	1,52716	1,53007	1,53298	87
88	1,53589	1,53880	1,54171	1,54462	1,54753	1,55043	88
89	1,55334	1,55625	1,55916	1,56207	1,56498	1,56789	89
	0'	10'	20'	30'	40'	50'	

## Länge der Kreisbögen

Grad	0'	10'	20'	30'	40'	50'	Grad
<b>90</b>	1,57080	1,57370	1,57661	1,57952	1,58243	1,58534	<b>90</b>
91	1,58825	1,59116	1,59407	1,59698	1,59989	1,60279	91
92	1,60570	1,60861	1,61152	1,61443	1,61734	1,62025	92
93	1,62316	1,62606	1,62897	1,63188	1,63479	1,63770	93
94	1,64061	1,64352	1,64643	1,64934	1,65224	1,65515	94
95	1,65806	1,66097	1,66388	1,66679	1,66970	1,67261	95
96	1,67552	1,67842	1,68133	1,68424	1,68715	1,69006	96
97	1,69297	1,69588	1,69879	1,70170	1,70460	1,70751	97
98	1,71042	1,71333	1,71624	1,71915	1,72206	1,72497	98
99	1,72788	1,73078	1,73369	1,73660	1,73951	1,74242	99
<b>100</b>	1,74533	1,74824	1,75115	1,75406	1,75697	1,75987	<b>100</b>
101	1,76278	1,76569	1,76860	1,77151	1,77442	1,77733	101
102	1,78024	1,78314	1,78605	1,78896	1,79187	1,79478	102
103	1,79769	1,80060	1,80351	1,80642	1,80932	1,81223	103
104	1,81514	1,81805	1,82096	1,82387	1,82678	1,82969	104
105	1,83260	1,83550	1,83841	1,84132	1,84423	1,84714	105
106	1,85005	1,85296	1,85587	1,85878	1,86168	1,86459	106
107	1,86750	1,87041	1,87332	1,87623	1,87914	1,88205	107
108	1,88496	1,88786	1,89077	1,89368	1,89659	1,89950	108
109	1,90241	1,90532	1,90823	1,91114	1,91404	1,91695	109
<b>110</b>	1,91986	1,92277	1,92568	1,92859	1,93150	1,93441	<b>110</b>
111	1,93732	1,94023	1,94313	1,94604	1,94895	1,95186	111
112	1,95477	1,95768	1,96059	1,96350	1,96640	1,96931	112
113	1,97222	1,97513	1,97804	1,98095	1,98386	1,98676	113
114	1,98968	1,99258	1,99549	1,99840	2,00131	2,00422	114
115	2,00713	2,01004	2,01295	2,01586	2,01876	2,02167	115
116	2,02458	2,02749	2,03040	2,03331	2,03622	2,03913	116
117	2,04204	2,04494	2,04785	2,05076	2,05367	2,05658	117
118	2,05949	2,06240	2,06531	2,06822	2,07112	2,07403	118
119	2,07694	2,07985	2,08276	2,08567	2,08858	2,09149	119
<b>120</b>	2,09440	2,09730	2,10021	2,10312	2,10603	2,10894	<b>120</b>
121	2,11185	2,11476	2,11767	2,12057	2,12348	2,12639	121
122	2,12930	2,13221	2,13512	2,13803	2,14094	2,14385	122
123	2,14676	2,14966	2,15257	2,15548	2,15839	2,16130	123
124	2,16421	2,16712	2,17003	2,17293	2,17584	2,17875	124
125	2,18166	2,18457	2,18748	2,19039	2,19330	2,19621	125
126	2,19912	2,20202	2,20493	2,20784	2,21075	2,21366	126
127	2,21657	2,21948	2,22239	2,22529	2,22820	2,23111	127
128	2,23402	2,23693	2,23984	2,24275	2,24566	2,24857	128
129	2,25148	2,25438	2,25729	2,26020	2,26311	2,26602	129
<b>130</b>	2,26893	2,27184	2,27475	2,27765	2,28056	2,28347	<b>130</b>
131	2,28638	2,28929	2,29220	2,29511	2,29802	2,30093	131
132	2,30384	2,30674	2,30965	2,31256	2,31547	2,31838	132
133	2,32129	2,32420	2,32711	2,33001	2,33292	2,33583	133
134	2,33874	2,34165	2,34456	2,34747	2,35038	2,35329	134
	0'	10'	20'	30'	40'	50'	

## für den Halbmesser 1.

Grad	0'	10'	20'	30'	40'	50'	Grad
135	2,35619	2,35910	2,36201	2,36492	2,36783	2,37074	135
136	2,37365	2,37656	2,37947	2,38237	2,38528	2,38819	136
137	2,39110	2,39401	2,39692	2,39983	2,40274	2,40565	137
138	2,40855	2,41146	2,41437	2,41728	2,42019	2,42310	138
139	2,42601	2,42892	2,43183	2,43473	2,43764	2,44055	139
<b>140</b>	<b>2,44346</b>	<b>2,44637</b>	<b>2,44928</b>	<b>2,45219</b>	<b>2,45510</b>	<b>2,45801</b>	<b>140</b>
141	2,46091	2,46382	2,46673	2,46964	2,47255	2,47546	141
142	2,47837	2,48128	2,48419	2,48709	2,49000	2,49291	142
143	2,49582	2,49873	2,50164	2,50455	2,50746	2,51037	143
144	2,51327	2,51618	2,51909	2,52200	2,52491	2,52782	144
145	2,53073	2,53364	2,53654	2,53945	2,54236	2,54527	145
146	2,54818	2,55109	2,55400	2,55691	2,55982	2,56273	146
147	2,56563	2,56854	2,57145	2,57436	2,57727	2,58018	147
148	2,58309	2,58600	2,58890	2,59181	2,59472	2,59763	148
149	2,60054	2,60345	2,60636	2,60927	2,61218	2,61509	149
<b>150</b>	<b>2,61799</b>	<b>2,62090</b>	<b>2,62381</b>	<b>2,62672</b>	<b>2,62963</b>	<b>2,63254</b>	<b>150</b>
151	2,63545	2,63836	2,64126	2,64417	2,64708	2,64999	151
152	2,65290	2,65581	2,65872	2,66163	2,66454	2,66744	152
153	2,67035	2,67326	2,67617	2,67908	2,68199	2,68490	153
154	2,68781	2,69072	2,69362	2,69653	2,69944	2,70235	154
155	2,70526	2,70817	2,71108	2,71399	2,71690	2,71980	155
156	2,72271	2,72562	2,72853	2,73144	2,73435	2,73726	156
157	2,74017	2,74307	2,74598	2,74889	2,75180	2,75471	157
158	2,75762	2,76053	2,76344	2,76635	2,76926	2,77216	158
159	2,77507	2,77798	2,78089	2,78380	2,78671	2,78962	159
<b>160</b>	<b>2,79253</b>	<b>2,79544</b>	<b>2,79834</b>	<b>2,80125</b>	<b>2,80416</b>	<b>2,80707</b>	<b>160</b>
161	2,80998	2,81289	2,81580	2,81871	2,82162	2,82452	161
162	2,82743	2,83034	2,83325	2,83616	2,83907	2,84198	162
163	2,84489	2,84780	2,85070	2,85361	2,85652	2,85943	163
164	2,86234	2,86525	2,86816	2,87107	2,87398	2,87688	164
165	2,87980	2,88270	2,88561	2,88852	2,89143	2,89434	165
166	2,89725	2,90016	2,90306	2,90597	2,90888	2,91179	166
167	2,91470	2,91761	2,92052	2,92343	2,92634	2,92924	167
168	2,93215	2,93506	2,93797	2,94088	2,94379	2,94670	168
169	2,94961	2,95251	2,95542	2,95833	2,96124	2,96415	169
<b>170</b>	<b>2,96706</b>	<b>2,96997</b>	<b>2,97288</b>	<b>2,97578</b>	<b>2,97869</b>	<b>2,98160</b>	<b>170</b>
171	2,98451	2,98742	2,99033	2,99324	2,99615	2,99906	171
172	3,00197	3,00487	3,00778	3,01069	3,01360	3,01651	172
173	3,01942	3,02233	3,02524	3,02815	3,03106	3,03396	173
174	3,03687	3,03978	3,04269	3,04560	3,04851	3,05142	174
175	3,05433	3,05723	3,06014	3,06305	3,06596	3,06887	175
176	3,07178	3,07469	3,07760	3,08051	3,08341	3,08632	176
177	3,08923	3,09214	3,09505	3,09796	3,10087	3,10378	177
178	3,10669	3,10959	3,11250	3,11541	3,11832	3,12123	178
179	3,12414	3,12705	3,12996	3,13287	3,13577	3,13868	179
	0'	10'	20'	30'	40'	50'	

## H. Tafel zum Uebergang aus der 90°-Teilung in die 100°-Teilung des Quadranten.

	0'	10'	20'	30'	40'	50'	
<b>0</b>	0,0000	0,1852	0,3704	0,5556	0,7407	0,9259	<b>0</b>
<b>1</b>	1,1111	1,2963	1,4815	1,6667	1,8519	2,0370	<b>1</b>
<b>2</b>	2,2222	2,4074	2,5926	2,7778	2,9630	3,1481	<b>2</b>
<b>3</b>	3,3333	3,5185	3,7037	3,8889	4,0741	4,2593	<b>3</b>
<b>4</b>	4,4444	4,6296	4,8148	5,0000	5,1852	5,3704	<b>4</b>
<b>5</b>	5,5556	5,7407	5,9259	6,1111	6,2963	6,4815	<b>5</b>
<b>6</b>	6,6667	6,8519	7,0370	7,2222	7,4074	7,5926	<b>6</b>
<b>7</b>	7,7778	7,9630	8,1481	8,3333	8,5185	8,7037	<b>7</b>
<b>8</b>	8,8889	9,0741	9,2593	9,4444	9,6296	9,8148	<b>8</b>
<b>9</b>	10,0000	10,1852	10,3704	10,5556	10,7407	10,9259	<b>9</b>
<b>10</b>	11,1111	11,2963	11,4815	11,6667	11,8519	12,0370	<b>10</b>
<b>11</b>	12,2222	12,4074	12,5926	12,7778	12,9630	13,1481	<b>11</b>
<b>12</b>	13,3333	13,5185	13,7037	13,8889	14,0741	14,2593	<b>12</b>
<b>13</b>	14,4444	14,6296	14,8148	15,0000	15,1852	15,3704	<b>13</b>
<b>14</b>	15,5556	15,7407	15,9259	16,1111	16,2963	16,4815	<b>14</b>
<b>15</b>	16,6667	16,8519	17,0370	17,2222	17,4074	17,5926	<b>15</b>
<b>16</b>	17,7778	17,9630	18,1481	18,3333	18,5185	18,7037	<b>16</b>
<b>17</b>	18,8889	19,0741	19,2593	19,4444	19,6296	19,8148	<b>17</b>
<b>18</b>	20,0000	20,1852	20,3704	20,5556	20,7407	20,9259	<b>18</b>
<b>19</b>	21,1111	21,2963	21,4815	21,6667	21,8519	22,0370	<b>19</b>
<b>20</b>	22,2222	22,4074	22,5926	22,7778	22,9630	23,1481	<b>20</b>
<b>21</b>	23,3333	23,5185	23,7037	23,8889	24,0741	24,2593	<b>21</b>
<b>22</b>	24,4444	24,6296	24,8148	25,0000	25,1852	25,3704	<b>22</b>
<b>23</b>	25,5556	25,7407	25,9259	26,1111	26,2963	26,4815	<b>23</b>
<b>24</b>	26,6667	26,8519	27,0370	27,2222	27,4074	27,5926	<b>24</b>
<b>25</b>	27,7778	27,9630	28,1481	28,3333	28,5185	28,7037	<b>25</b>
<b>26</b>	28,8889	29,0741	29,2593	29,4444	29,6296	29,8148	<b>26</b>
<b>27</b>	30,0000	30,1852	30,3704	30,5556	30,7407	30,9259	<b>27</b>
<b>28</b>	31,1111	31,2963	31,4815	31,6667	31,8519	32,0370	<b>28</b>
<b>29</b>	32,2222	32,4074	32,5926	32,7778	32,9630	33,1481	<b>29</b>
<b>30</b>	33,3333	33,5185	33,7037	33,8889	34,0741	34,2593	<b>30</b>
<b>31</b>	34,4444	34,6296	34,8148	35,0000	35,1852	35,3704	<b>31</b>
<b>32</b>	35,5556	35,7407	35,9259	36,1111	36,2963	36,4815	<b>32</b>
<b>33</b>	36,6667	36,8519	37,0370	37,2222	37,4074	37,5926	<b>33</b>
<b>34</b>	37,7778	37,9630	38,1481	38,3333	38,5185	38,7037	<b>34</b>
<b>35</b>	38,8889	39,0741	39,2593	39,4444	39,6296	39,8148	<b>35</b>
<b>36</b>	40,0000	40,1852	40,3704	40,5556	40,7407	40,9259	<b>36</b>
<b>37</b>	41,1111	41,2963	41,4815	41,6667	41,8519	42,0370	<b>37</b>
<b>38</b>	42,2222	42,4074	42,5926	42,7778	42,9630	43,1481	<b>38</b>
<b>39</b>	43,3333	43,5185	43,7037	43,8889	44,0741	44,2593	<b>39</b>
<b>40</b>	44,4444	44,6296	44,8148	45,0000	45,1852	45,3704	<b>40</b>
<b>41</b>	45,5556	45,7407	45,9259	46,1111	46,2963	46,4815	<b>41</b>
<b>42</b>	46,6667	46,8519	47,0370	47,2222	47,4074	47,5926	<b>42</b>
<b>43</b>	47,7778	47,9630	48,1481	48,3333	48,5185	48,7037	<b>43</b>
<b>44</b>	48,8889	49,0741	49,2593	49,4444	49,6296	49,8148	<b>44</b>
<b>45</b>	50,0000	50,1852	50,3704	50,5556	50,7407	50,9259	<b>45</b>

Zur Umrechnung eines Winkels  $\alpha > 45^\circ$  in die 100°-Teilung suche den zu  $\beta = \alpha - n \cdot 45^\circ$  gehörigen Winkel dieser Teilung auf und zähle  $n \cdot 50$  hinzu.

### J. Die Binomialkoeffizienten $\binom{n}{1}$ bis $\binom{n}{15}$ .

n	$\binom{n}{0}$	$\binom{n}{1}$	$\binom{n}{2}$	$\binom{n}{3}$	$\binom{n}{4}$	$\binom{n}{5}$	$\binom{n}{6}$	$\binom{n}{7}$	$\binom{n}{8}$	$\binom{n}{9}$	$\binom{n}{10}$	$\binom{n}{11}$	$\binom{n}{12}$	$\binom{n}{13}$	$\binom{n}{14}$	$\binom{n}{15}$
1	1	1														
2	1	2	1													
3	1	3	3	1												
4	1	4	6	4	1											
5	1	5	10	10	5	1										
6	1	6	15	20	15	6	1									
7	1	7	21	35	35	21	7	1								
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1							
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1						
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1					
11	1	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11	1				
12	1	12	66	220	495	792	924	792	495	220	66	12	1			
13	1	13	78	286	715	1287	1716	1716	1287	715	286	78	13	1		
14	1	14	91	364	1001	2002	3003	3432	3003	2002	1001	364	91	14	1	
15	1	15	105	455	1365	3003	5005	6435	6435	5005	3003	1365	455	105	15	1

### K. Quadrat- und Kubikwurzeln einiger Brüche.

n	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	n	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	n	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	n	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$
$\frac{1}{3}$	0,57735	0,69336	$\frac{1}{7}$	0,37796	0,52276	$\frac{1}{8}$	0,35355	0,50000	$\frac{4}{9}$	0,66667	0,76314
$\frac{2}{3}$	0,81650	0,87358	$\frac{2}{7}$	0,53452	0,65863	$\frac{2}{8}$	0,61237	0,72112	$\frac{5}{9}$	0,74536	0,82207
$\frac{1}{4}$	0,50000	0,62996	$\frac{3}{7}$	0,65465	0,75395	$\frac{3}{8}$	0,79057	0,85499	$\frac{7}{9}$	0,88192	0,91964
$\frac{3}{4}$	0,86603	0,90856	$\frac{4}{7}$	0,75593	0,82983	$\frac{7}{8}$	0,93541	0,95647	$\frac{1}{13}$	0,28868	0,43679
$\frac{5}{6}$	0,40825	0,55032	$\frac{5}{7}$	0,84515	0,89390	$\frac{7}{8}$	0,33333	0,48075	$\frac{5}{13}$	0,64550	0,74690
$\frac{5}{6}$	0,91287	0,94104	$\frac{6}{7}$	0,92582	0,94991	$\frac{9}{8}$	0,47140	0,60571	$\frac{7}{13}$	0,76376	0,83555

### L. Wichtige Zahlenwerte.

Größe	n	lg n	Größe	n	lg n	Größe	n	lg n
$\pi$	3,1415927	0,49715	$\pi^2 : 4$	2,4674011	0,39224	$g$	9,81	0,99167
$2\pi$	6,2831853	0,79818	$\pi\sqrt{2}$	4,4428829	0,64767	$g^2$	96,2361	1,98334
$3\pi$	9,4247780	0,9747	$\pi\sqrt{2}$	2,221442	0,34663	$\sqrt{g}$	3,1320919	0,49583
$\pi : 2$	1,5707963	0,19612	$2\sqrt{\pi}$	3,544908	0,54960	$1 : 2g$	0,050968	0,70730-2
$\pi : 3$	1,0471976	0,02003	$\sqrt{2\pi}$	2,506628	0,39909	$2\sqrt{g}$	6,264184	0,79686
$\pi : 4$	0,7853982	0,89509-1	$\frac{\sqrt{\pi}}{2}$	1,253314	0,09806	$\sqrt[2]{g}$	4,429447	0,64635
$\pi^2$	9,8696044	0,99430	$\frac{\sqrt{2\pi}}{2}$	0,797885	0,90194-1	$\pi\sqrt{g}$	9,839757	0,99298
$\pi^3$	31,006277	1,49145	$\sqrt[3]{\pi}$	0,977205	0,98998-1	$\pi\sqrt[2]{g}$	13,91536	1,14350
$1 : \pi$	0,318310	0,50285-1	$\sqrt[3]{3 : \pi}$	0,922635	0,96503-1	$\pi : \sqrt{g}$	1,003033	0,00132
$1 : \pi^2$	0,101321	0,00570-1	$\frac{3}{\sqrt{\pi}}$	1,845261	0,26606	$\pi : \sqrt[2]{g}$	0,709252	0,85080-1
$1 : \pi^3$	0,032252	0,50856-2	$\sqrt[3]{2\pi}$	1,162447	0,06537	$e$	2,718282	0,43429
$\sqrt{\pi}$	1,7724539	0,24857	$\sqrt[3]{\pi : 2}$	0,922635	0,96503-1	$e^2$	7,389056	0,86859
$\frac{3}{\sqrt{\pi}}$	1,4645919	0,16572	$\frac{3}{\sqrt{\pi : 4}}$	0,860254	0,93463-1	$1 : e$	0,367879	0,56571-1
$\pi\sqrt{\pi}$	5,5683280	0,74572	$\frac{3}{\sqrt{2\pi}}$	0,984745	0,99332-1	$1 : e^2$	0,135335	0,13141-1
$\frac{3}{\pi\sqrt{\pi}}$	4,6021511	0,66287	$\sqrt[3]{3 : \pi}$	0,984745	0,99332-1	$\frac{3}{e}$	1,648721	0,21715
$4\pi^2$	39,478418	1,59636				$\sqrt{e}$	1,395612	0,14476

### Anmerkungen zu den vorstehenden Tafeln.

Um  $\ln$ , Num.  $\ln$ ,  $\lg$ , Num.  $\lg$ , die Werte der Kreisfunktionen, den Winkel für eine Kreisfunktion, Bogen- und Sehnenlänge für einen gegebenen Winkel oder den Winkel für eine gegebene Bogen- oder Sehnenlänge von Zahlen zu erhalten, die zwischen zwei Tafelwerten liegen, beachte man, dafs für kleine Zunahmen der gegebenen Gröfse die Zunahmen der gesuchten Gröfse den Zunahmen der gegebenen proportional genommen werden dürfen; z. B.:

1) Gesucht  $\ln$  289,5.

In 289 = 5,666 43,  $\ln$  290 = 5,669 88; Unterschied = 0,003 45 entsprechend einer Zunahme des Num. um 1,0; Zunahme von  $\ln$  für 0,1 0,000 345, also für 0,5 0,000 345 . 5 = 0,001 73; mithin  $\ln$  289,5 = 5,666 43 + 0,001 73 = 5,668 16.

2) Gesucht  $\operatorname{tg} 58^{\circ} 47' 22,5''$ .

$58^{\circ} 47' 22,5'' = 58^{\circ} 47,375'$ ;  $\operatorname{tg} 58^{\circ} 40' = 1,64 256$ ;  $\operatorname{tg} 58^{\circ} 50' = 1,653 37$ ; Unterschied = 0,010 81 = Zunahme von  $\operatorname{tg}$  für  $10'$ ; für  $1'$  der  $10^{\text{te}}$  Teil, für  $7,375'$  Zunahme (0,010 81 : 10) . 7,375 = 0,007 97. Mithin  $\operatorname{tg} 58^{\circ} 47' 22,5'' = 1,650 53$ .

3) Gesucht der Winkel, dessen Sinus gleich 0,636 62 ist ( $\operatorname{arc} \sin 0,636 62 = ?$ ).

Der nächst niedrigere Tafelwert ist 0,636 08;  $\operatorname{arc} \sin 0,636 08 = 39^{\circ} 30'$ ; der nächst höhere Tafelwert ist 0,638 32 =  $39^{\circ} 40'$ ; Unterschied 0,638 32 - 0,636 08 = 0,002 24; dem entsprechen  $10'$ ; Unterschied zwischen dem gegebenen Wert und dem nächst niedrigeren Tafelwert ist 0,636 62 - 0,636 08 = 0,000 54. Diesem Unterschied entsprechen dann (10 : 0,002 24) . 0,000 54 = 2,4107'. Mithin ergibt sich

$$\operatorname{arc} \sin 0,636 62 = 39^{\circ} 30' + 2,4107' = 39^{\circ} 32,4107' = 39^{\circ} 32' 24,64''.$$

Für das Aufsuchen der Quadrat- und Kubikwurzeln nicht in der Tafel enthaltener Zahlen wende man die Formeln b. 11 und 12 S. 46 an (Näherungsverfahren).

Gesucht die Kreisfläche vom Durchmesser 1,784. Der Halbmesser 0,892 liefert  $F_1 = 0,624 913$  (S. 19); mithin ist die gesuchte Fläche =  $4 F_1 = 4 \cdot 0,624 913 = 2,499 652$ .

$$\ln 2,738 = \ln 273,8 - \ln 100 = 5,612 40 - 4,605 17 = 1,007 23.$$

$$\ln 2895 = \ln 289,5 + \ln 10 = 5,668 16 + 2,302 59 = 7,970 75.$$

$$\text{Num. } \ln 1,062 99 = [\text{Num. } \ln (1,062 99 + \ln 100)]: 100$$

$$= [\text{Num. } \ln (1,062 99 + 4,605 17)]: 100$$

$$= [\text{Num. } \ln 5,668 16]: 100 = 289,5 : 100 = 2,895.$$

### Anmerkungen zu den Tafeln der Hyperbelfunktionen (D).

1) Beispiele:  $\operatorname{Sin} 1,34 = 1,7786$ .  $\operatorname{Sin} 3,37 = 14,5221$ .  $\operatorname{Cof} 0,65 = 1,2188$ .

$\operatorname{Cof} 2,66 = 7,1831$ .  $\lg \operatorname{Sin} 4,52 = 11,6619 - 10 = 1,6619$ .  $\lg \operatorname{Xg} 0,17 = 9,2263 - 10$ .

2) Für Werte von  $\varphi > 5,09$  ist angenähert:  $\operatorname{Sin} \varphi = \operatorname{Cof} \varphi = \frac{1}{2} e^{\varphi}$ , u. zw. von  $\varphi = 5,09$  bis 6,908 auf 1 Dezimale, von  $\varphi = 6,908$  bis 9,210 auf 2 Dezimalen genau.

3) Für Werte von  $\varphi = 2,39$  aufwärts nähert sich  $\operatorname{Xg} \varphi$  mehr und mehr dem Werte 1.

4) Für kleine Werte von  $\varphi$  ist angenähert:

$$\lg \operatorname{Sin} \varphi = \lg \varphi + \frac{1}{2} \lg \operatorname{Cof} \varphi; \quad \lg \operatorname{Xg} \varphi = \lg \varphi - \frac{2}{3} \lg \operatorname{Cof} \varphi.$$

5) Für Werte von  $\varphi > 5,09$  ist angenähert:

$$\lg \operatorname{Sin} \varphi = \lg \operatorname{Cof} \varphi = 0,434 29 \varphi + 0,698 97 - 1 \quad \text{und}$$

$$\varphi = 2,302 59 (\lg \operatorname{Sin} \varphi + 0,301 03),$$

$$\text{wobei } \lg 0,434 29 = 0,637 78 - 1 \quad \text{und } \lg 2,302 59 = 0,362 22.$$

6) Die Werte von  $\lg \operatorname{Xg} \varphi$  und  $\lg \operatorname{Ctg} \varphi$  ergeben sich auch (nach S. 32 u. 33) aus  $\lg \operatorname{Xg} \varphi = \lg \operatorname{Sin} \varphi - \lg \operatorname{Cof} \varphi (-10)$ ;  $\lg \operatorname{Ctg} \varphi = \lg \operatorname{Cof} \varphi - \lg \operatorname{Sin} \varphi (-10)$ .

7) Die Summe der Tafelwerte von  $\operatorname{Cof} \varphi$  und  $\operatorname{Sin} \varphi$  für dasselbe  $\varphi$  ergibt den Wert  $e^{\varphi}$ , der Unterschied ergibt  $e^{-\varphi}$ ; also  $\operatorname{Cof} \varphi \pm \operatorname{Sin} \varphi = e^{\pm \varphi}$ .

## II. ARITHMETIK.

### A. Potenzen, Wurzeln, Logarithmen.

#### a. Potenzen.

1.  $(+a)^n = +a^n$
2.  $(-a)^{2n} = +a^{2n}$
3.  $(-a)^{2n+1} = -a^{2n+1}$
4.  $a^m a^n = a^{m+n}$
5.  $a^m : a^n = a^{m-n}$
6.  $a^m b^m = (ab)^m$
7.  $a^m : b^m = (a:b)^m$
8.  $1 : a^m = (1:a)^m = a^{-m}$
9.  $(a^m)^n = a^{mn} = (a^n)^m$
10.  $a^0 = 1; 0^a = 0; 0^0 = \text{unbestimmt}$  (Vrgl. S. 69)
11.  $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$
12.  $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$
13.  $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$
14.  $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$
15.  $\frac{a^n - b^n}{a - b} = a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}$
16.  $\frac{a^{2n+1} + b^{2n+1}}{a + b} = a^{2n} - a^{2n-1}b + a^{2n-2}b^2 - \dots + b^{2n}$
17.  $\frac{a^{2n} - b^{2n}}{a - b} = a^{2n-1} + a^{2n-2}b + a^{2n-3}b^2 + \dots + b^{2n-1}$
18. Wenn  $a > 1$ , so ist für  $n = \infty$   $\lim a^n = \infty$  und  $\lim \frac{1}{a^n} = 0$ .

#### Binomischer Satz.

$$19. (a \pm b)^n = a^n \pm n a^{n-1} b + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^{n-2} b^2 \pm \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{n-3} b^3 + \dots$$

Die Reihe rechts ist endlich, wenn  $n$  eine ganze, positive Zahl; sie ist unendlich, wenn  $n$  gebrochen oder negativ ist; sie ist konvergent für  $a > b$ .

Die Koeffizienten der Potenzen heißen **Binomialkoeffizienten**.\*) Man schreibt kürzer

$$\frac{n(n-1)(n-2)\dots[n-(p-1)]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots p} = \binom{n}{p} \text{ oder } (n)_p.$$

Lesart:  $n$  Zeiger  $p$  oder:  $n$  tief  $p$ , oder  $n$  über  $p$ .

Der Nenner  $1 \cdot 2 \cdot 3 \dots p$  heißt „ $p$  Fakultät“  $= p!$ . Es ist  $0! = 1$ .

\*) Tafel der Binomialkoeffizienten s. S. 43.

**Regeln über Binomialkoeffizienten.**

Wenn  $n$  (die Grundzahl) und  $p$  (der Zeiger) ganze, positive Zahlen sind, so ist

$$\begin{aligned}
 20. \binom{n}{p} &= \binom{n}{n-p} & 21. \binom{n}{n} &= \binom{n}{0} = 1 & 22. \binom{n}{1} &= n \\
 23. \binom{n}{n+p} &= 0 & 24. \binom{n+1}{p} &= \binom{n}{p} + \binom{n}{p-1} \\
 25. \binom{n+1}{p+1} &= \binom{n}{p+1} + \binom{n}{p} \\
 26. \binom{n+1}{p+1} &= \binom{n}{p} + \binom{n-1}{p} + \binom{n-2}{p} + \dots + \binom{p}{p}.
 \end{aligned}$$

**Anwendungen des binomischen Satzes.**

Für beliebige Werte von  $n$  ist, wenn  $-1 < x < +1$ :

$$\begin{aligned}
 27. (1 \pm x)^n &= 1 \pm \binom{n}{1} x + \binom{n}{2} x^2 \pm \binom{n}{3} x^3 + \binom{n}{4} x^4 \pm \binom{n}{5} x^5 + \dots \\
 28. \frac{1}{1 \pm x} &= (1 \pm x)^{-1} = 1 \mp x + x^2 \mp x^3 + x^4 \mp x^5 + x^6 \mp x^7 + \dots \\
 29. \sqrt{1 \pm x} &= (1 \pm x)^{1/2} = 1 \pm \frac{1}{2} x - \frac{1}{2 \cdot 4} x^2 \pm \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} x^3 \\
 &\quad - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} x^4 \pm \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10} x^5 - \dots \\
 30. \frac{1}{\sqrt{1 \pm x}} &= (1 \pm x)^{-1/2} = 1 \mp \frac{1}{2} x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} x^2 \mp \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} x^3 + \dots
 \end{aligned}$$

**b. Wurzeln.**

$$\begin{aligned}
 1. \sqrt[m]{a^m} &= a & 2. \sqrt[m]{ab} &= \sqrt[m]{a} \sqrt[m]{b} \\
 3. \sqrt[m]{a:b} &= \sqrt[m]{a} : \sqrt[m]{b} & 4. \sqrt[m]{\frac{1}{a}} &= \frac{1}{\sqrt[m]{a}} = a^{-\frac{1}{m}} \\
 5. \sqrt[m]{a^n} &= \left(\sqrt[m]{a}\right)^n = a^{\frac{n}{m}} & 6. \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} &= \sqrt[mn]{a} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} \\
 7. \sqrt{a} + \sqrt{b} &= \sqrt{a+b+2\sqrt{ab}} \\
 8. \sqrt[2n]{a^2} &= \pm a^{\frac{1}{2n}}; \sqrt[n]{a^2} &= \pm a^{\frac{2}{n}} & 9. \sqrt{-a} &= -a^{\frac{1}{2n+1}} = -\sqrt[n+1]{a} \\
 10. \sqrt{-a} &= \sqrt{\sqrt{-a}} = \sqrt{i\sqrt{a}}, \text{ also imaginär; s. S. 47.} \\
 11. \sqrt{a^2 \pm b} &= a \pm \frac{b}{2a}, \\
 12. \sqrt[3]{a^3 \pm b} &= a \pm \frac{b}{3a^2}, \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \text{ (angenähert,} \\
 & & & \text{ wenn } b \text{ gegen } a \text{ sehr klein ist.)}
 \end{aligned}$$

13.  $\sqrt{a^2 + b^2} = 0,960 a + 0,398 b$  (angenähert), wenn  $a > b$ . Der Fehler ist kleiner als 4 vH des wirklichen Wertes.

Genauer ist (nach Schlömilch)  $\sqrt{a^2 + b^2} = 0,9938 a + 0,0703 b + 0,3567 \frac{b^2}{a}$ .

14.  $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = 0,939 a + 0,389 b + 0,297 c$  (angenähert), wenn  $a > b > c$ . Der Fehler ist kleiner als 6 vH des wirklichen Wertes.

**Imaginäre Größen.**

15.  $i = \sqrt{-1}$ ;  $i^2 = -1$ ;  $i^3 = -i$ ;  $i^4 = 1$ ;  $\frac{1}{i} = -i$ ;

16.  $i^{4n+m} = i^m$ , also  $i^{4n} = +1$ ;  $i^{4n+1} = +i$ ;  $i^{4n+2} = -1$ ;  
 $i^{4n+3} = -i$

17. Jede komplexe Größe, d. i. jeder aus reellen und imaginären Größen zusammengesetzte Ausdruck, läßt sich auf die Form  $a \pm b i$  bringen, in der  $a$  und  $b$  reelle Werte sind.

18. Wenn  $a + b i = 0$ , so ist  $a = 0$ ,  $b = 0$ .

Wenn  $a + b i = \alpha + \beta i$ , so ist  $a = \alpha$ ,  $b = \beta$ .

19.  $(a + b i)(a - b i) = a^2 + b^2$ ;  $\frac{a + b i}{\alpha + \beta i} = \frac{a\alpha + b\beta}{\alpha^2 + \beta^2} + \frac{b\alpha - a\beta}{\alpha^2 + \beta^2} i$

20.  $\sqrt{a \pm b i} = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}} \pm i \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}}$

21. Jede komplexe Größe läßt sich auf die Normalform bringen:

$$a \pm b i = r [\cos(\varphi + 2k\pi) \pm i \sin(\varphi + 2k\pi)];$$

dabei ist  $r = +\sqrt{a^2 + b^2}$  der Modul,  $\cos \varphi = \frac{a}{r}$ ,  $\sin \varphi = \frac{b}{r}$ ,

$$\text{tg } \varphi = \frac{b}{a}, \quad k \text{ eine ganze Zahl.}$$

22.  $\cos x + i \sin x = e^{ix}$ ,  
 $\cos x - i \sin x = e^{-ix}$ , } wo  $e$  die Grundzahl der natürlichen Logarithmen bezeichnet (s. S. 48).

23.  $1 : (\cos x + i \sin x) = \cos x - i \sin x$

24.  $(\cos x \pm i \sin x)(\cos y \pm i \sin y) = \cos(x + y) \pm i \sin(x + y)$

25.  $(\cos x \pm i \sin x) : (\cos y \pm i \sin y) = \cos(x - y) \pm i \sin(x - y)$

26. **Moivrescher Satz.** (Gültig für beliebige Werte von  $n$ )

$$(\cos x \pm i \sin x)^n = \cos nx \pm i \sin nx$$

27.  $\sqrt[n]{a + b i} + \sqrt[n]{a - b i} = 2 \sqrt[n]{r} \cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} = u$

Für  $n = 3$  ist  $u_1 = 2 \sqrt[3]{r} \cos \frac{\varphi}{3}$ ,  $u_2 = 2 \sqrt[3]{r} \cos \left(\frac{\varphi}{3} + \frac{2\pi}{3}\right)$ ,

$$u_3 = 2 \sqrt[3]{r} \cos \left(\frac{\varphi}{3} - \frac{2\pi}{3}\right). \quad r, \varphi \text{ und } k \text{ s. Formel 21.}$$

28. **Wurzeln der Einheit.**

$$\sqrt[n]{1} = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n},$$

$$\sqrt[n]{-1} = \cos \frac{(2k+1)\pi}{n} + i \sin \frac{(2k+1)\pi}{n},$$

} wo  $k$  eine ganze, positive Zahl zwischen 0 und  $n - 1$  ist.

## c. Logarithmen.

1. Ist  $\lg a = c$ , so ist  $b^c = a$ .

Für  $b > 1$  ist  $\lg 0 = -\infty$ ;  $\lg 1 = 0$ ;  $\lg b = 1$ ;  $\lg \infty = \infty$

2.  $\lg(ac) = \lg a + \lg c$

4.  $\lg(a^n) = n \lg a$

3.  $\lg \frac{a}{c} = \lg a - \lg c$

5.  $\lg \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \lg a$

6.  $\lg x = \lg x \cdot \lg a = \lg x : \lg b$ .

7. Die Logarithmen für die Grundzahl  $e = 2,718281828459 \dots$  heißen natürliche, die für die Grundzahl 10 dagegen Briggs'sche Logarithmen. Man schreibt statt  $\lg a$  kürzer  $\ln a$ , statt  $\lg a$  kürzer  $\lg a$ .

8. Es ist  $\lg(10^n) = n$ ;  $\lg(10^{-n}) = -n$ ;  $\lg(a \cdot 10^n) = \lg a + n$ ;  $\lg(a : 10^n) = \lg a - n$ . Ferner  $\ln(e^{\pm n}) = \pm n$ ;  $\ln(a \cdot 10^n) = \ln a + \ln(10^n)$ ;  $\ln(a : 10^n) = \ln a - \ln(10^n)$ .

9. Die (positiven oder negativen) ganzen Einheiten eines Logarithmus nennt man die Charakteristik oder Kennziffer ( $K$ ) und den echten Dezimalbruch die Mantisse ( $M$ ) des Logarithmus. Für  $10 > a > 1$  hat  $\lg a$  die Kennziffer  $K = 0$ .

10.  $\ln x = \ln 10 \lg x = 2,3025850930 \lg x$   
 $\lg x = \lg e \ln x = 0,4342944819 \ln x$  }  $\ln 10 \lg e = 1$

11.  $\ln i = i \frac{\pi}{2}$

12.  $i^i = e^{-\frac{\pi}{2}} = 0,20788$ .

## B. Kombinationslehre.

1. Die Anzahl der möglichen Permutationen von  $n$  ungleichen Elementen beträgt  $n!$  ( $n$  Fakultät.)

Befinden sich unter den  $n$  Elementen  $p$  gleiche einer Art,  $q$  gleiche einer anderen Art,  $r$  gleiche einer dritten Art usw., so ist die Anzahl

der möglichen Permutationen  $P = \frac{n!}{p! q! r! \dots}$ .

2. Die Anzahl der möglichen Kombinationen von  $n$  Elementen zur  $r$ ten Klasse (d. h. zu je  $r$  Elementen) beträgt:

a)  $\binom{n}{r}$  ohne Wiederholung, d. h. wenn jede Gruppe dasselbe Element nur einmal enthält,

b)  $\binom{n+r-1}{r}$  mit Wiederholung, d. h. wenn jede Gruppe dasselbe Element  $r$  mal enthält.

Die Anzahl aller überhaupt möglichen Kombinationen von  $n$  ungleichen Elementen ohne Wiederholung ist

$$\binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n - 1.$$

3. Die Anzahl der möglichen **Variationen** von  $n$  Elementen zur  $r$ ten Klasse beträgt:

- a)  $\binom{n}{r} \cdot r!$  ohne Wiederholung (entsprechend wie unter 2a),
- b)  $n^r$  mit Wiederholung (entsprechend wie unter 2b).

Man erhält die Variationen aus den Kombinationen, indem man die einzelnen Gruppen der letzteren permutiert.

### C. Determinanten.

1. Eine Determinante von  $n$  Zeilen (wagerechten Reihen) und  $n$  Kolonnen (senkrechten Reihen) ( $n^2$  Elementen) heißt vom  $n$ ten Grade.

2. Die allgemeine Form der Determinante  $n$ ten Grades ist

$$\begin{vmatrix} a_1 b_1 c_1 \dots p_1 \\ a_2 b_2 c_2 \dots p_2 \\ a_3 b_3 c_3 \dots p_3 \\ \vdots \\ a_n b_n c_n \dots p_n \end{vmatrix} = \Sigma (\pm a_1 b_2 c_3 \dots p_n),$$

wenn  $a_1, b_1, \dots, p_n$   $n^2$  Elemente bedeuten.

Die Determinante ist eine Summe von  $n!$  Gliedern, welche, abgesehen vom Vorzeichen, aus der Diagonalreihe  $a_1, b_2, c_3, \dots, p_n$  durch Permutation (s. unter **B.**, S. 48) der Zeiger entstehen. Die so entstehenden  $n!$  Glieder sind zur Hälfte positiv und zur Hälfte negativ, u. zw. hat ein bestimmtes Glied das positive oder negative Vorzeichen, je nachdem die Zahl der Umkehrungen (Inversionen) unter seinen Zeigern gerade oder ungerade ist.

Folgt in einer Permutation ein niedrigeres Element einem höheren, so bilden diese beiden Elemente eine Umkehrung (Inversion).

3. Eine Determinante vom  $n$ ten Grade kann man berechnen, indem man sie in  $n$  Unterdeterminanten vom  $(n - 1)$ ten Grade zerlegt, z. B.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_1 b_1 \\ a_2 b_2 \end{vmatrix} &= a_1 b_2 - a_2 b_1; \\ \begin{vmatrix} a_1 b_1 c_1 \\ a_2 b_2 c_2 \\ a_3 b_3 c_3 \end{vmatrix} &= a_1 \begin{vmatrix} b_2 c_2 \\ b_3 c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 c_1 \\ b_3 c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 c_1 \\ b_2 c_2 \end{vmatrix} \\ &= a_1 (b_2 c_3 - b_3 c_2) - a_2 (b_1 c_3 - b_3 c_1) + a_3 (b_1 c_2 - b_2 c_1); \\ \begin{vmatrix} a_1 b_1 c_1 d_1 \\ a_2 b_2 c_2 d_2 \\ a_3 b_3 c_3 d_3 \\ a_4 b_4 c_4 d_4 \end{vmatrix} &= a_1 \begin{vmatrix} b_2 c_2 d_2 \\ b_3 c_3 d_3 \\ b_4 c_4 d_4 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 c_1 d_1 \\ b_3 c_3 d_3 \\ b_4 c_4 d_4 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 c_1 d_1 \\ b_2 c_2 d_2 \\ b_4 c_4 d_4 \end{vmatrix} - a_4 \begin{vmatrix} b_1 c_1 d_1 \\ b_2 c_2 d_2 \\ b_3 c_3 d_3 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Die Unterdeterminante zum Element  $a_p$  wird erhalten, indem man in der ursprünglichen Determinante die Kolonne  $a$  und die  $p$ te Zeile streicht. Sie ist mit dem positiven oder negativen Vorzeichen zu versehen, je nachdem der Zeiger ungerade oder gerade ist.

4. In einer Determinante kann man die Zeilen mit den Kolonnen vertauschen, z. B.

$$\begin{vmatrix} a_1 b_1 \\ a_2 b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 a_2 \\ b_1 b_2 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} a_1 b_1 c_1 \\ a_2 b_2 c_2 \\ a_3 b_3 c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 a_2 a_3 \\ b_1 b_2 b_3 \\ c_1 c_2 c_3 \end{vmatrix}.$$

5. Vertauscht man in einer Determinante zwei Zeilen oder zwei Kolonnen miteinander, so ist die neue Determinante gleich der ersten mit entgegengesetztem Vorzeichen.

6. Sind die Elemente zweier Zeilen oder zweier Kolonnen einer Determinante entsprechend gleich oder proportional, so ist die Determinante gleich null, z. B.

$$\begin{vmatrix} a_1 b_1 c_1 \\ a_1 b_1 c_1 \\ a_2 b_2 c_2 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} a_1 a_1 b_1 \\ a_2 a_2 b_2 \\ a_3 a_3 b_3 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} a_1 n a_1 b_1 \\ a_2 n a_2 b_2 \\ a_3 n a_3 b_3 \end{vmatrix} = n \begin{vmatrix} a_1 a_1 b_1 \\ a_2 a_2 b_2 \\ a_3 a_3 b_3 \end{vmatrix} = 0.$$

7. Eine Determinante wird mit einer Zahl multipliziert oder durch eine Zahl geteilt, indem man alle Elemente einer Zeile oder einer Kolonne mit der Zahl multipliziert oder durch sie teilt, z. B.

$$p \begin{vmatrix} a_1 b_1 c_1 \\ a_2 b_2 c_2 \\ a_3 b_3 c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p a_1 p b_1 p c_1 \\ a_2 b_2 c_2 \\ a_3 b_3 c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p a_1 b_1 c_1 \\ p a_2 b_2 c_2 \\ p a_3 b_3 c_3 \end{vmatrix}.$$

8. Sind die Elemente einer Zeile oder Kolonne Summen von gleicher Gliederzahl, so ist die Determinante gleich der Summe mehrerer Determinanten, welche man aus der ursprünglichen erhält, indem man die einzelnen Teilreihen einsetzt.

$$\begin{vmatrix} a_1 + p_1 + q_1, b_1 c_1 \\ a_2 + p_2 + q_2, b_2 c_2 \\ a_3 + p_3 + q_3, b_3 c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 b_1 c_1 \\ a_2 b_2 c_2 \\ a_3 b_3 c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p_1 b_1 c_1 \\ p_2 b_2 c_2 \\ p_3 b_3 c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} q_1 b_1 c_1 \\ q_2 b_2 c_2 \\ q_3 b_3 c_3 \end{vmatrix}.$$

9. Eine Determinante ändert ihren Wert nicht, wenn man zu den Elementen einer Zeile oder einer Kolonne die mit einer beliebigen Zahl multiplizierten Elemente einer parallelen Zeile oder Kolonne zuzählt, z. B.

$$\begin{vmatrix} a_1 b_1 c_1 \\ a_2 b_2 c_2 \\ a_3 b_3 c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 + p b_1, b_1 c_1 \\ a_2 + p b_2, b_2 c_2 \\ a_3 + p b_3, b_3 c_3 \end{vmatrix}.$$

## D. Gleichungen.

### a. Gleichungen ersten Grades.

#### 1. Zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten.

$$\left. \begin{array}{l} ax + by = c \\ a_1 x + b_1 y = c_1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x = \begin{vmatrix} c b \\ c_1 b_1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a b \\ a_1 b_1 \end{vmatrix} = \frac{cb_1 - c_1 b}{ab_1 - a_1 b} \\ y = \begin{vmatrix} a c \\ a_1 c_1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a b \\ a_1 b_1 \end{vmatrix} = \frac{ac_1 - a_1 c}{ab_1 - a_1 b} \end{array}$$

#### 2. Zwei homogene Gleichungen mit drei Unbekannten.

$$\begin{array}{l} ax + by + cz = 0 \\ a_1 x + b_1 y + c_1 z = 0 \end{array}$$

$$x : y : z = \begin{vmatrix} b c \\ b_1 c_1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} c a \\ c_1 a_1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a b \\ a_1 b_1 \end{vmatrix} = (bc_1 - b_1 c) : (ca_1 - c_1 a) : (ab_1 - a_1 b).$$

**3. Drei Gleichungen mit drei Unbekannten.**

$$\begin{aligned} a x + b y + c z &= d \\ a_1 x + b_1 y + c_1 z &= d_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z &= d_2 \end{aligned} \quad \text{Setzt man } \begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = D, \text{ so ist}$$

$$x = \begin{vmatrix} d & b & c \\ d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} : D, \quad y = \begin{vmatrix} a & d & c \\ a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \end{vmatrix} : D, \quad z = \begin{vmatrix} a & b & d \\ a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \end{vmatrix} : D.$$

Ueber die arithmetische Bedeutung der Determinanten s. S. 49 u. f.

**4. n Gleichungen mit n Unbekannten.**

1. Lösung mittels Determinanten, entsprechend wie unter 3.

2. Eliminationsverfahren. Man entfernt eine und dieselbe Unbekannte aus den gegebenen  $n$  Gleichungen, indem man  $(n - 1)$  mal je zwei der  $n$  Gleichungen vereinigt. Aus den so entstandenen  $(n - 1)$  neuen Gleichungen eliminiert man in gleicher Weise eine zweite Unbekannte usw., bis eine Gleichung mit einer (der  $n^{\text{ten}}$ ) Unbekannten übrig bleibt, aus der sich diese  $n^{\text{te}}$  Unbekannte ergibt. Durch Einsetzen des gefundenen Wertes in eine der beiden Gleichungen mit zwei Unbekannten erhält man die  $(n - 1)^{\text{te}}$  Unbekannte usw., so dafs sich der Reihe nach auch die übrigen Unbekannten ergeben.

Beispiel:

	Faktoren.		
$2x - y + 3z + 5u = 29$	3	1	2
$5x + 2y - 2z + 3u = 15$	-5		
$3x - 4y + 7z - u = 12$		5	
$4x + 3y - 5z + 2u = 3$			-5
$-19x - 13y + 19z = 12$	-2	-31	
$17x - 21y + 38z = 89$	1		
$-16x - 17y + 31z = 43$		19	
$55x + 5y = 65$	16		
$285x + 80y = 445$	-1		

$$\begin{aligned} 595x &= 595; & x &= 1. \\ 5y &= 65 - 55x = 65 - 55 = 10; & y &= 2. \\ 19z &= 12 + 19x + 13y = 12 + 19 + 26 = 57; & z &= 3. \\ 2u &= 3 - 4x - 3y + 5z = 3 - 4 - 6 + 15 = 8; & u &= 4. \end{aligned}$$

**b. Gleichungen zweiten Grades.**

**1. Algebraische Auflösung.**

$$1. \quad x^2 + px + q = 0 \quad x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

2. Ist  $x_1 + x_2 = s$ ,  $x_1 x_2 = p$ , so sind  $x_1$  und  $x_2$  die beiden Wurzeln der Gleichung

$$x^2 - sx + p = 0.$$

**2. Goniometrische Auflösung.** (Zur Anwendung ununterbrochener logarithmischer Rechnung bei vielstelligen Zahlen.)

1. Fall.  $x^2 \pm px - q = 0$   $p$  und  $q$  positiv,

Man bestimme einen Winkel  $\varphi$  zwischen  $0^\circ$  und  $90^\circ$  so, daß  
 $\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sqrt{q}}{1/2 p}$ ; dann sind die Wurzeln

$$x_1 = \pm \sqrt{q} \operatorname{tg} 1/2 \varphi, \quad x_2 = \mp \frac{\sqrt{q}}{\operatorname{tg} 1/2 \varphi}.$$

2. Fall.  $x^2 \pm px + q = 0$   $p$  und  $q$  positiv.

Nach Berechnung des im ersten Quadranten liegenden Winkels  
 $\varphi$  aus  $\sin \varphi = \frac{\sqrt{q}}{1/2 p}$  bestimmt man die Wurzeln mittels der Formeln

$$x_1 = \mp \sqrt{q} \operatorname{tg} 1/2 \varphi, \quad x_2 = \mp \frac{\sqrt{q}}{\operatorname{tg} 1/2 \varphi}.$$

Findet sich  $\sin \varphi > 1$ , so sind die Wurzeln imaginär, nämlich

$$x = \sqrt{q} (\cos \psi \pm i \sin \psi),$$

worin  $\cos \psi = \mp \frac{1/2 p}{\sqrt{q}}$  ( $\psi$  zwischen  $0^\circ$  und  $180^\circ$ ).

### c. Gleichungen dritten Grades.

$$z^3 + az^2 + bz + c = 0.$$

Setzt man  $z = x - 1/3 a$ ,  
 so entsteht eine reduzierte kubische Gleichung von der Form

$$x^3 + px + q = 0.$$

1. Algebraische Auflösung. Die Wurzeln der Gleichung

$$x^3 + px + q = 0$$

sind nach der Cardanischen Formel

$$\begin{aligned} x_1 &= \sqrt[3]{-1/2 q + \sqrt{(1/2 q)^2 + (1/3 p)^3}} + \sqrt[3]{-1/2 q - \sqrt{(1/2 q)^2 + (1/3 p)^3}}, \\ x_2 &= w_1 \sqrt[3]{-1/2 q + \sqrt{(1/2 q)^2 + (1/3 p)^3}} + w_2 \sqrt[3]{-1/2 q - \sqrt{(1/2 q)^2 + (1/3 p)^3}}, \\ x_3 &= w_2 \sqrt[3]{-1/2 q + \sqrt{(1/2 q)^2 + (1/3 p)^3}} + w_1 \sqrt[3]{-1/2 q - \sqrt{(1/2 q)^2 + (1/3 p)^3}}, \end{aligned}$$

worin  $w_1$  und  $w_2$  die beiden imaginären Wurzeln von  $\sqrt[3]{1}$  bezeichnen,  
 nämlich

$$w_1 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, \quad w_2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}.$$

Ist  $(1/2 q)^2 + (1/3 p)^3 < 0$ , so erscheinen alle drei Wurzeln in  
 imaginärer Form, obgleich sie reell sind. Es ist dann die goniometrische  
 Auflösung anzuwenden (s. S. 53, 3. Fall).

### 2. Auflösung mittels Kreis- und Hyperbelfunktionen.

1. Fall.  $x^3 + px \pm q = 0$ ;  $p$  und  $q$  positiv. Man berechnet die  
 Hilfsgröße  $\varphi$  aus  $\sin \varphi = \frac{1/2 q}{1/3 p \sqrt{1/3 p}}$ ; die Wurzeln sind dann

$$\begin{aligned} x_1 &= \mp 2 \sqrt{1/3 p} \sin 1/3 \varphi, \quad x_2 = \pm \sqrt{1/3 p} \sin 1/3 \varphi + i \sqrt{p} \operatorname{Cof} 1/3 \varphi, \\ x_3 &= \pm \sqrt{1/3 p} \sin 1/3 \varphi - i \sqrt{p} \operatorname{Cof} 1/3 \varphi. \end{aligned}$$

2. Fall.  $x^3 - px \pm q = 0$ ;  $p$  und  $q$  positiv,  $(\frac{1}{3}p)^3 < (\frac{1}{2}q)^2$ .

Man bestimmt  $\varphi$  aus  $\cos \frac{1}{3}\varphi = \frac{\frac{1}{2}q}{\frac{1}{3}p\sqrt{\frac{1}{3}p}}$ ; die Wurzeln sind dann

$$x_1 = \mp 2\sqrt{\frac{1}{3}p} \cos \frac{1}{3}\varphi, \quad x_2 = \pm \sqrt{\frac{1}{3}p} \cos \frac{1}{3}\varphi + i\sqrt{p} \sin \frac{1}{3}\varphi, \\ x_3 = \pm \sqrt{\frac{1}{3}p} \cos \frac{1}{3}\varphi - i\sqrt{p} \sin \frac{1}{3}\varphi.$$

3. Fall.  $x^3 - px \pm q = 0$ ;  $p$  und  $q$  positiv;  $(\frac{1}{3}p)^3 > (\frac{1}{2}q)^2$ .

Man bestimmt den Winkel  $\varphi$  aus  $\cos \varphi = \frac{\frac{1}{2}q}{\frac{1}{3}p\sqrt{\frac{1}{3}p}}$ ; dann ist

$$x_1 = \mp 2\sqrt{\frac{1}{3}p} \cos \frac{1}{3}\varphi, \quad x_2 = \pm 2\sqrt{\frac{1}{3}p} \cos (60^\circ - \frac{1}{3}\varphi), \\ x_3 = \pm 2\sqrt{\frac{1}{3}p} \cos (60^\circ + \frac{1}{3}\varphi).$$

4. Fall.  $x^3 - px \pm q = 0$ ;  $p$  und  $q$  positiv;  $(\frac{1}{3}p)^3 = (\frac{1}{2}q)^2$ .

$$x_1 = \mp 2\sqrt{\frac{1}{3}p}, \quad x_2 = x_3 = \pm \sqrt{\frac{1}{3}p}.$$

#### d. Höhere algebraische und transzendente Gleichungen.

Man bestimme durch Versuche oder Zeichnung Näherungswerte für die Wurzeln; genügt deren Genauigkeit nicht, so kann sie durch eines der Annäherungsverfahren erhöht werden.

##### 1. Bestimmung von Näherungswerten.

###### a) Durch Versuche.

Wird  $y = f(x)$  für  $x = p$  positiv und für  $x = q$  negativ, so liegt eine ungerade Anzahl von Wurzeln, also mindestens eine zwischen  $p$  und  $q$ .

###### β) Durch Zeichnung.

Ist  $f(x) = 0$  die aufzulösende Gleichung, so zeichnet man (etwa mittels Berechnung der Koordinaten einiger Punkte) die Kurve zur Gleichung  $y = f(x)$ ; die Abszissen ihrer Schnittpunkte mit der  $x$ -Achse sind die Wurzeln der Gleichung. Oft ist es besser, der aufzulösenden Gleichung die Form  $f_1(x) = f_2(x)$  zu geben und die beiden Kurven

$$y = f_1(x), \quad y = f_2(x)$$

zu zeichnen, deren gegenseitige Schnittpunkte durch ihre Abszissen die gesuchten Wurzeln liefern.

##### 2. Annäherungsverfahren.

Ist  $a$  ein Näherungswert einer Wurzel von  $f(x) = 0$ , so berechnet man die Verbesserung  $\delta$  aus

$$\delta = -f(a) \frac{a_1 - a}{f(a_1) - f(a)},$$

wo  $a_1$  einen von  $a$  wenig verschiedenen Wert bezeichnet; oder nach dem **Newtonschen Verfahren** aus

$$\delta = -\frac{f(a)}{f'(a)},$$

unter  $f'(a)$  die erste nach  $a$  genommene Ableitung von  $f(a)$  verstanden, oder nach dem **Verfahren der Proportionalteile** aus

$$\delta = -\frac{f(a)}{P},$$

wo  $P$  (Proportionalteil) die in Einheiten irgend einer Dezimale ausgedrückte Änderung von  $f(a)$  bei der Zunahme von  $a$  um eine Einheit jener Dezimale bedeutet.\*) Ist der angenäherte Wert  $(a + \delta)$  noch nicht genau genug, so berechnet man eine neue Annäherung, indem man in die vorstehenden Formeln  $(a + \delta)$  statt  $a$  einsetzt, usw.

## E. Zinseszins- und Rentenrechnung.

1. Der Wert  $K_n$  eines Kapitals  $K$  nach  $n$  Jahren beträgt bei einem Zinsfusse von  $k$  Prozent:

a) bei **jährlichen** Zinseszinsen

$$K_n = Kp^n,$$

worin

$$p = 1 + \frac{k}{100} = \frac{100 + k}{100}$$

der jährliche Diskontfaktor genannt wird;

b) bei **halbjährlichen** Zinseszinsen

$$K_n = Kq^{2n},$$

worin

$$q = 1 + \frac{k}{2 \cdot 100} = \frac{200 + k}{200}$$

der halbjährliche Diskontfaktor genannt wird;

c) bei **stetigen** Zinseszinsen (wobei die Zinsen in jedem Augenblicke zum Kapital geschlagen werden)

$$K_n = Ke^{\frac{kn}{100}}; \quad (e \text{ s. S. 43}).$$

\*) Bei der Berechnung von  $f'(a)$  mittels Logarithmen- oder anderer Tafeln ergibt sich  $P$  nebenher, vgl. Zeitschr. f. Math. u. Physik, Bd. 36 S. 158 f.

Für **jährliche** Zinseszinsen gelten ferner folgende Regeln:

2. Legt man am Anfange jedes Jahres eine Summe  $R$  zurück, so ist der Wert des Zurückgelegten am Ende des  $n^{\text{ten}}$  Jahres einschliesslich der alsdann fälligen Zinsen

$$K_n = R \frac{p^n - 1}{p - 1}.$$

3. Legt man am Ende jedes Jahres die Summe  $R$  zurück, so ist der Wert des Zurückgelegten am Ende des  $n^{\text{ten}}$  Jahres

$$K_n = R \frac{p^n - 1}{p - 1}.$$

Die jährliche **Abschreibungssumme** eines nach  $n$  Jahren erlöschenden Wertes (z. B. eines Konzessionsrechtes) beträgt mithin in Prozenten:

$$100 \frac{R}{K_n} = 100 \frac{p - 1}{p^n - 1}.$$

#### Abschreibungssumme.

Zins- fuß %	Der Wert erlischt in Jahren:															
	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	60	70	75	80	90	100
3,0	18,836	8,723	5,376	3,722	2,742	2,101	1,653	1,326	1,078	0,886	0,613	0,433	0,367	0,311	0,225	0,164
3,25	18,741	8,623	5,278	3,627	2,653	2,018	1,575	1,252	1,010	0,823	0,558	0,387	0,324	0,272	0,193	0,138
3,5	18,648	8,524	5,183	3,536	2,567	1,937	1,499	1,183	0,945	0,763	0,508	0,346	0,286	0,238	0,166	0,115
3,75	18,555	8,426	5,087	3,446	2,483	1,858	1,427	1,115	0,884	0,707	0,462	0,308	0,253	0,208	0,141	0,096
4,0	18,462	8,329	4,994	3,358	2,401	1,783	1,357	1,052	0,826	0,655	0,420	0,274	0,222	0,181	0,120	0,081
4,25	18,370	8,233	4,902	3,272	2,321	1,709	1,290	0,991	0,771	0,606	0,381	0,243	0,196	0,157	0,102	0,067
4,5	18,279	8,137	4,811	3,187	2,243	1,639	1,227	0,934	0,720	0,560	0,345	0,216	0,172	0,137	0,087	0,055
5,0	18,097	7,950	4,634	3,024	2,095	1,505	1,107	0,827	0,626	0,477	0,282	0,169	0,132	0,102	0,062	0,038
5,5	17,917	7,766	4,462	2,868	1,954	1,380	0,997	0,732	0,543	0,406	0,230	0,132	0,101	0,076	0,044	0,026
6,0	17,739	7,586	4,296	2,718	1,822	1,264	0,897	0,646	0,470	0,344	0,187	0,103	0,076	0,057	0,031	0,017

4. Wird das Kapital  $K$  am Ende jedes Jahres um die gleiche Summe  $R$  vermehrt oder vermindert, so beträgt sein Wert nach  $n$  Jahren

$$K_n = K p^n \pm R \frac{p^n - 1}{p - 1}.$$

5. Das Kapital  $K$  wird unter denselben Bedingungen einem anderen Kapital  $K_1$  gleich geworden sein nach

$$n = \frac{\lg [(p - 1) K_1 \pm R] - \lg [(p - 1) K \pm R]}{\lg p} \text{ Jahren.}$$

6. Wenn die jährlich fortgenommene Summe  $R$  (Rente) größer ist als die jährlichen Zinsen des Kapitals  $K$ , wird das Kapital aufgezehrt sein nach

$$n = \frac{\lg R - \lg [R - (p - 1) K]}{\lg p} \text{ Jahren.}$$

7. Soll eine Rente  $R$  für die folgenden  $n$  Jahre gekauft werden, so hat man dafür heute ein Kapital zu zahlen

$$K = R \frac{p^n - 1}{p^n (p - 1)} \mathcal{M}.$$

8. Die Rente, die ein Kapital  $K$  für den Zeitraum von  $n$  Jahren abzuwerfen vermag, beträgt

$$R = \frac{K p^n (p - 1)}{p^n - 1} \mathcal{M}.$$

## F. Reihen.

Binomische Reihen s. S. 45 und 46.

### a. Arithmetische Reihen.

Für die arithmetische Reihe  $a, a + d, a + 2d, \dots, a + (n - 1)d$  ist das  $n^{\text{te}}$  Glied

$$u = a + (n - 1)d$$

und die Summe der  $n$  ersten Glieder

$$S = \frac{1}{2} (a + u) n = [a + \frac{1}{2} (n - 1)d] n.$$

#### Höhere arithmetische Reihen.

Ist  $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n$  eine höhere arithmetische Reihe,

$\Delta a_1, \Delta a_2, \Delta a_3, \dots, \Delta a_{n-1}$  ihre erste,

$\Delta_2 a_1, \Delta_2 a_2, \dots, \Delta_2 a_{n-2}$  ihre zweite Differenzenreihe usw.,

ist also  $\Delta a_1 = a_2 - a_1, \Delta a_2 = a_3 - a_2, \Delta_2 a_1 = \Delta a_2 - \Delta a_1$  usw., so ist das  $n^{\text{te}}$  Glied der Hauptreihe

$$a_n = a_1 + (n - 1) \Delta a_1 + \binom{n-1}{2} \Delta_2 a_1 + \binom{n-1}{3} \Delta_3 a_1 + \dots$$

und die Summe der  $n$  ersten Glieder

$$\Sigma a_n = n a_1 + \binom{n}{2} \Delta a_1 + \binom{n}{3} \Delta_2 a_1 + \binom{n}{4} \Delta_3 a_1 + \dots$$

(Ueber Binomialkoeffizienten s. S. 43 und 45.)

Ist eine höhere arithmetische Reihe von der  $k^{\text{ten}}$  Ordnung, so schließt sowohl die Formel  $a_n$  als auch für  $\Sigma a_n$  mit dem Gliede ab, welches  $\Delta_k a_1$  enthält.

Eine Reihe von  $n$  Gliedern kann höchstens von der  $(n - 1)^{\text{ten}}$  Ordnung sein, in welchem Falle vorstehende Formeln mit dem Gliede  $\Delta_{n-1} a_1$  schliessen.

### b. Geometrische Reihen.

Für die geometrische Reihe  $a, aq, aq^2, \dots, aq^{n-1}$  ist das  $n^{\text{te}}$  Glied

$$u = aq^{n-1}$$

und die Summe der  $n$  ersten Glieder

$$S = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1} = \frac{qu - a}{q - 1}.$$

Ist  $n = \infty$  und  $q$  ein positiver oder negativer echter Bruch, so wird

$$S = \frac{a}{1 - q}.$$

**c. Einige besondere Reihen.**

1.  $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + \dots + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}$
2.  $p + (p+1) + (p+2) + \dots + (q-1) + q = \frac{(q+p)(q-p+1)}{2}$
3.  $2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14 + \dots + (2n-2) + 2n = n(n+1)$
4.  $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + \dots + (2n-3) + (2n-1) = n^2$
5.  $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + \dots + (n-1)^2 + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$
6.  $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 + \dots + (n-1)^3 + n^3 = \left[ \frac{n(n+1)}{2} \right]^2$
7.  $1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + (n-1)^4 + n^4 = \frac{n}{30}(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)$

**d. Exponential- und logarithmische Reihen.**

1.  $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots$  (Wert von  $e$  s. S. 43).
2.  $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$ ;  $-\infty < x < +\infty$
3.  $a^x = 1 + \frac{\ln a}{1!} x + \frac{(\ln a)^2}{2!} x^2 + \frac{(\ln a)^3}{3!} x^3 + \dots$ ;  $-\infty < x < +\infty$
4.  $\ln(1 \pm x) = \pm x - \frac{x^2}{2} \pm \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \pm \frac{x^5}{5} - \dots$ ;  $-1 < x < +1$
5.  $\ln \frac{1+x}{1-x} = 2 \left( x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} + \dots \right)$ ;  $-1 < x < +1$
6.  $\ln \frac{x+1}{x-1} = 2 \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{5x^5} + \dots \right)$ ;  $-1 > x$  oder  $x > +1$
7.  $\ln x = 2 \left[ \frac{x-1}{x+1} + \frac{1}{3} \left( \frac{x-1}{x+1} \right)^3 + \frac{1}{5} \left( \frac{x-1}{x+1} \right)^5 + \frac{1}{7} \left( \frac{x-1}{x+1} \right)^7 + \dots \right]$ ,  
wobei  $0 < x < +\infty$
8.  $\ln(a+x) = \ln a + 2 \left[ \frac{x}{2a+x} + \frac{1}{3} \left( \frac{x}{2a+x} \right)^3 + \frac{1}{5} \left( \frac{x}{2a+x} \right)^5 + \dots \right]$ ,  
wobei  $0 < a < +\infty$  und  $-a < x < +\infty$ .

**c. Reihen für die Kreisfunktionen und ihre Umkehrungen.**

In den Formeln 1. bis 4. ist  $x = \frac{\pi \varphi}{180}$ , wenn  $\varphi$  der Zentrivinkel in Grad ist.

1.  $\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \dots$ ;  $-\infty < x < +\infty$

$$2. \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} + \dots; \quad -\infty < x < +\infty$$

$$3. \operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{3 \cdot 5} + \frac{17x^7}{3^2 \cdot 5 \cdot 7} + \frac{62x^9}{3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9} + \dots; \quad -\frac{\pi}{2} < x < +\frac{\pi}{2}$$

$$4. \operatorname{ctg} x = \frac{1}{x} - \frac{x}{3} + \frac{x^3}{3^2 \cdot 5} - \frac{2x^5}{3^3 \cdot 5 \cdot 7} + \frac{x^7}{3^3 \cdot 5^2 \cdot 7} - \dots; \quad -\pi < x < +\pi$$

$$5. \operatorname{arc} \sin x = x + \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{x^7}{7} + \dots; \quad -1 \leq x \leq +1$$

$$6. \operatorname{arc} \operatorname{tg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \dots; \quad -1 \leq x \leq +1$$

$$7. \operatorname{arc} \operatorname{tg} 1 = \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots$$

### III. KREIS- UND HYPERBELFUNKTIONEN.

#### A. Kreisfunktionen.

(Tafeln der Kreisfunktionen s. S. 26 bis 29.)

Grad	0	90	180	270	360	30	45	60
$\sin =$	0	+1	0	-1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\cos =$	+1	0	-1	0	+1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$
$\operatorname{tg} =$	0	$\infty$	0	$\infty$	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\operatorname{ctg} =$	$\infty$	0	$\infty$	0	$\infty$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$

Ist  $\alpha$  ein Winkel  $< 90^\circ$ , so ist, vorausgesetzt dafs:

Funktion	Winkel $\varphi$ liegt zwischen				Winkel $\varphi$ in Grad =			
	0° u. 90°	90° u. 180°	180° u. 270°	270° u. 360°	$\pm \alpha$	$90 \pm \alpha$	$180 \pm \alpha$	$270 \pm \alpha$
$\sin \varphi =$	+	+	-	-	$\pm \sin \alpha$	$+\cos \alpha$	$\mp \sin \alpha$	$-\cos \alpha$
$\cos \varphi =$	+	-	-	+	$+\cos \alpha$	$\mp \sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$\pm \sin \alpha$
$\operatorname{tg} \varphi =$	+	-	+	-	$\pm \operatorname{tg} \alpha$	$\mp \operatorname{ctg} \alpha$	$\pm \operatorname{tg} \alpha$	$\mp \operatorname{ctg} \alpha$
$\operatorname{ctg} \varphi =$	+	-	+	-	$\pm \operatorname{ctg} \alpha$	$\mp \operatorname{tg} \alpha$	$\pm \operatorname{ctg} \alpha$	$\mp \operatorname{tg} \alpha$

$$\sin(45^\circ \pm \alpha) = \cos(45^\circ \mp \alpha); \quad \operatorname{tg}(45^\circ \pm \alpha) = \operatorname{ctg}(45^\circ \mp \alpha).$$

**a. Beziehungen zwischen den Funktionen desselben Winkels.**

1.  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$     2.  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$     3.  $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$

4.  $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$     5.  $1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$

6.  $\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}}$

7.  $\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}}$

**b. Beziehungen zwischen den Funktionen zweier Winkel.**

1.  $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$

2.  $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$

3.  $\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = [\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta] : [1 \mp \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta]$

4.  $\operatorname{ctg}(\alpha \pm \beta) = [\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta \mp 1] : [\operatorname{ctg} \beta \pm \operatorname{ctg} \alpha]$

5.  $\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$

6.  $\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$

7.  $\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$

8.  $\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$

9.  $\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$     10.  $\operatorname{ctg} \alpha \pm \operatorname{ctg} \beta = \frac{\sin(\beta \pm \alpha)}{\sin \alpha \sin \beta}$

11.  $\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta = \cos^2 \beta - \cos^2 \alpha = \sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta)$

12.  $\cos^2 \alpha - \sin^2 \beta = \cos^2 \beta - \sin^2 \alpha = \cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta)$

13.  $\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} \cos(\alpha - \beta) - \frac{1}{2} \cos(\alpha + \beta)$

14.  $\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \cos(\alpha - \beta) + \frac{1}{2} \cos(\alpha + \beta)$

15.  $\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \sin(\alpha + \beta) + \frac{1}{2} \sin(\alpha - \beta)$

16.  $\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta} = -\frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta}$

17.  $\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta = \frac{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta} = -\frac{\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}$

**c. Formeln für die Vielfachen und Teile eines Winkels.**

1.  $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$      $\sin \alpha = 2 \sin \frac{1}{2} \alpha \cos \frac{1}{2} \alpha$

2.  $\sin n\alpha = n \sin \alpha \cos^{n-1} \alpha - \binom{n}{3} \sin^3 \alpha \cos^{n-3} \alpha + \binom{n}{5} \sin^5 \alpha \cos^{n-5} \alpha - \dots$

3.  $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$

4.  $\cos n \alpha = \cos^n \alpha - \binom{n}{2} \sin^2 \alpha \cos^{n-2} \alpha$   
 $+ \binom{n}{4} \sin^4 \alpha \cos^{n-4} \alpha - \dots$
5.  $\sin \frac{1}{2} \alpha = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} = \frac{1}{2} \sqrt{1 + \sin \alpha} - \frac{1}{2} \sqrt{1 - \sin \alpha}$
6.  $\cos \frac{1}{2} \alpha = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}} = \frac{1}{2} \sqrt{1 + \sin \alpha} + \frac{1}{2} \sqrt{1 - \sin \alpha}$
7.  $\operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}$
8.  $\operatorname{ctg} \frac{1}{2} \alpha = \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha} = \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}}$
9.  $\operatorname{tg} 2 \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{2}{\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha} \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} \alpha}$
10.  $\operatorname{ctg} 2 \alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}{2 \operatorname{ctg} \alpha} = \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \alpha - \frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha; \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2 \frac{1}{2} \alpha - 1}{2 \operatorname{ctg} \frac{1}{2} \alpha}$
11.  $\operatorname{tg} 3 \alpha = \frac{3 \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg}^3 \alpha}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 \alpha}$
12.  $\operatorname{ctg} 3 \alpha = \frac{\operatorname{ctg}^3 \alpha - 3 \operatorname{ctg} \alpha}{3 \operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}$
13.  $\sin \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} \alpha}$
14.  $\cos \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} \alpha}$
15.  $\sin \alpha \pm \cos \alpha = \pm \sqrt{1 \pm \sin 2 \alpha} = \sqrt{2} \sin \left( \alpha \pm \frac{1}{4} \pi \right)$

**d. Potenzen von Sinus und Cosinus.**

1.  $2 \sin^2 \alpha = 1 - \cos 2 \alpha$       2.  $2 \cos^2 \alpha = 1 + \cos 2 \alpha$   
 3.  $4 \sin^3 \alpha = -\sin 3 \alpha + 3 \sin \alpha$       4.  $4 \cos^3 \alpha = \cos 3 \alpha + 3 \cos \alpha$   
 5. Wenn  $n$  eine ungerade Zahl:

$$\sin^n \alpha = \left( \frac{1}{2i} \right)^{n-1} \left[ \sin n \alpha - \binom{n}{1} \sin (n-2) \alpha + \binom{n}{2} \sin (n-4) \alpha \right. \\
\left. - \binom{n}{3} \sin (n-6) \alpha + \dots + (-1)^{\frac{n-3}{2}} \binom{n}{\frac{n-3}{2}} \sin 3 \alpha \right. \\
\left. + (-1)^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{\frac{n-1}{2}} \sin \alpha \right]$$

6. Wenn  $n$  eine gerade Zahl:

$$\sin^n \alpha = \frac{1}{2^{n-1} i^n} \left[ \cos n \alpha - \binom{n}{1} \cos (n-2) \alpha + \binom{n}{2} \cos (n-4) \alpha - \dots \right. \\
\left. + (-1)^{\frac{n-4}{2}} \binom{n}{\frac{n-4}{2}} \cos 4 \alpha + (-1)^{\frac{n-2}{2}} \binom{n}{\frac{n-2}{2}} \cos 2 \alpha \right] \\
+ (-1)^{\frac{n}{2}} \binom{n}{\frac{n}{2}} \left( \frac{1}{2^{n/2} i^n} \right)$$

7. Wenn  $n$  eine ungerade Zahl:

$$\cos^n \alpha = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \left[ \cos n\alpha + \binom{n}{1} \cos(n-2)\alpha + \binom{n}{2} \cos(n-4)\alpha \right. \\ \left. + \binom{n}{3} \cos(n-6)\alpha + \dots + \binom{n-3}{2} \cos 3\alpha + \binom{n-1}{2} \cos \alpha \right]$$

8. Wenn  $n$  eine gerade Zahl:

$$\cos^n \alpha = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \left[ \cos n\alpha + \binom{n}{1} \cos(n-2)\alpha + \binom{n}{2} \cos(n-4)\alpha + \dots \right. \\ \left. + \binom{n-4}{2} \cos 4\alpha + \binom{n-2}{2} \cos 2\alpha \right] + \binom{n}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Ueber Binomialkoeffizienten s. S. 43 u. 45; über  $i$  s. S. 47.)

### e. Formeln für die Arcus der verschiedenen Funktionen.

$$1. \arcsin u = \arccos \sqrt{1-u^2} = \arctg \frac{u}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{\pi}{2} - \arccos u$$

$$2. \arccos u = \arcsin \sqrt{1-u^2} = \arctg \frac{\sqrt{1-u^2}}{u} = \frac{\pi}{2} - \arcsin u$$

$$3. \arctg u = \arcsin \frac{u}{\sqrt{1+u^2}} = \arccos \frac{1}{\sqrt{1+u^2}} = \operatorname{arctg} \frac{1}{u} \\ = \frac{1}{2} \arctg \frac{2u}{1-u^2} = \frac{1}{2} \arcsin \frac{2u}{1+u^2} = \frac{1}{2} \arccos \frac{1-u^2}{1+u^2}$$

$$4. \arcsin u \pm \arcsin v = \arcsin (u\sqrt{1-v^2} \pm v\sqrt{1-u^2}) \\ = \arccos (\sqrt{1-u^2}\sqrt{1-v^2} \mp uv)$$

$$5. \arccos u \pm \arccos v = \arcsin (v\sqrt{1-u^2} \pm u\sqrt{1-v^2}) \\ = \arccos (uv \mp \sqrt{1-u^2}\sqrt{1-v^2})$$

$$6. \arctg u \pm \arctg v = \arctg \frac{u \pm v}{1 \mp uv}$$

(Weiteres s. u. c., S. 66.)

### f. Beziehungen zwischen den drei Winkeln $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ .

$$1. \sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = 4 \cos \frac{1}{2} \alpha \cos \frac{1}{2} \beta \cos \frac{1}{2} \gamma$$

$$2. \cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = 4 \sin \frac{1}{2} \alpha \sin \frac{1}{2} \beta \sin \frac{1}{2} \gamma + 1$$

$$3. \sin \alpha + \sin \beta - \sin \gamma = 4 \sin \frac{1}{2} \alpha \sin \frac{1}{2} \beta \cos \frac{1}{2} \gamma$$

$$4. \cos \alpha + \cos \beta - \cos \gamma = 4 \cos \frac{1}{2} \alpha \cos \frac{1}{2} \beta \sin \frac{1}{2} \gamma - 1$$

$$5. \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma + 2$$

$$6. \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta - \sin^2 \gamma = 2 \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma$$

$$7. \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma$$

8.  $\operatorname{ctg} \frac{1}{2} \alpha + \operatorname{ctg} \frac{1}{2} \beta + \operatorname{ctg} \frac{1}{2} \gamma = \operatorname{ctg} \frac{1}{2} \alpha \operatorname{ctg} \frac{1}{2} \beta \operatorname{ctg} \frac{1}{2} \gamma$   
 9.  $\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \gamma + \operatorname{ctg} \beta \operatorname{ctg} \gamma = 1$   
 10.  $\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = 4 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$   
 11.  $\sin 2\alpha + \sin 2\beta - \sin 2\gamma = 4 \cos \alpha \cos \beta \sin \gamma$

## B. Ebene Dreiecke.

Formeln für den Flächeninhalt des Dreiecks s. S. 125.

Es seien  $a, b, c$  die Seiten des Dreiecks,  
 $\alpha, \beta, \gamma$  die den Seiten gegenüberliegenden Winkel,  
 $\varrho$  der Halbmesser des eingeschriebenen Kreises,  
 $r$  der Halbmesser des umschriebenen Kreises,  
 $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$  die halbe Summe der Seiten.

(Da  $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ , so gelten auch die Formeln 1 bis 11 unter f. auf S. 61.)

### a. Allgemeine Formeln.

1.  $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2r$   
 2.  $a = b \cos \gamma + c \cos \beta$ ;  $b = c \cos \alpha + a \cos \gamma$ ;  $c = a \cos \beta + b \cos \alpha$ .  
 3.  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$   
 $= (b + c)^2 - 4bc \cos^2 \frac{1}{2} \alpha$       4.  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{a \sin \gamma}{b - a \cos \gamma}$   
 $= (b - c)^2 + 4bc \sin^2 \frac{1}{2} \alpha$   
 5.  $\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$       6.  $\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$   
 7.  $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}} = \frac{\varrho}{s-a}$        $\operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = \frac{\varrho}{s-b}$   
 8.  $(a + b) : c = \cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta) : \cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$   
 9.  $(a - b) : c = \sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta) : \sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$   
 10.  $(a + b) : (a - b) = \operatorname{tg} \frac{1}{2}(\alpha + \beta) : \operatorname{tg} \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$   
 11.  $\varrho = 4r \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} = \frac{abc}{4rs} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$   
 12. Die nach  $c$  gehende Winkelhalbierende ist  

$$w = \frac{2\sqrt{abs(s-c)}}{a+b} = \frac{\sqrt{ab[(a+b)^2 - c^2]}}{a+b}$$
  
 13. Die nach  $c$  gehende Mittellinie ist  

$$m = \frac{1}{2} \sqrt{2(a^2 + b^2) - c^2}$$

**b. Schiefwinklige Dreiecke.**

gegeben	gesucht	Formeln
$a, b, c$	$\alpha$	$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ ; oder s. 62 B. a. Formel 5, 6 oder 7; Formel 5 für kleine Winkel, 6 für Winkel nahe $90^\circ$ .
$a, b, \alpha$	$\beta$	$\sin \beta = \frac{b \sin \alpha}{a}$
	$\gamma$	$\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta)$
	$c$	$c = \frac{a \sin \gamma}{\sin \alpha} = b \cos \alpha \pm \sqrt{a^2 - b^2 \sin^2 \alpha}$ Für $a > b$ ist $\beta < 90^\circ$ und $\beta < \alpha$ . Für $b > a > b \sin \alpha$ ist für das eine der Dreiecke mit den gegebenen Elementen $\alpha < \beta < 90^\circ$ ; für das andere Dreieck ist $\beta > 90^\circ$ . Für $b \sin \alpha > a$ gibt es kein Dreieck, dem die gegebenen Elemente zukommen.
$a, \alpha, \beta$	$b, c$	$b = \frac{a \sin \beta}{\sin \alpha}$ $c = \frac{a \sin \gamma}{\sin \alpha} = \frac{a \sin (\alpha + \beta)}{\sin \alpha}$
$a, b, \gamma$	$\alpha, \beta$	$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a \sin \gamma}{b - a \cos \gamma}$ $\beta = 180^\circ - (\alpha + \gamma)$ oder $\frac{1}{2}(\alpha + \beta) = 90^\circ - \frac{1}{2}\gamma$ und $\operatorname{tg} \frac{1}{2}(\alpha - \beta) = \frac{a - b}{a + b} \operatorname{ctg} \frac{1}{2}\gamma$ . $\alpha = \frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\alpha - \beta}{2}$ ; $\beta = \frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{\alpha - \beta}{2}$ .
	$c$	$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma} = \frac{a \sin \gamma}{\sin \alpha}$ $= \frac{a - b}{\cos \varphi}$ , wo $\operatorname{tg} \varphi = \frac{2\sqrt{ab} \sin \frac{1}{2}\gamma}{a - b}$ .

**c. Rechtwinklige Dreiecke.**

$a$  und  $b$  Katheten,  $c$  Hypotenuse,  $\alpha$  der Winkel, der  $a$  gegenüberliegt.

1.  $\sin \alpha = \frac{a}{c}$
2.  $\cos \alpha = \frac{b}{c}$
3.  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$
4.  $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{a}$
5.  $a^2 + b^2 = c^2$ .

**C. Kugeldreiecke.**

Formel für den Flächeninhalt des Kugeldreiecks s. VII, B, 7.

Es seien  $a, b, c$  die Seiten des Dreiecks,

$\alpha, \beta, \gamma$  die den Seiten gegenüberliegenden Winkel,

$$s = \frac{1}{2}(a + b + c),$$

$$\sigma = \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma),$$

$$\varepsilon = \alpha + \beta + \gamma - 180^\circ \text{ der sogen. sphärische Exzefs.}$$

### a. Allgemeine Formeln.

$$1. \frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\sin \beta} = \frac{\sin c}{\sin \gamma}$$

$$2. \cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha$$

$$3. \cos \alpha = -\cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos a$$

$$4. \cos a \sin b = \sin a \cos b \cos \gamma + \sin c \cos \alpha$$

$$\operatorname{ctg} a \sin b = \sin \gamma \operatorname{ctg} \alpha + \cos \gamma \cos b$$

$$5. \cos \alpha \sin \beta = \sin \gamma \cos a - \sin \alpha \cos \beta \cos c$$

$$\operatorname{ctg} \alpha \sin \beta = \sin c \operatorname{ctg} a - \cos c \cos \beta$$

$$6. \sin \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{-\cos \sigma \cos(\sigma - \alpha)}{\sin \beta \sin \gamma}}; \cos \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\cos(\sigma - \beta) \cos(\sigma - \gamma)}{\sin \beta \sin \gamma}}$$

$$7. \sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin(s-b) \sin(s-c)}{\sin b \sin c}}; \cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin s \sin(s-a)}{\sin b \sin c}}$$

$$8. \operatorname{ctg} \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\operatorname{ctg} \frac{1}{2} a \operatorname{ctg} \frac{1}{2} b + \cos \gamma}{\sin \gamma}$$

$$9. \operatorname{tg} \frac{\varepsilon}{4} = \sqrt{\operatorname{tg} \frac{1}{2} s \operatorname{tg} \frac{1}{2}(s-a) \operatorname{tg} \frac{1}{2}(s-b) \operatorname{tg} \frac{1}{2}(s-c)}$$

### b. Nepersche Analogien.

$$1. \operatorname{tg} \frac{1}{2}(a+b) = \frac{\cos \frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\cos \frac{1}{2}(\alpha+\beta)} \operatorname{tg} \frac{c}{2}; \operatorname{tg} \frac{1}{2}(a-b) = \frac{\sin \frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\sin \frac{1}{2}(\alpha+\beta)} \operatorname{tg} \frac{c}{2}$$

$$2. \operatorname{tg} \frac{1}{2}(\alpha+\beta) = \frac{\cos \frac{1}{2}(a-b)}{\cos \frac{1}{2}(a+b)} \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2}; \operatorname{tg} \frac{1}{2}(\alpha-\beta) = \frac{\sin \frac{1}{2}(a-b)}{\sin \frac{1}{2}(a+b)} \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2}$$

### c. Gaußsche Formeln.

$$1. \cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \cos \frac{1}{2}c = \cos \frac{1}{2}(a + b) \sin \frac{1}{2}\gamma$$

$$2. \sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \cos \frac{1}{2}c = \cos \frac{1}{2}(a - b) \cos \frac{1}{2}\gamma$$

$$3. \cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta) \sin \frac{1}{2}c = \sin \frac{1}{2}(a + b) \sin \frac{1}{2}\gamma$$

$$4. \sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta) \sin \frac{1}{2}c = \sin \frac{1}{2}(a - b) \cos \frac{1}{2}\gamma$$

### d. Rechtwinklige Kugeldreiecke.

Wenn  $c$  die Hypotenuse, also  $\gamma = 90^\circ$  ist, gelten folgende Formeln:

$$1. \cos c = \cos a \cos b = \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta$$

$$2. \cos a = \frac{\cos \alpha}{\sin \beta}$$

$$3. \cos b = \frac{\cos \beta}{\sin \alpha}$$

$$4. \sin \alpha = \frac{\sin a}{\sin c}$$

$$5. \cos \alpha = \frac{\operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} c}$$

$$6. \operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{tg} a}{\sin b}$$

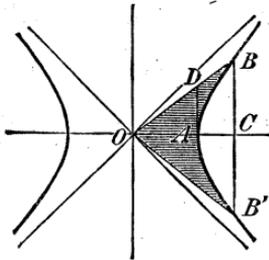
## D. Hyperbelfunktionen.\*)

(Tafel der Hyperbelfunktionen s. S. 30 bis 34.)

### a. Grundformeln.

1. Die Hyperbelfunktionen stehen in ähnlicher Beziehung zur gleichseitigen Hyperbel, wie die Kreisfunktionen zum Kreise. Es bezeichne (s. Abb. 1)  $O$  den Mittelpunkt,  $A$  den einen Scheitel einer gleichseitigen Hyperbel (vgl. S. 101), deren reelle Halbachse  $OA=1$  ist,  $B$  einen beliebigen Punkt der Kurve; ferner sei  $BB' \perp OA$ ,  $C$  der Schnittpunkt von  $BB'$  mit  $OA$ ,  $D$  der Schnittpunkt des Leitstrahles  $OB$  mit der Scheiteltangente  $AD$ . Man faßt die Strecken  $BC$ ,  $OC$  und  $DA$  als Funktionen der gestrichelten Hyperbelfläche  $OBAB'O$  auf und schreibt

Abb. 1.



$$\begin{aligned} BC &= \text{Sin } \varphi, \\ OC &= \text{Cof } \varphi, \\ DA &= \text{Tg } \varphi^{**}, \end{aligned}$$

wenn  $\varphi$  gleich der Fläche  $OBAB'O$  ist.

Ferner bezeichnet man  $\frac{1}{\text{Tg } \varphi}$  mit  $\text{Ctg } \varphi$ .

$$2. \text{ Es ist } \text{Sin } \varphi = \frac{e^\varphi - e^{-\varphi}}{2} \quad \text{Cof } \varphi = \frac{e^\varphi + e^{-\varphi}}{2}$$

$$\text{Tg } \varphi = \frac{\text{Sin } \varphi}{\text{Cof } \varphi} = \frac{e^\varphi - e^{-\varphi}}{e^\varphi + e^{-\varphi}}; \quad \text{Ctg } \varphi = \frac{\text{Cof } \varphi}{\text{Sin } \varphi} = \frac{e^\varphi + e^{-\varphi}}{e^\varphi - e^{-\varphi}}$$

$$\text{Cof } \varphi + \text{Sin } \varphi = e^\varphi; \quad \text{Cof } \varphi - \text{Sin } \varphi = e^{-\varphi}; \quad \text{Cof}^2 \varphi - \text{Sin}^2 \varphi = 1. \\ \text{(s. S. 43.)}$$

3. Die Hyperbelfunktionen sind, wie die Kreisfunktionen, periodisch, jedoch ist die Periode imaginär, u. zw. bei den Funktionen  $\text{Sin}$  und  $\text{Cof}$  gleich  $2i\pi$ , bei den Funktionen  $\text{Tg}$  und  $\text{Ctg}$  gleich  $i\pi$ . Für reelle Werte der Veränderlichen  $\varphi$  ist

$$\text{Cof } \varphi \geq 1; \quad -1 \leq \text{Tg } \varphi \leq 1; \quad \text{Ctg}^2 \varphi \geq 1,$$

während  $\text{Sin } \varphi$  jeden (positiven oder negativen) Zahlenwert annehmen kann.

$$4. \text{ Es ist } \text{Sin}(-\varphi) = -\text{Sin } \varphi; \quad \text{Cof}(-\varphi) = +\text{Cof } \varphi; \\ \text{Tg}(-\varphi) = -\text{Tg } \varphi; \quad \text{Ctg}(-\varphi) = -\text{Ctg } \varphi.$$

\*) Eine ausführliche Sammlung von Formeln und Tafeln findet sich in Ligowski, Tafeln der Hyperbelfunktionen usw., Berlin 1890, Wilhelm Ernst & Sohn.

\*\*) Eine andere Schreibweise ist:

$$\text{sh } \varphi \text{ (= sinus hyperbolicus } \varphi), \text{ ch } \varphi, \text{ th } \varphi.$$

5. Ist  $\text{Sin } \varphi = u$ , so schreibt man  $\varphi = \text{Ar Sin } u$ ,

d. h.,  $\text{Ar Sin } u$  bedeutet diejenige Hyperbelfläche, deren  $\text{Sin}$  gleich  $u$  ist. Entsprechende Bedeutung haben  $\text{Ar Cos } u$ ,  $\text{Ar Tg } u$ ,  $\text{Ar Ctg } u^*$ ). Man hat:

$$\text{Ar Sin } u = \ln(u + \sqrt{u^2 + 1}); \quad \text{Ar Tg } u = \frac{1}{2} \ln \frac{1+u}{1-u}$$

$$\text{Ar Cos } u = \ln(u + \sqrt{u^2 - 1}); \quad \text{Ar Ctg } u = \frac{1}{2} \ln \frac{u+1}{u-1}.$$

### b. Eigenschaften der Hyperbelfunktionen.

Die für die Kreisfunktionen und ihre Umkehrungen (S. 58 u. f., auch im Folgenden unter IV.) gegebenen Beziehungen gelten in der Form auch für die entsprechenden Hyperbelfunktionen und deren Umkehrungen, jedoch u. Umst. mit Abänderung der Vorzeichen. Man erhält nämlich aus einer Beziehung der Kreisfunktionen die entsprechende Beziehung der Hyperbelfunktionen, indem man in erstere  $\alpha = ix$ ,  $\beta = iy$  setzt, darauf die Gleichungen

$\sin ix = i \text{Sin } x$ ,  $\cos ix = \text{Cos } x$ ,  $\text{tg } ix = i \text{Tg } x$ ,  $\text{ctg } ix = -i \text{Ctg } x$  anwendet und, falls erforderlich, beiderseits durch  $i$ ,  $i^2 \dots$  teilt.

Beispiele:

1. Nach S. 59 b. 11. ist  $\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta = \sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta)$ .

Für  $\alpha = ix$ ,  $\beta = iy$  wird  $\sin^2 ix - \sin^2 iy = \sin i(x+y) \sin i(x-y)$

oder  $i^2 \text{Sin}^2 x - i^2 \text{Sin}^2 y = i \text{Sin}(x+y) i \text{Sin}(x-y) = i^2 \text{Sin}(x+y) \text{Sin}(x-y)$ ;  
mithin  $\text{Sin}^2 x - \text{Sin}^2 y = \text{Sin}(x+y) \text{Sin}(x-y)$ .

2. Aus Formel e. 1., S. 57 folgt

$$\sin ix = \frac{ix}{1!} - \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^5}{5!} - \dots = i \left( \frac{x}{1!} - \frac{i^2 x^3}{3!} + \frac{i^4 x^5}{5!} - \dots \right);$$

$$\text{mithin } \text{Sin } x = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots; \quad -\infty < x < +\infty.$$

### c. Beziehungen zwischen den Kreis- und Hyperbelfunktionen.

$$1. \sin x = -i \text{Sin } ix = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

$$2. \cos x = \text{Cos } ix = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$3. \text{tg } x = -i \text{Tg } ix = -i \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{e^{ix} + e^{-ix}}$$

$$4. \text{ctg } x = i \text{Ctg } ix = i \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{e^{ix} - e^{-ix}}$$

$$5. \sin ix = i \text{Sin } x = i \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$6. \cos ix = \text{Cos } x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$7. \text{tg } ix = i \text{Tg } x = i \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$8. \text{ctg } ix = -i \text{Ctg } x = -i \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

$$9. \text{arc sin } x = -i \text{Ar Sin } ix = -i \ln [ix + \sqrt{1-x^2}]$$

$$10. \text{arc cos } x = -i \text{Ar Cos } ix = -i \ln [ix + i\sqrt{1-x^2}]$$

$$11. \text{arc tg } x = -i \text{Ar Tg } ix = \frac{1}{2i} \ln \frac{1+ix}{1-ix}$$

$$12. \text{arc ctg } x = i \text{Ar Ctg } ix = \frac{1}{2i} \ln \frac{ix-1}{ix+1}$$

\*) Die Bezeichnung kommt von area = Fläche, Flächeninhalt.

13.  $\operatorname{arcsin} ix = i \operatorname{Ar} \operatorname{Sin} x = i \ln [x + \sqrt{1+x^2}]$

14.  $\operatorname{arccos} ix = -i \operatorname{Ar} \operatorname{Cos} ix = \frac{1}{2} \pi - i \ln [x + \sqrt{1+x^2}]$

15.  $\operatorname{arctg} x = i \operatorname{Ar} \operatorname{Tg} x = \frac{i}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$

16.  $\operatorname{arctg} ix = -i \operatorname{Ar} \operatorname{Ctg} x = -\frac{i}{2} \ln \frac{x+1}{x-1}$

Für die Formeln 9 bis 16 vgl. auch e., S. 61.

## IV. DIFFERENTIAL- UND INTEGRALRECHNUNG.

### A. Differentialformeln.

Ist  $y = f(x)$ , so ist der Differentialquotient

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

und das Differential

$$dy = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} dx = \frac{dy}{dx} dx.$$

In den folgenden Formeln können die Größen  $x, y, z, u \dots$  entweder unabhängig veränderlich oder Funktionen derselben Veränderlichen ( $t$ ) sein.

1.  $d(a+x) = dx$

2.  $d(ax) = a dx$

3.  $d(x+y+z+u \dots) = dx + dy + dz + du + \dots$

4.  $d(xy) = x dy + y dx$

5.  $d(xyzu \dots) = \left( \frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} + \frac{dz}{z} + \frac{du}{u} + \dots \right) xyzu \dots$

6.  $d \frac{x}{y} = \frac{y dx - x dy}{y^2}$

7.  $dx^m = m x^{m-1} dx$

8.  $d \sqrt{x} = \frac{dx}{2 \sqrt{x}}$

9.  $d \frac{1}{x} = -\frac{dx}{x^2}$

10.  $de^x = e^x dx$

11.  $da^x = a^x \ln a dx$

12.  $d \ln x = \frac{dx}{x}$

13.  $d \lg x = \frac{1}{\ln a} \frac{dx}{x}$

14.  $d \sin x = \cos x dx$

15.  $d \frac{1}{\sin x} = -\frac{\cos x dx}{\sin^2 x}$

16.  $d \cos x = -\sin x dx$

17.  $d \frac{1}{\cos x} = \frac{\sin x dx}{\cos^2 x}$

18.  $d \operatorname{tg} x = \frac{dx}{\cos^2 x}$

19.  $d \operatorname{ctg} x = -\frac{dx}{\sin^2 x}$

20.  $d \operatorname{arc} \sin x = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

21.  $d \operatorname{arc} \cos x = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

22.  $d \operatorname{arc} \operatorname{tg} x = \frac{dx}{1+x^2}$

23.  $d \operatorname{arc} \operatorname{ctg} x = -\frac{dx}{1+x^2}$

24.  $d \ln \sin x = \operatorname{ctg} x \cdot dx$

25.  $d \ln \cos x = -\operatorname{tg} x dx$

26.  $d \ln \operatorname{tg} x = \frac{2 dx}{\sin 2x}$

27.  $d \ln \operatorname{ctg} x = -\frac{2 dx}{\sin 2x}$

28.  $d \operatorname{Sin} x = \operatorname{Cos} x dx$

29.  $d \operatorname{Cos} x = \operatorname{Sin} x dx$

30.  $d \operatorname{Tg} x = \frac{dx}{\operatorname{Cos}^2 x}$

31.  $d \operatorname{Ctg} x = -\frac{dx}{\operatorname{Sin}^2 x}$

32.  $dx^y = x^{y-1} (x \ln x dy + y dx).$

Allgemein ist

33.  $dF(x, y, z, u \dots) = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz + \frac{\partial F}{\partial u} du + \dots$

34.  $d^n F(x, y, z, u \dots) = \frac{\partial^n F}{\partial x^n} dx^n + n \frac{\partial^n F}{\partial x^{n-1} \partial y} dx^{n-1} dy + \dots$

oder (sinnbildlich)  $= \left( \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz + \dots \right)^n,$

wenn man in dem nach dem binomischen Satze (S. 45) entwickelten Ausdruck auf der rechten Seite die  $n$ te Potenz von  $\partial$  im Zähler mit der  $n$ ten partiellen Ableitung von  $F$  vertauscht.

## B. Reihen von Maclaurin und Taylor.

### 1. Reihe von Maclaurin.

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \frac{x^3}{3!} f'''(0) + \dots$$

$$\dots + \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} f^{(n-2)}(0) + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(0) + R_n.$$

$f(0), f'(0), f''(0), \dots, f^{(n-1)}(0)$  sind die Werte, die  $f(x), f'(x), f''(x), \dots, f^{(n-1)}(x)$  für  $x=0$  annehmen.  $R_n$  heisst das Restglied.

$$R_n = \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(\Theta x) \quad \text{oder} \quad R_n = \frac{(1-\Theta)^{n-1} x^n}{(n-1)!} f^{(n)}(\Theta x),$$

worin  $\Theta$  einen positiven echten Bruch bezeichnet.

### 2. Reihe von Taylor.

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1!} f'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \frac{h^3}{3!} f'''(x) + \dots$$

$$\dots + \frac{h^{n-2}}{(n-2)!} f^{(n-2)}(x) + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x) + R_n.$$

$$R_n = \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x + \Theta h) \quad \text{oder} \quad R_n = \frac{(1 - \Theta)^{n-1} h^n}{(n-1)!} f^{(n)}(x + \Theta h),$$

worin  $\Theta$  einen positiven echten Bruch bezeichnet.

Die Reihen von Maclaurin und Taylor sind nur gültig, wenn  $f(x)$  mit sämtlichen Ableitungen in dem Intervall 0 bis  $x$  bzw.  $x$  bis  $x+h$  endlich und stetig bleibt.

### C. Unbestimmte Formen.

1.  $\frac{0}{0}$ . Nimmt der Bruch  $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$  für  $x=a$  die Form  $\frac{0}{0}$  an, so erhält man den wahren Wert, wenn man  $\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}$  bildet und darin  $x=a$  setzt. Stellt sich auch  $\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}$  in der Form  $\frac{0}{0}$  dar, so ist der wahre Wert  $\frac{\varphi''(a)}{\psi''(a)}$  usw.

2.  $\frac{\infty}{\infty}$ . Man verfährt wie bei  $\frac{0}{0}$ .

3.  $0 \cdot \infty$ . Wenn in  $\varphi(x)f(x)$  für  $x=a$   $\varphi(x)=0$  und  $f(x)=\infty$  wird, so setzt man zur Ermittlung des wahren Wertes  $\frac{1}{f(x)} = \psi(x)$  und erhält dann den Fall 1.

4.  $0^0, 1^\infty, \infty^0$ . Nimmt der Ausdruck  $\psi(x)^\varphi(x)$  für  $x=a$  eine dieser Formen an, so setze man  $\psi(x)^\varphi(x) = y$ ; dann wird  $\ln y = \varphi(x) \cdot \ln \psi(x)$ , mithin  $y = e^{\varphi(x) \ln \psi(x)}$ . Der Exponent  $\varphi(x) \ln \psi(x)$  wird nun nach Fall 3. bestimmt.

5.  $\infty - \infty$ . Es wird  $\varphi(x) - \psi(x) = \infty - \infty$  auf den Fall 1 zurückgeführt, indem man

$$\varphi(x) - \psi(x) = \frac{\frac{1}{\psi(x)} - \frac{1}{\varphi(x)}}{\frac{1}{\varphi(x)\psi(x)}} = \frac{\frac{1}{\infty} - \frac{1}{\infty}}{\frac{1}{\infty \cdot \infty}} = \frac{0}{0} \text{ setzt.}$$

### D. Maxima und Minima.

1. Funktion mit einer Veränderlichen. Die Werte von  $x$ , die  $y=f(x)$  zu einem Maximum oder Minimum machen, findet man aus der Gleichung

$$f'(x) = 0,$$

u. zw. ist für einen dieser Werte von  $x$

$$\begin{aligned} y &\text{ ein Maximum, wenn } f''(x) < 0; \\ y &\text{ „ Minimum, „ } f''(x) > 0 \text{ wird.} \end{aligned}$$

Ist  $f''(x) = 0$ , so muß auch  $f'''(x) = 0$  sein, wenn der gefundene Wert von  $x$  ein Maximum oder Minimum von  $y$  ergeben soll; es wird  $y$  ein Maximum oder Minimum, je nachdem  $f''''(x) \leq 0$ ; usw.

**2. Unentwickelte Funktion:**  $f(x, y) = 0$ . Die Werte, welche  $y$  zu einem Maximum oder Minimum machen, müssen die Gleichungen  $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 0$ ,  $f(x, y) = 0$ , und die Bedingung  $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \geq 0$  erfüllen.

$y$  ist ein Maximum, wenn  $\left[ -\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right] : \left[ \frac{\partial f}{\partial y} \right] < 0$ ;

$y$  „ „ Minimum, „  $\left[ -\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right] : \left[ \frac{\partial f}{\partial y} \right] > 0$  wird.

**3. Funktion mit zwei unabhängigen Veränderlichen:**  $z = f(x, y)$ . Die Werte von  $x$  und  $y$ , die ein Maximum oder Minimum ergeben, finden sich aus den Gleichungen

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 0$$

unter der Bedingung  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right]^2 > 0$ ,

u. zw. hat man, wenn  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$  und  $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$  beide  $< 0$ , ein Maximum;

„  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$  und  $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$  „  $> 0$ , „ Minimum.

**4. Relative Maxima und Minima.** Sollen die Maxima und Minima der Funktion  $v = f(x, y, z)$  unter gleichzeitigem Bestehen der Bedingungsgleichungen  $\varphi(x, y, z) = 0$  und  $\psi(x, y, z) = 0$  ermittelt werden, so setze man

$$1. \quad \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \mu \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0$$

$$2. \quad \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \mu \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0$$

$$3. \quad \frac{\partial f}{\partial z} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \mu \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0.$$

Ferner ist

$$4. \quad \varphi(x, y, z) = 0$$

$$5. \quad \psi(x, y, z) = 0.$$

Aus den Gleichungen 1, 2 und 3 eliminiere man die Hilfsgrößen  $\lambda$  und  $\mu$ ; man findet dann mit Hilfe der Gleichungen 4 und 5 die Werte von  $x, y, z$ , die einem Maximum oder Minimum entsprechen.

## E. Zerlegung rationaler Brüche in Teilbrüche.

In Teilbrüche können nur echte rationale Brüche zerlegt werden, deren allgemeine Form

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + \dots Px + Q}{x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + \dots + px + q} \text{ ist.}$$

Man zerlege  $F(x)$  in seine linearen Faktoren durch Auflösen der Gleichung  $F(x) = 0$ .

Sind  $\alpha, \beta, \gamma, \delta \dots$  die  $n$  Wurzeln dieser Gleichung, so ist

$$F(x) = (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)(x - \delta) \dots$$

Alsdann können drei Fälle eintreten:

1. Die Wurzeln sind sämtlich **reell und verschieden**.

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{\alpha_1}{x - \alpha} + \frac{\beta_1}{x - \beta} + \frac{\gamma_1}{x - \gamma} + \frac{\delta_1}{x - \delta} + \dots$$

Die Zähler  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1 \dots$  bestimmen sich aus den Gleichungen

$$\alpha_1 = \frac{f(\alpha)}{F'(\alpha)}, \quad \beta_1 = \frac{f(\beta)}{F'(\beta)}, \quad \gamma_1 = \frac{f(\gamma)}{F'(\gamma)}, \quad \delta_1 = \frac{f(\delta)}{F'(\delta)}, \quad \text{usw.}$$

2. Die Wurzeln sind teilweise **gleich**,

etwa  $\alpha$   $\mu$ -mal,  $\beta$   $\nu$ -mal, sodafs also

$$F(x) = (x - \alpha)^\mu (x - \beta)^\nu (x - \gamma)(x - \delta) \dots,$$

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{\alpha_1}{(x - \alpha)^\mu} + \frac{\alpha_2}{(x - \alpha)^{\mu-1}} + \frac{\alpha_3}{(x - \alpha)^{\mu-2}} + \dots + \frac{\alpha_\mu}{x - \alpha} + \frac{\beta_1}{(x - \beta)^\nu} + \frac{\beta_2}{(x - \beta)^{\nu-1}} + \dots + \frac{\beta_\nu}{x - \beta} + \frac{\gamma_1}{x - \gamma} + \frac{\delta_1}{x - \delta} + \dots$$

Die Zähler  $\alpha_1 \dots \alpha_\mu$  ergeben sich als Koeffizienten der Potenzen  $z^0, z^1, \dots, z^{\mu-1}$  in der Entwicklung des folgenden Ausdruckes nach steigenden Potenzen von  $z$ :

$$\frac{f(\alpha + z)}{(\alpha - \beta + z)^\nu (\alpha - \gamma + z) (\alpha - \delta + z) \dots} = \alpha_1 + \alpha_2 z + \alpha_3 z^2 + \dots + \alpha_\mu z^{\mu-1} + \dots$$

Entsprechend findet man die  $\beta_1, \dots, \beta_\nu$  aus der Entwicklung

$$\frac{f(\beta + z)}{(\beta - \alpha + z)^\mu (\beta - \gamma + z) (\beta - \delta + z) \dots} = \beta_1 + \beta_2 z + \beta_3 z^2 + \dots + \beta_\nu z^{\nu-1} + \dots$$

$\gamma_1, \delta_1$  usw. findet man nach dem unter 1. (s. o.) angegebenen Verfahren.

3. Die Wurzeln sind teilweise oder sämtlich **imaginär**, also etwa

$$F(x) = (x - p + qi)(x - p - qi) \Phi(x).$$

Sind die Wurzeln sämtlich verschieden, so verfährt man wie unter 1. und erhält

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{\alpha_1}{x - p + qi} + \frac{\alpha_2}{x - p - qi} + \frac{\varphi(x)}{\Phi(x)},$$

worin  $\alpha_1 = \frac{f(p - qi)}{F'(p - qi)} = A - iB, \quad \alpha_2 = \frac{f(p + qi)}{F'(p + qi)} = A + iB.$

Soll die Rechnung reell durchgeführt werden, so fasse man die beiden imaginären (zugeordneten) Teilbrüche zusammen; es ergibt sich dann ein reeller Teilbruch mit einem Nenner zweiten Grades, und es wird

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{2A(x-p) - 2Bq}{(x-p)^2 + q^2} + \frac{\varphi(x)}{\Phi(x)}.$$

Treten gleiche imaginäre Wurzeln auf, so verfährt man entsprechend wie unter 2.

## F. Integralformeln.

### a. Allgemeine Regeln.

In den Formeln 1. bis 3. sind  $u$  und  $v$  Funktionen der Veränderlichen  $x$ .

$$1. \int a \, du = a \int du = au + C$$

$$2. \int (u + v) \, dx = \int u \, dx + \int v \, dx \quad (\text{Zerlegungsverfahren})$$

$$3. \int u \, dv = uv - \int v \, du \quad (\text{Teilweise Integration})$$

$$4. \int f(x) \, dx = \int f[\varphi(y)] \varphi'(y) \, dy, \quad x = \varphi(y) \quad (\text{Substitutionsverfahren})$$

$$5. \frac{\partial}{\partial \alpha} \int f(x, \alpha) \, dx = \int \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha} \, dx \quad (\text{Differentiation unter dem Integralzeichen})$$

$$6. \int dy \int f(x, y) \, dx = \int dx \int f(x, y) \, dy \quad (\text{Umkehrung der Reihenfolge der Integrationen})$$

### b. Fundamental-Integrale.

$$1. \int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C; \quad n \text{ eine beliebige ganze oder gebrochene Zahl, ausgenommen } n = -1.$$

$$2. \int \frac{dx}{x} = \ln x + C = \ln cx$$

$$3. \int e^x \, dx = e^x + C$$

$$4. \int \sin x \, dx = -\cos x + C$$

$$5. \int \cos x \, dx = \sin x + C$$

$$6. \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$$

$$7. \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$$

$$8. \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C$$

$$9. \int \frac{dx}{1+x^2} = \arctg x + C = -\operatorname{arccotg} x + C$$

### c. Rationale Funktionen.

$$1. \int (a+bx)^n dx = \frac{(a+bx)^{n+1}}{(n+1)b} + C$$

$$2. \int \frac{dx}{a+bx} = \frac{1}{b} \ln(a+bx) + C = \frac{1}{b} \ln c(a+bx)$$

$$3. \int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C \quad 4. \int \frac{dx}{(a+bx)^2} = -\frac{1}{b(a+bx)} + C$$

$$5. *) \int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} + C = \operatorname{Ar} \operatorname{Tg} x + C, \quad \text{wenn } x < 1$$

$$6. *) \int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2} \ln \frac{x-1}{x+1} + C = -\operatorname{Ar} \operatorname{Ctg} x + C, \quad \text{wenn } x > 1$$

$$\left. \begin{aligned} 7. \int \frac{dx}{a+bx^2} &= \frac{1}{\sqrt{ab}} \arctg \left( \sqrt{\frac{b}{a}} x \right) + C \\ 8. \int \frac{dx}{a-bx^2} &= \frac{1}{2\sqrt{ab}} \ln \frac{\sqrt{ab}+bx}{\sqrt{ab}-bx} + C \\ &= \frac{1}{\sqrt{ab}} \operatorname{Ar} \operatorname{Tg} \left( \sqrt{\frac{b}{a}} x \right) + C \end{aligned} \right\} \text{wenn } a > 0, b > 0$$

$$\begin{aligned} 9. \int \frac{dx}{a+2bx+cx^2} &= \frac{1}{\sqrt{ac-b^2}} \arctg \frac{b+cx}{\sqrt{ac-b^2}} + C, \quad \text{wenn } ac-b^2 > 0; \\ &= \frac{1}{2\sqrt{b^2-ac}} \ln \frac{\sqrt{b^2-ac}-b-cx}{\sqrt{b^2-ac}+b+cx} + C \\ &= -\frac{1}{\sqrt{b^2-ac}} \operatorname{Ar} \operatorname{Tg} \frac{b+cx}{\sqrt{b^2-ac}} + C, \end{aligned} \left. \vphantom{\int} \right\} \text{wenn } b^2-ac > 0;$$

$$\text{ferner } \int \frac{dx}{a+2bx+cx^2} = -\frac{1}{b+cx} + C, \quad \text{wenn } b^2=ac$$

$$10. \int \frac{(x+\beta x) dx}{a+2bx+cx^2} = \frac{\beta}{2c} \ln(a+2bx+cx^2) + \frac{\alpha c - \beta b}{c} \int \frac{dx}{a+2bx+cx^2}$$

\*) Ueber die Hyperbelfunktionen vgl. S. 65 u. f.

11. Ist in  $\int \frac{f(x) dx}{a + 2bx + cx^2}$  der Zähler  $f(x)$  eine ganze Funktion von höherem als dem ersten Grade, so stellt man die zu integrierende Funktion als Summe einer ganzen und einer echten gebrochenen rationalen Funktion dar und integriert die einzelnen Summanden.

$$12. \int \frac{dx}{(a + 2bx + cx^2)^p} = \frac{1}{2(ac - b^2)(p-1)} \cdot \frac{b + cx}{(a + 2bx + cx^2)^{p-1}} + \frac{(2p-3)c}{2(ac - b^2)(p-1)} \int \frac{dx}{(a + 2bx + cx^2)^{p-1}}$$

$$13. \int \frac{(\alpha + \beta x) dx}{(a + 2bx + cx^2)^p} = -\frac{\beta}{2c(p-1)} \cdot \frac{1}{(a + 2bx + cx^2)^{p-1}} + \frac{\alpha c - \beta b}{c} \int \frac{dx}{(a + 2bx + cx^2)^p}$$

$$14. \int x^{m-1} (a + bx)^n dx = \frac{x^{m-1} (a + bx)^{n+1}}{(m+n)b} - \frac{(m-1)a}{(m+n)b} \int x^{m-2} (a + bx)^n dx \\ = \frac{x^m (a + bx)^n}{m+n} + \frac{na}{m+n} \int x^{m-1} (a + bx)^{n-1} dx$$

$$15. \text{ Ist } \int \frac{f(x)}{F(x)} dx = \int \frac{Ax^m + Bx^{m-1} + \dots + Px + Q}{x^n + ax^{n-1} + \dots + px + q} dx \text{ und } m > n,$$

so sondere man durch Teilung eine ganze Funktion von  $x$  ab und zerlege die übrig bleibende, echt gebrochene Funktion in Teilbrüche (s. S. 70 u. f.), die man einzeln integriert.

#### d. Irrationale Funktionen.

$$1. \int \sqrt{a + bx} dx = \frac{2}{3b} (\sqrt{a + bx})^3 + C$$

$$2. \int \frac{dx}{\sqrt{a + bx}} = \frac{2}{b} \sqrt{a + bx} + C$$

$$3. \int \frac{(\alpha + \beta x) dx}{\sqrt{a + bx}} = \frac{2}{3b^2} (3\alpha b - 2a\beta + \beta b x) \sqrt{a + bx} + C$$

$$4. \int \frac{dx}{(\alpha + \beta x) \sqrt{a + bx}}$$

wird durch die Substitution  $y = \sqrt{a + bx}$  auf die Form e. 7. und 8. (S. 73) gebracht. (Vrgl. auch Nr. 5.)

$$5. \int \frac{f(x, \sqrt[n]{a + bx})}{\varphi(x, \sqrt[n]{a + bx})} dx. \text{ Man substituiere } \sqrt[n]{a + bx} = y$$

$$6. \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C = -\arccos \frac{x}{a} + C \\ = 2 \arctg \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} + C$$

$$7. *) \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \ln [x + \sqrt{a^2 + x^2}] + C = \frac{1}{2} \ln \left[ \frac{x + \sqrt{a^2 + x^2}}{-x + \sqrt{a^2 + x^2}} \right] + C \\ = \operatorname{Ar} \operatorname{Sin} \frac{x}{a} + C$$

$$8. *) \int \frac{dx}{\sqrt{a+2bx+cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}} \ln [b+cx + \sqrt{c} \sqrt{a+2bx+cx^2}] + C, \text{ wenn } c > 0; \\ = \frac{1}{\sqrt{c}} \operatorname{Ar} \operatorname{Sin} \frac{b+cx}{\sqrt{ac-b^2}} + C, \text{ wenn } ac-b^2 > 0; \\ = \frac{1}{\sqrt{c}} \operatorname{Ar} \operatorname{Cos} \frac{b+cx}{\sqrt{b^2-ac}} + C, \text{ wenn } b^2-ac > 0; \\ = \frac{-1}{\sqrt{-c}} \arcsin \frac{b+cx}{\sqrt{b^2-ac}} + C, \text{ wenn } c < 0$$

$$9. \int \frac{(\alpha + \beta x) dx}{\sqrt{a+2bx+cx^2}} = \frac{\beta}{c} \sqrt{a+2bx+cx^2} \\ + \frac{\alpha c - \beta b}{c} \int \frac{dx}{\sqrt{a+2bx+cx^2}} + C$$

$$10. \int \frac{x^m dx}{\sqrt{a+2bx+cx^2}} = \frac{x^{m-1} X}{mc} - \frac{(m-1)a}{mc} \int \frac{x^{m-2} dx}{X} \\ - \frac{(2m-1)b}{mc} \int \frac{x^{m-1} dx}{X},$$

worin  $X = \sqrt{a+2bx+cx^2}$

$$11. *) \int \sqrt{a^2 + x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 + x^2} + \frac{a^2}{2} \ln (x + \sqrt{a^2 + x^2}) + C \\ = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 + x^2} + \frac{a^2}{2} \operatorname{Ar} \operatorname{Sin} \frac{x}{a} + C$$

$$12. \int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C$$

$$13. *) \int \sqrt{x^2 - a^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \ln (x + \sqrt{x^2 - a^2}) + C \\ = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \operatorname{Ar} \operatorname{Cos} \frac{x}{a} + C$$

\*) Ueber die Hyperbelfunktionen vgl. S. 65 u. f.

$$14. \int \sqrt{a + 2bx + cx^2} dx = \frac{b + cx}{2c} \sqrt{a + 2bx + cx^2} + \frac{ac - b^2}{2c} \int \frac{dx}{\sqrt{a + 2bx + cx^2}} + C$$

15.  $\int \frac{dx}{(x-a)^p X}$  wird durch die Substitution  $\frac{1}{x-a} = y$  auf die Form 10. (S. 75) gebracht.

16.  $\int \frac{A + Bx}{\alpha + 2\beta x + \gamma x^2} \frac{dx}{X}$  wird durch die Substitution  $x = \frac{py + q}{y + 1}$ , wenn man  $p$  und  $q$  aus den Gleichungen

$$\gamma p q + \beta(p + q) + \alpha = 0 \text{ und}$$

$$c p q + b(p + q) + a = 0$$

bestimmt und alsdann  $y^2 = z$  setzt, auf zwei Integrale von der Form

$$\int \frac{dz}{(\alpha_1 + \gamma_1 z) \sqrt{a_1 + c_1 z}} \quad \text{und} \quad \int \frac{dz}{(\alpha_2 + \gamma_2 z) \sqrt{a_2 z + c_2 z^2}}$$

gebracht, die nach d. 4. (S. 74) und nach 15. (s. o.) zu behandeln sind.

17. Um  $\int \frac{f(x)}{F(x)} \frac{dx}{X}$  zu bestimmen, zerlege man  $\frac{f(x)}{F(x)}$ , erforderlichen

Falls nach Absonderung einer ganzen Funktion, in Teilbrüche; man erhält alsdann Integrale von der Form 15. (s. o.) und, wenn man zugeordnete imaginäre Teilbrüche zusammenfaßt, von der Form 16.

$$18. \int \frac{(\alpha + \beta x) dx}{X^3} = \frac{(a\beta - b\alpha) + (b\beta - c\alpha)x}{(b^2 - ac) \sqrt{a + 2bx + cx^2}} + C.$$

### c. Transzendente Funktionen.

$$1. \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$2. \int x^n e^{ax} dx = \frac{x^n e^{ax}}{a} \left[ 1 - \frac{n}{ax} + \frac{n(n-1)}{a^2 x^2} - \dots \pm \frac{n!}{a^n x^n} \right] + C$$

$$3. \int \ln x dx = x \ln x - x + C$$

$$4. \int \frac{\ln x}{x^2} dx = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + C$$

$$5. \int \frac{(\ln x)^n}{x} dx = \frac{1}{n+1} (\ln x)^{n+1} + C$$

$$6. \int \sin^2 x \, dx = -\frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{2} x + C$$

$$7. \int \cos^2 x \, dx = \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{2} x + C$$

$$8. \int \sin mx \, dx = -\frac{\cos mx}{m} + C \quad 9. \int \cos mx \, dx = \frac{\sin mx}{m} + C$$

$$10. \int \sin mx \cos nx \, dx = -\frac{\cos(m+n)x}{2(m+n)} - \frac{\cos(m-n)x}{2(m-n)} + C$$

$$11. \int \sin mx \sin nx \, dx = \frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)} - \frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)} + C$$

$$12. \int \cos mx \cos nx \, dx = \frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)} + \frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)} + C$$

$$13. \int \operatorname{tg} x \, dx = -\ln \cos x + C \quad 14. \int \operatorname{ctg} x \, dx = \ln \sin x + C$$

$$15. \int \frac{dx}{\sin x} = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2} + C \quad 16. \int \frac{dx}{\cos x} = \ln \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) + C$$

$$17. \int \frac{dx}{1 + \cos x} = \operatorname{tg} \frac{x}{2} + C \quad 18. \int \frac{dx}{1 - \cos x} = -\operatorname{ctg} \frac{x}{2} + C$$

$$19. \int \sin x \cos x \, dx = \frac{1}{2} \sin^2 x + C \quad 20. \int \frac{dx}{\sin x \cos x} = \ln \operatorname{tg} x + C$$

$$21. *) \int \sin^n x \, dx = -\frac{\cos x \sin^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x \, dx$$

$$22. *) \int \cos^n x \, dx = \frac{\sin x \cos^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x \, dx$$

$$23. \int \operatorname{tg}^n x \, dx = \frac{\operatorname{tg}^{n-1} x}{n-1} - \int \operatorname{tg}^{n-2} x \, dx$$

$$24. \int \operatorname{ctg}^n x \, dx = -\frac{\operatorname{ctg}^{n-1} x}{n-1} - \int \operatorname{ctg}^{n-2} x \, dx$$

$$25. \int \frac{dx}{\sin^n x} = -\frac{\cos x}{(n-1) \sin^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{dx}{\sin^{n-2} x}$$

$$26. \int \frac{dx}{\cos^n x} = \frac{\sin x}{(n-1) \cos^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{dx}{\cos^{n-2} x}$$

\*) Ist  $n$  eine ungerade Zahl, so wende man statt der gegebenen Reduktionsformeln die Substitutionen  $\cos x = z$  oder  $\sin x = z$  an. Die Integration kann auch erfolgen durch Benutzung der Formeln c. 1. und 2., S. 66, und von Nr. 8. und 9. s. o.

$$27.*) \int \sin^p x \cos^q x dx = \frac{\sin^{p+1} x \cos^{q-1} x}{p+q} + \frac{q-1}{p+q} \int \sin^p x \cos^{q-2} x dx \\ = -\frac{\sin^{p-1} x \cos^{q+1} x}{p+q} + \frac{p-1}{p+q} \int \sin^{p-2} x \cos^q x dx$$

$$28.*) \int \sin^{-p} x \cos^q x dx = -\frac{\sin^{-p+1} x \cos^{q+1} x}{p-1} + \frac{p-q-2}{p-1} \int \sin^{-p+2} x \cos^q x dx$$

$$29.*) \int \sin^p x \cos^{-q} x dx = \frac{\sin^{p+1} x \cos^{-q+1} x}{q-1} + \frac{q-p-2}{q-1} \int \sin^p x \cos^{-q+2} x dx$$

$$30. \int \frac{dx}{a+b \cos x} = \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}} \arctan \left( \sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \operatorname{tg} \frac{1}{2} x \right) + C, \text{ wenn } a^2 > b^2 \\ = \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}} \ln \frac{b+a \cos x + \sin x \sqrt{b^2-a^2}}{a+b \cos x} + C, \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \text{ wenn } \\ = \frac{2}{\sqrt{b^2-a^2}} \operatorname{Ar} \operatorname{Cg} \left( \sqrt{\frac{b-a}{b+a}} \operatorname{tg} \frac{1}{2} x \right) + C, \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} a^2 < b^2$$

$$31. \int \frac{\cos x dx}{a+b \cos x} = \frac{x}{b} - \frac{a}{b} \int \frac{dx}{a+b \cos x} + C$$

$$32. \int \frac{\sin x dx}{a+b \cos x} = -\frac{1}{b} \ln(a+b \cos x) + C$$

$$33. \int \frac{A+B \cos x + C \sin x}{a+b \cos x + c \sin x} dx = A \int \frac{d\varphi}{a+p \cos \varphi} \\ + (B \cos \alpha + C \sin \alpha) \int \frac{\cos \varphi d\varphi}{a+p \cos \varphi} - (B \sin \alpha - C \cos \alpha) \int \frac{\sin \varphi d\varphi}{a+p \cos \varphi}, \\ \text{wenn man } b = p \cos \alpha, c = p \sin \alpha \text{ und } x - \alpha = \varphi \text{ setzt.}$$

$$34. \int e^{ax} \sin bx dx = \frac{a \sin bx - b \cos bx}{a^2 + b^2} e^{ax} + C$$

$$35. \int e^{ax} \cos bx dx = \frac{a \cos bx + b \sin bx}{a^2 + b^2} e^{ax} + C$$

$$36. \int \arcsin x dx = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$$

$$37. \int \arccos x dx = x \arccos x - \sqrt{1-x^2} + C$$

$$38. \int \operatorname{arctg} x dx = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C$$

\*) Ist  $p$  oder  $q$  eine ungerade Zahl, so gelingt die Integration leichter durch die Substitution  $\cos x = z$  oder  $\sin x = z$ .

39.  $\int \operatorname{arc} \operatorname{ctg} x \, dx = x \operatorname{arc} \operatorname{ctg} x + \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C$

40. Rationale Ausdrücke der **Hyperbelfunktionen**  $\operatorname{Sin} x$ ,  $\operatorname{Cos} x$ ,  $\operatorname{Sg} x$ ,  $\operatorname{Ctg} x$  (und deren Umkehrungen) werden mittels der entsprechenden Formeln für die Kreisfunktionen (oder für deren Umkehrungen) integriert, indem man  $x = iy$  setzt und gemäß S. 66 die Beziehungen berücksichtigt:

$\sin ix = i \operatorname{Sin} x$ ,  $\cos ix = \operatorname{Cos} x$ ,  $\operatorname{tg} ix = i \operatorname{Sg} x$ ,  $\operatorname{ctg} ix = -i \operatorname{Ctg} x$ .

**f. Integration durch Reihenentwicklung.**

Kann man in  $\int f(x) \, dx$  die Funktion  $f(x)$  in eine Reihe verwandeln, welche innerhalb des gegebenen Integrations-Intervalls von  $x$  konvergent ist, so ist die durch Integration aller Glieder gewonnene Integralreihe für die gegebenen Grenzen konvergent.

Aus der Maclaurinschen Reihe (s. S. 68) folgt

1.  $\int f(x) \, dx = f(0)x + f'(0) \frac{x^2}{2} + \frac{f''(0)}{2!} \frac{x^3}{3} + \frac{f'''(0)}{3!} \frac{x^4}{4} + \dots$

2.  $\int_0^x \frac{dx}{\ln x} = 0,5772156649 \dots + \ln(-\ln x) + \ln x + \frac{1}{2} \frac{(\ln x)^2}{2!} + \frac{1}{6} \frac{(\ln x)^3}{3!} + \dots; 0 < x < 1.$

3.  $\int_0^x \frac{e^x dx}{x}$  führt durch die Substitution  $e^x = z$  auf Nr. 2 zurück.

**g. Bestimmte Integrale.**

1.  $\int_a^b = -\int_b^a$        $\int_a^c = \int_a^b + \int_b^c$        $\int_a^c - \int_a^b = \int_b^c$

2.  $\int_0^\infty \frac{dx}{a+bx^2} = \frac{\pi}{2\sqrt{ab}}$

3.  $\int_0^\infty \frac{dx}{a+bx^2} = \int_{\sqrt{\frac{a}{b}}}^\infty \frac{dx}{a+bx^2} = \frac{\pi}{4\sqrt{ab}}$

4.  $\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{a-bx^2}} = \frac{\pi}{2\sqrt{b}}$

5.  $\int_0^\infty \frac{\sin bx}{x} dx = \frac{\pi}{2}$ , wenn  $b > 0$

6.  $\int_0^\infty \frac{\cos bx}{x} dx = \infty$

$$\begin{aligned}
 7. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x \, dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} x \, dx = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n}{3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2n+1)}, \\
 8. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x \, dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} x \, dx = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} \frac{\pi}{2}, \\
 9. \int_0^{\infty} e^{-x} \, dx &= 1 \qquad 10. \int_0^{\infty} e^{-x^2} \, dx = \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \\
 11. \int_0^{\infty} x^n e^{-ax} \, dx &= \frac{n!}{a^{n+1}}, \text{ wenn } a \text{ eine positive, } n \text{ eine positive} \\
 &\qquad\qquad\qquad \text{ganze Zahl ist.} \\
 12. \int_0^{\infty} \frac{x^{n-1} \, dx}{x+1} &= \frac{\pi}{\sin n\pi}, \text{ wenn } 0 < n < 1.
 \end{aligned}$$

} wenn  $n$  eine positive  
ganze Zahl ist.

### h. Angenäherte Berechnung bestimmter Integrale.

Man teile  $b - a$  in  $n$  gleiche Teile:  
 Gegeben  $\int_a^b f(x) \, dx$ .  $\frac{b-a}{n} = h$  und berechne die zu den Werten  
 $x = a, x = a + h, x = a + 2h \dots$  ge-  
 hörenden Werte  $f(x) = y_0, y_1, y_2 \dots$ , dann ist unter der Voraus-  
 setzung, dass  $f(x)$  und ihre in den nachfolgenden Formeln vor-  
 kommenden Ableitungen für  $x = a$  bis  $b$  endlich und stetig sind,

$$\begin{aligned}
 1. \int_a^b f(x) \, dx &= h \left[ \frac{1}{2} y_0 + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} + \frac{1}{2} y_n \right] \\
 &- \frac{B_1 h^2}{2!} [f'(b) - f'(a)] + \frac{B_2 h^4}{4!} [f'''(b) - f'''(a)] - \dots \\
 &+ (-1)^{r-1} \frac{B_{r-1} h^{2r-2}}{(2r-2)!} [f^{(2r-3)}(b) - f^{(2r-3)}(a)] + \\
 &(-1)^r \frac{B_r}{(2r)!} \rho \frac{(b-a)^{2r+1}}{n^{2r}} M^{(2r)}
 \end{aligned}$$

Hierin sind  $B_1, B_2 \dots$  die Bernoullischen Zahlen, u. zw.

$$B_1 = \frac{1}{6}, B_2 = \frac{1}{30}, B_3 = \frac{1}{42}, B_4 = \frac{1}{30}, B_5 = \frac{5}{66}, B_6 = \frac{691}{2730} \text{ usw.}$$

Der wirkliche Restbetrag (Fehler) liegt zwischen den beiden Werten des letzten (Rest-) Gliedes, die sich ergeben für  $\rho = +1$  als oberster Grenzwert der positiven echten Brüche und für  $M^{(2r)}$  gleich dem größten bzw. kleinsten Wert von  $f^{(2r)}(x)$  in den Grenzen  $x = a$  bis  $b$  einschl. der zugehörigen Vorzeichen.

Für  $r=2$  erhält man

$$2. \int_a^b f(x) dx = h [1/2 y_0 + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} + 1/2 y_n] - \frac{1}{12} h^2 [f'(b) - f'(a)] + \frac{1}{720} \rho \frac{(b-a)^5}{n^4} M''''.$$

$$3. \text{ Simpsonsche Regel: } \int_a^b f(x) dx = \frac{h}{3} [y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \dots + 4y_{n-1} + y_n] - \frac{1}{180} \rho \frac{(b-a)^5}{n^4} M''''.$$

$n$  muß eine gerade Zahl sein.  $\rho$  und  $M''''$  s. o. Formel 2. ist bei gleichem Werte  $r$  genauer als 3.

## G. Differentialgleichungen.

### a. Differentialgleichungen erster Ordnung.

1.  $f(x) dx + \varphi(y) dy = 0.$

Lösung:  $\int f(x) dx + \int \varphi(y) dy = C.$

2. Trennung der Veränderlichen.

$$f(x) \varphi(y) dx + F(y) \psi(y) dy = 0.$$

Lösung:  $\int \frac{f(x)}{F(x)} dx + \int \frac{\psi(y)}{\varphi(y)} dy = C.$

3.  $f(x, y) dx + \varphi(x, y) dy = 0.$

Ist die Bedingung der Integrabilität

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x} \text{ erfüllt, so ist die Lösung:}$$

$$\int f(x, y) dx + \int \left[ \varphi(x, y) - \int \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dx \right] dy = C$$

oder  $\int \varphi(x, y) dy + \int \left[ f(x, y) - \int \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x} dy \right] dx = C.$

4. Ist die vorstehende Bedingung der Integrabilität nicht erfüllt, so wird sie hergestellt durch Multiplikation der Gleichung mit einem Faktor  $M$ , dem **integrierenden Faktor**, welcher der partiellen Differentialgleichung genügen muß:

$$f(x, y) \frac{\partial M}{\partial y} - \varphi(x, y) \frac{\partial M}{\partial x} = M \left( \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right).$$

In manchen Fällen kann  $M$  bestimmt werden aus den Gleichungen

$$\frac{dy}{f(x, y)} = - \frac{dx}{\varphi(x, y)} = \frac{dM}{M \left[ \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right]}.$$

5. Ergibt die Auflösung nach  $\frac{dy}{dx}$  die Gleichung

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right),$$

so heißt die Differentialgleichung **homogen**. Man löst sie, indem man

$$\frac{y}{x} = t, \text{ also } y = xt; \quad dy = xdt + tdx \text{ setzt.}$$

Lösung: 
$$\ln x = \int \frac{dt}{f(t) - t} + C.$$

6. Die Differentialgleichung heißt **linear**, wenn sie die Form

$$f_1(x) \frac{dy}{dx} + f(x)y + \varphi(x) = 0 \text{ hat.}$$

Man setze  $y = uv$ , wobei  $u$  und  $v$  Funktionen von  $x$  bedeuten, dann ist

$$\frac{dy}{dx} = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}.$$

Diese beiden Werte in die zu lösende Gleichung eingesetzt, gibt

$$f_1(x) \left( u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx} \right) + f(x)uv + \varphi(x) = 0.$$

Man bestimme nun  $u$  aus der Gleichung

$$f_1(x) \frac{du}{dx} + f(x)u = 0 \text{ und erhält}$$

$$\ln \frac{u}{c} = - \int \frac{f(x)}{f_1(x)} dx \quad \text{oder} \quad u = ce^{-\int \frac{f(x)}{f_1(x)} dx}.$$

Aus dieser Gleichung folgt dann für  $v$  die Bedingungsgleichung

$$f_1(x)u \frac{dv}{dx} + \varphi(x) = 0$$

$$\text{oder } v = - \int \frac{\varphi(x)}{uf_1(x)} dx + C_1 = - \int \left( \frac{\varphi(x)}{cf_1(x)} e^{\int \frac{f(x)}{f_1(x)} dx} \right) dx + C_1.$$

Die Lösung wird daher:

$$y = uv = e^{-\int \frac{f(x)}{f_1(x)} dx} \left[ - \int \left( \frac{\varphi(x)}{f_1(x)} e^{\int \frac{f(x)}{f_1(x)} dx} \right) dx + C \right].$$

7. Verfahren der **wiederholten Differentiation**.

$$y = F\left(x, \frac{dy}{dx}\right).$$

Man setze  $\frac{dy}{dx} = z$  und differenziere nach  $x$ , so folgt

$$z = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{dz}{dx},$$

womit bisweilen Fall 6. hergestellt ist. Den für  $z$  gefundenen Ausdruck setze man in  $y = F(x, z)$  ein.

### b. Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

1.  $\frac{d^2 y}{dx^2} = f(x).$

Lösungen: 1)  $y = \int dx \int f(x) dx + Cx + C_1.$

2)  $y = x \int f(x) dx - \int x f(x) dx + Cx + C_1.$

2.  $\frac{d^2 y}{dx^2} = f(y).$

Lösung:  $x = \int \frac{dy}{\sqrt{C + 2 \int f(y) dy}} + C_1.$

Allgemein:  $F\left(\frac{d^2 y}{dx^2}, y\right) = 0.$

Man setze  $\frac{dy}{dx} = z$ ,  $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{dz}{dx}$  und eliminiere  $dx$  aus den beiden Gleichungen  $F\left(\frac{dz}{dx}, y\right) = 0$  und  $\frac{dy}{dx} = z$ . Die Lösung ergibt sich durch die mittels Trennung der Veränderlichen auszuführende Integration der Gleichung  $F\left(\frac{z dz}{dy}, y\right) = 0.$

3.  $\frac{d^2 y}{dx^2} = f\left(\frac{dy}{dx}\right).$  Man setze  $\frac{dy}{dx} = z$ ,  $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{dz}{dx}$ ; dann erhält man die beiden Gleichungen  $x = \int \frac{dz}{f(z)} + C$  und  $y = \int \frac{z dz}{f(z)} + C_1$ , aus denen sich durch Elimination von  $z$  die Lösung ergibt.

4.  $\frac{d^2 y}{dx^2} = f\left(\frac{dy}{dx}, x\right).$  Man setze  $\frac{dy}{dx} = z$  und versuche, die entstehende Differentialgleichung erster Ordnung  $\frac{dz}{dx} = f(z, x)$  zu integrieren. Findet man  $z = \varphi(x)$ , so bleibt noch die Integration der Gleichung  $dy = \varphi(x) dx$  übrig.

5.  $\frac{d^2 y}{dx^2} = f\left(\frac{dy}{dx}, y\right).$  Man setze  $\frac{dy}{dx} = z$ ,  $\frac{d^2 y}{dx^2} = z \frac{dz}{dy}$  und versuche, die entstehende Differentialgleichung erster Ordnung  $z \frac{dz}{dy} = f(z, y)$  zu integrieren. Findet man  $z = \varphi(y)$ , so ist das Integral der gegebenen Gleichung:  $x = \int \frac{dy}{\varphi(y)} + C.$

**c. Lineare Differentialgleichungen  $n^{\text{ter}}$  Ordnung mit unveränderlichen Koeffizienten.**

$\alpha$ ) Ohne Störungsfunktion.

$$1. a \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dy}{dx} + a_n y = 0.$$

$$\text{Integral: } y = C_1 e^{w_1 x} + C_2 e^{w_2 x} + \dots + C_n e^{w_n x}.$$

Die Größen  $w_1, w_2, \dots, w_n$  sind die Wurzeln der Gleichung

$$a w^n + a_1 w^{n-1} + \dots + a_n = 0.$$

2. Tritt unter jenen Wurzeln eine imaginäre auf, z. B.  $w_3 = p + qi$ , so gibt es auch eine zweite imaginäre Wurzel  $w_4 = p - qi$ , falls die Koeffizienten  $a_1, a_2, \dots, a_n$  sämtlich reell sind. Das Integral der Differentialgleichung wird dann

$$y = C_1 e^{w_1 x} + C_2 e^{w_2 x} + e^{p x} [C_3 \cos qx + C_4 \sin qx] + C_5 e^{w_5 x} + \dots + C_n e^{w_n x}.$$

3. Sind mehrere Wurzeln einander gleich,  $w_1 = w_2 = w_3 = \dots = w_p$ , so wird das Integral

$$y = e^{w_1 x} [C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + \dots + C_p x^{p-1}] + C_{p+1} e^{w_2 x} + \dots + C_n e^{w_n x}$$

$\beta$ ) Mit Störungsfunktion.

$$a \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dy}{dx} + a_n y = f(x).$$

$$\text{Integral: } y = z_1 e^{w_1 x} + z_2 e^{w_2 x} + \dots + z_n e^{w_n x}.$$

Die  $w_1, w_2, \dots, w_n$  hierin bestimmen sich wie unter  $\alpha$ ). Die  $z_1, z_2, \dots, z_n$  sind zu berechnen aus den Gleichungen:

$$e^{w_1 x} \frac{dz_1}{dx} + e^{w_2 x} \frac{dz_2}{dx} + e^{w_3 x} \frac{dz_3}{dx} + \dots + e^{w_n x} \frac{dz_n}{dx} = 0,$$

$$w_1 e^{w_1 x} \frac{dz_1}{dx} + w_2 e^{w_2 x} \frac{dz_2}{dx} + w_3 e^{w_3 x} \frac{dz_3}{dx} + \dots + w_n e^{w_n x} \frac{dz_n}{dx} = 0,$$

$$w_1^2 e^{w_1 x} \frac{dz_1}{dx} + w_2^2 e^{w_2 x} \frac{dz_2}{dx} + w_3^2 e^{w_3 x} \frac{dz_3}{dx} + \dots + w_n^2 e^{w_n x} \frac{dz_n}{dx} = 0,$$

$$\dots$$

$$w_1^{n-1} e^{w_1 x} \frac{dz_1}{dx} + w_2^{n-1} e^{w_2 x} \frac{dz_2}{dx} + w_3^{n-1} e^{w_3 x} \frac{dz_3}{dx} + \dots$$

$$+ w_n^{n-1} e^{w_n x} \frac{dz_n}{dx} = f(x).$$

Wenn  $f(x)$  eine ganze rationale Funktion  $n^{\text{ten}}$  Grades ist, so erscheint  $y$  in der Form

$$y = C_1 e^{v_1 x} + C_2 e^{v_2 x} + \dots + C_n e^{v_n x} + F(x),$$

in der  $F(x)$  eine ganze rationale Funktion  $n^{\text{ten}}$  Grades bedeutet, deren Koeffizienten nach dem Verfahren der unbestimmten Koeffizienten ermittelt werden können.

$\gamma)$  Mit einer Unveränderlichen als Störungsfunktion.

$$a \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dy}{dx} + a_n y = \mu = \text{konst.}$$

Integral (Vrgl. I., S. 84): 
$$y = \Sigma (C e^{v x}) + \frac{\mu}{a_n}.$$

## V. WAHRSCHEINLICHKEITS-RECHNUNG UND THEORIE DER BEOBACHTUNGSFEHLER.

### a. Wahrscheinlichkeitsrechnung.

1. Die absolute Wahrscheinlichkeit  $w$  eines Ereignisses wird dargestellt durch den Quotient aus der Anzahl  $a$  der dem Ereignis günstigen Fälle und der Anzahl  $n$  der überhaupt möglichen Fälle:

$$w = \frac{a}{n}.$$

$w = 0$  ist der Ausdruck für die Unmöglichkeit,  $w = 1$  der Ausdruck für die Gewissheit.

2. Sind  $w_1, w_2, w_3 \dots$  die Wahrscheinlichkeiten mehrerer voneinander unabhängiger Ereignisse, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß diese Ereignisse gleichzeitig oder in einer vorbestimmten Reihenfolge eintreten,

$$w = w_1 w_2 w_3 \dots$$

3. Die Wahrscheinlichkeit  $w$ , daß von mehreren zusammengehörenden Ereignissen, die für sich die absoluten Wahrscheinlichkeiten  $w_1, w_2, w_3 \dots$  haben, irgend eines dieser Ereignisse eintritt, ist

$$w = w_1 + w_2 + w_3 + \dots$$

4. Relative Wahrscheinlichkeiten zweier Ereignisse nennt man die Wahrscheinlichkeiten, die man erhält, wenn man die überhaupt keinem dieser Ereignisse günstigen Fälle bei der Anzahl der möglichen

Fälle als nicht vorhanden betrachtet. Sind  $w_1, w_2$  die absoluten Wahrscheinlichkeiten zweier Ereignisse, so sind  $\frac{w_1}{w_1 + w_2}$  und  $\frac{w_2}{w_1 + w_2}$  ihre relativen Wahrscheinlichkeiten.

5. Die Wahrscheinlichkeit  $w$ , dafs von zwei Ereignissen  $A$  und  $B$ , die für sich die Wahrscheinlichkeiten  $w_1$  und  $w_2$  haben,  $A$   $m$ -mal und  $B$   $n$ -mal in bestimmter Reihenfolge eintritt, ist

$$w = w_1^m w_2^n.$$

Wenn die Reihenfolge beliebig ist, so erhält man

$$w = \frac{(m+n)!}{m!n!} w_1^m w_2^n.$$

### b. Theorie der Beobachtungsfehler.

Jede Beobachtung ist mit zufälligen Fehlern behaftet. Jeder Beobachtungsfehler ist anzusehen als die Summe einer unendlich großen Anzahl von elementaren Fehlern, welche eben so leicht positiv wie negativ ausfallen können.

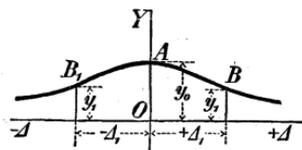
Unter dieser Voraussetzung ergibt sich die Wahrscheinlichkeit  $w$  des Vorkommens eines Fehlers zwischen den Grenzen  $\Delta$  und  $\Delta + d\Delta$  zu

$$w = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \Delta^2} d\Delta,$$

die Wahrscheinlichkeit  $W$  für das Vorkommen eines Fehlers zwischen den Grenzen  $\Delta_1$  und  $\Delta_2$  ist

$$W = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{\Delta_1}^{\Delta_2} e^{-h^2 \Delta^2} d\Delta.$$

Abb. 2.



Hierin ist die Unveränderliche  $h$  der Faktor, der jeder einzelnen Beobachtung zugeordnet werden muß, um die Größe ihrer Genauigkeit auszudrücken, der also mit letzterer wächst und daher der **Genauigkeitskoeffizient** der Beobachtung genannt wird.

Setzt man  $y = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \Delta^2}$  und nimmt  $\Delta$  als Abszissen,  $y$  als

Ordinaten eines rechtwinkligen Achsenkreuzes an, so stellt jene Gleichung die sogen. **Wahrscheinlichkeitskurve** (s. Abb. 2) dar;  $w$  ist ein Flächenelement,  $W$  die zwischen den Abszissen  $\Delta_1$  und  $\Delta_2$  liegende Fläche der Kurve. Die Fläche der ganzen Kurve (von  $\Delta = -\infty$  bis  $+\infty$ ) ist = 1.

Für  $\Delta = 0$  wird

$$y_0 = \frac{h}{\sqrt{\pi}} = 0,5642 h = y_{\max}.$$

Die Kurve verläuft in zwei zur  $y$ -Achse gleichliegenden Aesten; die  $\Delta$ -Achse ist Asymptote der Kurve. Für die Abszisse

$$\pm \Delta_1 = \frac{1}{h\sqrt{2}} = \frac{0,707\ 107}{h} = \sqrt{\frac{\Sigma(\Delta^2)}{m}},$$

worin  $m$  die Anzahl der Fehler, und die zugehörige Ordinate  $y_1 = 0,60653 \frac{h}{\sqrt{\pi}} = 0,342198 h$  ist, hat die Kurve je einen Wendepunkt  $B$  und  $B_1$ .

Der **wahrscheinliche Fehler**  $r$  einer Beobachtung ist derjenige Wert von  $\Delta$ , welcher bei dieser Gattung von Beobachtungen von den positiven wie negativen Fehlern ebenso oft überschritten wie nicht erreicht wird. Die Wahrscheinlichkeit des Eintreffens eines Fehlers in den Grenzen  $+r$  und  $-r$  ist daher  $= \frac{1}{2}$ , und es ist  $\pm r$  die Abszisse der Wahrscheinlichkeitskurve, deren zugehörige Ordinate die rechts bzw. links vom Scheitel gelegene Fläche der Kurve halbiert.

Der wahrscheinliche Fehler  $r$  ist umgekehrt proportional dem Genauigkeits-Koeffizienten und dient als Einheit des Maßes zur Darstellung der Fehler.

Es ist

$$r = \frac{0,4769364}{h} = 0,67449 \Delta_1 = 0,67449 \sqrt{\frac{\Sigma(\Delta^2)}{m}},$$

wenn  $m$  die Anzahl der Fehler bedeutet.  $\Delta_1$  s. Abb. 2, S. 86.

Um zu prüfen, ob die Anzahl der Versuche groß genug war, daß die Fehler wirklich zufällig gewesen, und um sich überhaupt über die Zuverlässigkeit des Ergebnisses zu vergewissern, ist die **Verteilung der Größen der Fehler** in Betracht zu ziehen, wofür die vorstehende Theorie folgende Angaben liefert:

Bei 1000 Beobachtungen liegen in den nach  $0,1r$  fortschreitenden Zwischenräumen:

von 0 bis $1r$ :	54, 54, 53, 52, 51, 50, 49, 47, 46, 44: zusammen 500 Fehler;
zwischen $1r$ und $2r$ :	42, 40, 38, 35, 33, 31, 29, 27, 25, 23: zusammen 323 Fehler;
zwischen $2r$ und $3r$ :	21, 19, 17, 15, 14, 12, 11, 10, 8, 7: zusammen 134 Fehler;
zwischen $3r$ und $3,5r$	25 Fehler;
zwischen $3,5r$ und $4r$	11 Fehler;
zwischen $4r$ und $5r$	6 Fehler;
	zusammen 999 Fehler.

Hiernach ist also eine Beobachtung, deren Fehler  $> 5r$  ist, bereits als unzulässig anzusehen.

### c. Methode der kleinsten Quadrate.

$F$  sei eine bekannte Funktion von einer Anzahl unabhängiger Veränderlichen  $x, y, z \dots$  und der  $n$  Unveränderlichen  $a, b, c \dots$ . Durch Beobachtung kennt man  $m$  Werte von  $F$ , die gegebenen Werten von  $x, y, z \dots$  entsprechen, und es sind nun die Werte der  $n$  Unveränderlichen zu bestimmen für den Fall, daß  $m > n$ .

Wollte man je  $n$  Gleichungen zur Bestimmung der  $n$  Unveränderlichen verbinden, so würde man, weil die  $m$  beobachteten Werte von  $F$  mit unvermeidlichen Beobachtungsfehlern behaftet sind, je nach Wahl der  $n$  Gleichungen andere Werte der Unveränderlichen erhalten. Die Aufgabe ist nun, die Gruppe von Werten der Unveränderlichen zu bestimmen, die für die  $m$  beobachteten Werte von  $F$  die wahrscheinlichste ist. Die Wahrscheinlichkeitsrechnung ergibt, daß dies bei den Werten der Fall ist, für die

$$\Sigma (h^2 \mathcal{A}^2) = \min.$$

Denkt man sich unter  $h$  eine Zahl von der Beschaffenheit, daß  $\frac{h_1^2}{h^2}, \frac{h_2^2}{h^2}, \frac{h_3^2}{h^2}$  ganze Zahlen sind, die der Reihe nach mit  $g_1, g_2, g_3 \dots$  bezeichnet werden, so gilt die Bedingung der wahrscheinlichsten Werte der Unveränderlichen:

$$\Sigma (g \mathcal{A}^2) = \min. \text{ für ungleiche Genauigkeiten,}$$

$$\Sigma (\mathcal{A}^2) = \min. \text{ für gleiche Genauigkeiten.}$$

Der erste Fall wird also auf den einfacheren zweiten zurückgeführt, wenn man die einzelnen Werte von  $\mathcal{A}$  so oft in die Summe einsetzt, wie die zugehörigen Koeffizienten  $g$  anzeigen.  $g$  heißt das **Gewicht** der Beobachtung.

### 1. Ausgleich unmittelbarer Beobachtungen.

Ist die beobachtete Größe von keiner Veränderlichen abhängig, also

$$F = a,$$

so wird der wahrscheinlichste Wert von  $a$ :

$$a = \frac{\Sigma (F h^2)}{\Sigma (h^2)} = \frac{\Sigma (F g)}{\Sigma (g)};$$

bei  $m$  Beobachtungen von gleicher Güte:

$$a = \frac{\Sigma (F)}{m},$$

d. h., bei Beobachtungen gleicher Güte einer unabhängigen Größe ist das **arithmetische Mittel** der wahrscheinlichste Wert der Größe.

Wahrscheinlicher Beobachtungsfehler  $r = 0,67449 \sqrt{\frac{m}{m-1} \frac{\Sigma (g \mathcal{A}^2)}{\Sigma (g)}}$ .

Wahrscheinlicher Fehler des arithmetischen Mittels  $r_a = \frac{r}{\sqrt{m}}$ .

### 2. Funktionen ersten Grades.

Die Funktion  $F$  sei in Bezug auf die zu berechnenden Unveränderlichen vom ersten Grade, also von der Form

$$F = ax + by + cz + \dots,$$

worin  $x, y, z \dots$  unabhängige Veränderliche sind.

Die beobachteten Werte von  $F$  seien  $F_1, F_2, F_3 \dots$ , die Beobachtungsfehler dabei  $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3 \dots$ .

Bezeichnet  $m$  die Anzahl der Gleichungen,  $n$  die Anzahl der Unveränderlichen ( $m > n$ ), so ergeben sich die wahrscheinlichsten Werte der Unveränderlichen  $a, b, c, \dots$  aus den Gleichungen

$$\Sigma(gFx) = a\Sigma(gx^2) + b\Sigma(gxy) + c\Sigma(gxz) + \dots$$

$$\Sigma(gFy) = a\Sigma(gyx) + b\Sigma(gy^2) + c\Sigma(gyz) + \dots$$

$$\Sigma(gFz) = a\Sigma(gzx) + b\Sigma(gzy) + c\Sigma(gz^2) + \dots$$

usw.,

worin z. B.  $\Sigma(gyz) = g_1y_1z_1 + g_2y_2z_2 + \dots$  ist.

Bei gleicher Genauigkeit aller Beobachtungen fällt überall in den Gleichungen der Faktor  $g$  fort.

Wenn in der gegebenen Gleichung für  $F$  eine der zu ermittelnden Unveränderlichen mit keiner Veränderlichen verbunden ist (absolutes Glied), so ist in den vorstehenden Bestimmungsgleichungen der Wert der betreffenden Veränderlichen = 1 zu setzen.

Die Auflösungen der Bestimmungsgleichungen haben die Formen

$$a = A_1\Sigma(gFx) + B_1\Sigma(gFy) + C_1\Sigma(gFz) + \dots$$

$$b = A_2\Sigma(gFx) + B_2\Sigma(gFy) + C_2\Sigma(gFz) + \dots$$

$$c = A_3\Sigma(gFx) + B_3\Sigma(gFy) + C_3\Sigma(gFz) + \dots \text{ usw.}$$

Berechnet man durch Einsetzen der so bestimmten wahrscheinlichsten Werte von  $a, b, c, \dots$  in die Gleichung  $F = ax + by + cz + \dots$  die Werte von  $F$ , welche den bei der Beobachtung benutzten Werten von  $x, y, z, \dots$  entsprechen, und bezeichnet die Unterschiede entsprechender berechneter und beobachteter Werte von  $F$  mit  $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \dots$ , so liegt der wahrscheinliche Fehler der Beobachtungen in den Grenzen

$$r = 0,67449 \sqrt{\frac{m}{m-n} \frac{\Sigma(g\Delta^2)}{\Sigma(g)}} \left(1 \pm \frac{0,4769364}{\sqrt{m}}\right).$$

Für gleiche  $g$ :  $r = 0,67449 \sqrt{\frac{\Sigma(\Delta^2)}{m-n}} \left(1 \pm \frac{0,4769364}{\sqrt{m}}\right);$

hierin ist  $\Sigma(g\Delta^2) = \Sigma(gF^2) - a\Sigma(gFx) - b\Sigma(gFy) - \dots;$

ferner  $\Sigma(\Delta^2) = \Sigma(F^2) - a\Sigma(Fx) - b\Sigma(Fy) - \dots$

Die wahrscheinlichen Fehler der berechneten Unveränderlichen sind

$$r_a = r \sqrt{\frac{A_1 \Sigma(g)}{m}} \quad r_b = r \sqrt{\frac{B_2 \Sigma(g)}{m}} \quad r_c = r \sqrt{\frac{C_3 \Sigma(g)}{m}};$$

usw.;

für gleiche  $g$ :  $r_a = r \sqrt{A_1}; \quad r_b = r \sqrt{B_2}; \quad r_c = r \sqrt{C_3}$  usw.

## VI. ANALYTISCHE GEOMETRIE.

### A. Punkt und gerade Linie in der Ebene.

In den folgenden Entwicklungen sind rechtwinklige Koordinaten vorausgesetzt.

1. Sind  $x_1, y_1$  und  $x_2, y_2$  die Koordinaten zweier Punkte, deren Entfernung voneinander  $l$  ist, ist ferner  $\alpha$  der Winkel, den  $l$  mit der positiven Richtung der Abszissenachse ( $x$ -Achse) bildet, so ist

$$l = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2};$$

$$\cos \alpha = \frac{x_2 - x_1}{l}; \quad \sin \alpha = \frac{y_2 - y_1}{l}.$$

2. Teilt man die Strecke  $l$  zwischen den Punkten  $(x_2, y_2)$  und  $(x_1, y_1)$  im Verhältnis  $m:n$  und nennt die Koordinaten des Teilpunktes  $x, y$ , so ist

$$x = \frac{mx_2 \pm nx_1}{m \pm n}; \quad y = \frac{my_2 \pm ny_1}{m \pm n}.$$

#### 3. Gleichungen der geraden Linie.

Die Gleichungen einer geraden Linie, d. h. die Gleichungen zwischen den Koordinaten eines beliebigen Punktes einer geraden Linie, sind Gleichungen ersten Grades.

a) Die allgemeine Form lautet:

$$Ax + By + C = 0.$$

$\beta$ ) Ist die Gerade unter einem Winkel  $\alpha$  gegen die  $x$ -Achse geneigt so daß  $\operatorname{tg} \alpha = m$ , und schneidet die Gerade auf der  $y$ -Achse die Strecke  $b$  ab, so ist ihre Gleichung

$$y = mx + b.$$

$x = a$ , Gleichung einer Geraden, parallel zur  $y$ -Achse.

$y = b$ , „ „ „ „  $x$ -Achse.

$y = mx$ , „ „ „ „ die „ durch den Anfangspunkt der Koordinaten geht.

$\gamma$ ) Geht die Gerade durch einen Punkt  $(x_1, y_1)$ , so ist ihre Gleichung

$$y - y_1 = m(x - x_1).$$

$\delta$ ) Geht die Gerade durch die Punkte  $(x_1, y_1)$  und  $(x_2, y_2)$ , so ist ihre Gleichung

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1).$$

$\varepsilon$ ) Schneidet eine Gerade auf der  $x$ -Achse die Strecke  $a$ , auf der  $y$ -Achse die Strecke  $b$  ab, so ist ihre Gleichung

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Durch Vergleichung mit der allgemeinen Form findet man:

$$a = -\frac{C}{A}, \quad b = -\frac{C}{B}, \quad m = -\frac{A}{B}.$$

ζ) Ist das Lot  $l$  vom Koordinatenanfangspunkt auf eine Gerade unter dem Winkel  $\alpha$  gegen die  $x$ -Achse geneigt, so lautet die Gleichung der Geraden:

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - l = 0. \quad (\text{Normalform.})$$

Um die allgemeine Gleichung der geraden Linie

$$Ax + By + C = 0$$

in die Normalform zu bringen, setze man

$$\cos \alpha = \frac{A}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}}, \quad \sin \alpha = \frac{B}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}}, \quad l = \frac{-C}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Das Vorzeichen der Wurzel ist überall so zu wählen, daß  $l$  positiv wird.

4. Der **Abstand**  $p$  eines Punktes  $(x_1, y_1)$  von einer geraden Linie, deren Gleichung die Normalform hat, ist

$$p = \pm (x_1 \cos \alpha + y_1 \sin \alpha - l);$$

$p$  wird positiv, wenn der Punkt  $(x_1, y_1)$  und der Koordinatenanfangspunkt auf derselben Seite der Geraden liegen, negativ, wenn sie auf verschiedenen Seiten liegen.

5. Sind

$$\begin{aligned} A_1 x + B_1 y + C_1 &= 0 \text{ und} \\ A_2 x + B_2 y + C_2 &= 0 \end{aligned}$$

die Gleichungen zweier Geraden, so ist, wenn  $k$  eine beliebige Zahl bedeutet, die Gleichung aller Geraden, die durch den Schnittpunkt beider gehen,

$$A_1 x + B_1 y + C_1 + k(A_2 x + B_2 y + C_2) = 0.$$

6. Der **Winkel**  $\varphi$ , den zwei gerade Linien (der unter 5 genannten Gleichungen) miteinander bilden, ergibt sich aus

$$\operatorname{tg} \varphi = \pm \frac{A_2 B_1 - A_1 B_2}{A_1 A_2 + B_1 B_2}.$$

Die Linien sind parallel ( $\varphi = 0$ ), wenn  $A_2 B_1 = A_1 B_2$  oder  $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$ . Die Linien stehen winkelrecht zueinander ( $\varphi = 90^\circ$ ), wenn  $A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0$ .

Sind die Gleichungen in entwickelter Form gegeben:

$$y = m_1 x + b_1, \quad y = m_2 x + b_2,$$

so ist

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2};$$

die Geraden sind parallel, wenn

$$m_1 = m_2,$$

sie stehen winkelrecht zueinander, wenn

$$m_1 m_2 + 1 = 0$$

oder

$$m_1 = -\frac{1}{m_2}.$$

7. Die Gleichung einer Geraden, welche die Gerade  $y = mx + b$  im Punkte  $(x_1, y_1)$  unter dem Winkel  $\varphi$  schneidet, ist

$$y - y_1 = \frac{m + \operatorname{tg} \varphi}{1 - m \operatorname{tg} \varphi} (x - x_1).$$

8. Die Winkel zweier Geraden (der unter 5. genannten Gleichungen) werden halbiert durch die Geraden

$$\frac{A_1 x + B_1 y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} \mp \frac{A_2 x + B_2 y + C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}} = 0.$$

### 9. Umwandlung der Koordinaten.

Die Koordinaten in Beziehung auf das alte Achsenkreuz werden mit  $x, y$ , auf das neue mit  $x', y'$  bezeichnet.

α) Parallele Verschiebung des Achsenkreuzes. Sind  $f, g$  die Koordinaten des neuen Anfangspunktes, so ist

$$x = f + x', \quad y = g + y'.$$

β) Drehung des Achsenkreuzes um den Anfangspunkt. Bezeichnet  $\alpha$  den Winkel, den die alte positive  $x$ -Achse bei ihrer Drehung nach der alten positiven  $y$ -Achse hin zurücklegen muß, um in die Lage der neuen positiven  $x'$ -Achse zu kommen, so ist

$$x = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha, \quad y = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha.$$

γ) Bei gleichzeitiger Verschiebung und Drehung verbinde man die Formeln unter α) und β) entsprechend.

δ) Umwandlung des rechtwinkligen Achsenkreuzes in ein schiefwinkliges. Ist die  $x'$ -Achse um  $\alpha$ , die  $y'$ -Achse um  $\beta$  gegen die  $x$ -Achse geneigt, so wird

$$x = x' \cos \alpha + y' \cos \beta, \\ y = x' \sin \alpha + y' \sin \beta.$$

ε) Umwandlung von Parallelkoordinaten in **Polarkoordinaten**. Bezeichnet  $r$  den Leitstrahl,  $\varphi$  den Polarwinkel, so ist, wenn der Pol mit dem Anfangspunkte und die Polarachse mit der positiven  $x$ -Achse zusammenfallen, für rechtwinklige Koordinaten:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi.$$

Sind  $x, y$  die Koordinaten eines **schiefwinkligen** Achsenkreuzes mit dem Winkel  $\omega$ , so hat man

$$x = \frac{r \sin(\omega - \varphi)}{\sin \omega}, \quad y = \frac{r \sin \varphi}{\sin \omega}.$$

ζ) Umwandlung von Polarkoordinaten in Parallelkoordinaten. Bei den Bezeichnungen unter ε) ist für rechtwinklige Koordinaten:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \cos \varphi = \frac{x}{r}, \quad \sin \varphi = \frac{y}{r};$$

für schiefwinklige Koordinaten:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + 2xy \cos \omega}, \quad \cos \varphi = \frac{x + y \cos \omega}{r}, \quad \sin \varphi = \frac{y \sin \omega}{r}.$$

## B. Krumme Linien in der Ebene.

### a. Allgemeine Sätze.

1. Eine krumme Linie in der Ebene, bezogen auf Parallelkoordinaten, wird dargestellt durch eine **Gleichung**:

$$F(x, y) = 0.$$

Durch **Auflösung** dieser Gleichung nach  $y$  erhält man eine oder mehrere Gleichungen von der Form

$$y = f(x),$$

die ebensoviele zusammenhängende oder getrennte Zweige der Kurve darstellen.

Dasselbe gilt für die Gleichung einer Kurve in Polarkoordinaten:

$$F(r, \varphi) = 0 \text{ oder } r = f(\varphi).$$

Häufig ist es für die Rechnung bequemer, die Kurve mittels einer Hilfsveränderlichen  $t$  (Parameter) durch zwei Gleichungen darzustellen:

$$x = \psi_1(t); \quad y = \psi_2(t).$$

2. Den Winkel  $\tau$ , den die nach der Seite der positiven  $y$ -Achse liegende **Tangente** mit der positiven  $x$ -Achse bildet (s. Abb. 3), findet man für rechtwinklige Koordinaten aus

$$\sin \tau = \frac{dy}{ds}, \quad \cos \tau = \frac{dx}{ds},$$

$$\operatorname{tg} \tau = \frac{dy}{dx};$$

hierin ist das Differential des **Bogens**

$$ds = \pm \sqrt{dx^2 + dy^2},$$

welches bei der Bestimmung von  $\sin \tau$  und  $\cos \tau$  mit dem für  $\operatorname{tg} \tau$  sich ergebenden Vorzeichen genommen werden muß.

3. Bezeichnet man den Winkel, den die im Sinne des wachsenden  $\varphi$  gerichtete Tangente der Kurve mit der positiven Richtung des Leitstrahles  $r$  bildet, mit  $u$  (s. Abb. 3), so ist

$$\sin u = \frac{r d\varphi}{ds}, \quad \cos u = \frac{dr}{ds}, \quad \operatorname{tg} u = \frac{r d\varphi}{dr}.$$

Das Differential des Bogens

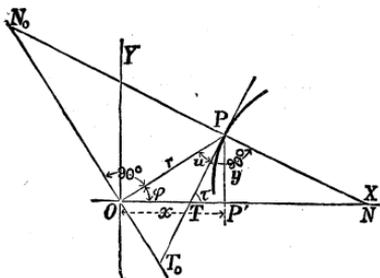
$$ds = \pm \sqrt{dr^2 + r^2 d\varphi^2}$$

muß bei der Bestimmung von  $\sin u$  und  $\cos u$  mit dem für  $\operatorname{tg} u$  sich ergebenden Vorzeichen genommen werden.

4. Die **Gleichung der Tangente** im Punkte  $(x, y)$  der Kurve ist

$$\eta - y = \frac{dy}{dx}(\xi - x) \text{ oder } \frac{\partial F}{\partial x}(\xi - x) + \frac{\partial F}{\partial y}(\eta - y) = 0,$$

worin  $\xi$  und  $\eta$  die laufenden Koordinaten bezeichnen.



In Abb. 3 ist die **Tangente**  $PT = y \frac{ds}{dy} = y \frac{dx}{dy} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$ .

**Subtangente** . . .  $P'T = y \frac{dx}{dy}$ .

**Polartangente** . . .  $PT_0 = \frac{r ds}{dr} = r \sqrt{1 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{dr}\right)^2}$ .

**Polarsubtangente** . . .  $OT_0 = \frac{r^2 d\varphi}{dr}$ .

In diesen Formeln soll auf die Richtung der Strecken keine Rücksicht genommen werden. Sie liefern die Länge der Strecken, wenn rechts der absolute Wert genommen wird.

5. Die **Gleichung der Normale** im Punkte  $(x, y)$  ist für rechtwinklige Koordinaten, wenn  $\xi, \eta$  die laufenden Koordinaten bezeichnen,

$$\eta - y = -\frac{dx}{dy}(\xi - x) \quad \text{oder} \quad \frac{\partial F}{\partial y}(\xi - x) - \frac{\partial F}{\partial x}(\eta - y) = 0.$$

**Normale**  $PN = y \frac{ds}{dx} = y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$ . **Subnormale**  $P'N = y \frac{dy}{dx}$ .

**Polarnormale**  $PN_0 = \frac{ds}{d\varphi} = \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2}$ . **Polarsubnormale**  $ON_0 = \frac{dr}{d\varphi}$ .

6. Die Richtungswinkel der **unendlich fernen Punkte** einer Kurve findet man, indem man die Gleichung der Kurve auf Polarkoordinaten bezieht und diejenigen Winkel  $\varphi$  sucht, welche  $r = \infty$  entsprechen. Ist die Kurve eine algebraische vom  $n^{\text{ten}}$  Grade, so teile man zuvor ihre Gleichung durch die höchste Potenz von  $r$ ; hierzu schreibe man die Gleichung in der Form

$$F(x, y) = F_n + F_{n-1} + F_{n-2} + \dots + F_1 + F_0 = 0,$$

worin  $F_k$  die homogenen Glieder  $k^{\text{ter}}$  Ordnung von  $F(x, y)$  bezeichnet.

7. Die **Asymptoten** sind die Tangenten in den unendlich fernen Punkten der Kurve. Man erhält ihre Gleichung, indem man in der Tangentengleichung für den Berührungspunkt  $(x, y)$  Polarkoordinaten  $(r, \varphi)$  einführt, durch die höchste Potenz von  $r$  teilt, sodann  $r = \infty$  werden läßt und für  $\varphi$  die unter 6. bestimmten Richtungswinkel der unendlich fernen Punkte der Reihe nach einsetzt.

8. Zwei Kurven, welche einen Punkt gemeinsam haben, bilden in diesem eine **Berührung**  $k^{\text{ter}}$  Ordnung, wenn die ersten  $k$  Ableitungen

$$\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^k y}{dx^k}$$

in dem betreffenden Punkte für beide Kurven einander gleich sind.

Bei einer Berührung von gerader Ordnung schneiden sich die Kurven in dem gemeinsamen Punkte, bei einer Berührung von ungerader Ordnung berühren sie sich, ohne sich zu schneiden.

Die **Tangente** einer Kurve bildet mit dieser im allgemeinen eine Berührung erster Ordnung, der **Krümmungskreis** (s. u. 9.) im allgemeinen eine Berührung zweiter Ordnung.

9. Der **Krümmungskreis** einer Kurve im Punkte  $(x, y)$  ist der Kreis, der mit der Kurve daselbst eine Berührung zweiter Ordnung (s. u. 8.) eingeht, oder, was dasselbe ist, drei unendlich nahe Punkte mit ihr gemein hat. Sein Mittelpunkt, der sogen. **Krümmungsmittelpunkt**, ist der Schnittpunkt der im Punkte  $(x, y)$  und der im benachbarten Punkte  $(x + dx, y + dy)$  errichteten Normale. Der **Krümmungshalbmesser**  $\rho$  ist

für rechtwinklige Koordinaten:

$$\rho = \frac{ds}{d\tau} = \frac{\left(\frac{ds}{dx}\right)^3}{\frac{d^2y}{dx^2}} = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}},$$

für Polarkoordinaten:

$$\rho = \frac{ds}{d\tau} = \frac{\left[r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2\right]^{3/2}}{r^2 + 2\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 - r\frac{d^2r}{d\varphi^2}}.$$

Der reziproke Wert von  $\rho$  heißt die **Krümmung** der Kurve im Punkte  $(x, y)$ .

10. Die Koordinaten  $X, Y$  des **Krümmungsmittelpunktes** für den Punkt  $(x, y)$  sind

$$X = x - \rho \frac{dy}{ds}, \quad Y = y + \rho \frac{dx}{ds};$$

oder

$$X = x - \left(\frac{ds}{dx}\right)^2 \frac{dy}{d^2y}, \quad Y = y + \left(\frac{ds}{dx}\right)^2 \frac{1}{\frac{d^2y}{dx^2}};$$

oder

$$X = x - \frac{dy}{d\tau}, \quad Y = y + \frac{dx}{d\tau};$$

oder

$$X = x - \rho \sin \tau, \quad Y = y + \rho \cos \tau.$$

11. Die **Evolute** einer Kurve ist der geometrische Ort ihrer Krümmungsmittelpunkte; die gegebene Kurve heißt **Evolvente** der Evolute.

Die Gleichung der Evolute findet man, indem man aus der Gleichung der Evolvente und den Gleichungen für die Koordinaten  $X$  und  $Y$  des Krümmungsmittelpunktes die Koordinaten  $x, y$  eliminiert und dann  $X, Y$  als veränderlich betrachtet.

Jeder Krümmungshalbmesser ist Normale der Evolvente und Tangente der Evolute.

Die Bogenlänge zwischen zwei Punkten der Evolute ist gleich dem Unterschiede der zu diesen Punkten gehörigen Krümmungshalbmesser der Evolvente. Hieraus folgt, daß der Endpunkt eines

vollkommen biegsamen, unausdehnbaren Fadens, der auf die Evolute gewickelt ist, die Evolvente beschreibt, wenn der Faden, stets in Richtung der Tangente angezogen, von der Evolute abgewickelt wird.

Man findet umgekehrt, wenn die Evolute  $F(X, Y) = 0$  gegeben ist, die Gleichung der **Evolvente** aus den folgenden Beziehungen:

$$x = X - S \frac{dX}{dS}, \quad y = Y - S \frac{dY}{dS}, \quad F(X, Y) = 0,$$

wenn  $(X, Y)$  einen beliebigen Punkt der Evolute und  $S$  deren Bogenlänge bis zu diesem Punkte bezeichnet, von dem Punkte aus gezählt, wo die Abwicklung beginnt.

12. Eine Kurve ist nach der positiven Seite der  $y$ -Achse **konkav**, wenn  $\frac{d^2 y}{dx^2} > 0$ ; **konvex**, wenn  $\frac{d^2 y}{dx^2} < 0$  ist. In dem Punkte, wo  $\frac{d^2 y}{dx^2} = 0$  ist, während  $\frac{d^3 y}{dx^3} \geq 0$ , geht die Kurve aus der konkaven in die konvexe Form über, oder umgekehrt. Ein solcher Punkt heißt ein **Wendepunkt**; man ermittelt ihn durch Auflösung der Gleichung  $\frac{d^2 y}{dx^2} = 0$ . Wenn die Wurzeln dieser Gleichung gleichzeitig den sämtlichen Bedingungen

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = 0, \quad \frac{d^4 y}{dx^4} = 0, \quad \dots \quad \frac{d^k y}{dx^k} = 0, \quad \frac{d^{k+1} y}{dx^{k+1}} \geq 0$$

genügen, so ist der Punkt nur dann ein Wendepunkt, wenn  $k$  gerade ist; die Tangente hat alsdann (siehe 8.) eine Berührung gerader Ordnung mit der Kurve, schneidet diese also im Berührungspunkte. Ist hingegen  $k$  ungerade, so hat der Punkt die Eigenschaft, daß seine Tangente mit der Kurve eine Berührung ungerader Ordnung eingeht, er ist aber kein Wendepunkt.

Für einen Wendepunkt ist  $\rho = \infty$ .

13. Eine Kurve hat einen **Doppelpunkt**, wenn

$$F(x, y) = 0; \quad \frac{\partial F}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 0;$$

in diesem Falle erscheint  $\operatorname{tg} \tau = \frac{dy}{dx} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$  in der unbestimmten

Form  $\frac{0}{0}$ . Der Wert für  $\operatorname{tg} \tau$  wird bestimmt nach Seite 69, C; erhält man für  $\operatorname{tg} \tau$  2 reelle Werte, entsprechend 2 Tangenten, so ist der Punkt ein eigentlicher Doppelpunkt; bei 2 gleichen Werten für  $\operatorname{tg} \tau$ , 2 zusammenfallenden Tangenten, hat man einen Rückkehrpunkt (Spitze); sind die beiden Werte für  $\operatorname{tg} \tau$  imaginär, so ist der Punkt ein isolierter oder zugeordneter Punkt.

**14. Inhalt der Fläche:**

α) zwischen der Kurve, der Abszissenachse und den Ordinaten  $y_0, y$ , die den Abszissen  $x_0, x$  entsprechen:

$$F = \int_{x_0}^x f(x) dx;$$

β) zwischen der Kurve und den zu den Polarwinkeln  $\varphi_0, \varphi$  gehörenden Leitstrahlen  $r_0, r$ :

$$F = \frac{1}{2} \int_{\varphi_0}^{\varphi} r^2 d\varphi.$$

**15. Bogenlänge.** Die Länge  $s$  einer Kurve, die zwischen zwei den Abszissen  $x_0, x$  entsprechenden Punkten liegt, ist

$$s = \int_{x_0}^x \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_{x_0}^x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx.$$

Für Polarkoordinaten hat man

$$s = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2} d\varphi = \int_{r_0}^r \sqrt{1 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{dr}\right)^2} dr.$$

**16. Einhüllende Kurve.** Die durch die Gleichung  $F(x, y, p) = 0$ , worin  $p$  ein veränderlicher Parameter ist, dargestellte Kurvenschar wird im allgemeinen von einer Kurve umhüllt, welche die einhüllende Kurve der Kurvenschar heißt. Ihre Gleichung ergibt sich durch Elimination von  $p$  aus den beiden Gleichungen

$$\frac{\partial F(x, y, p)}{\partial p} = 0, \quad F(x, y, p) = 0.$$

Ist die Kurvenschar bestimmt durch die Gleichung  $F(x, y, p, q) = 0$  mit zwei veränderlichen Parametern  $p$  und  $q$ , zwischen denen die Bedingungsgleichung  $\varphi(p, q) = 0$  besteht, so ergibt sich die Gleichung der einhüllenden Kurve durch Elimination von  $p$  und  $q$  aus den drei Gleichungen

$$\frac{\partial F}{\partial p} \frac{\partial \varphi}{\partial q} = \frac{\partial F}{\partial q} \frac{\partial \varphi}{\partial p}, \quad F(x, y, p, q) = 0, \quad \varphi(p, q) = 0.$$

**17. Trajektorie.** Die Kurve, welche die Kurvenschar  $F(x, y, p) = 0$ , worin  $p$  ein veränderlicher Parameter ist, rechtwinklig durchschneidet, heißt die rechtwinklige Trajektorie der Kurvenschar. Die Differentialgleichung der Trajektorie, deren Koordinaten  $\xi, \eta$  seien, ergibt sich, indem man aus den Gleichungen

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\partial F}{\partial \eta} : \frac{\partial F}{\partial \xi} \quad \text{und} \quad F(\xi, \eta, p) = 0$$

die Größe  $p$  eliminiert. Die Integration der entstandenen Gleichung liefert mit Rücksicht auf die willkürlich gewählte Unveränderliche eine Schar von Trajektorien.

**b. Kegelschnitte.****1. Allgemeines.**

1. Eine Meridianebene  $M$ , d. i. eine Ebene durch die Drehachse eines geraden Kreiskegels (vgl. S. 124), sei begrenzt durch die Mantellinien  $S_1$  und  $S_2$ ; die Kegelspitze sei  $s$ . Eine zu  $M$  winkelrechte Ebene  $E$  schneidet den Kegel: 1) in einer **Ellipse**, wenn  $S_1$  und  $S_2$  von  $s$  aus auf derselben Seite durch  $E$  geschnitten werden; 2) in einer **Parabel**, wenn  $E$  parallel  $S_1$  oder  $S_2$  ist; 3) in einer **Hyperbel**, wenn  $E$  zwar  $S_1$  und  $S_2$  schneidet, jedoch die eine der beiden Mantellinien erst in ihrer Verlängerung über  $s$  hinaus. Diese drei Kurven heißen daher Kegelschnitte. Ist im Falle 1)  $E$  winkelrecht zur Achse des Kegels, so ist die Schnittfigur ein **Kreis**. Im Falle 3) liefert eine zu  $E$  parallele und durch  $s$  gehende Ebene  $E_1$  beim Schnitt des Kegelmantels zwei Parallelen zu den Asymptoten der Hyperbel (s. S. 99 und Abb. 6, S. 100). Eine gleichseitige Hyperbel (für die  $\alpha = 45^\circ$ ) erhält man nur bei Kegeln, deren Spitzenwinkel  $\geq 90^\circ$  ist.

2. Bewegt sich ein Punkt  $P$  in der Weise, daß seine edesmaligen Abstände  $PF$  von einem festen Punkte  $F$  und  $PQ$  von einer festen Geraden in einem unveränderlichen Verhältnis  $PF:PQ=e$  stehen, so ist der geometrische Ort des Punktes eine Ellipse, wenn  $e < 1$ ; eine Parabel, wenn  $e = 1$ ; eine Hyperbel, wenn  $e > 1$  ist. Das Verhältnis  $e$  ist die (numerische) Exzentrizität des betreffenden Kegelschnittes. Der feste Punkt  $F$  liegt auf der Hauptachse und ist ein Brennpunkt; die feste Gerade steht winkelrecht zur Hauptachse und heißt **Leitlinie** (Direktrix). Beim Kreis ist  $F$  der Mittelpunkt und die Leitlinie liegt im Unendlichen; hierbei ist  $e = 0$ .

3. a) Die **allgemeine Gleichung** der Kegelschnitte in Parallelkoordinaten hat die Form

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0 = 0.$$

Diese Gleichung stellt eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel dar, jenachdem die Diskriminante  $a_{11}a_{22} - a_{12}^2$  positiv, null oder negativ ist.

Die allgemeine Form der Parabelgleichung ist also

$$(ax + by + c)^2 + Ax + By + C = 0.$$

b) Der **Mittelpunkt** von Ellipse und Hyperbel unter a) ist der Schnittpunkt der geraden Linien

$$a_{11}x + a_{12}y + a_1 = 0 \quad \text{und} \quad a_{12}x + a_{22}y + a_2 = 0.$$

c) Aus der allgemeinen Gleichung von Ellipse und Hyperbel in rechtwinkligen Parallelkoordinaten findet man die **Mittelpunktsgleichung**:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = k$$

und die **Hauptachsengleichung**:

$$g_1x'^2 + g_2y'^2 = k.$$

Der Winkel  $\varphi$ , um den das alte Koordinatenkreuz im positiven Sinne gedreht werden muß, um in die Lage des neuen zu gelangen, ergibt sich aus

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2a_{12}}{a_{11} - a_{22}};$$

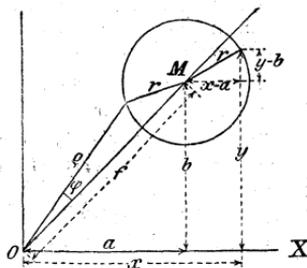
$g_1$  und  $g_2$  findet man als Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$g^2 - g(a_{11} + a_{22}) + a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0.$$

$a_{11} + a_{22}$  heißt die Invariante der Kegelschnittgleichung.

d) Die allgemeine Kegelschnittgleichung ist die eines Kreises, wenn  $a_{12} = 0$ ;  $a_{11} = a_{22}$ ;  $a_{11}$  und  $k$  gleiches Vorzeichen haben.

Abb. 4.



## 2. Kreis.

1. **Allgemeine Gleichung** (Abb. 4):

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2.$$

2. **Mittelpunktgleichung** (Koordinaten-Anfangspunkt im Mittelpunkt  $M$ ):

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

3. **Scheitelgleichung** (Koordinaten-Anfangspunkt in der Kreislinie,  $OX$  ein Durchmesser):

$$y^2 = x(2r - x).$$

4. **Polargleichung** für die Achse  $OM$ :

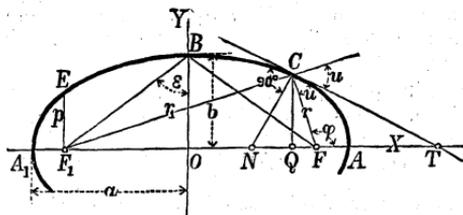
$$\rho^2 - 2\rho f \cos \varphi + f^2 = r^2.$$

5. **Umfang** und **Inhalt** der Kreisfläche s. S. 2 u. f., Inhalte der Kreisabschnitte und Kreisabschnitte s. S. 36 u. 37, sowie VII, A, 4.

## 3. Ellipse und Hyperbel.

Für die Ellipse (Abb. 5) gelten im folgenden die oberen, für die Hyperbel (Abb. 6, S. 100) die unteren Zeichen.

Abb. 5.



### 1. Mittelpunktgleichung.

Bezieht man die Kurven auf ihre Hauptachse, so ist die Gleichung, wenn  $OA = a$  und  $OB$  bzw.  $AD = b$  die beiden Halbachsen bezeichnen,

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Hieraus ergibt sich  $y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{\pm(a^2 - x^2)}$ .

2. **Scheitelgleichung.** Verlegt man den Anfangspunkt der Koordinaten in den Scheitel  $A_1$  (in der  $x$ -Achse), so ist die Gleichung:

$$\pm y^2 = 2 \frac{b^2}{a} x - \frac{b^2}{a^2} x^2 = 2px - \frac{px^2}{a}.$$

3. Die **Brennpunkte**  $F$  und  $F_1$  haben auf der  $x$ -Achse von  $O$  den Abstand

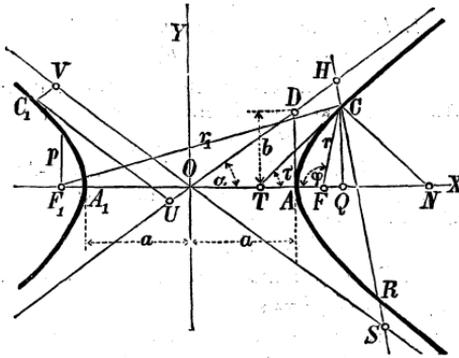
$$OF = OF_1 = \pm \sqrt{a^2 \mp b^2}.$$

Bei der Ellipse ist  $BF = BF_1 = OA = a$ , bei der Hyperbel  $OF = OF_1 = OD$ . Das Verhältnis

$$\frac{OF}{OA} = \frac{\sqrt{a^2 \mp b^2}}{a} = e = \sin \varepsilon, \text{ bzw. } \frac{OF}{OA} = \frac{1}{\cos \alpha}$$

heißt die (numerische) Exzentrizität des Kegelschnittes.

Abb. 6.



4. Die von den Brennpunkten nach einem beliebigen Punkte des Kegelschnittes gezogenen **Leitstrahlen** sind

$$r = \pm (a - ex),$$

$$r_1 = a + ex.$$

Bei der Ellipse ist die Summe, bei der Hyperbel die Differenz der Leitstrahlen unveränderlich, also ist bei der Ellipse

$$r + r_1 = 2a$$

(Fadenkonstruktion),

bei der Hyperbel

$$r - r_1 = \pm 2a.$$

5. Die Ordinate in einem Brennpunkte ist

$$p = \pm a(1 - e^2) = \frac{b^2}{a}.$$

Die Größe  $2p$  heißt der **Parameter**.

6. **Zugeordnete** (konjugierte) **Durchmesser** nennt man solche Durchmesser, von denen der eine alle Sehnen halbiert, die zu dem anderen parallel sind. Die Tangenten in den Endpunkten eines Durchmessers sind parallel zu dem diesem zugeordneten Durchmesser.

Bilden diese Durchmesser  $2a_1$ ,  $2b_1$  mit der ersten Hauptachse die Winkel  $\alpha$ ,  $\beta$  (Abb. 10 S. 103), so ist, wenn beide Winkel spitz sind,

$$a^2 \pm b^2 = a_1^2 \pm b_1^2; \quad ab = a_1 b_1 \sin(\alpha + \beta); \quad \frac{b^2}{a^2} = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta.$$

Die auf zwei zugeordnete Durchmesser als Achsen bezogene Gleichung beider Kegelschnitte in schiefwinkligen Koordinaten lautet

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} \pm \frac{y_1^2}{b_1^2} = 1.$$

7. **Gleichung der Tangente** im Punkte  $(x, y)$ :  $\frac{\xi x}{a^2} \pm \frac{\eta y}{b^2} = 1.$

**Gleichung der Normale**:  $\frac{\xi - x}{b^2 x} = \pm \frac{\eta - y}{a^2 y}.$

Hierbei bedeuten  $\xi$  und  $\eta$  die laufenden Koordinaten.

Tangente und Normale halbieren die Winkel der Leitstrahlen.

8. Die Hyperbel nähert sich auf ihren in das Unendliche gehenden Zweigen den **Asymptoten**, d. h. den beiden Geraden  $\frac{x}{a} \pm \frac{y}{b} = 0$ , immer mehr, ohne diese im Endlichen zu erreichen. Jede Asymptote bildet mit der  $x$ -Achse einen Winkel  $\alpha$ , so daß  $\operatorname{tg} \alpha = b : a$  ist.

Zieht man eine Gerade  $HS$  (Abb. 6), welche die Hyperbel und die Asymptoten schneidet, so sind die beiden Stücke  $CH$  und  $RS$  zwischen der Hyperbel und den Asymptoten einander gleich. Hieraus folgt eine einfache **Konstruktion der Hyperbel**, wenn die Asymptoten und ein Punkt  $C$  der Hyperbel gegeben sind.

Das zwischen den Asymptoten liegende Stück einer zur  $x$ -Achse winkelrechten Geraden wird durch einen Hyperbelast so geteilt, daß das Produkt der Teile unveränderlich gleich  $b^2$  ist.

Das zwischen den beiden Hyperbelasten liegende Stück einer zur  $x$ -Achse parallelen Geraden wird durch eine Asymptote so geteilt, daß das Produkt der Teile unveränderlich gleich  $a^2$  ist.

Das zwischen den Asymptoten liegende Stück einer Tangente wird im Berührungspunkte halbiert. Die von beliebigen Tangenten und den Asymptoten gebildeten Dreiecke sind flächengleich.

Wenn  $C_1U$  und  $C_1V$ , Abb. 6, den Asymptoten parallel sind, so ist

$$C_1U \cdot C_1V = \frac{1}{4} (a^2 + b^2).$$

Die auf die Asymptoten als Achsen bezogene **Gleichung der Hyperbel** in schiefwinkligen Koordinaten lautet:

$$x' y' = \frac{1}{4} (a^2 + b^2).$$

9. Für einen beliebigen Punkt  $C(x, y)$  (s. Abb. 5 u. 6) ist die

$$\text{Tangente } CT = \frac{ay}{bx} \sqrt{\pm (a^2 - e^2 x^2)};$$

$$\text{Normale } CN = \frac{b}{a} \sqrt{\pm (a^2 - e^2 x^2)};$$

$$\text{Subtangente } TQ = \mp \frac{a^2}{x} \pm x; \quad \text{Subnormale } NQ = \mp \frac{b^2}{a^2} x.$$

### 10. Gleichseitige Hyperbel.

Mittelpunktsgleichung:  $x^2 - y^2 = a^2$ .

Asymptotengleichung:  $x' y' = \frac{1}{2} a^2$ .

Parameter:  $2p = 2a$ .

Ferner ist  $a = b \quad e = \sqrt{2} \quad \alpha = 45^\circ$ .

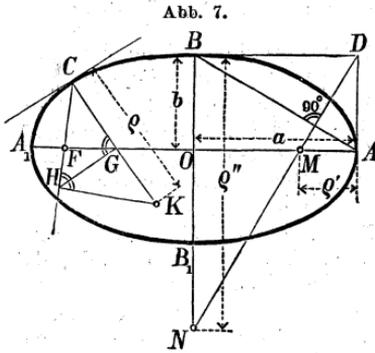
Die Asymptoten stehen winkelrecht zu einander.

11. **Krümmungshalbmesser** im Punkte  $C$  (Abb. 5 u. 6):

$$\rho = a^2 b^2 \left( \frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} \right)^{3/2} = \frac{(r r_1)^{3/2}}{ab} = \frac{p}{\sin^3 FCT} = \frac{p}{\sin^3 u}.$$

Konstruktion (Abb. 7): Man errichte die Winkelrechte  $CG$  im Punkte  $C$  zur Tangente (Konstruktion der Tangente s. S. 103), ziehe  $CF$

durch den Brennpunkt  $F$ ;  $GH \perp GC$ ,  $HK \perp CH$ , dann ist  $K$  der Krümmungsmittelpunkt.



Für den Scheitel  $A$  ist bei Ellipse und Hyperbel der Krümmungshalbmesser

$$\varphi' = AM = \frac{b^2}{a} = p;$$

für den Scheitel  $B$  ist bei der Ellipse der Krümmungshalbmesser

$$\varphi'' = BN = \frac{a^2}{b}.$$

Die Krümmungsmittelpunkte  $M$  und  $N$  für die Scheitel der Ellipse erhält man (Abb. 7),

indem man durch  $D$  eine Gerade winkelrecht zu  $AB$  zieht.

12. **Polargleichung** der Ellipse und Hyperbel, bezogen auf den Brennpunkt  $F$  als Pol und  $FA$  als Polarachse (Abb. 5 u. 6):

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \varphi} = \pm \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \varphi}.$$

13. **Fläche.** Bei der Ellipse ist (Abb. 5):

$$\text{Fläche } OBCQ = \frac{xy}{2} + \frac{ab}{2} \arcsin \frac{x}{a}.$$

Der Inhalt der ganzen Ellipse ist  $\pi ab$ .

Bei der Hyperbel ist (Abb. 6):

$$\text{Fläche } ACQ = \frac{xy}{2} - \frac{ab}{2} \ln \left( \frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right).$$

Der Subtrahend stellt die Fläche  $OCA$  vor.

$$\text{Fläche } OA_1C_1V = \frac{ab}{4} + \frac{ab}{2} \ln \frac{2OV}{OD}.$$

Fläche der gleichseitigen Hyperbel s. S. 65.

14. **Umfang der Ellipse:**

$$U = \pi(a+b) \left[ 1 + \frac{1}{4} \left( \frac{a-b}{a+b} \right)^2 + \frac{1}{64} \left( \frac{a-b}{a+b} \right)^4 + \frac{1}{256} \left( \frac{a-b}{a+b} \right)^6 + \dots \right] \\ = \pi(a+b)z.$$

Zur Berechnung von  $\pi(a+b)$  kann man für  $(a+b) = n$  die Tafel auf S. 2 bis 23, zur Berechnung von  $z$  folgende Angaben benutzen:

$\frac{a-b}{a+b} = 0,1$	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$z = 1,0025$	1,0100	1,0226	1,0404	1,0635	1,0922	1,1267	1,1677	1,2155	1,2732

15. **Konstruktion der Ellipse aus den beiden Halbachsen  $a$  und  $b$**  (Abb. 8).

α) Man beschreibe um  $O$  Kreise mit  $a$ ,  $b$  und  $a + b$ , ziehe einen beliebigen Halbmesser  $OJGH$  und durch  $J$  und  $G$  Parallele zum Achsenkreuz, so ist deren Schnittpunkt  $C$  ein Punkt der Ellipse und  $HCN$  die Normale in diesem Punkte.

Abb. 8.

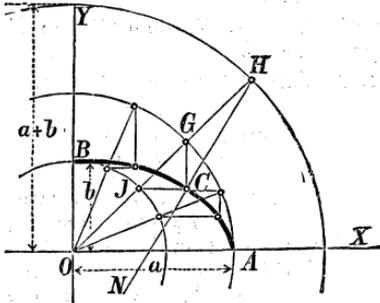
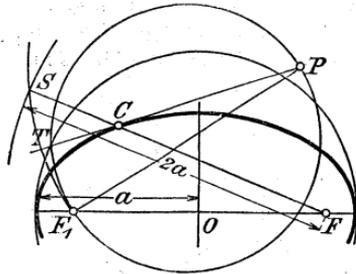


Abb. 9.



β) Man lasse die Strecke  $a + b$  mit ihren Endpunkten auf den Schenkeln eines rechten Winkels gleiten. Der Teilpunkt zwischen  $a$  und  $b$  beschreibt dann die Ellipse.

**16. Konstruktion der Tangente**

α) in einem Punkte  $C$ . (Abb. 5 und 6, S. 99 und 100.) Man halbiere den Winkel der Leitstrahlen  $CF$  und  $CF_1$ ; vgl. u. 7., S. 100

β) von einem Punkte  $P$  außerhalb (Abb. 9).

Man beschreibe um  $O$  mit  $a$  und über  $PF_1$  als Durchmesser Kreise.

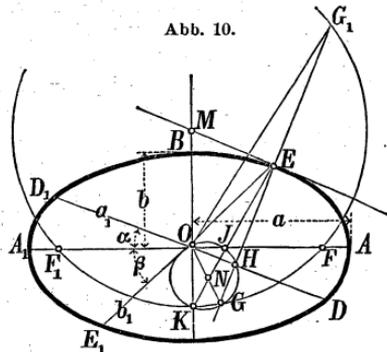
Die Verbindungslinie des Schnittpunktes  $T$  mit  $P$  ist die Tangente. Zieht man um  $P$  mit  $PF_1$  und um  $F$  mit  $2a$  Kreise, so findet man durch Verbindung des Schnittpunktes  $S$  mit  $F$  den Berührungspunkt  $C$ .

**17. Konstruktion der Hauptachsen einer Ellipse**, wenn gegeben sind  $DD_1 = 2a_1$  und  $EE_1 = 2b_1$  (Abb. 10) als zugeordnete Durchmesser der Größe und Lage nach. Man falle  $EH \perp DD_1$ , mache  $EG = EG_1 = OD_1 = a_1$ , so ergibt sich die Lage einer Hauptachse durch Halbierung des Winkels  $GOG_1$ . Die Längen der Hauptachsen sind

$$\begin{aligned} 2\bar{a} &= OG_1 + OG \\ 2\bar{b} &= OG_1 - OG. \end{aligned}$$

Oder: Man konstruiere  $OG$  wie vorhin, beschreibe über  $OG$  als Durchmesser einen Kreis und verbinde seinen Mittelpunkt  $N$  mit  $E$ . Die Schnittpunkte  $J$  und  $K$  der Geraden  $NE$  mit dem Kreise sind Punkte der Hauptachsen, ihre Entfernungen von  $E$  die Längen der halben Hauptachsen.

Abb. 10.



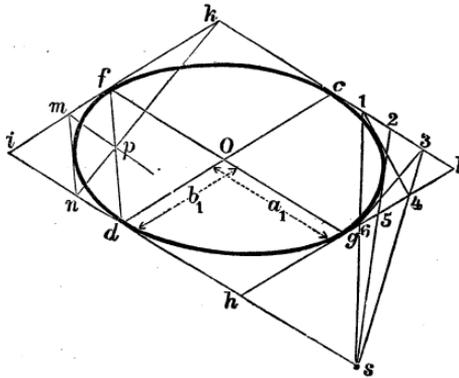
Ein Kreis, dessen Mittelpunkt  $M$  in der kleinen Achse liegt, und der durch  $G$  und  $G_1$  geht, schneidet die große Achse in den Brennpunkten  $F$  und  $F_1$ .

Führt man die Linie  $G_1EH$  so, daß sich  $G_1$  auf  $OG_1$  und  $H$  auf  $DD_1$  bewegt, so beschreibt der Punkt  $E$  die Ellipse.

Der vierte harmonische Punkt zu  $G_1$ ,  $H$  und  $G$ , dem Punkte  $H$  zugeordnet, ist der Krümmungsmittelpunkt zu  $E$ .

18. **Konstruktion der Ellipse aus den zugeordneten Durchmessern  $cd$  und  $fg$**  (Abb. 11).

Abb. 11.



$\alpha$ ) Man mache

$$hdi \parallel lek \parallel gf$$

und  $lgh \parallel kfi \parallel cd$ , verlängere  $ih$  um  $hs = dh$ , teile  $cl$  in beliebig viele (hier 4) gleiche Teile, ziehe  $s3$ ,  $s2$ ,  $s1$ ; die Schnittpunkte mit  $gl$  seien 4, 5, 6, dann sind die Geraden 14, 25, 36 Tangenten an die Ellipse.

$\beta$ ) Man ziehe  $fd$  und nehme darauf beliebige Punkte  $p$  an, ziehe  $kpn$  und  $pm \parallel gf$ , so ist  $mn$  Tangente an die Ellipse.

#### 4. Parabel.

1. **Scheitelgleichung:**  $y^2 = 2px$ , worin  $2p$  der Parameter.

2. Der **Brennpunkt  $F$**  hat vom Scheitel  $A$  den Abstand  $AF = \frac{1}{2}p$  (Abb. 12, S. 105),  $p$  ist die Ordinate im Brennpunkte  $F$ . Die Linie  $LL_1$ , die im Abstande  $-\frac{1}{2}p = AL$  zur  $y$ -Achse parallel läuft, heißt **Leitlinie**. (Vergl. S. 98.)

Es ist dann für jeden Punkt der Parabel  $FE = EB = x + \frac{1}{2}p$ .

3. Ein Durchmesser  $EX'$  der Parabel halbiert alle Sehnen  $ab$ , die zur Tangente  $EY'$  in seinem Endpunkte parallel sind, indem er mit diesen Sehnen den Winkel  $\tau$  bildet; er ist parallel zu  $AX$  und heißt der der Richtung  $EY'$  **zugeordnete Durchmesser**. Es ist also  $am = mb$ .

Betrachtet man  $EX'$  und  $EY'$  als Koordinatenachsen, so ist die Gleichung der Parabel

$$y'^2 = \frac{2p}{\sin^2 \tau} x' = 2p' x'.$$

4. **Gleichung der Tangente:**  $\eta y = p(\xi + x)$ .  
**Gleichung der Normale:**  $\eta - y = -\frac{y}{p}(\xi - x)$ .  $\left. \begin{array}{l} \text{4. Gleichung der Tangente: } \eta y = p(\xi + x). \\ \text{Gleichung der Normale: } \eta - y = -\frac{y}{p}(\xi - x). \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{tg } \tau = \text{tg } u = \frac{p}{y}. \\ \text{(Vergl. S. 93 u. 94.)} \end{array}$

Hierin bezeichnen  $\xi, \eta$  die Koordinaten der Tangente bzw. der Normale. Die Tangente  $ED$  und die Normale  $EG$  halbieren die Winkel  $FEB$  und  $FEX'$ . Die Winkel  $CEG, BED, DEF, FDE$  sind  $=\tau$ .

Abb. 12.

Ferner ist  $DA=AC=x$ ;  $DF=FE=FG=x+\frac{1}{2}p$ . Die  $y$ -Achse halbiert den Tangentenabschnitt zwischen der  $x$ -Achse und dem Berührungspunkte; also  $DM=ME$  und  $D_1M_1=M_1E_1$ .

**Subtangente  $DC=2x$ .**

**Subnormale**

$CG=p = \text{konst.}$

**5. Polargleichung,**

bezogen auf  $F$  als Pol,  $FA$  als Polarachse:

$$r = \frac{p}{1 + \cos \varphi} = \frac{p}{2 \cos^2 \frac{1}{2} \varphi}$$

**6. Krümmungshalbmesser:**  $\rho = \frac{(p+2x)^{3/2}}{\sqrt{p}} = \frac{p}{\sin^2 \tau}$

Die Projektion von  $\rho$  auf die  $x$ -Achse ist gleich  $2EF=2EB$ . Demnach ist  $ER=\frac{1}{2}\rho$ . Auch gilt die Konstruktion von  $\rho$ , wie in Abb. 7 für Ellipse und Hyperbel angegeben (s. S. 102). Krümmungshalbmesser im Scheitel  $=p$ .

**7. Gleichung der Evolute:**  $27py^2=8(x-p)^3$ . Es ist dies die Neilsche oder semikubische Parabel.\*

**8. Fläche  $AEC=2/3 xy$ ;  $aEb=2/3 abcd$ .** Der Flächeninhalt eines beliebigen flachen Segmentes von der Grundlinie  $g$  und der Höhe  $h$  ist annähernd  $F=2/3 gh$ .

\*) Konstruktion der **semikubischen** und der **kubischen Parabel**. Gegeben der Scheitel  $A$ , die Achse  $AX$  und ein Punkt  $P$  der Parabel:

Konstruiere das Rechteck  $ABPX$ , teile  $AB$  (durch 1, 2, 3) und  $BF$  (durch  $a, b, c$ ) in gleich viele (hier vier) gleiche Teile und beschreibe über  $BP$  einen Halbkreis. Mache dann z. B. in Abb. 13 die Sehne  $Bc'=Bc$  und ziehe  $c'III$  winkelrecht zu  $BP$  (bzw. ziehe in Abb. 14  $c'c'$  winkelrecht zu  $BP$  und  $BIII=$  Sehne  $Bc'$ );  $AIII$  schneidet die zu  $AX$  parallele Linie 3  $P_{III}$  im Punkte  $P_{III}$  der Parabel. Ist der Halbkreis für die Zeichnung unbequem, so verwende man

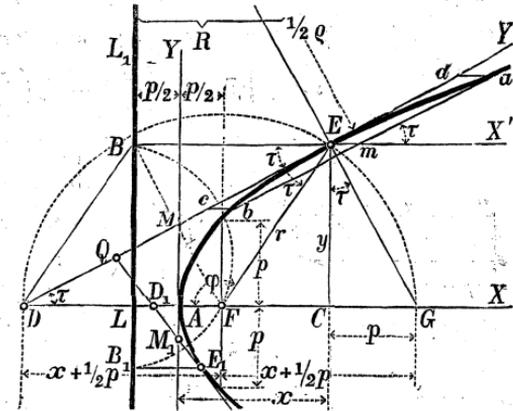


Abb. 13. Kubische Parabel.

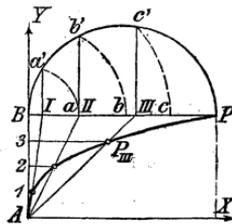
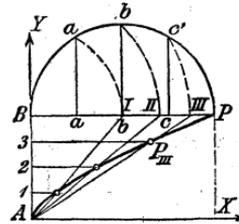


Abb. 14. Semikubische Parabel.



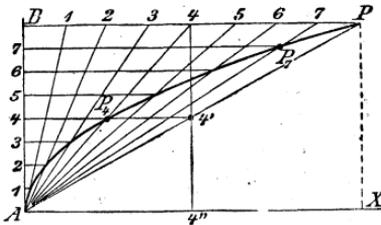
9. **Bogenlänge  $AE$**  (Abb. 12):

$$s = \frac{p}{2} \left\{ \sqrt{\frac{2x}{p} \left( 1 + \frac{2x}{p} \right)} + \ln \left( \sqrt{\frac{2x}{p}} + \sqrt{1 + \frac{2x}{p}} \right) \right\} = EM + \frac{p}{2} \ln \operatorname{ctg} \frac{\tau}{2}$$

Wenn  $\frac{x}{y}$  ein kleiner Bruch ist, so ist annähernd

$$s = y \left[ 1 + \frac{2}{3} \left( \frac{x}{y} \right)^2 - \frac{2}{5} \left( \frac{x}{y} \right)^4 \right].$$

Abb. 16.



Dieselbe Formel gilt näherungsweise für die Länge eines beliebigen flachen Bogens, wenn man  $\frac{2h}{g}$  für  $\frac{x}{y}$  und  $g$  für  $y$  setzt (vgl. 8.).

**10. Konstruktion der Parabel.**

$\alpha$ ) Gegeben Scheitel  $A$ , Achse  $AX$  und ein Punkt  $P$  der Parabel (Abb. 16).

Mache  $AB \perp AX$  in  $A$ ;  $PB \perp AB$ ;  $PB$  und  $AB$  sind in gleich viele (hier 8) gleiche Teile geteilt. Verbinde z. B. Punkt 7 auf  $PB$  mit  $A$ , ziehe durch Punkt 7 auf  $AB$  eine Parallele zu  $AX$ , so ist  $P_7$  ein Punkt der Parabel. Oder: Zieht man von einem beliebigen Punkt 4 der zu  $AX$  parallelen  $PB 44' \perp BP$  und  $4'P_4 \parallel BP$ , so ist deren Schnittpunkt  $P_4$  mit 4  $A$  ein Punkt der Parabel.

Abb. 17.

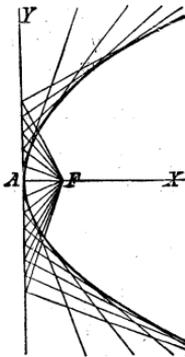
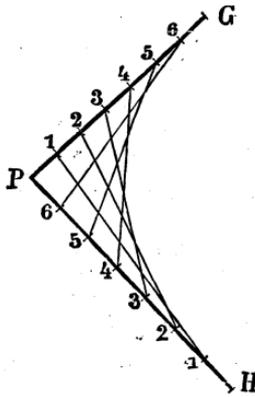


Abb. 18.



$\beta$ ) Gegeben Scheitel  $A$  und Brennpunkt  $F$  (Abb. 17).

Man lasse den Scheitel eines rechten Winkels an  $AY$  so gleiten, dafs der eine

Abb. 15.

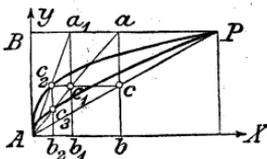


Abb. 15 zur Konstruktion. Wähle  $c$  beliebig auf  $AP$ ,  $acb$ ,  $a_1c_1b_1$ ,  $c_2c_2b_2$  winkelrecht zu  $AX$ ,  $cc_1c$  parallel zu  $XA$ ,  $c_1$  und  $c_2$  auf  $Aa$ ,  $c_2$  auf  $Aa_1$ . Alsdann ist

- $c_1$  ein Punkt der gemeinen Parabel,
- $c_2$  ein Punkt der kubischen Parabel,
- $c_3$  ein Punkt der semikubischen Parabel.

Schenkel immer durch  $F$  geht; der andere Schenkel bildet alsdann jederzeit eine Tangente an die Parabel.

Oder (Abb. 12): Man ziehe in einem beliebigen Punkte  $C$  der  $x$ -Achse  $CE \perp AF$ , mache  $CG = 2 AF = p$ . Ein Kreis um  $F$  mit  $FG$  bestimmt auf  $CE$  den Parabelpunkt  $E$  und ferner den Schnittpunkt  $D$  der Tangente  $ED$  mit der  $x$ -Achse.

$\gamma$ ) Gegeben zwei Tangenten  $PG$  und  $PH$  und ihre Berührungspunkte  $G$  und  $H$  (Abb. 18).

Man teile  $PG$  und  $PH$  in  $n$  (hier 7) gleiche Teile, so sind 11, 22, 33, 44, 55 und 66 Tangenten an die Parabel.

Diese Konstruktion kann mit Vorteil bei der Zeichnung flacher Bogen benutzt werden.

$\delta$ ) Gegeben eine zur  $y$ -Achse parallele Sehne  $GH$  und ein Punkt  $P$  der Parabel (Abb. 19).

Man ziehe  $HS$  und  $PQ \perp GH$ , ferner  $GPR$  und  $QR$ . Ist  $Q_1 P_1 \perp GH$ ,  $Q_1 R_1 \parallel QR$ , so schneidet  $GR_1$  die Linie  $Q_1 P_1$  in dem Parabelpunkte  $P_1$ . —  $QR$  ist die Richtung der Tangente  $GT$  in  $G$ .

Das Lot  $MT$  in der Mitte  $M$  auf  $GH$  ist die  $x$ -Achse und  $A$  der Scheitel, so daß  $MA = AT$ . Durch die Bestimmung der Tangenten  $GT$  und  $HT$  läßt sich das Verfahren auch auf die Konstruktion  $\gamma$ ) zurückführen.

Sind  $H$  und  $P$  und die Lage der  $x$ -Achse  $MT$  gegeben, so falle man  $HM \perp MT$ , verlängere  $HM$  um sich selbst bis  $G$  und konstruiere weiter, wie vorstehend angegeben.

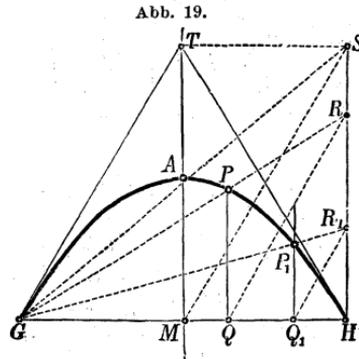


Abb. 19.

### 11. Konstruktion einer Tangente an die Parabel

$\alpha$ ) in einem Punkte  $E$  (Abb. 12 S. 105).

Man mache  $AD = AC$  oder  $DF = FE$ , so ist  $DE$  die Tangente.

Oder: Eine Parallele durch  $E$  mit der  $x$ -Achse schneidet die Leitlinie  $LL_1$  in  $B$ .  $BF$  wird durch die  $y$ -Achse in der Mitte  $M$  geschnitten, so daß  $BM = MF$ .  $EM$  ist die gesuchte Tangente.

$\beta$ ) von einem Punkte  $Q$  außerhalb der Parabel (Abb. 12 S. 105).

Man beschreibe um  $Q$  mit  $QF$  einen Kreis, ziehe durch  $B$  und  $B_1$  Parallele zu  $AX$ , dann sind  $E$  und  $E_1$  Berührungspunkte der Tangenten  $QE$  und  $QE_1$ .

## c. Zyklische Kurven.

### 1. Gemeine Zykloide.

1. Die Zykloide ist die Kurve, die ein Punkt  $A$  einer Kreislinie  $AB$  beschreibt, wenn diese, ohne zu gleiten, sich auf einer Geraden  $AC$  abwälzt (Abb. 20).

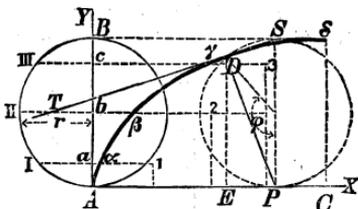
2. **Konstruktion** (Abb. 20): Man mache  $AC = \text{Bogen } AB = \pi r$ , teile beides in  $n$ , gleiche Teile, konstruiere die Schnittpunkte 1, 2, 3 und mache  $1\alpha = aI$ ,  $2\beta = bII$  und  $3\gamma = cIII$ , dann sind  $\alpha, \beta, \gamma$  Punkte der Zykloide. Oder: Kreise, um die Teilpunkte von  $AC$  mit den Sehnen  $AI, AII, AIII$  beschrieben, werden von der Zykloide umhüllt.

3. **Gleichungen** der Zykloide, bezogen auf  $AC$  als  $x$ -Achse und  $AB$  als  $y$ -Achse:

$$x = r(\varphi - \sin \varphi); \quad y = r(1 - \cos \varphi).$$

$$x = r \arccos \frac{r-y}{r} \pm \sqrt{(2r-y)y}.$$

Abb. 20.



4. Die **Normale** im Punkte  $D$  geht durch den Berührungspunkt  $P$  des erzeugenden Kreises und der Grundlinie  $AC$ .  $PD$  Normale,  $SDT$  Tangente.

$$PD = 2r \sin \frac{1}{2} \varphi = \sqrt{2ry}.$$

5. **Krümmungshalbmesser**:

$$\rho = 4r \sin \frac{1}{2} \varphi = 2\sqrt{2ry}.$$

$\rho$  ist also doppelt so lang wie die Normale. Für den Scheitel  $\delta$  ist  $\rho = 4r$ ; für  $A$  ist  $\rho = 0$ .

6. Die **Evolute** der Zykloide ist eine der ursprünglichen Zykloide kongruente Kurve.

$$7. \text{Fläche } AED = r^2 \left( \frac{3}{2} \varphi - 2 \sin \varphi + \frac{1}{4} \sin 2\varphi \right) \\ = \frac{3}{2} r x - \frac{1}{2} y \sqrt{(2r-y)y};$$

$$AC\delta = \frac{3}{2} \pi r^2.$$

$$8. \text{Bogen } AD = 4r(1 - \cos \frac{1}{2} \varphi) = 4r - 2\sqrt{2r(2r-y)}. \\ A\delta = 4r.$$

9. Die **verlängerte** und die **verkürzte Zykloide** entstehen, wenn der erzeugende Punkt außerhalb oder innerhalb des rollenden Kreises im Abstände  $p$  von dessen Mittelpunkte liegt. Die Gleichungen sind

$$x = r\varphi - p \sin \varphi; \quad y = r - p \cos \varphi.$$

## 2. Epizykloide und Hypozykloide.

1. Ein Punkt  $A$  einer Kreislinie vom Halbmesser  $AC = r$ , die sich, ohne zu gleiten, auf einer Kreislinie vom Halbmesser  $AO = R$  abwälzt, beschreibt eine **Epizykloide**, wenn die Berührung der Kreise außen (Abb. 21), eine **Hypozykloide**, wenn die Berührung innen (Abb. 22) stattfindet.  $R$  Halbmesser des Grundkreises,  $r$  der des erzeugenden Kreises.

2. **Konstruktion** (Abb. 21 und 22): Man teile den Halbkreis-Bogen  $AB$  und den Winkel  $AOD = \frac{r}{R} 180^\circ$  in  $n$  gleiche Teile, ziehe die Halbmesser 1, 2, 3, 4 durch  $O$  und die Kreisbögen 5, 6, 7, 8 um  $O$ ;

macht man nun  $a_1 a = \alpha_1 \alpha$ ,  $b_1 b = \beta_1 \beta$  und  $c_1 c = \gamma_1 \gamma$ , so sind  $A, a, b, c, D$  Punkte der Epizykloide (Abb. 21) bzw. der Hypozykloide (Abb. 22). Oder: Kreise, um die Schnittpunkte der Halbmesser 1, 2, 3 und des Grundkreises mit den Sehnen  $A\alpha$ ,  $A\beta$ ,  $A\gamma$  beschrieben, werden von der Kurve umhüllt.

3. **Gleichungen** (die oberen Zeichen gelten für die Epizykloide, die unteren für die Hypozykloide).

$$x = (R \pm r) \cos \left( \frac{r}{R} \varphi \right) \mp r \cos \left( \frac{R \pm r}{R} \varphi \right);$$

$$y = (R \pm r) \sin \left( \frac{r}{R} \varphi \right) - r \sin \left( \frac{R \pm r}{R} \varphi \right).$$

Die Hypozykloide  $R, r$  ist, jenachdem  $r \leq R$ , übereinstimmend mit der Hypozykloide  $R, R-r$  oder der Epizykloide  $R, r-R$ .

Abb. 21.

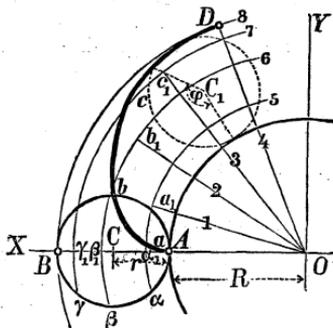
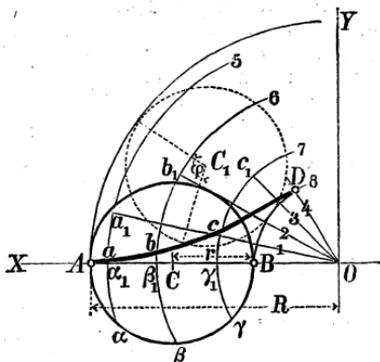


Abb. 22.



4. Die **Normale** für irgend einen Punkt geht durch den Berührungspunkt des erzeugenden Kreises und des Grundkreises für die betreffende Lage.

5. **Krümmungshalbmesser:**  $\varrho = \frac{4r(R \pm r)}{R \pm 2r} \sin \frac{1}{2} \varphi$ .

Für  $A$  ist  $\varrho = 0$ ;

für  $D$  „  $\varrho = 4r \frac{R \pm r}{R \pm 2r}$ .

6. Die **Evolute** ist eine ähnliche Epi- bzw. Hypozykloide.

7. **Fläche** zwischen  $OA$ , der Kurve und einem Leitstrahl:

$$F = \frac{r(R \pm r)(R \pm 2r)}{2R} (\varphi - \sin \varphi).$$

8. **Bogen**  $s = 4r \frac{R \pm r}{R} (1 - \cos \frac{1}{2} \varphi)$ ; Bogen  $AD = 4r \frac{R \pm r}{R}$ .

9. Die Gleichungen der Kurven werden (durch Elimination von  $\varphi$ ) algebraisch, wenn  $R$  und  $r$  ein meßbares Verhältnis haben.

Für  $r = \frac{1}{2}R$  wird die Hypozykloide eine Gerade in der Richtung  $AO$ . Jeder nicht im Umfange des erzeugenden Kreises liegende Punkt beschreibt dann eine Ellipse.

Für  $r = \frac{1}{4}R$  wird die Hypozykloide zur **Astrois** (Sternkurve), ihre Gleichung lautet:

$$x^{2/3} + y^{2/3} = R^{2/3}.$$

Für  $r = R$  wird die Epizykloide zur **Kardioide** (Herzkurve). Die Gleichung der Kardioide lautet, wenn  $A$  (Abb. 21) der Koordinaten-Anfangspunkt und  $AO$  die positive Richtung der  $x$ -Achse ist:

$$(y^2 + x^2 - 2Rx)^2 = 4R^2(x^2 + y^2),$$

oder in den entsprechenden Polarkoordinaten  $\rho$  und  $\psi$ :

$$\rho = 2R(1 + \cos\psi).$$

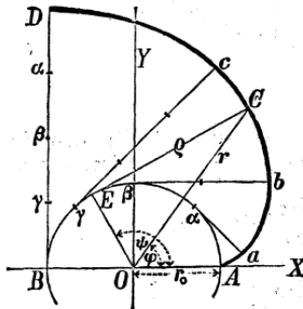
Für  $r = \infty$  wird der rollende Kreis eine gerade Linie, die entsprechende Kurve eine Kreisevolvente.

10. Die verlängerte und die verkürzte Epi- oder Hypozykloide entstehen, wenn der erzeugende Punkt außerhalb bzw. innerhalb des erzeugenden Kreises im Abstände  $p$  von dessen Mittelpunkte liegt. Die Gleichungen sind

$$x = (R \pm r) \cos\left(\frac{r}{R} \varphi\right) \mp p \cos\left(\frac{R \pm r}{R} \varphi\right);$$

$$y = (R \pm r) \sin\left(\frac{r}{R} \varphi\right) - p \sin\left(\frac{R \pm r}{R} \varphi\right).$$

Abb. 23.



### 3. Kreisevolvente.

1. Jeder Punkt einer Geraden, die sich, ohne zu gleiten, auf einem Kreise abwälzt, beschreibt eine Kreisevolvente. (Fadenkonstruktion.)

2. **Konstruktion** (Abb. 23): Man mache  $BD$  gleich dem Kreisbogen  $AB$  und teile beide in  $n$  (hier 4) gleiche Teile:  $\alpha a$  ist Tangente in  $\alpha$  von der Länge  $\alpha D = \frac{1}{4}BD$ ;  $\beta b$  ist Tangente in  $\beta$  von der Länge  $\beta D = \frac{2}{4}BD$ , usw.

#### 3. Gleichungen:

$$x = r_0(\cos\psi + \psi \sin\psi);$$

$$y = r_0(\sin\psi - \psi \cos\psi).$$

$$\text{Polargleichung: } \varphi = \sqrt{\frac{r^2}{r_0^2} - 1} - \arctg \sqrt{\frac{r^2}{r_0^2} - 1}.$$

4. Der **Krümmungshalbmesser**  $\rho$  eines Punktes  $C$  ist die Tangente  $CE$  von  $C$  an den Grundkreis, also gleich der Länge des Kreisbogens  $AE$ .

$$5. \text{ Bogenlänge: } AC = s = \frac{\rho^2}{2r_0} = \frac{r_0 \psi^2}{2}.$$

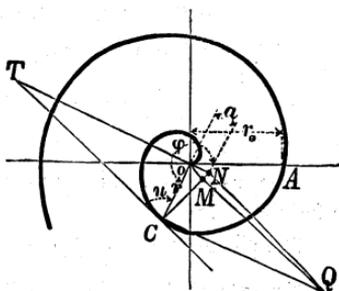
$$6. \text{ Fläche: } ACO = \frac{1}{6}r_0^2 \psi^3.$$

### d. Spiralen.

#### 1. Archimedische Spirale.

1. Die Archimedische Spirale entsteht, wenn sich ein Punkt  $C$  (Abb. 24) mit gleichförmiger Geschwindigkeit auf einem Strahle  $OC$  bewegt, der sich seinerseits gleichförmig um einen festen Punkt, den Pol  $O$ , dreht. Entspricht einer einmaligen Umdrehung von  $OC$  ( $=360^\circ$ ) der Weg  $r_0$  des Punktes  $C$  auf  $OC$ , so ist nach  $\frac{1}{n}$  Umdrehung die Länge des Leitstrahles  $r = \frac{r_0}{n}$ , woraus sich die Konstruktion der Spirale ergibt.

Abb. 24.



2. **Polargleichung:**  $r = a\varphi = \frac{r_0}{2\pi}\varphi$ , wenn  $r$  den Leitstrahl und  $\varphi$  den Polarwinkel, von  $OA$  aus gerechnet, bezeichnet.

Zieht man in einem beliebigen Punkte  $C$  die Tangente  $CT$ , ferner  $OT \perp OC$  und  $CN \perp CT$ , so ist die **Polarsubtangente**  $OT = \frac{r^2}{a}$ ; die **Polarsubnormale**  $ON = a = \text{konst.}$  Hieraus ergibt sich die Konstruktion der Tangente an die Spirale. (Vgl. hiermit die hyperbolische Spirale, u. 2.)

4. **Krümmungshalbmesser**  $\rho = \frac{(a^2 + r^2)^{3/2}}{2a^2 + r^2}$ .

Konstruktion: Errichte auf  $CN$  (Abb. 24) in  $N$  und auf  $OC$  in  $C$  Winkelrechte; beide schneiden sich in  $Q$ ; zieht man  $OQ$ , so schneidet diese die Normale  $CN$  im Krümmungsmittelpunkte  $M$ .

#### 5. Bogenlänge

$$s = \frac{r_0}{4\pi} \left[ \varphi \sqrt{1 + \varphi^2} + \text{Ar Sin } \varphi \right],$$

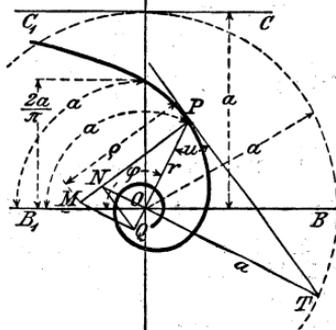
angenähert (für viele Windungen):

$$s = \frac{r_0}{4\pi} \varphi^2.$$

#### 2. Hyperbolische Spirale.

1. Trägt man von einem Durchmesser (Polarachse)  $BB_1$  einer Schar konzentrischer Kreise aus auf alle diese Kreise nach derselben Seite hin Bögen von der Länge  $a$  ab, so ist der geometrische Ort ihrer Endpunkte eine hyperbolische Spirale (Abb. 25).

Abb. 25.



Ihre **Gleichung** ist  $r\varphi = a$ . Da für  $\varphi = \infty$ ,  $r = 0$  wird, so ist der Pol  $O$  ein **asymptotischer Punkt**, um den die Spirale unendlich viele Windungen beschreibt, ohne ihn zu erreichen.

Für  $\varphi = 0$  wird  $r = \infty$ , d. h., die zur Polarachse  $BB_1$  im Abstände  $a$  gezogene Parallele  $CC_1$  ist **Asymptote** der Spirale.

**Polarsubtangente**  $OT = -a = \text{konst.}$ ;

**Polarsubnormale**  $ON = -\frac{r^2}{a}$ .

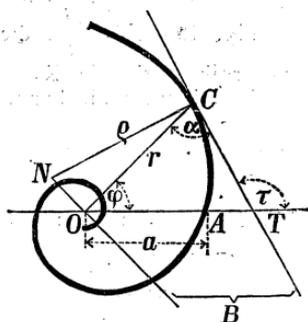
(Vgl. auch S. 111.)

Hieraus ergibt sich die Konstruktion der Tangente an die Spirale.

3. **Krümmungshalbmesser**  $\varrho = \frac{r}{\sin^3 OTP} = \frac{r}{\cos^3 u}$ .

Konstruktion: Errichte auf  $PN$  in  $N$  eine Winkelrechte bis zum Schnitt mit der Verlängerung von  $PO$  in  $Q$ , ferner auf  $PQ$  in  $Q$  eine Winkelrechte; ihr Schnittpunkt  $M$  mit  $PN$  ist der Krümmungsmittelpunkt.

Abb. 26.



### 3. Logarithmische Spirale.

1. **Gleichung:**  $r = ae^{m\varphi}$ . Für  $\varphi = 0$  ist  $r = OA = a$  (Abb. 26). Da ferner für  $\varphi = -\infty$ ,  $r = 0$  wird, so ist der Pol  $O$  ein **asymptotischer Punkt**, dem die Spirale für negative  $\varphi$  sich immer mehr nähert, ohne ihn zu erreichen.

2. Die **Tangente**  $CT$  in einem beliebigen Punkte  $C$  bildet mit dem Leitstrahl  $OC$  den Winkel  $u = \alpha = \text{konst.}$ , so daß  $\text{ctg } \alpha = m$ .

#### 3. Polarsubnormale

$$ON = r \text{ctg } \alpha = rm.$$

$$\text{Polarnormale } CN = r\sqrt{1+m^2} = \frac{r}{\sin \alpha}$$

= **Krümmungshalbmesser**  $\varrho$  in  $C$ .

4. Die **Evolute** der Spirale ist eine der gegebenen kongruente Kurve, gegen diese um den Winkel  $\frac{\pi}{2} - \frac{\ln m}{m}$  gedreht.

5. Die **Fläche**, die der Leitstrahl  $r$  von  $\varphi = -\infty$  (Pol) bis  $+\varphi$ , d. h. bis zum Punkte  $C$  der Kurve beschreibt, ist gleich dem halben, vom Leitstrahle, der Tangente und der Polarsubtangente gebildeten Dreiecke  $OBC$ .  
 $F = r^2 : 4m$ .

6. Die **Bogenlänge** von  $C$  bis zum Pol ist  $s = \frac{r}{\cos \alpha} = CB$ , gleich der Länge der Tangente  $CT$  bis zum Schnitte mit  $NO$ .

### e. Gemeine Kettenlinie.

Die gemeine Kettenlinie ist die Gleichgewichtslinie eines an zwei Punkten aufgehängten, vollkommen biegsam gedachten Fadens, dessen Belastung überall proportional seiner Länge ist. Der Parameter ist  $h$ .

1. Gleichung:  $y = \frac{h}{2} \left( e^{\frac{x}{h}} + e^{-\frac{x}{h}} \right) = h \operatorname{Cof} \frac{x}{h};$

$$x = h \ln \left( \frac{y}{h} \pm \sqrt{\left(\frac{y}{h}\right)^2 - 1} \right) = h \operatorname{Ar} \operatorname{Cof} \frac{y}{h}.$$

Der Anfangspunkt der Koordinaten liegt um  $h = MO$  tiefer als der tiefste Punkt  $M$  der Kettenlinie  $KK'$  (Abb. 27).

2. Der Winkel  $\tau$  der Tangente  $UP$  in einem beliebigen Punkte  $P$  mit der (wagerechten)  $x$ -Achse bestimmt sich aus

$$\operatorname{tg} \tau = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \left( e^{\frac{x}{h}} - e^{-\frac{x}{h}} \right) = \operatorname{Sin} \frac{x}{h} = \sqrt{\left(\frac{y}{h}\right)^2 - 1}; \quad \cos \tau = \frac{h}{y}.$$

Führt man  $\tau$  als die unabhängige Veränderliche ein, so erhält man die folgenden beiden Gleichungen der Kettenlinie:

$$x = h \ln \frac{1 + \sin \tau}{\cos \tau} = h \ln \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\tau}{2} \right) \\ = h \operatorname{Ar} \operatorname{Sin} (\operatorname{tg} \tau); \quad y = \frac{h}{\cos \tau}.$$

3. Der **Krümmungshalbmesser** im Punkte  $P$  ist gleich und entgegengerichtet der Normale im Punkte  $P$ , gemessen von  $P$  bis zur  $x$ -Achse;  $\rho = \frac{y^2}{h} = \frac{h}{\cos^2 \tau}$ .

4. Die **Fläche  $OMPT$**  hat den Inhalt

$$F = \frac{1}{2} h^2 \left( e^{\frac{x}{h}} - e^{-\frac{x}{h}} \right) = h^2 \operatorname{Sin} \frac{x}{h} = h^2 \operatorname{tg} \tau = h \sqrt{y^2 - h^2}.$$

5. **Bogenlänge  $MP =$**

$$s = \frac{h}{2} \left( e^{\frac{x}{h}} - e^{-\frac{x}{h}} \right) = h \operatorname{Sin} \frac{x}{h} = h \operatorname{tg} \tau = \sqrt{y^2 - h^2} = PU = OD$$

wenn  $TU$  und  $MD \perp PU$  sind.

$$x = h \ln \left[ \frac{s}{h} + \sqrt{1 + \left(\frac{s}{h}\right)^2} \right] = h \operatorname{Ar} \operatorname{Sin} \frac{s}{h}.$$

Die Tafeln der Hyperbelfunktionen  $\operatorname{Cof} x$  und  $\operatorname{Sin} x$  (s. S. 30 u. 31) geben ohne weiteres die Werte der Ordinaten bzw. Bogenlängen der Kettenlinie für den Parameter  $h = 1$ .

6. **Evolvente. (Huygenssche Traktorrie oder Antifriktionskurve.)** Ist im Scheitel  $M$  der Beginn der Abwicklung, so ist die Gleichung der Evolvente (s. Abb. 27):

$$\left(\frac{x}{h}\right)^2 = \left[ \sqrt{1 - \frac{y^2}{h^2}} - \operatorname{Ar} \operatorname{Cof} \left( \pm \frac{h}{y} \right) \right]^2,$$

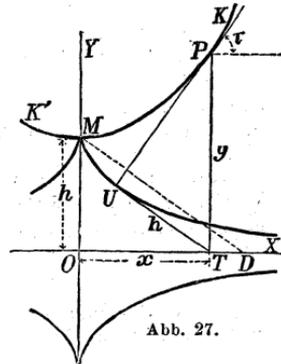


Abb. 27.

je nachdem  $y$  (Ordinate der Evolvente) positiv oder negativ ist; oder auch:  $x = h (\mathfrak{E}g \varphi - \varphi)$ ;  $y = \pm \frac{h}{\mathfrak{C}v\varphi}$ , wobei  $\varphi$  eine unabhängige Veränderliche bezeichnet. (Ueber  $\mathfrak{A}r \mathfrak{C}v\varphi$  vrgl. S. 66.)

Hierin ist  $h$  die unveränderliche Länge  $UT = MO$  der Tangente von der Kurve bis zur  $x$ -Achse. Die Traktorie hat also die Eigenschaft, daß die Länge der Tangente von der Kurve bis zur  $x$ -Achse unveränderlich ist. Die  $x$ -Achse ist die Asymptote der vier Kurvenzweige. Die Evolute der Traktorie (vrgl. S. 95) ist die Kettenlinie  $KMK$ .  $P$  ist der Krümmungsmittelpunkt;  $\rho = PU$  (s. o.).

Bogen  $MU = h \ln(y : h)$ .

7. Bezeichnet  $2L$  die Länge einer Kette,  $2l$  die wagerechte Entfernung,  $2b$  die lotrechte Entfernung ihrer Aufhängepunkte, so findet man den Parameter  $h$ , den Anfangspunkt der Koordinaten und damit den tiefsten Punkt der Kettenlinie, wie folgt: Durch Versuche bestimmt man mit Hilfe der Tafel für  $\lg \mathfrak{S}itt \varphi$  (s. S. 32) die Größe  $\varphi$  aus

$$\frac{\mathfrak{S}itt \varphi}{\varphi} = \frac{\sqrt{L^2 - b^2}}{l}, \text{ bzw. aus}$$

$$\lg \mathfrak{S}itt \varphi - \lg \varphi = \frac{1}{2} \lg(L + b) + \frac{1}{2} \lg(L - b) - \lg l.$$

Dann ist  $h = l : \varphi$ . Berechnet man noch die Größe  $\psi$  aus  $\mathfrak{E}g \psi = b : L$  (s. Tafel S. 34), so liegt der Anfangspunkt der Koordinaten in einer Tiefe  $= L \mathfrak{C}tg \varphi$  unter dem Mittelpunkte derjenigen Strecke, welche die Aufhängepunkte der Kette verbindet, und in einem wagerechten Abstände  $= \psi h$  von jenem Mittelpunkte, u. zw. nach dem tiefer gelegenen Aufhängepunkte zu.

8. Liegen die Aufhängepunkte der Kette gleich hoch, so ist

$$b = 0, \quad \frac{\mathfrak{S}itt \varphi}{\varphi} = \frac{L}{l}, \quad h = \frac{l}{\varphi}.$$

Die Tiefe des Anfangspunktes der Koordinaten unter der Linie der Aufhängepunkte ist  $y_0 = L \mathfrak{C}tg \varphi$ .

Der Aufhängewinkel  $\alpha$  ergibt sich aus  $\cos \alpha = \frac{h}{y_0} = \frac{l \mathfrak{E}g \varphi}{L \varphi}$ .

### f. Gleichungen einiger anderer Kurven.

Kurve	Rechtwinklige Koordinaten	Polarkoordinaten
1. Zissoide.	$y^2 (a - x) = x^3$	$r = \frac{a \sin^2 \varphi}{\cos \varphi}$
2. Lemniskate.	$(x^2 + y^2)^2 = a^2 (x^2 - y^2)$	$r = a \sqrt{\cos 2 \varphi}$
3. Konchoide.	$(x^2 + y^2) (x - b)^2 = a^2 x^2$	$r = \frac{b}{\cos \varphi} \pm a$
4. Descartessches Blatt.	$x^3 + y^3 = 3 a x y$	$r = \frac{3 a \sin \varphi \cos \varphi}{\sin^3 \varphi + \cos^3 \varphi}$
5. Vierblatt.	$(x^2 + y^2)^3 = 4 a^2 x^2 y^2$	$r = a \sin 2 \varphi$

1. **Zissoide** (Efeublattkurve, Abb. 28). Gegeben ein Kreis vom Durchmesser  $a$ ; im Endpunkte  $A$  eines festen Durchmessers  $OA$ , der  $x$ -Achse, die Tangente  $AB$ . Vom anderen Endpunkte  $O$ , dem Koordinaten-Anfangspunkte, werden beliebige Sekanten  $OB$  bis zum Schnitte mit  $AB$  gezogen. Macht man nun  $BD = OC$  oder  $OD = BC$ , so bestimmen die Punkte  $D$  die Zissoide.

Abb. 28.

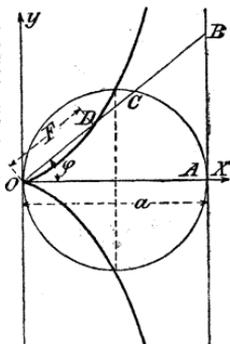


Abb. 29.

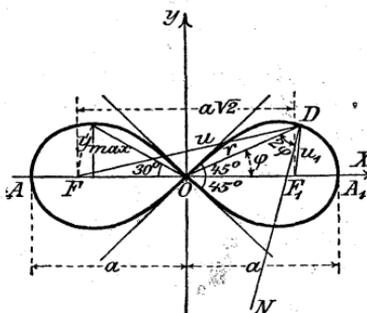
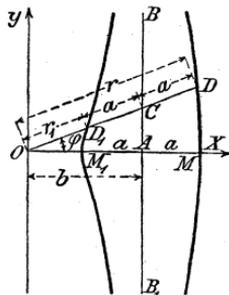


Abb. 30.



2. **Lemniskate** (Schleifenkurve, Abb. 29) ist der geometrische Ort aller Punkte  $D$ , für die das Produkt ihrer Abstände  $u$  und  $u_1$  von zwei festen Punkten  $F$  und  $F_1$  unveränderlich, u. zw.  $= \frac{1}{2}a^2$  ist. Der Abstand  $FF_1 = a\sqrt{2}$ .

Die in der Mitte  $O$  der Strecke  $FF_1$  (im Koordinaten-Anfangspunkte) sich schneidenden Kurvenäste stehen winkelrecht aufeinander.

Die Halbachse der Kurve ist  $a$ . Der Winkel zwischen Leitstrahl  $OD = r$  und Normale  $DN$  ist  $2\varphi$ . Für  $y_{\max}$  ist  $\varphi = 30^\circ$  und  $r = a\sqrt{1/2}$ . Die ganze Fläche der Lemniskate ist  $F = a^2$ .

3. **Konchoide** (Muschelkurve, Abb. 30) ist der geometrische Ort der Endpunkte  $DD_1$ , der von einem Pole  $O$  nach einer Geraden  $BA B_1$  gezogenen Strahlen  $OD_1 CD$ , auf denen man, von ihren Schnittpunkten  $C$  mit  $BA B_1$  aus, die unveränderliche Länge  $\pm a$  abträgt. Die Entfernung der Geraden  $BA B_1$  vom Pol  $O$  ist gleich  $b$ .

### C. Punkt, gerade Linie und Ebene im Raume.

Die folgenden Entwicklungen beziehen sich auf drei zueinander rechtwinklige Raumkoordinaten.

1. Sind  $x_1, y_1, z_1$  und  $x_2, y_2, z_2$  die Koordinaten zweier Punkte, deren Entfernung voneinander  $l$  ist; sind ferner  $\alpha, \beta, \gamma$  die Winkel, die  $l$  mit den positiven Richtungen der Koordinatenachsen bildet, so ist

$$l = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

$$\cos \alpha = \frac{x_2 - x_1}{l} \quad \cos \beta = \frac{y_2 - y_1}{l} \quad \cos \gamma = \frac{z_2 - z_1}{l}$$

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

2. Teilt man die vom Punkte  $(x_1, y_1, z_1)$  nach dem Punkte  $(x_2, y_2, z_2)$  gerichtete Strecke  $l$  im Verhältnis  $m : n$  und nennt die Koordinaten des Teilpunktes  $x, y, z$ , so ist

$$x = \frac{mx_2 + nx_1}{m + n} \quad y = \frac{my_2 + ny_1}{m + n} \quad z = \frac{mz_2 + nz_1}{m + n}.$$

3. Der **Winkel**  $\varphi$ , den zwei durch die Winkel  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$  und  $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$  gegebene Richtungen miteinander einschließen, ist bestimmt durch

$$\cos \varphi = \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + \cos \beta_1 \cos \beta_2 + \cos \gamma_1 \cos \gamma_2.$$

Stehen beide Richtungen winkelmäßig aufeinander ( $\varphi = 90^\circ$ ), so ist

$$\cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + \cos \beta_1 \cos \beta_2 + \cos \gamma_1 \cos \gamma_2 = 0.$$

4. Nennt man  $\lambda, \mu, \nu$  die Winkel, welche die Normale zu den beiden unter 3. angegebenen Richtungen, also zur Ebene des Winkels  $\varphi$ , mit den positiven Richtungen der Koordinatenachsen bildet, so ist

$$\cos \lambda = \frac{\cos \beta_1 \cos \gamma_2 - \cos \beta_2 \cos \gamma_1}{\sin \varphi}; \quad \cos \mu = \frac{\cos \gamma_1 \cos \alpha_2 - \cos \gamma_2 \cos \alpha_1}{\sin \varphi}$$

$$\cos \nu = \frac{\cos \alpha_1 \cos \beta_2 - \cos \alpha_2 \cos \beta_1}{\sin \varphi}.$$

Legt man eine Gerade von der Richtung  $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$  durch den Punkt  $(x_1, y_1, z_1)$  und eine zweite von der Richtung  $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$  durch den Punkt  $(x_2, y_2, z_2)$ , so ist der kürzeste Abstand der Geraden voneinander gleich dem absoluten Werte von

$$p = (x_2 - x_1) \cos \lambda + (y_2 - y_1) \cos \mu + (z_2 - z_1) \cos \nu.$$

5. Eine **gerade Linie** im Raum ist durch die beiden Gleichungen bestimmt

$$y = m_1 x + b_1 \quad z = m_2 x + b_2.$$

Geht eine Gerade durch einen Punkt  $(x_1, y_1, z_1)$  und bildet sie mit den Achsen die Winkel  $\alpha, \beta, \gamma$ , so sind ihre Gleichungen

$$\frac{x - x_1}{\cos \alpha} = \frac{y - y_1}{\cos \beta} = \frac{z - z_1}{\cos \gamma}.$$

In den vorstehenden Gleichungen ist sonach

$$m_1 = \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} \quad m_2 = \frac{\cos \gamma}{\cos \alpha}.$$

Die Gleichungen der durch die Punkte  $(x_1, y_1, z_1)$  und  $(x_2, y_2, z_2)$  gehenden geraden Linie sind

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

6. Bedingung dafür, daß sich zwei gerade Linien schneiden, ist, daß die Determinante der auf die Form  $m x + n y + p z + q = 0$  gebrachten vier Gleichungen der beiden Geraden identisch verschwindet.

### 7. Gleichungen der Ebene.

$\alpha$ . Im allgemeinen ist eine Ebene durch die Gleichung ersten Grades bestimmt  $Ax + By + Cz + D = 0$ .

Alle Punkte also, deren Koordinaten einer Gleichung ersten Grades zwischen drei Veränderlichen genügen, liegen in einer Ebene.

$B y + C z + D = 0$ : Gleichung einer Ebene parallel zur  $x$ -Achse

$A x + C z + D = 0$ : " " " " "  $y$  "

$A x + B y + D = 0$ : " " " " "  $z$  "

$A x + B y + C z = 0$ : " " " die durch den Anfangspunkt der Koordinaten geht.

$\beta$ . Schneidet eine Ebene die Achsen in den Entfernungen  $a, b, c$  vom Anfangspunkte, so ist ihre Gleichung

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

$x = a$ : Gleichung einer Ebene parallel zur  $yz$ -Ebene.

$y = b$ : „ „ „ „ „ „  $xz$ - „

$z = c$ : „ „ „ „ „ „ „  $xy$ - „

$\gamma$ . Bildet eine vom Anfangspunkte der Koordinaten ausgehende Strecke  $l$  mit den Achsen die Winkel  $\alpha, \beta, \gamma$ , so ist die Gleichung einer Ebene, die im Endpunkte von  $l$  winkelrecht auf  $l$  steht:

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - l = 0. \quad (\text{Normalform.})$$

$\delta$ . Um die allgemeine Gleichung der Ebene

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

in die Normalform zu bringen, setze man

$$\cos \alpha = \frac{A}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$$\cos \beta = \frac{B}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$$\cos \gamma = \frac{C}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$$l = \frac{-D}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Das Vorzeichen der Wurzel ist überall so zu wählen, daß  $l$  positiv wird.

8. Der **Abstand**  $p$  eines Punktes  $(x_1, y_1, z_1)$  von einer Ebene, deren Gleichung die Normalform (s. o.) hat, ist

$$p = \pm (x_1 \cos \alpha + y_1 \cos \beta + z_1 \cos \gamma - l);$$

$p$  wird positiv, wenn der Punkt  $(x_1, y_1, z_1)$  und der Koordinatenanfangspunkt auf derselben Seite der Ebene liegen, negativ, wenn sie auf verschiedenen Seiten liegen.

9. Ist  $Ax + By + Cz + D = 0$  die Gleichung einer Ebene, so ist die auf ihr in einem Punkte  $(x_1, y_1, z_1)$  errichtete **Winkelrechte** bestimmt durch

$$z - z_1 = \frac{C}{A} (x - x_1); \quad z - z_1 = \frac{C}{B} (y - y_1).$$

10. Gehen zwei Richtungen  $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$  und  $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$  durch denselben Punkt  $(x_1, y_1, z_1)$ , so ist die Gleichung der Ebene, die durch die Richtungen und den Punkt bestimmt ist,

$$(x - x_1) (\cos \beta_1 \cos \gamma_2 - \cos \beta_2 \cos \gamma_1) + (y - y_1) (\cos \gamma_1 \cos \alpha_2 - \cos \gamma_2 \cos \alpha_1) + (z - z_1) (\cos \alpha_1 \cos \beta_2 - \cos \alpha_2 \cos \beta_1) = 0.$$

11. Sind  $A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0$  und

$$A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0$$

die Gleichungen zweier Ebenen, so ist, wenn  $k$  eine beliebige Zahl,

$$(A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1) + k (A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2) = 0$$

die Gleichung aller Ebenen, die durch die Schnittlinie beider Ebenen gehen. Die Gleichung der Projektion dieser Schnittlinie auf die  $xy$ -Ebene erhält man durch Elimination von  $z$  aus den Gleichungen beider Ebenen; entsprechend die Gleichungen der Projektionen auf die  $xz$ - bzw.  $yz$ -Ebene.

12. Der **Winkel**  $\varphi$ , den zwei Ebenen (der zuerst genannten Gleichungen unter 11) miteinander bilden, ergibt sich aus

$$\cos \varphi = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2}{\pm \sqrt{(A_1^2 + B_1^2 + C_1^2)(A_2^2 + B_2^2 + C_2^2)}}.$$

Die Ebenen sind parallel ( $\varphi=0$ ), wenn  $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$ .

Die Gleichungen zweier parallelen Ebenen sind

$$A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0 \text{ und} \\ k(A_1 x + B_1 y + C_1 z) + D_2 = 0.$$

Die Ebenen stehen winkelrecht zueinander ( $\varphi = 90^\circ$ ), wenn

$$A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0.$$

13. Die Winkel zweier Ebenen (der zuerst genannten Gleichungen unter 11.) werden halbiert durch die Ebenen

$$\frac{A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}} \pm \frac{A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} = 0.$$

#### 14. **Umwandlung der Koordinaten.**

Die Koordinaten in Beziehung auf das alte System werden mit  $x, y, z$ , auf das neue mit  $x', y', z'$  bezeichnet.

$\alpha$ ) Parallele Verschiebung der Achsen. Sind  $f, g, h$  die Koordinaten des neuen Anfangspunktes, so ist

$$x = f + x'; \quad y = g + y'; \quad z = h + z'.$$

$\beta$ ) Drehung der Achsen um den Anfangspunkt. Die Cosinus der Winkel, welche die neuen Achsen  $x', y', z'$  mit der alten Achse  $x$  bilden, seien:

entsprechend mit der alten Achse  $y$ :  $a'', b'', c''$ ,  
entsprechend mit der alten Achse  $z$ :  $a''', b''', c'''$ ; dann ist

$$\begin{array}{l|l} x = a'x' + b'y' + c'z' & x' = a'x + a''y + a'''z \\ y = a''x' + b''y' + c''z' & y' = b'x + b''y + b'''z \\ z = a'''x' + b'''y' + c'''z' & z' = c'x + c''y + c'''z. \end{array}$$

Es gelten folgende Beziehungen:

$$\begin{array}{l|l} 1) \quad \begin{array}{l} a'^2 + a''^2 + a'''^2 = 1 \\ b'^2 + b''^2 + b'''^2 = 1 \\ c'^2 + c''^2 + c'''^2 = 1. \end{array} & 2) \quad \begin{array}{l} a'b' + a''b'' + a'''b''' = 0 \\ b'c' + b''c'' + b'''c''' = 0 \\ c'a' + c''a'' + c'''a''' = 0. \end{array} \\ 3) \quad \begin{array}{l} a'^2 + b'^2 + c'^2 = 1 \\ a''^2 + b''^2 + c''^2 = 1 \\ a'''^2 + b'''^2 + c'''^2 = 1. \end{array} & 4) \quad \begin{array}{l} a'a'' + b'b'' + c'c'' = 0 \\ a'a''' + b'b''' + c'c''' = 0 \\ a''a''' + b''b''' + c''c''' = 0. \end{array} \\ 5) \quad \begin{array}{l} a' = b''c''' - c''b''' \\ b' = c''a''' - a''c''' \\ c' = a''b''' - b''a''' \end{array} & 6) \quad \begin{array}{l} a'' = c'b''' - b'c''' \\ b'' = a'c''' - c'a''' \\ c'' = b'a''' - a'b''' \end{array} \quad 7) \quad \begin{array}{l} a''' = b'c'' - c'b'' \\ b''' = c'a'' - a'c'' \\ c''' = a'b'' - b'a'' \end{array} \end{array}$$

$\gamma$ ) Bei gleichzeitiger Verschiebung und Drehung verbinde man die Formeln unter  $\alpha$ ) und  $\beta$ ) entsprechend.

$\delta$ ) Um die rechtwinkligen Koordinaten  $x, y, z$  eines Punktes in **Polarkoordinaten**  $r, \varphi, \vartheta$  zu verwandeln, suche man zunächst die Koordinaten  $x', y', z'$  des Punktes, bezogen auf ein rechtwinkliges System, dessen Anfangspunkt der Pol, dessen  $x'y'$ -Ebene die Aequator-

ebene und dessen  $x'$ -Achse die Polarachse ist, von der aus  $\varphi$  gezählt wird; dann ist

$$x' = r \cos \varphi \cos \vartheta; \quad y' = r \sin \varphi \cos \vartheta; \quad z' = r \sin \vartheta.$$

Für die Punkte in der  $x'y'$ -Ebene ist  $\vartheta = 0$ .

## D. Kurven doppelter Krümmung.

### a. Allgemeine Sätze.

1. Eine Kurve doppelter Krümmung bezogen auf Parallelkoordinaten wird dargestellt durch zwei **Gleichungen**:

$$F_1(x, y, z) = 0; \quad F_2(x, y, z) = 0.$$

Sie ist die Schnittkurve der beiden Flächen, die diese Gleichungen, einzeln genommen, darstellen.

Die Kurve ist auch bestimmt durch die Gleichungen ihrer Projektionen auf die  $xy$ - und die  $xz$ -Ebene:

$$y = \varphi_1(x); \quad z = \varphi_2(x).$$

2. Die Winkel  $\alpha, \beta, \gamma$ , welche die **Tangente** im Punkte  $(x, y, z)$  mit den Koordinatenachsen bildet, erhält man aus

$$\cos \alpha = \frac{dx}{ds}; \quad \cos \beta = \frac{dy}{ds}; \quad \cos \gamma = \frac{dz}{ds};$$

das **Bogendifferential** erhält man aus

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}.$$

3. Die **Gleichungen der Tangente** im Punkte  $(x, y, z)$  sind

$$\frac{\xi - x}{dx} = \frac{\eta - y}{dy} = \frac{\zeta - z}{dz}.$$

4. Die **Gleichung der Normalebene** ist

$$(\xi - x) dx + (\eta - y) dy + (\zeta - z) dz = 0.$$

5. Eine Ebene, die durch den Punkt  $(x, y, z)$  und die beiden benachbarten Punkte der Kurve geht, nennt man die **Schmiegungebene** oder **Krümmungsebene** in dem Punkte  $(x, y, z)$ . Setzt man

$$A = dy d^2z - dz d^2y, \quad B = dz d^2x - dx d^2z, \\ C = dx d^2y - dy d^2x,$$

so ist die Gleichung der Krümmungsebene

$$A(\xi - x) + B(\eta - y) + C(\zeta - z) = 0.$$

Die Winkel  $\lambda, \mu, \nu$ , welche die Normale zur Krümmungsebene, d. i. die sogen. Binormale, mit den Koordinatenachsen bildet,

folgen aus  $\cos \lambda = \frac{A}{D}, \quad \cos \mu = \frac{B}{D}, \quad \cos \nu = \frac{C}{D},$

wenn gesetzt wird

$$D = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} = ds \sqrt{(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2 - (d^2s)^2} \\ = ds^2 \sqrt{\left(d \frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(d \frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(d \frac{dz}{ds}\right)^2}.$$

6. Bezeichnet man den Winkel zweier benachbarten Tangenten mit  $d\tau$ , so ist

$$d\tau = \frac{D}{ds^2},$$

und der Halbmesser für die Krümmung in der Krümmungsebene oder der **ersten Krümmung** der Kurve ist

$$\rho_1 = \frac{ds}{d\tau} = \frac{ds^3}{D}.$$

Die Koordinaten des zugehörigen Krümmungsmittelpunktes sind

$$x' = x + \rho_1^2 \frac{d^2x}{ds^2}, \quad y' = y + \rho_1^2 \frac{d^2y}{ds^2}, \quad z' = z + \rho_1^2 \frac{d^2z}{ds^2}.$$

7. Zwei benachbarte Krümmungsebenen bilden miteinander einen Winkel

$$\begin{aligned} d\vartheta &= \sqrt{(d \cos \lambda)^2 + (d \cos \mu)^2 + (d \cos \nu)^2} \\ &= \frac{A d^3 x + B d^3 y + C d^3 z}{D^2} ds. \end{aligned}$$

Man nennt  $\rho_2 = \frac{ds}{d\vartheta}$  den Halbmesser der **zweiten Krümmung** oder der Drehung der Kurve.

Die Kurve ist eine ebene Kurve, wenn für alle Punkte  $d\vartheta = 0$

oder 
$$A d^3 x + B d^3 y + C d^3 z = \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ d^2 x & d^2 y & d^2 z \\ d^3 x & d^3 y & d^3 z \end{vmatrix} = 0 \text{ ist.}$$

## b. Zylindrische Schraubenlinie.

1. Eine zylindrische Schraubenlinie wird durch einen Punkt erzeugt, der gleichförmig eine Kreislinie durchläuft, während sich diese in einer Richtung, die auf ihrer Ebene winkelrecht steht, gleichförmig fortbewegt, also den Mantel eines geraden Kreiszyinders beschreibt.

Der Halbmesser dieses Zylinders sei  $r$ , die Steigung der Schraube, d. h. der Weg, den der Kreis auf dem Zylindermantel zurücklegt, während der Punkt die Kreislinie einmal durchläuft,  $bb' = h$  (Abb. 31), die Tangente des Steigungswinkles  $\alpha$ :

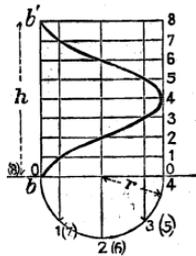
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{2\pi r} = a.$$

Die Achse des Zylinders sei die  $z$ -Achse; die  $x$ -Achse schneide die Schraubenlinie im Punkte  $b$ . Der Winkel, den die Projektion des Leitstrahles auf die  $xy$ -Ebene mit der  $x$ -Achse bildet, sei  $\varphi$ ; alsdann sind die **Gleichungen der Schraubenlinie**:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = ar \varphi,$$

oder 
$$x = r \cos \frac{z}{ar}, \quad y = r \sin \frac{z}{ar}.$$

Abb. 31.



2. Die **Gleichungen der Tangente** sind

$$\frac{\xi - x}{\sin \varphi} = \frac{\eta - y}{\cos \varphi} = \frac{\zeta - z}{a}.$$

Die Tangente bildet mit der  $z$ -Achse und den Seiten des Zylinders den unveränderlichen Winkel  $\gamma = 90^\circ - \alpha$ . Wickelt man daher den Mantel des Zylinders und mit ihm die Schraubenlinie in eine Ebene ab, so wird die Kurve eine gerade Linie.

3. Die **Krümmungshalbmesser** sind

$$\rho_1 = r(1 + a^2) = \frac{r}{\cos^2 \alpha} \left( \frac{1}{\rho_1} = \text{erste Krümmung} \right),$$

$$\rho_2 = r \frac{1 + a^2}{a} = \frac{r}{\sin \alpha \cos \alpha} \left( \frac{1}{\rho_2} = \text{zweite Krümmung} \right).$$

Es sind also  $\rho_1$  und  $\rho_2$  unveränderlich, außerdem ist  $\rho_1$  stets winkelrecht zur  $z$ -Achse.

4. **Bogenlänge**  $s = \frac{r}{\cos \alpha} \varphi = r \varphi \sqrt{1 + a^2}$ .

5. **Konstruktion der Projektion der Schraubenlinie** auf die  $xz$ -Ebene (Abb. 31). Man teile die Steigung  $h = \delta\delta'$  in  $n$  (hier 8) gleiche Teile, ebenso von  $b$  aus den als Kreis sich darstellenden Normalschnitt des Zylinders in  $n$  gleiche Teile. Durch die ersteren Teilpunkte lege man wagerechte, durch die letzteren lotrechte Linien; der Schnittpunkt einer Wagerechten mit der entsprechenden Lotrechten ist ein Punkt der Projektion der Schraubenlinie.

## E. Krumme Flächen.

### a. Allgemeine Sätze.

1. Die **Gleichung einer krummen Fläche** in rechtwinkligen Koordinaten hat die allgemeine Form  $F(x, y, z) = 0$ .

Durch Auflösung nach  $z$  wird die Gleichung  $z = f(x, y)$ .

Es werde bezeichnet

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p \quad \frac{\partial z}{\partial y} = q \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = r \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = s \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = t.$$

2. Gleichung der **Tangentialebene** im Punkte  $(x, y, z)$  der Fläche:

$$(\xi - x) \frac{\partial F}{\partial x} + (\eta - y) \frac{\partial F}{\partial y} + (\zeta - z) \frac{\partial F}{\partial z} = 0.$$

wenn  $\xi, \eta, \zeta$  die laufenden Koordinaten bezeichnen.

3. Gleichungen der **Normale**:

$$\frac{\xi - x}{\frac{\partial F}{\partial x}} = \frac{\eta - y}{\frac{\partial F}{\partial y}} = \frac{\zeta - z}{\frac{\partial F}{\partial z}}.$$

Die Winkel  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , welche die Normale mit den Koordinatenachsen bildet, erhält man aus

$$\cos \alpha = \frac{1}{W} \frac{\partial F}{\partial x}, \quad \cos \beta = \frac{1}{W} \frac{\partial F}{\partial y}, \quad \cos \gamma = \frac{1}{W} \frac{\partial F}{\partial z},$$

worin 
$$W = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}.$$

4. Das **Element der krummen Fläche**, dessen Projektion auf die  $xy$ -Ebene  $= dx dy$ , ist

$$dM = \frac{dx dy W}{\frac{\partial F}{\partial z}}.$$

Die doppelte Integration dieses Ausdrucks (nach beliebigen oder voneinander abhängigen Grenzen) ergibt den Inhalt eines bestimmten Bereiches der krummen Fläche.

5. Jede durch die Normale gehende Ebene bildet mit der Fläche eine Durchschnittlinie, die man **Normalschnitt** nennt. Bildet die Tangente an diesen mit den Koordinatenachsen die Winkel  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\nu$ , so ist der Krümmungshalbmesser des Normalschnittes

$$\rho = \frac{\sqrt{1+p^2+q^2}}{r \cos^2 \lambda + 2s \cos \lambda \cos \mu + t \cos^2 \mu}.$$

6. **Satz von Meunier.** Eine Ebene, die durch die Tangente des Normalschnittes hindurchgeht und mit dessen Ebene einen Winkel  $\vartheta$  bildet, schneidet die Fläche in einem schiefen Schnitte; sein Krümmungshalbmesser in dem betreffenden Punkte ist

$$\rho' = \rho \cos \vartheta.$$

7. Die aufeinander winkelrechten Normalschnitte, für welche  $\rho$  ein Maximum  $\rho_1$  oder ein Minimum  $\rho_2$  wird, nennt man **Hauptnormalschnitte**. Die Werte von  $\rho_1$  und  $\rho_2$  erhält man aus den Gleichungen

$$\frac{1}{\rho_1 \rho_2} = \frac{rt - s^2}{(1+p^2+q^2)^2},$$

$$\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} = \frac{(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t}{(1+p^2+q^2)^{3/2}}.$$

8. **Satz von Euler.** Für einen beliebigen Normalschnitt, dessen Ebene mit der Ebene von  $\rho_1$  den Winkel  $\varphi$  bildet, ist

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\cos^2 \varphi}{\rho_1} + \frac{\sin^2 \varphi}{\rho_2}.$$

9. Den Ausdruck  $\frac{1}{\rho_1 \rho_2}$  nennt man das **Maß der Krümmung** und

den Ausdruck  $\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}$  die **mittlere Krümmung** der Fläche im Punkte  $(x, y, z)$ .

### b. Flächen zweiter Ordnung.

1. Die **allgemeine Form der Gleichung** der Flächen zweiter Ordnung ist

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx + 2a_1x + 2a_2y + 2a_3z + a = 0.$$

2. Setzt man zur Abkürzung

$$\begin{vmatrix} a & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_2 & a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_3 & a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = \Gamma; \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = \Delta; \quad \begin{vmatrix} a_{22} & a_{32} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = \delta_1; \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{31} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} = \delta_2$$

(wobei  $a_{ik} = a_{ki}$ ), so ergeben sich folgende Bedingungen für die **Hauptflächen**, welche die allgemeine Gleichung darstellt, wenn  $a_{11} > 0$  ist:

$$\begin{array}{l} \Delta > 0, \quad \delta_1 > 0, \quad \Gamma < 0 \text{ Ellipsoid.} \\ \Delta < 0, \quad \delta_1 < 0, \quad \left\{ \begin{array}{l} \Gamma < 0 \text{ einschaliges Hyperboloid.} \\ \Gamma = 0 \text{ Kegel.} \\ \Gamma > 0 \text{ zweischaliges Hyperboloid.} \end{array} \right. \\ \text{oder } \Delta > 0, \quad \delta_1 < 0, \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta_2 < 0 \text{ hyperbolisches Paraboloid.} \\ \delta_2 > 0 \text{ elliptisches Paraboloid.} \end{array} \right. \\ \Delta = 0 \left\{ \begin{array}{l} \delta_1 < 0 \text{ oder} \\ \delta_1 > 0 \text{ oder} \end{array} \right. \end{array}$$

3. **Mittelpunktflächen** ( $\Delta \geq 0$ ). Der Mittelpunkt ergibt sich als Durchschnitt der Ebenen

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_1 &= 0. \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_2 &= 0. \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_3 &= 0. \end{aligned}$$

4. Es ist die Gleichung, bezogen auf den Mittelpunkt als Anfang eines rechtwinkligen Koordinatensystems, dessen Achsen in die Hauptachsen der Flächen fallen,

$$\begin{aligned} \text{für das Ellipsoid:} & \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1; \\ \text{für das einschalige Hyperboloid:} & \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1; \\ \text{für das zweischalige Hyperboloid:} & \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1. \end{aligned}$$

Hierin bedeuten  $a, b, c$  die Halbachsen der Hauptschnitte; sie sind im ersten Falle sämtlich reell. Im zweiten Falle bedeutet  $c$  und im dritten Falle bedeuten  $b$  und  $c$  die imaginären Halbachsen der Hauptschnitthyperbeln.

5. **Kegel.** Jede homogene Gleichung zweiten Grades mit drei Veränderlichen

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz = 0$$

stellt einen Kegel dar.

Ist die Leitkurve des Kegels eine Ellipse mit den Halbachsen  $a$  und  $b$ , deren Ebene in der Entfernung  $h$  winkelrecht zur  $z$ -Achse steht, so ist die Gleichung des Kegels, dessen Spitze im Anfangspunkte der Koordinaten liegt,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{h^2} = 0.$$

Ist die Leitkurve des Kegels ein ebensolcher Kreis vom Halbmesser  $a$ , so ist in vorstehender Gleichung  $b = a$  zu setzen (Gleichung des geraden Kreiskegels). Vgl. auch b. I. S. 98.

6. **Kugel.** Mittelpunkgleichung:  $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ .

Sind  $\xi, \eta, \zeta$  die Koordinaten des Mittelpunktes der Kugel, so ist ihre Gleichung:

$$(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2 = r^2.$$

Jede Gleichung von der Form

$$x^2 + y^2 + z^2 + Ax + By + Cz + D = 0$$

stellt eine Kugel dar; dabei ist

$$\xi = -\frac{1}{2}A; \quad \eta = -\frac{1}{2}B; \quad \zeta = -\frac{1}{2}C;$$

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{A^2 + B^2 + C^2 - 4D}.$$

7. **Paraboloide.** Gleichung in einfachster Form:

$$\frac{x^2}{2p} \pm \frac{y^2}{2q} = z.$$

Das obere Zeichen gilt für das elliptische Paraboloid;  $p, q$  sind die Parameter der Hauptschnittparabeln. Für das hyperbolische Paraboloid ist  $p$  der Parameter der Hauptschnittparabel,  $q = p \operatorname{tg}^2 \varphi$ ;  $\varphi$  ist der halbe Winkel der Asymptotenebenen.

8. **Zylinder.** Die Gleichung eines auf einer Koordinatenebene winkelrecht stehenden Zylinders ist gleichlautend mit der Gleichung der Durchschnittskurve in der betreffenden Koordinatenebene.

Ist der Durchschnitt eines Zylinders mit der  $xy$ -Ebene eine Ellipse oder Hyperbel, deren Halbachsen  $a$  und  $b$  sind, und bilden die Zylinderseiten mit den Achsen die Winkel  $\alpha, \beta, \gamma$ , so ist die Gleichung des Zylinders

$$\frac{\left(x - z \frac{\cos \alpha}{\cos \gamma}\right)^2}{a^2} \pm \frac{\left(y - z \frac{\cos \beta}{\cos \gamma}\right)^2}{b^2} = 1.$$

Hierbei gilt  $+$  für den elliptischen und  $-$  für den hyperbolischen Zylinder.

Die Gleichung des parabolischen Zylinders ist

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{2y}{p} - \frac{2x}{q} = 0.$$

## VII. VEKTORRECHNUNG.\*)

1. Als „**Vektor**“ („gerichtete Größe“) bezeichnet man jede Größe, die außer ihrem Zahlenwert („Betrag“) noch eine Richtung und einen

\*) Bearbeitet von Prof. Dr. E. Jahnke, Berlin. — Ausführlichere Angaben s. Abraham-Föppl, Theorie der Elektrizität I; Gans, Einführung in die Vektoranalysis; Jahnke, Vorlesungen über die Vektorrechnung; v. Ignatowsky, Die Vektoranalysis und ihre Anwendung in der theoretischen Physik. Leipzig, B. G. Teubner.

Richtungssinn hat, z. B. Kraft, Verrückung, Geschwindigkeit, Beschleunigung, Impuls, elektrische und magnetische Feldstärke. Zwei Vektoren sind als gleich anzusehen, wenn sie außer im Betrage noch in Richtung, Pfeil und Dimensionen übereinstimmen.

Als **Skalar** bezeichnet man jede Größe, die nur einen Zahlenwert, aber keine Richtung besitzt, wie Arbeit, Dichte, Temperatur, spezifisches Gewicht, Leitfähigkeit, Elektrizitätsmenge.

Vektoren werden durch gotische, ihre Beträge durch die entsprechenden lateinischen Buchstaben bezeichnet. Ein Vektor vom Betrage Eins heißt **Einheitsvektor**. Seine Dimensionen werden dem Betrage beigelegt.

Im allgemeinen ist der Vektor  $\mathfrak{A}$  eine Ortsfunktion  $\mathfrak{A}(x, y, z)$ . Unter einem Vektorfelde mit der Intensität oder Feldstärke  $A$  versteht man einen Raum, wo jedem Punkt in umkehrbar eindeutiger Weise ein Vektor zugeordnet ist (z. B. das Schwerkraftfeld). Diejenige Kurve, deren Tangente in jedem Punkte mit der Richtung des Vektors zusammenfällt, heißt **Vektorlinie**. Zwei Vektorlinien eines Feldes können sich nicht schneiden. Ebenso bestimmt eine skalare Ortsfunktion ein Skalarfeld (z. B. das Temperaturfeld). Alle die Punkte, die demselben Wert des Skalars entsprechen, bestimmen eine Niveaufläche. Zwei Niveauflächen eines Feldes können sich nicht schneiden.

2. Jeder Vektor  $\mathfrak{A}$  eines Feldes, der parallel mit sich selber verschoben werden darf, ohne sich zu ändern, läßt sich durch drei Vektoren, die nicht in einer Ebene parallel sind, linear und homogen darstellen. Versteht man also unter  $i, j, k$  drei Einheitsvektoren, die zueinander senkrecht stehen und ein Rechtssystem bilden, d. h. wie Daumen, Zeige- und Mittelfinger der rechten Hand aufeinander folgen (Abb. 32), so ist der Vektor

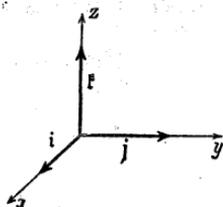
$$\mathfrak{A} = A_1 i + A_2 j + A_3 k$$

und hat die Komponenten  $A_1 = A \cos(i, \mathfrak{A})$ ,  $A_2 = A \cos(j, \mathfrak{A})$ ,  $A_3 = A \cos(k, \mathfrak{A})$  und den Betrag  $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2}$ , zuweilen auch bezeichnet durch  $|\mathfrak{A}|$ . Jede Vektorgleichung läßt sich demnach in drei skalare Gleichungen auflösen; und umgekehrt kann man ein System von drei Gleichungen für die Komponenten  $A_1, A_2, A_3$  zu einer Vektorgleichung zusammenfassen. So folgt aus  $\mathfrak{A} = 0$ , daß  $A_1 = 0, A_2 = 0, A_3 = 0$ , und umgekehrt.

Besteht bereits zwischen drei Vektoren ein linearer homogener Zusammenhang, dann liegen sie parallel zu ein und derselben Ebene und umgekehrt. Und ist endlich  $\mathfrak{B} = m \mathfrak{A}$ , dann stellt  $\mathfrak{B}$  einen Vektor dar, der zum Vektor  $\mathfrak{A}$  parallel gerichtet ist, der den Betrag  $B = m A$  hat und dessen Pfeil dem Pfeil von  $\mathfrak{A}$  gleich oder entgegengesetzt ist, je nachdem  $m$  positiv oder negativ ist.

3. Vektoren werden in derselben Weise addiert, wie Kräfte nach dem Satz vom Kräfteck zusammengesetzt werden, (geometrische Addition). Die geometrische Addition wird von der gewöhnlichen, algebraischen, mitunter durch die Zeichen  $\vec{+}, \vec{=}, \vec{-}$  unterschieden.

Abb. 32.



Die Vektorgleichung  $\mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2 + \dots + \mathcal{U}_n = 0$ , wonach die Vektoren ein geschlossenes  $n$ -Eck bilden, bedeutet für die Mechanik des Massenpunktes, wenn  $\mathcal{U}_i$  Kräfte bedeuten, daß der Massenpunkt im Gleichgewicht ist; sie liefert für die Elektrizitätslehre, wenn die  $\mathcal{U}_i$  als Stromstärken der in einem Knotenpunkt zusammenfließenden effektiven Ströme eines Wechselstromnetzes gedeutet werden, die Kirchhoffsche Regel.

4. Die Multiplikation zweier Vektoren kann entweder skalar oder vektoriell erfolgen. Das skalare Produkt  $\mathcal{U}\mathcal{B}$  oder  $(\mathcal{U}\mathcal{B})$  ist gleich  $AB \cos(\mathcal{U}, \mathcal{B})$ , so daß  $\mathcal{U}\mathcal{B} = \mathcal{B}\mathcal{U}$ , d. h. die Faktoren eines skalaren Produktes können ohne weiteres vertauscht werden. Stehen  $\mathcal{U}$  und  $\mathcal{B}$  aufeinander senkrecht, dann ist  $\mathcal{U}\mathcal{B} = 0$ , daher

$$ij = 0, \quad j\bar{i} = 0, \quad \bar{i}i = 0.$$

Haben  $\mathcal{U}$  und  $\mathcal{B}$  gleiche Richtung, dann ist  $\mathcal{U}\mathcal{B} = \pm AB$ , je nachdem die Pfeile gleich oder entgegengesetzt sind. Insbesondere ist  $\mathcal{U}\mathcal{U} = \mathcal{U}^2 = A^2$  daher

$$ii = i^2 = 1, \quad jj = j^2 = 1, \quad \bar{i}\bar{i} = \bar{i}^2 = 1.$$

Wird  $\mathcal{U} = A_1 i + A_2 j + A_3 \bar{i}$ ,  $\mathcal{B} = B_1 i + B_2 j + B_3 \bar{i}$  gesetzt, dann erhält man

$$\mathcal{U}\mathcal{B} = A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3.$$

5. Das vektorielle Produkt  $[\mathcal{U}\mathcal{B}]$ , zuweilen noch durch  $V\mathcal{U}\mathcal{B}$  bezeichnet, stellt den Vektor  $\mathcal{C}$  dar, der auf der Ebene, zu der  $\mathcal{U}$  und  $\mathcal{B}$  parallel liegen, also sowohl auf  $\mathcal{U}$  wie auf  $\mathcal{B}$ , senkrecht steht und einen solchen Pfeil hat, daß eine Drehung von  $\mathcal{U}$  nach  $\mathcal{B}$ , auf kürzestem Wege, und eine Schiebung in Richtung von  $\mathcal{C}$  eine Rechtschraubung ergibt.  $\mathcal{U}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$  bilden daher ein Rechtssystem. Die Länge des Vektors  $\mathcal{C}$  ist gleich  $AB \sin(\mathcal{U}, \mathcal{B})$ , wird also durch den Inhalt des Parallelogramms mit den Seiten  $\mathcal{U}, \mathcal{B}$  gemessen (Abb. 33). Daher ist

$$[\mathcal{U}\mathcal{B}]^2 = \mathcal{U}^2 \mathcal{B}^2 - (\mathcal{U}\mathcal{B})^2 = A^2 B^2 - A^2 B^2 \cos^2(\mathcal{U}, \mathcal{B}).$$

Es ist  $[\mathcal{U}\mathcal{B}] = -[\mathcal{B}\mathcal{U}]$ , d. h. das vektorielle Produkt zweier Vektoren ändert bei Vertauschung der Faktoren sein Vorzeichen. Haben  $\mathcal{U}$  und  $\mathcal{B}$  gleiche Richtung, dann ist  $[\mathcal{U}\mathcal{B}] = 0$ , insbesondere verschwindet auch  $[\mathcal{U}\mathcal{U}]$ ; also

$$\begin{aligned} [ii] &= 0, & [jj] &= 0, & [\bar{i}\bar{i}] &= 0 \\ [i\bar{i}] &= i, & [\bar{i}i] &= j, & [ij] &= \bar{i}. \end{aligned}$$

Mit Benutzung der Vektorkomponenten von  $\mathcal{U}$  und  $\mathcal{B}$  erhält man:

$$[\mathcal{U}\mathcal{B}] = (A_2 B_3 - A_3 B_2) i + (A_3 B_1 - A_1 B_3) j + (A_1 B_2 - A_2 B_1) \bar{i}.$$

6. Hiernach läßt sich die mechanische Arbeit als skalares Produkt von Kraftvektor und Wegvektor auffassen, die Leistung als skalares Produkt von Kraftvektor und Geschwindigkeitsvektor, die lebendige Kraft als halbes skalares Produkt von Impulsvektor und Geschwindigkeitsvektor. Dagegen sind Kräftepaar, Drehung, Drehmoment Vektoren, die durch ihre Länge den Zahlenwert und durch ihre Richtung die Achse von Kräftepaar, Drehung und Drehmoment bestimmen.

Die sechs Bedingungen für das Gleichgewicht eines starren Körpers lassen sich in die beiden Vektorgleichungen zusammenziehen:

$$\sum \mathcal{P}_i = 0, \quad \sum [r_i \mathcal{P}_i] = 0,$$

wo  $\mathcal{P}_i = X_i i + Y_i j + Z_i \bar{i}$ ,  $r_i = x_i i + y_i j + z_i \bar{i}$  gesetzt ist. Dabei ist die  $i$ -Komponente von  $[r_i \mathcal{P}_i]$  gleich  $y_i Z_i - z_i Y_i$ .

Man kann auch die elektrische Feldstärke  $\mathfrak{E}$ , die Dichte des Leitungsstromes  $\mathfrak{J}$  und die magnetische Induktion  $\mathfrak{B}$  als Vektoren auffassen. Dann liefert das skalare Produkt der elektrischen Feldstärke und der Dichte des Leitungsstromes die entwickelte Joulesche Wärme; und das vektorielle Produkt der Dichte des Leitungsstromes und der magnetischen Induktion liefert die ponderomotorische Kraft auf die Volumeneinheit eines stromdurchflossenen Leiters im magnetischen Feld.

**7. Rechenregeln für die Vektormultiplikation:**

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{B} + \mathfrak{C}) = \mathfrak{A}\mathfrak{B} + \mathfrak{A}\mathfrak{C} = \mathfrak{A}\mathfrak{B} + \mathfrak{C}\mathfrak{A},$$

$$[\mathfrak{A}(\mathfrak{B} + \mathfrak{C})] = [\mathfrak{A}\mathfrak{B}] + [\mathfrak{A}\mathfrak{C}] = [\mathfrak{A}\mathfrak{B}] - [\mathfrak{C}\mathfrak{A}].$$

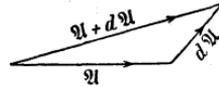
Das skalare Produkt eines Vektors mit dem vektoriellen Produkt zweier Vektoren stellt das Volumen eines Quaders mit den Kanten  $\mathfrak{A}$ ,  $\mathfrak{B}$ ,  $\mathfrak{C}$  dar, daher ist

$$\mathfrak{A}[\mathfrak{B}\mathfrak{C}] = \mathfrak{B}[\mathfrak{C}\mathfrak{A}] = \mathfrak{C}[\mathfrak{A}\mathfrak{B}]; \text{ folglich } \mathfrak{A}[\mathfrak{A}\mathfrak{C}] = 0.$$

Für die vektorielle Multiplikation eines Vektors mit dem vektoriellen Produkt zweier Vektoren gilt die Formel:

$$[[\mathfrak{A}\mathfrak{B}]\mathfrak{C}] = \mathfrak{B}(\mathfrak{A}\mathfrak{C}) - \mathfrak{A}(\mathfrak{B}\mathfrak{C}).$$

Abb. 34.



**8.** Das Differential  $d\mathfrak{A}$  eines Vektors  $\mathfrak{A}$  stellt wieder einen Vektor dar (Abb. 34). Für das skalare Produkt gilt  $d(\mathfrak{A}\mathfrak{B}) = \mathfrak{A}d\mathfrak{B} + \mathfrak{B}d\mathfrak{A}$ , also  $d(\mathfrak{A}^2) = 2\mathfrak{A}d\mathfrak{A}$ . Ist der Betrag  $A$  konstant, so ist das skalare Produkt  $\mathfrak{A}d\mathfrak{A} = 0$ , d. h. der Vektor  $d\mathfrak{A}$  steht auf  $\mathfrak{A}$  senkrecht. Für das vektorielle Produkt gilt  $d[\mathfrak{A}\mathfrak{B}] = [\mathfrak{A}d\mathfrak{B}] - [\mathfrak{B}d\mathfrak{A}]$ , wobei auf die Reihenfolge der Faktoren zu achten ist.

**9.** Aus einem Feldvektor  $\mathfrak{A} = A_1\mathfrak{i} + A_2\mathfrak{j} + A_3\mathfrak{k} = \mathfrak{A}(x, y, z)$  entspringen zwei Vektoren und ein Skalar nach der Vorschrift:

$$\text{rot } \mathfrak{A}^* = \left( \frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z} \right) \mathfrak{i} + \left( \frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x} \right) \mathfrak{j}$$

$$+ \left( \frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} \right) \mathfrak{k}$$

$$\text{div } \mathfrak{A}^* = \frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z}$$

$$\text{grad } \alpha^* = \frac{\partial \alpha}{\partial x} \mathfrak{i} + \frac{\partial \alpha}{\partial y} \mathfrak{j} + \frac{\partial \alpha}{\partial z} \mathfrak{k}.$$

**10.** Bezeichnet  $\mathfrak{v}$  die Strömungsgeschwindigkeit einer Flüssigkeit von der Dichte  $\rho$  nach Größe und Richtung für einen bestimmten Punkt des Raumes, dann gibt  $\text{div}(\rho \mathfrak{v})$  an, wieviel mehr Flüssigkeit aus der Volumeneinheit in der Zeiteinheit aus- als eingeströmt ist, so daß  $\frac{d\rho}{dt} + \text{div}(\rho \mathfrak{v}) = 0$  ist; der halbe Rotor  $\frac{1}{2} \text{rot } \mathfrak{v}$  bestimmt die Wirbelgeschwindigkeit. Der halbe Rotor der Weggeschwindigkeit eines starren Körpers ist gleich seiner Drehgeschwindigkeit. Der Gradienten von  $\alpha$  zeigt die Richtung des größten Anstieges des Skalars  $\alpha$  an.

**11.** Für jede geschlossene Kurve  $s$ , die ein Flächenstück  $F$  begrenzt, dessen mit einem Umlaufsinn versehenes Flächenelement durch den dazu normalen Vektor  $d\mathfrak{F}$  dargestellt wird, ist

$$\int_{(F)} \text{rot } \mathfrak{A} d\mathfrak{F} = \int_{\odot} \mathfrak{A} d\mathfrak{s} \quad (\text{Stokesscher Satz}).$$

\*) Sprich: rotor  $\mathfrak{A}$ , Divergenz  $\mathfrak{A}$ , Gradient  $\alpha$ . Statt rot  $\mathfrak{A}$  findet man auch curl  $\mathfrak{A}$ .

Dieser Satz ermöglicht die Umwandlung eines Linienintegrals in ein Flächenintegral. Ist  $F$  eine geschlossene Fläche, dann ist

$$\oint \text{rot } \mathfrak{A} d\mathfrak{F} = 0.$$

Ist  $V$  ein Raumgebiet, das von der Fläche  $F$  begrenzt wird, dann gilt

$$\int_{(V)} \text{div } \mathfrak{A} dV = \int_{\odot} \mathfrak{A}_n d\mathfrak{F} \quad (\text{Gauss'scher Satz}).$$

Dieser Satz verwandelt ein Oberflächenintegral in ein Raumintegral und umgekehrt.

Dabei ist die Flächennormale nach **aussen** gerichtet zu nehmen.

**12. Formeln:**

$$\begin{aligned} \text{rot grad } \alpha &= 0, & \text{div rot } \mathfrak{A} &= 0 \\ \text{div } (\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) &= \text{div } \mathfrak{A} + \text{div } \mathfrak{B}, & \text{rot } (\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) &= \text{rot } \mathfrak{A} + \text{rot } \mathfrak{B} \\ \text{div } (\alpha \mathfrak{A}) &= \alpha \text{div } \mathfrak{A} + \mathfrak{A} \text{ grad } \alpha \\ \text{div } [\mathfrak{A} \mathfrak{B}] &= \mathfrak{B} \text{ rot } \mathfrak{A} - \mathfrak{A} \text{ rot } \mathfrak{B}. \end{aligned}$$

## VIII. FOURIERSCHE REIHEN UND HARMONISCHE ANALYSE.\*)

**1. Fouriersche Reihen** sind Reihen, die nach den Sinus und Cosinus der Vielfachen eines Arguments fortschreiten. Ein Beispiel bietet die **harmonische Schwingung**, dargestellt durch  $y = a \sin(qt + \varphi)$  oder  $y = a \cos(qt + \varphi)$ , wo  $a$  die Amplitude,  $y$  die Ordinate des Massenpunktes in bezug auf die Ruhelage oder den Schwingungsmittelpunkt zur Zeit  $t$ ,  $c$  die konstante Fortpflanzungsgeschwindigkeit und  $\varphi$  den **Phasenwinkel** der Schwingung bedeuten. Ihre Periode ist  $\frac{2\pi}{q} = T$

und deren reziproker Wert die **Frequenz**. Eine harmonische Schwingung ist durch drei Größen, Amplitude, Frequenz und Phase, vollständig bestimmt. Beispiel einer Sinusschwingung: Bewegung des Kreuzkopfes einer liegenden Dampfmaschine mit sehr langer Schubstange oder des Pendels für kleine Werte des Ausschlagwinkels.

**2. Harmonische Schwingungen** von gleicher Frequenz lassen sich durch Vektoren\*\*) darstellen, deren Längen durch die Maßzahlen der Amplituden und deren Richtungen durch die Phasenwinkel bestimmt sind; sie lassen sich wie Vektoren nach dem Satz vom Vektoreck zu-

\*) Bearbeitet von Prof. Dr. E. Jahnke, Berlin. — Ausführlichere Angaben siehe C. Runge, Theorie und Praxis der Reihen. Leipzig, Göschen; E. Orlich, Aufnahme und Analyse von Wechselstromkurven. Braunschweig, Vieweg u. Sohn; C. Runge, Göttinger Nachrichten, Math.-Phys. Kl. 1908 und E. T. Z. 1909, S. 817; F. F. Martens, Arch.-Math. Ph. (3) 17.

\*\*) Vgl. S. 124.

sammensetzen. Der von zwei Vektoren eingeschlossene Winkel wird Phasenverschiebungswinkel zwischen den beiden Sinuswellen genannt.

3. Ist die Schwingung nicht einfach sinusförmig, aber doch periodisch, so kann man sie durch Uebereinanderlagerung mehrerer Sinus- oder Cosinusschwingungen mit verschiedenen Perioden, d. h. als Summe von Sinus- und Cosinusfunktionen darstellen, deren Perioden gleich der Periode der gegebenen Funktion oder gleich aliquoten Teilen dieser Periode sind.

4. Allgemein kann man jede periodische Funktion  $y = f(x)$  mit der Periode  $2\pi$  wie folgt darstellen:

$$\begin{aligned} y = f(x) &= a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \dots + \frac{1}{2} b_0 + b_1 \cos x + b_2 \cos 2x + \dots \\ &= \frac{1}{2} b_0 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cos kx + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin kx \\ &= A_0 + A_1 \sin(x + \varphi_1) + A_2 \sin(2x + \varphi_2) + \dots, \end{aligned}$$

wo

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{2} b_0, & A_k &= \sqrt{a_k^2 + b_k^2}, & \operatorname{tg} \varphi_k &= \frac{b_k}{a_k}, \\ \sin \varphi_k &= \frac{b_k}{\sqrt{a_k^2 + b_k^2}}, & \cos \varphi_k &= \frac{a_k}{\sqrt{a_k^2 + b_k^2}}. \end{aligned}$$

Dabei lassen sich die Koeffizienten  $a_k$ ,  $b_k$  (einschl.  $b_0$ ) aus den bestimmten Integralen

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx \, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \sin kx \, dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [f(x) - f(-x)] \sin kx \, dx \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx \, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cos kx \, dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [f(x) + f(-x)] \cos kx \, dx \end{aligned}$$

zahlenmäßig berechnen, wenn die darzustellende Funktion  $f(x)$  durch ihr analytisches Gesetz gegeben ist.

5. Ist die Periode der Funktion  $f(x)$  nicht  $2\pi$ , sondern  $2p$ , dann hat man  $\frac{x\pi}{p}$  statt  $x$  einzuführen. Ist die darzustellende Funktion gerade (d. h. ändert sie sich nicht, wenn  $x$  durch  $-x$  ersetzt wird),

dann enthält die Fouriersche Reihe nur Cosinustglieder; die  $a_k$  sind dann sämtlich gleich Null. Ist  $f(x)$  ungerade (d. h. ändert sie nur das Vorzeichen, falls  $x$  durch  $-x$  ersetzt wird), dann treten nur Sinustglieder auf; die  $b_k$  verschwinden einschl.  $b_0$ .

6. Ist die Schwingung nur angenähert periodisch, etwa eine gedämpfte Schwingung, so ist sie innerhalb eines beliebig herausgegriffenen Intervalls ebenfalls durch eine Fouriersche Reihe darstellbar, deren Periode das beliebig gewählte Intervall ist.

Eine solche Darstellung gilt nur für diesen beschränkten Bereich.

7. Graphische Darstellungen einiger Fourierscher Reihen:

$$1) \quad y = h + \frac{4h}{\pi} \left( \sin qx + \frac{1}{3} \sin 3qx + \dots \right).$$

Die Kurve setzt sich aus einzelnen Linienteilen, parallel zur  $x$ -Achse, zusammen und ist an den Stellen  $x = 0, \pm \frac{T}{2}, \pm T, \dots$  unstetig (Abb. 35).

$$2) \quad y = \frac{2h}{\pi} \left( \sin qx - \frac{1}{2} \sin 2qx + \frac{1}{3} \sin 3qx - \dots \right).$$

Abb. 35.

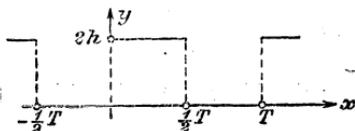
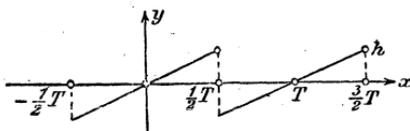


Abb. 36.

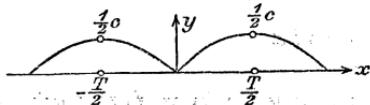


Der Kurvenzug besteht aus Parallelen durch die Punkte  $x = 0, \pm T, \pm 2T, \dots$  der  $x$ -Achse und ist unstetig an den Stellen  $x = \pm \frac{T}{2}, \pm \frac{3T}{2}, \dots$  (Abb. 36).

$$3) \quad y = \frac{c}{3} - \frac{2c}{\pi^2} \left( \cos qx + \frac{1}{4} \cos 2qx + \frac{1}{9} \cos 3qx + \dots \right).$$

Der Kurvenzug besteht aus Parabelbögen, die an den Stellen  $\pm \frac{T}{2}, \pm \frac{3T}{2}, \dots$  die Höhe  $\frac{c}{2}$  haben (Abb. 37).

Abb. 37.



8. Wenn die Kurve  $y = f(x)$  nicht durch ihr analytisches Gesetz, sondern als Kurvendiagramm oder nur für eine beschränkte Zahl

von Punkten gegeben ist, so treten Summen an die Stelle der Integrale. Um ein solches Diagramm, z. B. die durch den Oscillographen aufgenommenen Strom- und Spannungskurven eines Wechselstroms, durch eine Fouriersche Reihe darzustellen, schlage man folgendes Verfahren ein (harmonische Analyse):

Man teile\* vom Anfangspunkt der Koordinaten aus auf der Abszissenachse die Periode  $2\pi$  in  $4r$  gleiche Teile, Teilpunkte  $x_1, x_2, \dots, x_{4r}$ ,  $x_n = \frac{n\pi}{2r}$ ; zugehörige Funktionswerte  $y_0, y_1, y_2, \dots, y_{4r}$ , wo  $y_0 = y_{4r}$   $y_n = f\left(\frac{n\pi}{2r}\right)$  gesetzt ist. Alsdann setze man an

$$f(x) = \sum_{k=1}^{2r-1} a_k \sin kx + b_0 + \sum_{k=1}^{2r-1} b_k \cos kx$$

und berechne die Koeffizienten  $a_k, b_k$  aus den Formeln

$$a_k = \frac{1}{2r} \sum_{n=1}^{4r} y_n \sin kx_n, \quad b_k = \frac{1}{2r} \sum_{n=1}^{4r} y_n \cos kx_n, \\ k = 1, 2, \dots, (2r-1)$$

$$b_0 = \frac{1}{4r} \sum_{n=1}^{4r} y_n, \quad b_{2r} = \frac{1}{4r} \sum_{n=1}^{4r} (-1)^n y_n, \quad x_n = \frac{n\pi}{2r}.$$

9. Die Rechnung wird vereinfacht durch Einführung der Summen und Differenzen je zweier untereinander stehender Werte des Schemas

	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$\dots$	$y_{2r-1}$	$y_{2r}$
	$y_{4r}$	$y_{4r-1}$	$y_{4r-2}$	$y_{4r-3} \dots$	$y_{2r+1}$	
Summe . .	$u_0$	$u_1$	$u_2$	$u_3 \dots$	$u_{2r-1}$	$u_{2r}$
Differenz . .		$v_1$	$v_2$	$v_3 \dots$	$v_{2r-1}$	
	$u_0$	$u_1$	$\dots$	$u_{r-1}$	$u_r$	$v_1$
						$v_2$
						$\dots$
						$v_{r-1}$
						$v_r$
	$u_{2r}$	$u_{2r-1}$	$\dots$	$u_{r+1}$		$v_{2r-1}$
						$v_{2r-2}$
						$\dots$
						$v_{r+1}$
Summe .	$w_0$	$w_1$	$\dots$	$w_{r-1}$	$w_r$	$z_1$
Differenz	$w_0'$	$w_1'$	$\dots$	$w_{r-1}'$		$z_1'$
						$z_2'$
						$\dots$
						$z_{r-1}'$
						$z_r'$

Hiernach berechnet man die Koeffizienten der Fourierschen Reihe aus den Formeln:

$$a_k = \begin{cases} \frac{1}{2r} \sum_{n=0}^r z_n \sin kx_n & (k = 1, 3, 5, \dots, 2r-1) \\ \frac{1}{2r} \sum_{n=0}^r z_n' \sin kx_n & (k = 2, 4, 6, \dots, 2r-2) \end{cases}$$

$$b_k = \begin{cases} \frac{1}{2r} \sum_{n=0}^r w_n' \cos kx_n & (k = 1, 3, 5, \dots, 2r-1) \\ \frac{1}{2r} \sum_{n=0}^r w_n \cos kx_n & (k = 2, 4, 6, \dots, 2r-2) \end{cases}$$

$$b_0 = \frac{1}{4r} \sum_{n=0}^r w_n, \quad b_{2r} = \frac{1}{4r} \sum_{n=0}^r (-1)^n w_n.$$

\*) Vgl. C. Runge, Theorie und Praxis der Reihen. Leipzig 1904, Göschen.

10. Sind Ordinaten, die einen Abstand von einer halben Periode haben, einander entgegengesetzt gleich, so dafs positive und negative Kurvenhälften einander spiegelbildlich gleich sind, so enthält die Fouriersche Reihe nur Glieder **ungerader** Ordnung ( $k$  ungerade). Alsdann ist  $y_{2r+n} = -y_n$ , und die Koeffizienten der Fourierschen Reihe ergeben sich aus:

$$a_k = \frac{1}{r} \sum_{n=1}^{r-1} (y_n + y_{2r-n}) \sin \frac{k n \pi}{2 r} + y_r \sin \frac{k \pi}{2} \quad (k = 1, 3, \dots, 2r - 1)$$

$$b_k = \frac{1}{r} \sum_{n=1}^{r-1} (y_n - y_{2r-n}) \cos \frac{k n \pi}{2 r} - y_{2r},$$

während für  $k = 0, 2, 4, 6, \dots, 2r$  die  $a_k$  und  $b_k$  verschwinden.

11. Rechenschema\*) für den Fall  $r = 6$ , wo  $\frac{\pi}{2r} = 15^\circ$ :

	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_4$	$y_5$	$y_6$
	$y_{12}$	$y_{11}$	$y_{10}$	$y_9$	$y_8$	$y_7$
Summe . .	$u_1$	$u_2$	$u_3$	$u_4$	$u_5$	$u_6$
Differenz .	$v_6$	$v_5$	$v_4$	$v_3$	$v_2$	$v_1$

d. h.  $u_1 = y_1 + y_{11}$ ,  $v_1 = y_5 - y_7, \dots, u_6 = y_6, v_6 = -y_{12}$ . Alsdann ist

$$6 a_k = u_1 \sin 15 k + u_2 \sin 30 k + \dots + u_5 \sin 75 k + u_6 \sin 90 k \quad (k = 1, 2, \dots, 11)$$

$$6 b_k = v_5 \cos 15 k + v_2 \cos 30 k + \dots + v_1 \cos 75 k + v_6.$$

Verwandelt man alle vorkommenden Winkelfunktionen in Sinus von Winkeln des ersten Quadranten und setzt die Zahlenwerte für die Sinus ein, so ergibt sich folgende Tabelle:

0,04314	$u_1$	$u_1$	$u_5$	$u_5$		
0,08333	$u_2$	$-u_2$	$u_2$	$-u_2$		
0,11785	$u_3$	$u_3$	$-u_3$	$-u_3$	$u_1 + u_3 - u_5$	$u_1 + u_3 - u_5$
0,14434	$u_4$	$-u_4$	$-u_4$	$u_4$		
0,16099	$u_5$	$u_5$	$u_1$	$u_1$		
0,16667	$u_6$	$-u_6$	$u_6$	$-u_6$	$u_2 - u_6$	$-(u_2 - u_6)$
	$a_1$	$a_{11}$	$a_5$	$a_7$	$a_3$	$a_9$
	$b_1$	$-b_{11}$	$b_5$	$-b_7$	$-b_3$	$b_9$

Dabei hat man die  $u$  jeder Vertikalen mit den linker Hand stehenden Werten der (durch 6 dividierten) Winkelfunktion zu multiplizieren und die Produkte zu addieren, um die  $a_k$  zu erhalten. Ersetzt man überall die  $u$  durch die  $v$  mit gleichen Indizes, so ergeben sich die  $b_k$ .

\*) Vrgl. hierzu E. Orlich, Aufnahme und Analyse von Wechselstromkurven, Bd. VII der Elektrotechnik in Einzeldarstellungen, her. von Benischke, Braunschweig, Vieweg u. Sohn oder E. Orlich, Arch. Math. u. Ph. (3) 12, 159 bis 167, 230 bis 240.

So ist

$$a_7 = 0,04314 u_5 - 0,08333 u_2 - 0,11785 u_3$$

$$+ 0,14431 u_4 + 0,16099 u_1 - 0,16667 u_6$$

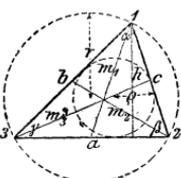
$$b_9 = 0,11785 (v_1 + v_3 - v_5) - 0,16667 (v_2 - v_6).$$

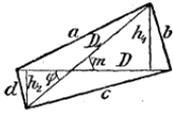
Neben dieser von Bessel und Runge herrührenden Methode gibt es noch eine andere von Bruns und Fischer-Hinnen (E. T. Z. 1901, 396).

12. Außer dieser rechnerischen Methode gibt es auch graphische Verfahren. Ferner hat man für die Berechnung einer Fourierschen Reihe zu einem gegebenen Diagramm wie für die Lösung der umgekehrten Aufgabe Apparate konstruiert (harmonische Analysatoren). Der vollkommenste unter ihnen ist der Apparat von Michelson und Stratton, welcher gestattet, auf mechanischem Wege 160 Koeffizienten zu bestimmen und umgekehrt, eine trigonometrische Reihe von 160 Gliedern zu summieren.

## IX. INHALTE VON FLÄCHEN UND KÖRPERN.

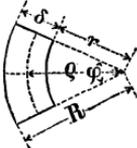
### A. Flächeninhalte ebener Gebilde.

Gebilde	Bezeichnung der Abmessungen	Flächeninhalt $F$
<b>1. Dreieck</b> (Vrgl. S. 62.)	Abb. 38.  $h$ die Höhe zur Seite $a$ $s = \frac{1}{2} (a + b + c)$ $m_1, m_2, m_3$ die Mittellinien $s_0 = \frac{1}{2} (m_1 + m_2 + m_3)$ $x_1 y_1, x_2 y_2, x_3 y_3$ die Koordinaten der Ecken in bezug auf ein beliebiges rechtwinkliges Achsenkreuz Der Koordinaten-Anfangspunkt liegt in der Ecke 3: $[x_3 = 0, y_3 = 0]$ .	$F = \frac{1}{2} a h$ $= \sqrt{s (s - a) (s - b) (s - c)}$ $= \frac{1}{2} a b \sin \gamma$ $= \frac{a^2 \sin \beta \sin \gamma}{2 \sin \alpha}$ $= 2 r^2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$ $= \rho^2 \operatorname{ctg} \frac{1}{2} \alpha \operatorname{ctg} \frac{1}{2} \beta \operatorname{ctg} \frac{1}{2} \gamma$ $= \rho s = \frac{a b c}{4 r}$ $= \frac{1}{3} \sqrt{s_0 (s_0 - m_1) (s_0 - m_2) (s_0 - m_3)}$ $= \pm \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$ $= \pm \frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{l} x_1 y_2 - x_2 y_1 \\ + x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ + x_3 y_1 - x_1 y_3 \end{array} \right\}$ $F = \pm \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 y_1 \\ x_2 y_2 \end{vmatrix}$ $= \pm \frac{1}{2} (x_1 y_2 - x_2 y_1)$
Rechtwinkliges Dreieck (Vrgl. S. 63)	$a, b$ Katheten $c$ Hypotenuse $\alpha$ der $a$ gegenüberliegende Winkel	$F = \frac{1}{2} a b$ $= \frac{1}{2} a^2 \operatorname{ctg} \alpha$ $= \frac{1}{2} b^2 \operatorname{tg} \alpha$ $= \frac{1}{4} c^2 \sin 2\alpha.$ $a^2 + b^2 = c^2$

Gebilde	Bezeichnung der Abmessungen	Flächeninhalt $F$
<b>2. Viereck</b> ( $D$ und $D_1$ die Diagonalen, $\varphi$ der zwischen ihnen liegende Winkel.)	Abb. 39.  $m$ die Verbindungslinie der Mitten der Diagonalen	$F = \frac{h_1 + h_2}{2} D = \frac{D D_1 \sin \varphi}{2}$ $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = D^2 + D_1^2 + 4 m^2$
Kreisviereck	$a, b, c, d$ die 4 Seiten $s = \frac{1}{2} (a + b + c + d)$	$F = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$ $D D_1 = ac + bd$
Trapez	$a, b$ die parallelen Seiten $h$ die Höhe	$F = \frac{a + b}{2} h = \frac{D D_1 \sin \varphi}{2}$
Parallelogramm	$a, b$ die Seiten $h$ der Abstand der Seiten $b$ $\gamma$ der Winkel	$F = b h = a b \sin \gamma$ $= \frac{1}{2} D D_1 \sin \varphi$ $2(a^2 + b^2) = D^2 + D_1^2$
Rechteck	$a, b$ die Seiten	$F = ab = \frac{1}{2} D^2 \sin \varphi$
Rhombus	$a$ Seite $\gamma$ Winkel	$F = a^2 \sin \gamma$ $= \frac{1}{2} D D_1$
<b>3. Vieleck</b>	$x_1 y_1, x_2 y_2, x_3 y_3 \dots x_n y_n$ die Koordinaten der $n$ Ecken in bezug auf ein beliebiges rechtwinkliges Achsenkreuz [Die Summe der inneren Winkel beträgt $(n - 2) 180^\circ$ ].	$F = \pm \frac{1}{2} \left\{ \begin{aligned} &(x_2 y_1 - x_1 y_2) \\ &+ (x_3 y_2 - x_2 y_3) \\ &+ (x_4 y_3 - x_3 y_4) + \dots \\ &\dots + (x_n y_{n-1} - x_{n-1} y_n) \\ &+ (x_1 y_n - x_n y_1) \end{aligned} \right\}$ $F$ kann auch bestimmt werden durch Zerlegung des Vielecks in Dreiecke mittels Diagonalen.
Regelmäßiges Vieleck (Vgl. die nächst. Tafel.)	$R$ der Halbmesser des umliegenden, $r$ der des einliegenden Kreises $a = 2 \sqrt{R^2 - r^2}$ die Seite $n$ die Anzahl der Seiten $\varphi = 180^\circ : n$ $U$ der Umfang	$F = \frac{1}{4} n a^2 \operatorname{ctg} \varphi$ $= \frac{1}{2} n R^2 \sin 2 \varphi$ $= n r^2 \operatorname{tg} \varphi$ $U = n a = 2 n R \sin \varphi$ $= 2 n r \operatorname{tg} \varphi$ Der Winkel des Vielecks $= 180^\circ - 2 \varphi$

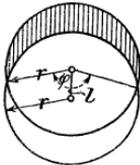
$n$	$\frac{F}{a^2}$	$\frac{F}{R^2}$	$\frac{F}{r^2}$	$\frac{R}{a}$	$\frac{R}{r}$	$\frac{a}{R}$	$\frac{a}{r}$	$\frac{r}{R}$	$\frac{r}{a}$
3	0,4330	1,2990	5,1962	0,5774	2,0000	1,7321	3,4641	0,5000	0,2887
4	1,0000	2,0000	4,0000	0,7071	1,4142	1,4142	2,0000	0,7071	0,5000
5	1,7205	2,3776	3,6327	0,8507	1,2361	1,1756	1,4531	0,8090	0,6882
6	2,5981	2,5981	3,4641	1,0000	1,1547	1,0000	1,1547	0,8660	0,8660
7	3,6339	2,7364	3,3710	1,1524	1,1099	0,8678	0,9631	0,9010	1,0383
8	4,8284	2,8284	3,3137	1,3066	1,0824	0,7654	0,8284	0,9239	1,2071
9	6,1818	2,8925	3,2757	1,4619	1,0642	0,6840	0,7279	0,9397	1,3737
10	7,6942	2,9389	3,2492	1,6180	1,0515	0,6180	0,6498	0,9511	1,5388
12	11,196	3,0000	3,2154	1,9319	1,0353	0,5176	0,5359	0,9659	1,8660
15	17,642	3,0505	3,1883	2,4049	1,0223	0,4158	0,4251	0,9781	2,3523
16	20,109	3,0615	3,1826	2,5629	1,0196	0,3902	0,3978	0,9808	2,5137
20	31,569	3,0902	3,1677	3,1962	1,0125	0,3129	0,3168	0,9877	3,1569
24	45,575	3,1058	3,1597	3,8306	1,0086	0,2611	0,2633	0,9914	3,7979
32	81,225	3,1214	3,1517	5,1011	1,0048	0,1960	0,1970	0,9952	5,0766
48	183,08	3,1326	3,1461	7,6449	1,0021	0,1308	0,1311	0,9979	7,6285
64	325,69	3,1365	3,1441	10,190	1,0012	0,0981	0,0983	0,9988	10,178

Gebilde	Bezeichnung der Abmessungen	Flächeninhalt $F$
<b>4. Kreis</b> (Tafel für $F$ und $U$ s. S. 1 bis 23.)	$r$ der Halbmesser $d$ der Durchmesser $U$ der Umfang	$F = \pi r^2 = \frac{1}{4} \pi d^2 = \frac{1}{4} U d$ $= 0,7853981634 d^2$ $U = \pi d.$
Kreisring (Für $F$ ist die Tafel auf S. 1 bis 23 zu benutzen.)	$R$ äußerer } Halbmesser $r$ innerer } $D$ äußerer } Durchmesser $d$ innerer } $\rho$ mittlerer Halbmesser $\delta$ Ringbreite	$F = \pi (R^2 - r^2)$ $= \frac{1}{4} \pi (D^2 - d^2)$ $= \frac{1}{4} \pi D^2 - \frac{1}{4} \pi d^2$ $= 2 \pi \rho \delta$
Kreisabschnitt (Tafel s. S. 36 u. 37.)	$r$ der Halbmesser $\varphi^0$ der Zentriwinkel in Grad $b$ die Bogenlänge $s$ die Sehnenlänge $h$ die Bogenhöhe	$F = \frac{1}{2} r^2 \left( \frac{\varphi^0 \pi}{180} - \sin \varphi \right)$ $= \frac{r(b-s) + sh}{2}$
Kreis-ausschnitt (Für $F$ kann die Tafel auf S. 1 bis 23 benutzt werden.)	$r$ der Halbmesser $b$ die Bogenlänge $\varphi^0$ der zum Bogen $b$ gehörende Zentriwinkel in Grad $\varphi$ der dem Halbmesser $r$ entsprechende Bogen	$F = \frac{1}{2} b r$ $= \frac{\varphi^0}{360} \pi r^2$ $= \frac{1}{2} \varphi r^2$ $\varphi = \frac{\varphi^0 \pi}{180}$ $b = \frac{\varphi^0 \pi}{180} r$

Gebilde	Bezeichnung der Abmessungen	Flächeninhalt $F$
Kreis-Ringstück	Abb. 40. 	$F = \frac{\varphi^0 \pi}{360} (R^2 - r^2)$ $= \frac{\varphi^0 \pi}{180} \varrho \delta$ $= \varphi \varrho \delta$

**Kreissichelstück**

Abb. 41.



$$F = r^2 \left( \pi - \frac{\pi}{180} \varphi + \sin \varphi \right) = r^2 \eta.$$

$l$	$\frac{d}{10}$	$\frac{2d}{10}$	$\frac{3d}{10}$	$\frac{4d}{10}$	$\frac{5d}{10}$	$\frac{6d}{10}$	$\frac{7d}{10}$	$\frac{8d}{10}$	$\frac{9d}{10}$
$\eta$	0,40	0,79	1,18	1,56	1,91	2,25	2,55	2,81	3,02

**5. Kegelschnitte.** Ellipse und Ellipsenabschnitt; Hyperbel und Hyperbelabschnitt s. S. 99 u. f. Parabelabschnitt s. S. 105.

Die Flächen anderer Kurven s. S. 108 bis 115.

**6. Beliebige Fläche.**

$\alpha$ . Die Fläche sei begrenzt auf drei Seiten durch gerade Linien, von denen  $AB = y_0$  und  $CD = y_{2n}$  (s. Abb. 42) winkelrecht zu  $BC$  stehen. Man teile  $BC$  in eine **gerade** Anzahl ( $2n$ ) gleicher Teile  $h$ , errichte in den Teilpunkten Ordinaten  $y_1, y_2 \dots y_{2n-1}$  und bezeichne die mittleren Höhen der so gebildeten Flächenteile mit  $\eta_1, \eta_2 \dots \eta_{2n}$ , so ermittelt sich näherungsweise der Inhalt der Fläche  $ABCD$  aus einer der folgenden, nach fortschreitender Genauigkeit geordneten Formeln:

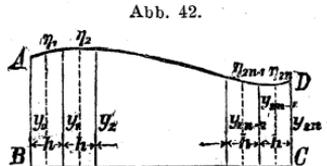


Abb. 42.

- $F = h (1/2 y_0 + y_1 + y_2 + \dots + y_{2n-2} + y_{2n-1} + 1/2 y_{2n}).$
- $F = h \Sigma (\eta).$
- $F = 1/3 h (y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \dots + 2y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n}).$
- $F = 3/8 h (y_0 + 3y_1 + 3y_2 + 2y_3 + 3y_4 + 3y_5 + 2y_6 + 3y_7 + \dots + 2y_{m-3} + 3y_{m-2} + 3y_{m-1} + y_m).$
- $F = h \Sigma [\eta + 1/12 (y_0 - \eta_1) + 1/12 (y_{2n} - \eta_{2n})].$
- $F = h \Sigma [\eta + 1/72 (8y_0 + \eta_2 - 9\eta_1) + 1/72 (8y_{2n} + \eta_{2n-1} - 9\eta_{2n})].$

In Formel 4. ist die Anzahl der Ordinaten  $m + 1 = 3n + 1$ ; also ist die Anzahl  $m$  der gleichen Teile  $h$  durch 3 teilbar.

Formel 3., die sogen. **Simpsonsche Regel**, liefert in dem Falle genaue Werte, wenn  $y$  eine ganze Funktion höchstens dritten

Grades seines Abstandes von einem beliebigen Punkte ist; alsdann braucht nur  $y_m$ , die mittlere Ordinate zwischen  $y_0$  und  $y_{2n}$ , gemessen oder berechnet zu werden. Es ist, wenn  $H$  die ganze Höhe  $BC$  bezeichnet,

$$F = \frac{1}{6} H (y_0 + 4y_m + y_{2n}).$$

$\beta$ . Hat man 5 je um  $h$  voneinander abstehende Ordinaten  $y_0, y_1, y_2, y_3, y_4$  gemessen oder berechnet, so ist auch

$$F = \frac{2}{45} h [7(y_0 + y_4) + 32(y_1 + y_3) + 12y_2].$$

Diese Formel ist genau richtig, wenn  $y$  eine ganze Funktion höchstens fünften Grades seines Abstandes von einem beliebigen Punkte ist.

$\gamma$ . Weitere Näherungsformeln finden sich auf S. 80 u. 81, insofern das Integral  $\int_a^b f(x) dx$  den Inhalt der Fläche  $ABCD$  darstellt, wenn

$BC$  die  $x$ -Achse,  $y = f(x)$  die Gleichung der Kurve  $AD$  ist und  $a$  und  $b$  die zu  $AB$  und  $DC$  gehörigen Abszissen sind.

$\delta$ . Verfahren von Tschebyscheff (sehr genau) s. Abteil. II, Abschn. Schiffbau, bei der Berechnung der Verdrängung usw.

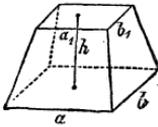
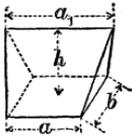
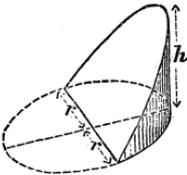
## B. Inhalte und Oberflächen von Körpern.

Die vorstehenden Regeln für eine beliebige Fläche gelten auch für den Inhalt eines von zwei parallelen Ebenen begrenzten Körpers, wenn unter  $y_0 \dots y_{2n}$  die Flächeninhalte der durch parallele Ebenen gebildeten Querschnitte verstanden werden.

Körper	Bezeichnung der Abmessungen	Inhalt = $V$ Oberfläche = $O$ Mantelfläche = $M$
<b>1. Prisma</b>	$F$ Grundfläche, $h$ Höhe.	$V = Fh$
Würfel	$a$ Kante, $d$ Diagonale. $d^2 = 3a^2$ .	$V = a^3$ $O = 6a^2$
Schief abgeschnittenes dreiseitiges Prisma	$a, b, c$ die Längen der drei parallelen Kanten $N$ der Querschnitt, winkelrecht zu den Kanten.	$V = \frac{1}{3} (a + b + c) N$

Schief abgeschnittenes  $n$ -seitiges Prisma (und schief abgeschnittener Zylinder). Ist  $l$  die Verbindungslinie der Schwerpunkte der Grundflächen,  $N$  der zu  $l$  winkelrechte Querschnitt, so ist  $V = Nl$ .

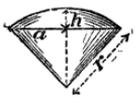
Rechtwinkliges Parallelepipedon (Rechtkant)	$a, b, c$ die Längen der drei Kanten einer Ecke $d$ die Diagonale.	$V = abc$ $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$ $O = 2(a b + a c + b c)$
---------------------------------------------	-----------------------------------------------------------------------	------------------------------------------------------------------

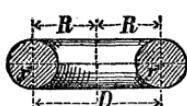
Körper	Bezeichnung der Abmessungen	Inhalt = $V$ Oberfläche = $O$ Mantelfläche = $M$
<b>2. Pyramide</b>	$F$ Grundfläche $h$ Höhe.	$V = \frac{1}{3} Fh$
Dreiseitige Pyramide	$x_1 y_1 z_1, x_2 y_2 z_2, x_3 y_3 z_3$ die Koordinaten von drei Eckpunkten; der Anfangspunkt liegt in der vierten Ecke.	$V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} x_1 y_1 z_1 \\ x_2 y_2 z_2 \\ x_3 y_3 z_3 \end{vmatrix}$
Abgestumpfte Pyramide	$F, f$ die parallelen Endflächen $h$ ihr Abstand $A$ und $a$ zwei entsprechende Seiten zu $F$ und $f$	$V = \frac{1}{3} h (F + f + \sqrt{Ff})$ $= \frac{1}{3} h F \left[ 1 + \frac{a}{A} + \left(\frac{a}{A}\right)^2 \right]$ **)
<b>3. Obelisk</b> (Abb. 42)	Abb. 42. 	$V = \frac{1}{6} h [(2a + a_1)b + (2a_1 + a)b_1]$ $= \frac{1}{6} h [ab + (a + a_1)(b + b_1) + a_1 b_1]$
<b>4. Keil</b> (Abb. 43)	Abb. 43. 	$V = \frac{1}{6} (2a + a_1) b h$
<b>5. Zylinder</b>	$F$ Grundfläche $h$ Höhe.	$V = Fh$
Kreiszylinder	$r$ der Halbmesser der Grundfläche $h$ die Höhe	$V = \pi r^2 h$ $M = 2 \pi r h$ $O = 2 \pi r (r + h)$
Schief abgesehn. gerader Kreiszylinder	$h_1$ die kürzeste Zylinderseite $h_2$ die längste $r$ der Halbmesser d. Grundfl.	$V = \pi r^2 \frac{h_1 + h_2}{2}$ $M = \pi r (h_1 + h_2)$
Zylinderhuf*) (Abb. 44)	Abb. 44. 	$V = \frac{2}{3} r^2 h$ $M = 2 r h$ Der Schnitt geht durch den Mittelpunkt der Grundfläche; der Grundriss ist also ein Halbkreis, d. h. $a = b = r$ (Vrgl. Fußnote).

\*) Ist der Huf-Grundriss größer oder kleiner als ein Halbkreis,  $2a$  seine gerade Seite (Hufkante),  $b$  die Länge des Lotes vom Fußpunkte von  $h$  auf  $2a$ ,  $2\varphi$  der Zentrivinkel des Huf-Grundrisses in Grad, so ist allgemein

$$V = \frac{h}{3b} \left[ a(3r^2 - a^2) + 3r^2(b - r) \frac{\varphi \pi}{180} \right]; \quad M = \frac{2rh}{b} \left[ (b - r) \frac{\varphi \pi}{180} + a \right].$$

\*\*) S. C. d. B. 1899 S. 68.

Körper	Bezeichnung der Abmessungen	Inhalt = $V$ Oberfläche = $O$ Mantelfläche = $M$
Hohlzylinder (Rohr)	$R$ der äußere Halbmesser $r$ der innere Halbmesser $h$ die Höhe $s = R - r$ die Dicke $\rho = \frac{1}{2}(R + r)$ der mittlere Halbmesser	$V = \pi h (R^2 - r^2)$ $= \pi h s (2R - s)$ $= \pi h s (2r + s)$ $= 2\pi h s \rho$
<b>6. Kreiskegel</b>	$r$ der Halbmesser der Grundfläche $h$ die Höhe $s$ die Seite	$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$ $M = \pi r \sqrt{r^2 + h^2} = \pi r s$ $s = \sqrt{r^2 + h^2}$
Abgestumpfter Kreiskegel	Wie vorstehend; ferner $R$ der Halbmesser der anderen Grundfläche. $\sigma = R + r$ $\delta = R - r$ $s = \sqrt{\delta^2 + h^2}$	$V = \frac{1}{3} \pi h (R^2 + Rr + r^2)$ $= \frac{h}{4} \left[ \pi \sigma^2 + \frac{1}{3} (\pi \delta^2) \right]$ $M = \pi s \sigma$
<b>7. Kugel</b> (Für $V$ ist die Tafel S. 35, für $O$ Tafel S. 1 bis 23 zu benutzen)	$r$ der Halbmesser, u. zw. $r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}} = 0,620351 \sqrt[3]{V}$ $d = 2r$ der Durchmesser	$V = \frac{4}{3} \pi r^3 = 4,188790205 r^3$ $= \frac{1}{6} \pi d^3 = 0,523598776 d^3$ $O = 4\pi r^2 = \pi d^2$ $= 4 \times$ Inhalt des größten Kreises
Hohlkugel (Tafel S. 35)	$R$ äußerer, $r$ innerer Halbm. $D$ „ „ „ „ Durchm.	$V = \frac{4}{3} \pi (R^3 - r^3)$ $= \frac{1}{6} \pi (D^3 - d^3)$
Kugelabschnitt (Kugelkalotte)	$h$ die Höhe des Abschnittes $r$ der Halbmesser der Kugel $a$ der Halbmesser der Grundfläche	$V = \frac{1}{6} \pi h (3a^2 + h^2)$ $= \frac{1}{3} \pi h^2 (3r - h)$ $M = 2\pi r h = \pi (a^2 + h^2)$ $a^2 = h(2r - h)$
Kugelzone	$h$ die Höhe der Zone $r$ der Halbmesser der Kugel $a, b$ die Halbmesser der Endflächen; ( $a > b$ )	$V = \frac{1}{6} \pi h (3a^2 + 3b^2 + h^2)$ $M = 2\pi r h$ $r^2 = a^2 + \left( \frac{a^2 - b^2 - h^2}{2h} \right)^2$
Kugelausschnitt (Abb. 45)	Abb. 45. 	$V = \frac{2}{3} \pi r^2 h$ $= 2,0943951024 r^2 h$ $O = \pi r (2h + a)$
Kugelzweieck	$\varphi^0$ der Winkel, den die begrenzenden größten Kugelkreise bilden.	$M = \frac{\varphi^0}{90} \pi r^2$ $= 0,0349066 \varphi^0 r^2$

Körper	Bezeichnung der Abmessungen	Inhalt = $V$ Oberfläche = $O$ Mantelfläche = $M$
Kugeldreieck	$\varepsilon^0$ der sphärische Exzess, d. h. Ueberschufs der Winkelsumme über $180^\circ$	$M = \frac{\varepsilon^0}{180} \pi r^2$ $= 0,0174533 \varepsilon^0 r^2$
<b>8. Ellipsoid</b>	$a, b, c$ die 3 Halbachsen	$V = \frac{4}{3} \pi abc$
Umdrehungs-ellipsoid	1) wenn $2a$ die Drehachse: 2) „ $2b$ „ „ „	$V = \frac{4}{3} \pi ab^2$ $V = \frac{4}{3} \pi a^2 b$
<b>9. Umdrehungs-Paraboloid</b>	$r$ der Halbmesser der Grundfläche $h$ die Höhe	$V = \frac{1}{2} \pi r^2 h = 1,570796 r^2 h$ = der Hälfte des Kreis- zylinders für $r$ und $h$
Abgestumpftes Paraboloid	$R, r$ die Halbmesser der parallelen Endflächen $h$ die Höhe	$V = \frac{1}{2} \pi (R^2 + r^2) h$ = Mittelfläche $\times$ Höhe
<b>10. Zylindrischer Ring</b> (Abb. 46)	Abb. 46.  $d = 2r$	$V = 2 \pi^2 R r^2 = 19,739 R r^2$ $= \frac{1}{4} \pi^2 D d^2 = 2,4674 D d^2$ $O = 4 \pi^2 R r = 39,478 R r$ $= \pi^2 D d = 9,8696 D d$
<b>11. Kübel</b>	Endflächen beliebige Ellipsen mit den Halbachsen $a, b$ und $a_1, b_1$	$V = \frac{1}{6} \pi h [2(ab + a_1 b_1) + ab_1 + a_1 b]$
<b>12. Fafs</b>	$D$ der Durchmesser am Spund $d$ der Bodendurchmesser $h$ die Höhe	$V = \frac{1}{12} \pi h (2D^2 + d^2)$ angenähert für kreisförmige Dauben $V = \frac{1}{15} \pi h (2D^2 + Dd + \frac{3}{4} d^2)$ genau für parabolische Dauben
<b>13. Kappengewölbe</b> (preussisches)	$s$ die halbe Spannweite $r$ der innere Gewölbehalmesser $\delta$ die Gewölbestärke $h$ die Pfeilhöhe $l$ die Länge des Gewölbes	$V = \frac{\varphi^0 \pi}{360} (2r\delta + \delta^2) l,$ wenn $\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \frac{s}{r-h}$
<b>14. Kreuzgewölbe</b> über dem Rechtecke $2S \times 2s$	$s, r, \delta, h, 2S$ (statt $l$ ) und $\varphi$ die Bezeichnungen unter 13. für die eine Kappe $S, R, A, h, 2s, \psi$ dieselben Abmessungen für die andere Kappe.	$V = \frac{\varphi^0 \pi}{360} (2r\delta + \delta^2) S$ $+ \frac{\psi^0 \pi}{360} (2R A + A^2) s$ $\left( \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \frac{s}{r-h}; \operatorname{tg} \frac{\psi}{2} = \frac{S}{R-h} \right).$

15. Wird von der Kugelzone (S. 139) der abgestumpfte Kegel mit den Halbmessern  $a$  und  $b$  der Endflächen und der Höhe  $h$  fortgenommen, so ist, wenn  $s$  die Kegelseite, der Inhalt des übrigbleibenden Ringes,  $V = \frac{1}{6}\pi h s^2$ .

16. **Prismatoide**, d. s. Körper, begrenzt von zwei parallelen Grundflächen  $F_0$  und  $F_2n$  und beliebig vielen Seitenflächen (Dreiecken, Trapezen, Parallelogrammen und windschiefen Flächen) werden nach der Simpsonschen Regel (S. 136) berechnet:  $V = \frac{1}{6} H (F_0 + 4 F_m + F_2n)$ .

Beispiele: 1. Sind bei einem **Obelisk** von der Höhe  $h$  (vgl. S. 138) die Grundflächen Trapeze mit den Mittelparallelen  $m$  und  $m_1$  und den Höhen  $c$  und  $c_1$ , so ist

$$V = \frac{1}{6} h [(2m + m_1)c + (2m_1 + m)c_1] \\ = \frac{1}{6} h [mc + (m + m_1)(c + c_1) + m_1c_1].$$

2. **Wegerampe**. Ist  $h$  die Höhe des Hauptdammes,  $b$  die Wegebreite der Rampe,  $1:n$  das Neigungsverhältnis der Rampe,  $1:m$  das Böschungsverhältnis des Hauptdammes und der Rampe, so ist

$$V = \frac{1}{6} h^2 (n - m) [3b + 2hm(1 - m:n)],$$

z. B. ist für  $n = 45$  und  $m = 1,5$ :  $V = 21,75 h^2 (b + 0,9667 h)$ .

17. **Guldinsche (Pappussche) Regeln.\***

1. Bezeichnet

$s$  die Länge einer Kurve, die sich um eine in ihrer Ebene liegende, sie nicht schneidende Achse dreht,

$x_0$  den Abstand ihres Schwerpunktes von der Achse,

so ist der Flächeninhalt der erzeugten **Umdrehungsfläche**

$$M = 2\pi x_0 s \\ = \text{Weg des Schwerpunktes} \times \text{Länge der Kurve.}$$

2. Bezeichnet

$F$  den Inhalt einer ebenen Fläche, die sich um eine in ihrer Ebene liegende, sie nicht schneidende Achse dreht,

$x_0$  den Abstand ihres Schwerpunktes von der Achse,

so ist der Inhalt des erzeugten **Umdrehungskörpers**

$$V = 2\pi x_0 F \\ = \text{Weg des Schwerpunktes} \times \text{Inhalt der Fläche.}$$

3. Für zwei parallele Umdrehungsachsen im Abstand  $a$  ist allgemein, wenn sich  $M_1$  und  $V_1$  auf die eine,  $M_2$  und  $V_2$  auf die andere Achse beziehen,

$$M_1 = 2\pi a s \pm M_2 \quad \text{und} \quad V_1 = 2\pi a F \pm V_2.$$

Hierbei gilt  $-$ , wenn  $s$  oder  $F$  zwischen den parallelen Achsen liegt; im andern Falle gilt  $+$ .

4. Ist allgemein  $y = f(x)$  die Gleichung der Meridianlinie in bezug auf die Umdrehungsachse als  $x$ -Achse und sind  $M$  und  $V$  von zwei, in den Abständen  $x_1$  und  $x_2$  vom Anfangspunkte der Koordinaten zur  $x$ -Achse winkelrecht gelegten Ebenen begrenzt, so ist

$$M = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} y ds \quad \text{und} \quad V = \pi \int_{x_1}^{x_2} y^2 dx.$$

\*) Vgl. auch Chr. Nehls, Ueber den Flächen- und Rauminhalt der durch Bewegung von Kurven und Flächen erzeugten Flächen- und Raumgrößen, Archiv der Mathematik und Physik, 2. Reihe, Bd. XIII, 1894.

$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$  ist das Differential des Bogens der Meridianlinie.

5. Stellen sich  $s$  oder  $F$  als algebraische Summen von Kurvenlängen  $s_1, s_2, s_3 \dots$  oder von Flächeninhalten  $F_1, F_2, F_3 \dots$  dar, deren Schwerpunktsabstände  $x_{01}, x_{02}, x_{03} \dots$  von der Umdrehungsachse bekannt sind, so ist

$$M = 2\pi (s_1 x_{01} + s_2 x_{02} + s_3 x_{03} + \dots) \text{ bzw.} \\ V = 2\pi (F_1 x_{01} + F_2 x_{02} + F_3 x_{03} + \dots).$$

6. Für Teile der Kreisdrehung sind (in 1. bis 5.) die Werte von  $M$  und  $V$  mit  $\varphi^0:360$  zu multiplizieren, wenn  $\varphi^0$  der Zentriwinkel der Drehung in Grad ist. (Vrgl. z. B. **13.** S. 140.)

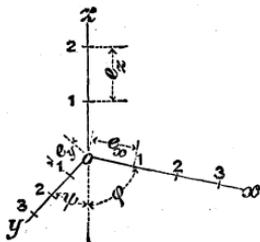
7. Die vorstehenden Regeln sind für jede beliebige Bewegung des Schwerpunktes sinngemäß anwendbar, wenn die Ebene der sich bewegenden Fläche stets zur Richtung der Bewegung winkelrecht bleibt.

## X. PARALLEL-PERSPEKTIVE.

1. Um einen körperlichen Gegenstand durch eine Zeichnung darzustellen, die einen möglichst vollständigen Einblick in die Gestalt und den Zusammenhang seiner Teile gewährt, bedient man sich mit Vorteil der Parallelprojektion, die zwar weniger naturgetreue, aber leichter herstellbare Bilder liefert als die Zentralprojektion. Die Herstellung geschieht am besten nach dem sogen. **axonometrischen Verfahren**. Man nimmt drei zueinander rechtwinklige Achsen, auf die man den Körper bezieht, und in jeder einen Maßstab an, projiziert die Achsen samt den Maßstäben und trägt alle Strecken, die im Körper einer Achse parallel sind, in der Zeichnung parallel der Projektion jener Achse nach dem zugehörigen Maßstabe auf. Die  $z$ -Achse wird lotrecht genommen.

2. Bei **schiefer Projektion** können die Achsenrichtungen und die Längeneinheiten der Maßstäbe beliebig angenommen werden, vorausgesetzt, daß höchstens zwei Achsenrichtungen gleich sind und die Längeneinheit höchstens eines Achsenmaßstabes null ist (Satz von Pohlke).

Abb. 47.



Einfache Fälle (Bezeichnungen s. Abb. 47):

$$1) \quad e_x = e_z = 1; \quad e_y = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}; \\ \varphi = 90^\circ; \quad \psi = 45^\circ, 60^\circ.$$

(Kavalierperspektive.)

$$2) \quad e_x = e_y = e_z = 1; \quad \varphi + \psi = 90^\circ. \\ \text{(Militärperspektive).}$$

3. Treten an dem Körper nicht blofs gerade Linien und ebene Flächen auf, sondern Kreise in verschiedenen Stellungen, Kreiszyylinder-, Kreiskegel-, Kugel- und beliebige Umdrehungsflächen, so ist **rechtwinklige Projektion** vorzuziehen. Bei dieser sind die Verhältnisse der Längeneinheiten der Achsenmafsstäbe durch die Achsenrichtungen und umgekehrt letztere durch erstere bestimmt. In folgender Tafel sind für die gebräuchlichsten Verhältnisse\*) die nötigen Angaben zusammengestellt. Es bezeichnet

$e$  die Längeneinheit des wahren Mafsstabes der Zeichnung,

$e_x, e_y, e_z$  die Längeneinheiten der Achsenmafsstäbe,

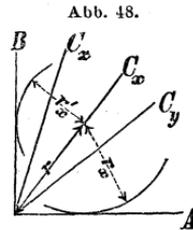
$\varphi$  und  $\psi$  die spitzen Winkel zwischen der  $x$ - bzw.  $y$ -Achse und der  $z$ -Achse.

**Rechtwinklige Projektionen.**

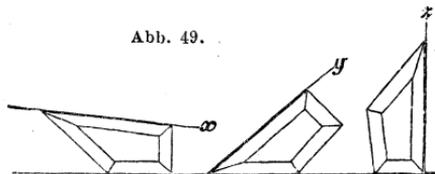
Art der Projektion.	$e_x : e_y : e_z$	$e_z : e$	ctg $\varphi$	ctg $\psi$ (angenähert)
Isometrische Projektion.	1 : 1 : 1	0,8165	$\varphi = \psi = 60^\circ$	
Dimetrische Projektionen.	1 : $\frac{1}{3}$ : 1	0,9428	1 : 8	7 : 8
	1 : $\frac{1}{3}$ : 1	0,9733	1 : 18	17 : 18
	1 : $\frac{1}{4}$ : 1	0,9847	1 : 32	31 : 32
Trimetrische Projektionen.	$\frac{5}{6} : \frac{2}{3} : 1$	0,9670	1 : 5	1 : 3
	$\frac{9}{10} : \frac{1}{2} : 1$	0,9853	1 : 11	1 : 3

Die letzte Spalte dient zur Konstruktion der Achsenrichtungen.

4. Man bezeichne mit  $r_x, r_y, r_z$  die Strecken, die, mit dem  $x$ -,  $y$ -,  $z$ -Mafsstabe gemessen, die gleiche Längenzahl  $r$  ergeben (so dafs also  $r_z = r(e_z : e)$ , usw.). Ohne Benutzung der Achsenmafsstäbe können diese Strecken auch durch nebenstehende Verkleinerungsvorrichtung (Abb. 48) gefunden werden, in der die Strahlen  $C_x, C_y, C_z$  gegen  $A$  unter solchen Winkeln gezogen sind, dafs ihre Sinus die Werte  $e_x : e, e_y : e, e_z : e$  haben.



\*) Für gewöhnliche Fälle empfiehlt sich die Anwendung der Projektion 1 :  $\frac{1}{2}$  : 1 der einfachsten nächst der isometrischen Projektion, die meist unschöne Bilder liefert. Es bringt grossen Gewinn an Zeit, wenn man die Parallelen zu den Achsen mittels eines besonderen, hierneben in den drei zu benutzenden Stellungen abgebildeten Schiebevierecks (Abb. 49) zeichnet.



## ZWEITER ABSCHNITT.

## A. MECHANIK STARRER KÖRPER.

I. GEOMETRISCHE BEWEGUNGSLEHRE.  
(PHORONOMIE.)

## A. Bewegung eines Punktes.

## I. Geradlinige Bewegung.

## a. Allgemeines.

1. Auf der Bahn des Punktes wird ein Nullpunkt  $O$  und eine positive Richtung gewählt (im Sinne der Bewegung, wenn diese ihre Richtung nicht wechselt). Die Bewegung ist bestimmt, sobald die Entfernung des bewegten Punktes von  $O$  für jede Zeit  $t$  bekannt ist:  $s = f(t)$  (**Stellungsgleichung**).

Trägt man auf der Bahn die Stellen ein, wo sich der Punkt zur Zeit  $t = 0, 1, 2 \dots sk$  (wenn die  $sk$  als Zeiteinheit gewählt wird) befindet, so erhält man die **Zeiteilung** auf der Bahn.

2. Zeichnerisch wird der Verlauf der Bewegung dargestellt, indem man die Wege  $s$  als Funktion der Zeiten  $t$  in ein rechtwinkliges Koordinatennetz einträgt: **Zeit-Weg-Kurve** (ZWK) (s. Abb. 1, S. 145).

3. Unter der **Geschwindigkeit**  $v$  eines Punktes zur Zeit  $t$  versteht man den Bruch

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{\text{im Zeitelement zurückgelegter Weg}}{\text{Zeitelement}},$$

wofür aus der Zeit-Weg-Kurve

$v = \operatorname{tg} \alpha =$  Ansteigungsverhältnis der ZWK folgt (s. Abb. 1).

Werden die Werte  $v$  als Funktion der Zeit  $t$  in einem rechtwinkligen Koordinatennetz aufgetragen, so ergibt sich die **Zeit-Geschwindigkeits-Kurve** (ZGK) (s. Abb. 1).

Mißt man die Wege in  $m$ , die Zeiten in  $sk$ , so erhält man die Geschwindigkeiten in  $m/sk$  (für Eisenbahngeschwindigkeiten üblich:  $km/st$ ; für Krangeschwindigkeiten:  $m/min$ ; im CGS-System:  $cm/sk$ ).

4. Unter der **Beschleunigung**  $p$  eines Punktes zur Zeit  $t$  versteht man den Bruch

$$p = \frac{dv}{dt} = \frac{\text{Zunahme der Geschwindigkeit im Zeitelement}}{\text{Zeitelement}} = \frac{d^2s}{dt^2},$$

wofür aus der Zeit-Geschwindigkeits-Kurve

$$p = \operatorname{tg} \beta = \text{Ansteigungsverhältnis der ZGK folgt (s. Abb. 1)}.$$

Werden die Werte  $p$  als Funktion der Zeit  $t$  in einem rechtwinkligen Koordinatennetz aufgetragen, so ergibt sich die **Zeit-Beschleunigungs-Kurve** (ZBK) (s. Abb. 1).

Mißt man die Wege in  $m$ , die Zeiten in  $sk$ , so erhält man die Beschleunigung in  $m/sk^2$  (im CGS-System [s. S. 165] in  $cm/sk^2$ ).

5. Bei einer beliebigen geradlinigen Bewegung bestehen demnach die folgenden „**phoronomischen Grundgleichungen**“:

Die Differentialgleichungen

$$v = \frac{ds}{dt} \quad p = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$$

und die aus den beiden ersten folgende

$$v dv = p ds$$

sowie die zugehörigen Integralgleichungen

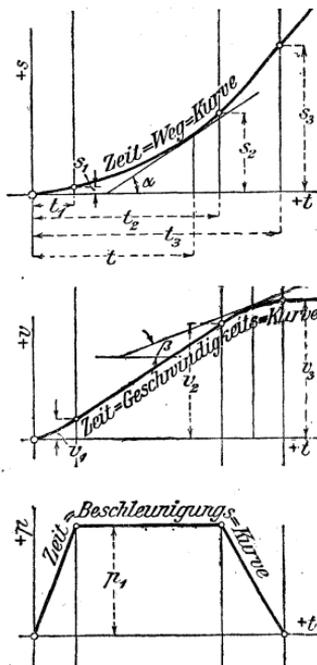
$$s - s_0 = \int_0^t v dt$$

$$v - v_0 = \int_0^t p dt$$

$$\frac{v^2}{2} - \frac{v_0^2}{2} = \int_{s_0}^s p ds.$$

Nach den beiden ersten Integralgleichungen sind Weg bzw. Geschwindigkeit gleich der Fläche aus der ZGK bzw. ZBK, begrenzt durch die Ordinaten für  $t=0$  und  $t=t$ .

Abb. 1.



## b. Grundaufgaben.

1. Gegeben:  $s = f(t)$ ;

Gesucht:  $v, p$ :

$$v = \frac{ds}{dt}$$

$$p = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$$

2. **Gegeben:**  $v = f(t)$ ;  
**Gesucht:**  $s, p$ :  $s = s_0 + \int_0^t v dt$   $p = \frac{dv}{dt}$
3. **Gegeben:**  $v = f(s)$ ;  
**Gesucht:**  $p, t$ :  $t = \int_{s_0}^s \frac{ds}{v}$   $p = v \frac{dv}{ds}$
4. **Gegeben:**  $p = f(t)$ ;  
**Gesucht:**  $s, v$ :  $v = v_0 + \int_0^t p dt$   $s = s_0 + \int_0^t v dt$
5. **Gegeben:**  $p = f(s)$ ;  
**Gesucht:**  $v, t$ :  $v = \sqrt{v_0^2 + 2 \int_{s_0}^s p ds}$   $t = \int_{s_0}^s \frac{ds}{v}$
6. **Gegeben:**  $p = f(v)$ ;  
**Gesucht:**  $s, t$ :  $s = s_0 + \int_{v_0}^v \frac{v}{p} dv$   $t = \int_{v_0}^v \frac{dv}{p}$ .

### c. Besondere Bewegungen.

1. Ist die Geschwindigkeit unveränderlich, die Beschleunigung also null, so vollführt der Punkt eine **gleichförmige Bewegung**.

Die ZWK ist eine zur Zeitachse unter dem Winkel  $\alpha$  geneigte Gerade,

die ZGK eine zur Zeitachse parallele Gerade.

$$p = 0$$

$$v = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = \text{tg } \alpha = \text{unveränderlich}$$

$$s = s_0 + vt.$$

(Anwendung der ZWK: graphische Eisenbahnfahrpläne.)

2. Ist die Beschleunigung (oder Verzögerung,  $p$  negativ) unveränderlich (d. h. die Geschwindigkeits-Zu- oder Abnahme in den einzelnen Zeiteinheiten unveränderlich), so vollführt der Punkt eine **gleichmäßig beschleunigte** (oder **verzögerte**) **Bewegung**.

Die ZWK ist eine Parabel,

die ZGK eine zur Zeitachse unter dem Winkel  $\beta$  geneigte Gerade und

die ZBK eine zur Zeitachse parallele Gerade.

$$p = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \text{tg } \beta = \text{unveränderlich}$$

$$v = v_0 + pt$$

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} p t^2 = s_0 + \frac{v_0 + v}{2} t \text{ und}$$

$$\frac{v^2}{2} - \frac{v_0^2}{2} = p(s - s_0).$$

### d. Beispiele.

1. **Anfahren eines Straßenbahnwagens, einer Fördermaschine oder dgl.**, s. Abb. 1, S. 145.

1. Abschnitt 0 bis  $t_1$ : die Beschleunigung wächst von 0 bis zu einem Größtwert, etwa nach einer geraden Linie (ZGK eine Parabel, ZWK eine Kurve dritter Ordnung).

2. Abschnitt  $t_1$  bis  $t_2$ : Beschleunigung unveränderlich (ZGK eine Gerade, ZWK eine Parabel, vgl. c., 2.).

3. Abschnitt  $t_2$  bis  $t_3$ : die Beschleunigung nimmt von ihrem Größtwert bis auf 0 ab, etwa nach einer geraden Linie (ZGK und ZWK wie unter 1.).

Damit ist der Anlauf beendet. Es folgt der Beharrungszustand (Beschleunigung = 0; Geschwindigkeit unveränderlich; ZWK eine gegen die Zeitachse geneigte Gerade, vgl. c., 1.).

Vielfach begnügt man sich bei der Beurteilung der Anlaufverhältnisse mit den einfacheren Diagrammen nach Abb. 2.

2. **Periodische Bewegung (Grundgesetz für elastische Schwingungen**, s. auch S. 205) (s. Abb. 3) nach dem Gesetz  $s = r \sin(\omega t + \varphi)$ , woraus

$$v = \frac{ds}{dt} = \omega r \cos(\omega t + \varphi)$$

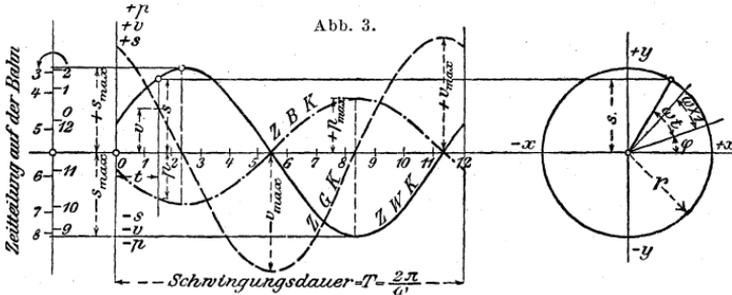
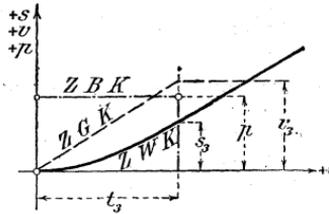
$$p = \frac{dv}{dt} = -\omega^2 r \sin(\omega t + \varphi) = -\omega^2 s,$$

d. h. proportional der Ablenkung aus der Mittellage.

Wenn  $\omega t$  um  $2\pi$  gewachsen ist, d. h. nach Verlauf der Zeit  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ , nehmen  $s$ ,  $v$  und  $p$  wieder ihre ursprünglichen Werte an.  $T$  heißt die **Schwingungsdauer**.

Die Bewegung wird veranschaulicht durch

Abb. 2.



eine um einen Endpunkt kreisende Strecke  $r$ , die in jeder Zeiteinheit den Winkel  $\omega$  zurücklegt. Die Projektion dieser Strecke auf die  $y$ -Achse ist gleich dem Wege  $s$  (vgl. Polardiagramme der Wechselstromtechnik und kreisende Bewegung eines Punktes, S. 149).

3. Eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung ist die des **freien Falls** (im luftleeren Raum). Näheres hierüber s. S. 204.

## II. Krummlinige Bewegung.

### a. Allgemeine Gesetze.

1. Wie bei der geradlinigen Bewegung (s. S. 144) ist die **Geschwindigkeit**  $v = \frac{ds}{dt}$ ; ihre Richtung fällt in die Bahntangente.

Trägt man von einem beliebigen Punkt  $O$  als Pol aus die Geschwindigkeiten nach Größe und Richtung auf, so ergeben die Endpunkte den **Geschwindigkeitsriss (Hodograph)** (s. Abb. 4b).

(Anwendung des Geschwindigkeitsrisses nur für ebene krummlinige Bewegung, da er für Bewegungen im Raum eine Raumkurve wird und eine einfache Darstellung nicht ermöglicht.)

2. Die Beschleunigung für das Bahnelement  $ds$  ist (abweichend

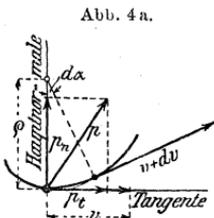


Abb. 4a.

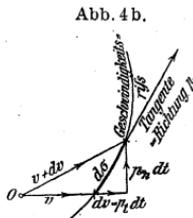


Abb. 4b.

von der geradlinigen Bewegung, s. S. 144) die Änderung der 'Geschwindigkeit' nach Größe **und** Richtung dividiert durch  $dt$ , also nach

$$\text{Abb. 4b } p = \frac{d\sigma}{dt}$$

Die Tangenten des

Geschwindigkeitsrisses geben die Richtungen der augenblicklichen Beschleunigungen an; diese fällt also im allgemeinen nicht mit der in der Tangente an die Bahn liegenden Richtung der Geschwindigkeit zusammen.

3. Zerlegt man die Beschleunigung  $p$  in einem bestimmten Bahnpunkte mit Hilfe eines Parallelogramms (s. Abb. 4a) in Richtung der Tangente und der Hauptnormalen (s. Abschn. Mathem., S. 94) in diesem Punkte, so daß die Gesamtbeschleunigung die Diagonale des Rechtecks bildet, dann ergeben sich aus Abb. 4 durch einfache mathematische Beziehungen (mit  $\cos d\alpha = 1$ ,  $\sin d\alpha = d\alpha$ )

die **Tangentialbeschleunigung**  $p_t = \frac{dv}{dt}$  { Größenänderung der Geschwindigkeit,

die **Normalbeschleunigung**  $p_n = \frac{v^2}{\rho}$  { Richtungsänderung der Geschwindigkeit, ( $\rho =$  erster Krümmungshalbmesser, s. Abschn. Mathem. S. 95).

und  $p^2 = p_t^2 + p_n^2$

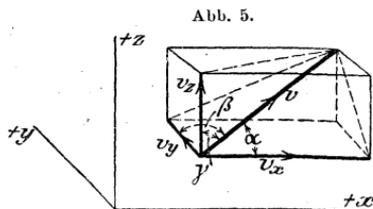


Abb. 5.

Die Normalbeschleunigung ist stets zum **Krümmungsmittelpunkte** der Bahnkurve hin gerichtet.

Ist die Bahn eine ebene Kurve, so liegen  $p_t$  und  $p_n$  in der Ebene der Kurve; ist die Bahn doppelt gekrümmt, so liegen  $p_t$  und  $p_n$  in der Krümmungsebene (s. Abschnitt Mathem., S. 119).

Die letzte phoronomische Grundgleichung (s. Ia 5 S. 145) nimmt bei der krummlinigen Bewegung die Form an:

$$\frac{v^2}{2} - \frac{v_0^2}{2} = \int_{s_0}^s p_t ds = \int_{s_0}^s p \cdot \cos \varphi \cdot ds \quad \varphi = \sphericalangle(p, ds)$$

4. Wird die Geschwindigkeit  $v$  oder die Beschleunigung  $p$  eines Punktes unter Annahme eines rechtwinkligen Koordinatennetzes, das auch der Gleichung der Bahnkurve zugrunde liegt, auf die drei Achsen  $x$ ,  $y$ ,  $z$  im Raume (in der Ebene  $x, y$ ) projiziert, d. i. mit Hilfe eines Rechtskants (rechtwinkligen Parallelepipeds) in Richtung der Achsen zerlegt, so gilt für die projizierten Bewegungen (s. Abb. 5)

$$v_x = \frac{dx}{dt} = v \cos \alpha \quad v_y = \frac{dy}{dt} = v \cos \beta \quad v_z = \frac{dz}{dt} = v \cos \gamma$$

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$$

$$p_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = p \cos \lambda \quad p_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} = p \cos \mu$$

$$p_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2} = p \cos \nu$$

$$p^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2.$$

( $\lambda, \mu, \nu$  sind die Winkel zwischen  $p$  und den Achsen.)

### b. Kreisende Bewegung.

1. Bewegt sich ein Punkt auf einem Kreise vom Halbmesser  $r$  (s. Abb. 6), und beschreibt der Fahrstrahl im Zeitelement  $dt$  den Winkelweg  $d\gamma$  (in Bogenmaß, d. h. als Bogen am Halbmesser 1 gemessen), so ist

$$\text{die Winkelgeschwindigkeit} \quad \omega = \frac{d\gamma}{dt}$$

$$\text{die Winkelbeschleunigung} \quad \varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\gamma}{dt^2}.$$

Es ist

der zurückgelegte Weg

$$s = r \cdot \gamma$$

die Umfangsgeschwindigkeit

$$v = \frac{ds}{dt} = r \frac{d\gamma}{dt} = r\omega$$

die Tangentialbeschleunigung

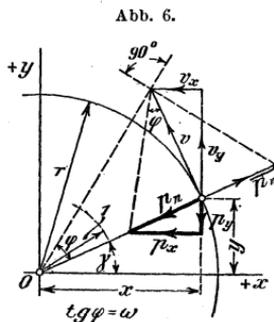
$$p_t = \frac{d^2s}{dt^2} = r \frac{d^2\gamma}{dt^2} = r \frac{d\omega}{dt} = r\varepsilon$$

die Normalbeschleunigung

$$p_n = \frac{v^2}{r} = r\omega^2.$$

Mißt man die Zeit in **sk**, die Winkel in **Bogenmaß** (unbenannte Zahl), so erhält man die Winkelgeschwindigkeiten in Einheiten  $1/\text{sk}$  und die Winkelbeschleunigungen in Einheiten  $1/\text{sk}^2$ .

2. Bei **gleichförmiger Drehbewegung** werden in gleichen Zeiteinheiten gleiche Winkelwege zurückgelegt, also  $\varepsilon = 0$ . Es wird meist



mit der **Umlaufzahl** gerechnet, die fast stets auf die **Minute** bezogen wird. Bei  $n$  Uml./min wird dann die

$$\text{Winkelgeschwindigkeit } \omega = \frac{2\pi n}{60} = 0,10472 n \left( \frac{1}{\text{sk}} \right)$$

und die **Umlaufzahl**  $n = \frac{60\omega}{2\pi} = 9,54930 \cdot \omega \left( \frac{1}{\text{min}} \right)$ .

Tafel über die zu bestimmten Umlaufzahlen gehörenden Winkelgeschwindigkeiten s. f. S.

Ferner wird die

$$\text{Geschwindigkeit } v = \frac{ds}{dt} = r \frac{d\gamma}{dt} = r \omega$$

$$\text{Tangentialbeschleunigung } p_t = 0$$

$$\text{Normal- (Zentripetal-) Beschleunigung } p_n = \frac{v^2}{r} = r \omega^2$$

und (vgl. a., 4. S. 149 und Abb. 6)

$$\begin{array}{ll} x = r \cos \gamma & y = r \sin \gamma \\ v_x = -\omega r \sin \gamma & v_y = +\omega r \cos \gamma \\ p_x = -\omega^2 r \cos \gamma = -\omega^2 x & p_y = -\omega^2 r \sin \gamma = -\omega^2 y \end{array}$$

$$\text{Gesamtbeschleunigung } p = p_n = \omega^2 \sqrt{x^2 + y^2} = r \omega^2$$

**Geschwindigkeitsrifs:** Kreis mit dem Halbmesser  $r \omega$ .

3. Bei ungleichförmiger Drehbewegung mit solcher Gesetzmäßigkeit, dafs bestimmten gleichen Zeiten gleiche Wege und gleichen Stellungen gleiche Geschwindigkeiten entsprechen, werden oft lediglich die gröfsten Abweichungen von einer gleichförmigen Drehbewegung durch den **Ungleichförmigkeitsgrad**  $\delta$  (s. auch Abschn. Maschinenteile) berücksichtigt. Dieser ist bestimmt durch

$$\delta = \frac{v_{\max} - v_{\min}}{v} = \frac{\omega_{\max} - \omega_{\min}}{\omega},$$

worin  $v$  und  $\omega$  die Geschwindigkeit und Winkelgeschwindigkeit der zugrunde gelegten gleichförmigen Drehbewegung,  $v_{\max}$  und  $\omega_{\max}$  die gröfsten,  $v_{\min}$  und  $\omega_{\min}$  die kleinsten Werte der tatsächlichen Drehbewegung bezeichnen.

Man drückt auch die Ungleichförmigkeit der Bewegung durch die Aenderung des Winkels aus, der von einem fest mit dem Körper verbundenen Halbmesser und einem mit gleichförmiger Bewegung mit  $\omega = \pi n : 30$  umlaufenden Halbmesser gebildet wird.

### III. Zusammensetzung der Bewegungen.

1. Bewegt sich ein Punkt  $m$  auf einer Linie (**Führungslinie**), die selbst in Bewegung begriffen ist, so vollführt er eine von den beiden Teilbewegungen (Bewegung von  $m$  in der Führungslinie und Bewegung der Führungslinie selbst) verschiedene **zusammengesetzte** oder **Mittelbewegung**.

Hierauf kann auch der Fall zurückgeführt werden, dafs ein Punkt gleichzeitig zwei Bewegungsvorgängen unterliegt (z. B. Wurfbewegung s. S. 208; gleichförmige Bewegung und gleichförmig beschleunigte Fallbewegung; man denkt sich die Grade der gleichförmigen Bewegung entsprechend der Fallbewegung verschoben).

**Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  für  $n = 0$  bis  $n = 509$  Umläufe  
in der Minute.**

$n$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0,0000	0,1047	0,2094	0,3142	0,4189	0,5236	0,6283	0,7330	0,8378	0,9425
10	1,0472	1,1519	1,2566	1,3614	1,4661	1,5708	1,6755	1,7802	1,8850	1,9897
20	2,0944	2,1991	2,3038	2,4086	2,5133	2,6180	2,7227	2,8274	2,9322	3,0369
30	3,1416	3,2463	3,3510	3,4558	3,5605	3,6652	3,7699	3,8746	3,9794	4,0841
40	4,1888	4,2935	4,3982	4,5029	4,6077	4,7124	4,8171	4,9218	5,0265	5,1313
50	5,2360	5,3407	5,4454	5,5501	5,6549	5,7596	5,8643	5,9690	6,0737	6,1785
60	6,2832	6,3879	6,4926	6,5973	6,7021	6,8068	6,9115	7,0162	7,1209	7,2257
70	7,3304	7,4351	7,5398	7,6445	7,7493	7,8540	7,9587	8,0634	8,1681	8,2729
80	8,3776	8,4823	8,5870	8,6917	8,7965	8,9012	9,0059	9,1106	9,2153	9,3201
90	9,4248	9,5295	9,6342	9,7389	9,8437	9,9484	10,0531	10,1578	10,2625	10,3673
100	10,472	10,577	10,681	10,786	10,891	10,996	11,100	11,205	11,310	11,414
110	11,519	11,624	11,729	11,833	11,938	12,043	12,147	12,252	12,357	12,462
120	12,566	12,671	12,776	12,881	12,985	13,090	13,195	13,299	13,404	13,509
130	13,614	13,718	13,823	13,928	14,032	14,137	14,242	14,347	14,451	14,556
140	14,661	14,765	14,870	14,975	15,080	15,184	15,289	15,394	15,499	15,603
150	15,708	15,813	15,917	16,022	16,127	16,232	16,336	16,441	16,546	16,650
160	16,755	16,860	16,965	17,069	17,174	17,279	17,383	17,488	17,593	17,698
170	17,802	17,907	18,012	18,117	18,221	18,326	18,431	18,535	18,640	18,745
180	18,850	18,954	19,059	19,164	19,268	19,373	19,478	19,583	19,687	19,792
190	19,897	20,001	20,106	20,211	20,316	20,421	20,525	20,630	20,735	20,839
200	20,944	21,049	21,153	21,258	21,363	21,468	21,572	21,677	21,782	21,886
210	21,991	22,096	22,201	22,305	22,410	22,515	22,619	22,724	22,829	22,934
220	23,083	23,143	23,248	23,353	23,457	23,562	23,667	23,771	23,876	23,981
230	24,086	24,190	24,295	24,400	24,504	24,609	24,714	24,819	24,923	25,028
240	25,133	25,237	25,342	25,447	25,552	25,656	25,761	25,866	25,970	26,075
250	26,180	26,285	26,389	26,494	26,599	26,704	26,808	26,913	27,018	27,122
260	27,227	27,332	27,437	27,541	27,646	27,751	27,855	27,960	28,065	28,170
270	28,274	28,379	28,484	28,588	28,693	28,798	28,903	29,007	29,112	29,217
280	29,322	29,426	29,531	29,636	29,740	29,845	29,950	30,055	30,159	30,264
290	30,369	30,473	30,578	30,683	30,788	30,892	30,997	31,102	31,206	31,311
300	31,416	31,521	31,625	31,730	31,835	31,940	32,044	32,149	32,254	32,358
310	32,463	32,568	32,673	32,777	32,882	32,987	33,091	33,196	33,301	33,406
320	33,510	33,615	33,720	33,824	33,929	34,034	34,139	34,243	34,348	34,453
330	34,558	34,662	34,767	34,872	34,976	35,081	35,186	35,291	35,395	35,500
340	35,605	35,709	35,814	35,919	36,024	36,128	36,233	36,338	36,442	36,547
350	36,652	36,757	36,861	36,966	37,071	37,176	37,280	37,385	37,490	37,594
360	37,699	37,804	37,909	38,013	38,118	38,223	38,327	38,432	38,537	38,642
370	38,746	38,851	38,956	39,060	39,165	39,270	39,375	39,479	39,584	39,689
380	39,794	39,898	40,003	40,108	40,212	40,317	40,422	40,527	40,631	40,736
390	40,841	40,945	41,050	41,155	41,260	41,364	41,469	41,574	41,678	41,783
400	41,888	41,993	42,097	42,202	42,307	42,412	42,516	42,621	42,726	42,830
410	42,935	43,040	43,145	43,249	43,354	43,459	43,563	43,668	43,773	43,878
420	43,982	44,087	44,192	44,296	44,401	44,506	44,611	44,715	44,820	44,925
430	45,029	45,134	45,239	45,344	45,448	45,553	45,658	45,763	45,867	45,972
440	46,077	46,181	46,286	46,391	46,496	46,600	46,705	46,810	46,914	47,019
450	47,124	47,229	47,333	47,438	47,543	47,647	47,752	47,857	47,962	48,066
460	48,171	48,276	48,381	48,485	48,590	48,695	48,799	48,904	49,009	49,114
470	49,218	49,323	49,428	49,532	49,637	49,742	49,847	49,951	50,056	50,161
480	50,265	50,370	50,475	50,580	50,684	50,789	50,894	50,999	51,103	51,208
490	51,313	51,417	51,522	51,627	51,732	51,836	51,941	52,046	52,150	52,255
500	52,360	52,465	52,569	52,674	52,779	52,883	52,988	53,093	53,198	53,302

2. Jede Teilbewegung kommt voll zur Geltung und wird nicht von der anderen beeinflusst: **Prinzip der Unabhängigkeit.**

Konstruktion der Mittelbewegung s. Abb. 7 u. 8.  
 Abb. 7. Führungslinie erfährt eine **Schiebung** (s. S. 154),  
 Abb. 8. Führungslinie erfährt eine **Drehung**.

Abb. 7.

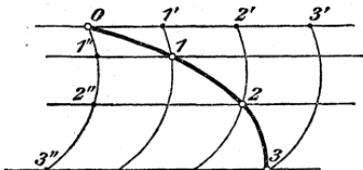
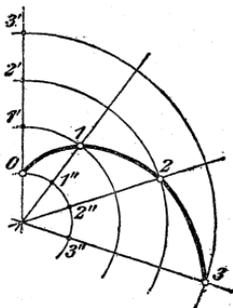


Abb. 8.



3. Die Geschwindigkeit der Mittelbewegung ist nach Größe und Richtung gleich der Diagonale des Parallelogramms aus den Geschwindigkeiten der beiden Teilbewegungen.

$$v = w + \rightarrow u$$

(geometrische Addition s. a. Abschn. Vektoranalysis).

$v$  = Geschwindigkeit der Mittelbewegung,

$w$  = Geschwindigkeit in der Führungslinie,

$u$  = Führungsgeschwindigkeit an der Stelle, die augenblicklich mit dem Punkte  $m$  zusammenfällt.

4.  $\alpha$ ) Erfährt die Führungslinie eine **Schiebung** (s. S. 154), so gilt für die Beschleunigung der Mittelbewegung ebenfalls das Parallelogrammgesetz.

$$p = j + \rightarrow f$$

( $p, j, f$  entsprechend den Geschwindigkeiten  $v, w, u$ ).

$\beta$ ) Erfährt die Führungslinie eine **Drehung** mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  und der Winkelbeschleunigung  $\varepsilon$  um eine feste Achse  $O$ , so gilt: Die Beschleunigung  $p$  der Mittelbewegung ist die geometrische Summe aus der Beschleunigung  $j$  in der Führungslinie, der Führungsbeschleunigung  $f$  an der Stelle, die augenblicklich mit dem Punkte  $m$  zusammenfällt, und der **Zusatzbeschleunigung**  $z$ .

Die Führungsbeschleunigung  $f$  ist nach II b 1, S. 149 die geometrische Summe aus  $f_m = r \cdot \omega^2$  und  $f_t = r \cdot \varepsilon$  ( $r$  = augenblicklicher Abstand  $m O$ ).

Die Zusatzbeschleunigung der Mittelbewegung,  $z$ , liegt in der durch  $m$  senkrecht zur Drehachse  $O$  gelegten Ebene  $E$ , hat die Größe  $2 w \sin \alpha \cdot \omega = 2 w' \cdot \omega$  [ $w'$  = Projektion von  $w$  auf  $E$ ;  $\alpha = \sphericalangle(w, O)$ ], steht senkrecht zu  $w'$  und setzt sich aus zwei gleichgroßen und gleichgerichteten Teilen  $w' \cdot \omega$  zusammen; der erste Teil rührt von der Drehung (Richtungsänderung) der Geschwindigkeit  $w'$ , der zweite von der Veränderung des Drehhalbmessers  $r$  her;  $z$  wirkt

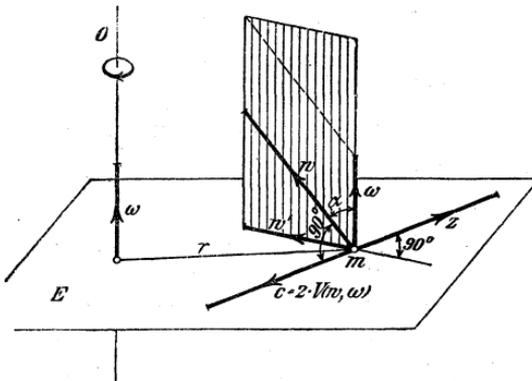
im Drehsinne bei Vergrößerung, gegen den Drehsinn bei Verkleinerung von  $r$ ;  $z$  ist entgegengesetzt gleich der Coriolisbeschleunigung (s. unter Relativbewegung (S. 154), demnach

$$p = j + \rightarrow f \rightarrow 2V(w, \omega) \quad (\text{vgl. Abb. 9}).$$

5. **Besondere Fälle:**  $\alpha$ ) Die Mittelbewegung zweier **geradliniger gleichförmiger Bewegungen** ist wieder eine geradlinige und gleichförmige Bewegung.

$\beta$ ) Die Mittelbewegung aus einer **geradlinigen gleichförmigen** und einer **geradlinigen gleichmäßig beschleunigten Bewegung** ist (wenn

Abb. 9.



ihre Richtungen nicht zusammenfallen) eine **krummlinige Bewegung** (Parabel). Vgl. Wurfbewegung, S. 208.

(Anwendung der allgemeinen Formeln: Turbinentheorie, Regulatorentheorie, Kreisbewegung).

#### IV. Relativbewegung.

1. Betrachtet man die im festen Raum vor sich gehende Bewegung eines Punktes  $m$  von einem beweglichen Raum (**Fahrzeug**) aus, so erhält man die **scheinbare** oder **Relativbewegung** im Gegensatz zur **wahren** oder **Absolutbewegung**.

An der Relativbewegung zwischen Fahrzeug und Punkt  $m$  ändert sich nichts, wenn dem Fahrzeug und der Absolutbahn von  $m$  ein und dieselbe Zusatzbewegung erteilt wird; nimmt man diese entgegengesetzt der Fahrzeugbewegung, so steht das Fahrzeug still, d. h.

die Relativbewegung ist die Mittelbewegung aus Absolutbewegung und **umgekehrter** Fahrzeugbewegung.

2. Nach III, s. oben, gilt also für die Relativgeschwindigkeit:  $w = v \rightarrow u$  (geometrische Subtraktion) ( $v =$  Absolut-,  $u =$  Fahrzeuggeschwindigkeit)

und für die Relativbeschleunigung bei Drehung des Fahrzeuges:

$$j = p \rightarrow f \rightarrow c \quad (p = \text{Absolut-, } f = \text{Fahrzeugbeschleunigung}).$$

Die **Coriolisbeschleunigung** oder Zusatzbeschleunigung der Relativbewegung,  $c$ , ist entgegengesetzt gleich der Zusatzbeschleunigung der Mittelbewegung,  $z$ , (s. oben unter III) und gleich dem doppelten Vektorprodukt aus Relativgeschwindigkeit  $w$  und Drehvektor  $\omega$  (in dieser Reihenfolge, s. Abb. 9)

$$c = 2 \cdot V(w, \omega).$$

(Drehvektor s. B I 2, unten, Vektorprodukt s. Abschn. Vektorrechnung oder Momente, S. 171 unter 6).

Erfährt das Fahrzeug eine Schiebung ( $\omega = 0$ ), so fällt die Coriolisbeschleunigung fort.

## B. Bewegung starrer Körper.

Starr heißt ein Körper, wenn die gegenseitige Entfernung aller seiner Punkte unveränderlich ist.

### I. Elementarbewegungen.

1. Bewegt sich ein Körper so, daß alle seine Punkte kongruente und parallele Bahnen beschreiben, so erfährt der Körper eine **Schiebung** (fortschreitende Bewegung, Translation).

Ist die Bewegung unendlich klein (Weg  $= ds$ , Zeit  $= dt$ ), so heißt sie **Elementarschiebung**. Es ist

$$\frac{ds}{dt} = v_s = \text{Schiebungs- oder Gleitgeschwindigkeit.}$$

Die Elementarschiebung ist vollständig bestimmt durch den **Schiebungsvektor**, d. i. eine an einem beliebigen Punkte des starren Körpers angetragene Strecke, die nach Größe, Richtung und Pfeilsinn die Geschwindigkeit  $v_s$  darstellt.

2. Bewegt sich ein Körper so, daß alle seine Punkte Kreise beschreiben, deren Ebenen winkelrecht zu einer Geraden  $g$  stehen, die zugleich die Mittelpunkte aller Kreise enthält, so erfährt der Körper eine **Drehung** (Rotation) um die Achse  $g$ .

Ist die Bewegung unendlich klein (Drehwinkel  $= d\gamma$ , Zeit  $= dt$ ), so heißt sie **Elementardrehung**. Der Weg  $ds$  eines Punktes im Abstände  $r$  von der Drehachse ist

$$ds = r d\gamma, \text{ und ferner}$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = \omega = \text{Winkelgeschwindigkeit der Elementardrehung,}$$

Die Elementardrehung ist vollständig bestimmt durch den **Drehvektor**, d. i. eine Strecke, deren Länge gleich  $\omega$  ist und die auf der Drehachse von einer beliebigen senkrecht zu dieser stehenden Ebene aus abgetragen ist, in den Halbraum hineinweisend, von dem aus die Drehung im Sinne des Uhrzeigers erscheint.

3. Jede **allgemeine Elementarbewegung** (unendlich kleine Bewegung) eines Körpers läßt sich auf eine Elementardrehung und eine Elementar-

schiebung längs der Drehachse, die zusammen eine **Elementarschraubung** ergeben, zurückführen (s. II 2, unten).

4. Die Bewegung eines Körpers im Raume ist durch die Bewegung **dreier** Punkte des Körpers, die nicht in gerader Linie liegen, bestimmt (Bewegungs-dreieck).

Fällt ein Punkt des Körpers dauernd mit einem festen Punkt  $O$  zusammen, so vollführt der Körper eine **sphärische Bewegung**, bei der jeder Punkt des Körpers auf einer Kugelfläche mit dem Mittelpunkt  $O$  verbleibt.

Die Bewegung ist bestimmt durch die zweier, nicht auf einem Kugelradius liegenden Punkte, die aber also auf einer Kugelfläche mit dem Radius 1 (Einheitskugel) liegen dürfen. Punkte eines Fahrstrahls durch  $O$  beschreiben ähnliche und ähnlich gelegene Bahnen.

5. Sind die Bahnen sämtlicher Punkte eines Körpers parallel zu einer festen Ebene (rückt  $O$ , u. 4, in unendliche Entfernung), so erfährt er eine **ebene Bewegung** (s. auch S. 159 u. f.). Die Bewegung ist durch die zweier Punkte bestimmt (Bewegungsstrecke). Jede **ebene Elementarbewegung** ist als eine Drehung um einen augenblicklich festliegenden Punkt anzusehen; liegt dieser in unendlicher Entfernung, so ist die Bewegung eine Schiebung. Die endliche ebene Bewegung ist eine ununterbrochene Aufeinanderfolge von Drehungen um im allgemeinen wechselnde Drehpunkte.

## II. Zusammensetzung der Elementarbewegungen.

1. Eine **Schiebung** ist gleichwertig einem **Drehungspaar**, d. i. zwei gegensinnigen Drehungen um gleicher Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  um zwei parallele Achsen  $A_1$  und  $A_2$ . Die Ebene  $A_1, A_2$  steht senkrecht zur Schiebungsrichtung; zwischen Gleitgeschwindigkeit  $v_s$ , Drehgeschwindigkeit  $\omega$  und Achsenabstand  $a$  besteht die Beziehung  $v_s = a \cdot \omega$ .

Beweis s. Abb. 10 (Kuppelstange einer Lokomotive); die Stange 1,1 würde durch die Drehung um  $A_1$  in die Lage 2, 2' kommen, gelangt aber infolge der gleichzeitigen Drehung um  $A_2$  in die Lage 2, 2'; es ist

$$1,2 = ds = a \cdot \omega dt.$$

Zwischen dem Schiebungsvektor  $v_s$  und den beiden Drehvektoren  $\omega$  besteht dieselbe Beziehung wie zwischen dem Momentvektor und den beiden Kräften eines Kräftepaares (s. S. 170).

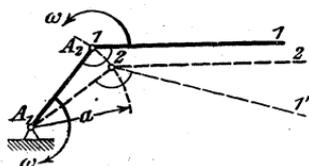
2. Stellt man Drehungen und Schiebungen durch ihre Vektoren dar, so gilt: **Drehungen und Schiebungen (Drehungspaare) sind wie Kräfte und Kräftepaare zusammzusetzen.**

Das Ergebnis ist demnach im allgemeinen eine Bewegungsschraube (s. unter I), deren Achse der Zentralachse des Kräftesystems entspricht (s. S. 173).

Bei der Zusammensetzung benutzt man oft mit Vorteil einen Hilfswinkel  $\varphi$ , der durch  $\operatorname{tg} \varphi = \omega$  bestimmt ist; vrgl. Abb. 11, 12, 13, 14.

3. Zusammensetzung **zweier Schiebungen**  $v_s^{(1)}$  und  $v_s^{(2)}$ . Es folgt wieder eine Schiebung, deren Geschwindigkeit (Vektor)  $V_s$  die geo-

Abb. 10.



metrische Summe von  $v_s^{(1)}$  und  $v_s^{(2)}$  ist (Parallelogramm- oder Dreiecks-  
konstruktion).

$$V_s = v_s^{(1)} + \rightarrow v_s^{(2)}.$$

4. Zusammensetzung einer **Schiebung**  $v_s$  und einer **Drehung**  $\omega$ .

a) Wenn Schiebung parallel der Drehachse  $A$ , folgt eine mit der Drehung gleichsinnige Schraubung um  $A$  (s. unter I, 3).

b) Wenn Schiebung winkelrecht zur Drehachse  $A$ , folgt eine gleichsinnige Drehung  $\omega$  um eine Achse  $O \parallel A$ ; Ebene  $A, O \perp v_s$ ; Abstand  $AO = \rho = \frac{v_s}{\omega}$  (s. Abb. 11, Kreuzkopfende einer Schubstange).

Abb. 11.

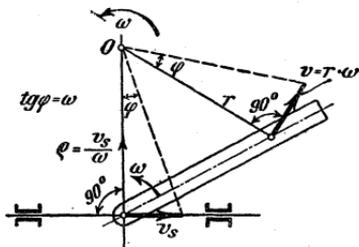
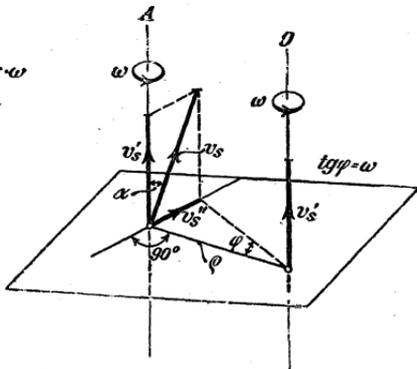


Abb. 12.



c) Wenn Schiebung unter dem Winkel  $\alpha$  zur Drehachse  $A$  geneigt, folgt eine mit der Drehung gleichsinnige Schraubung um eine Achse  $O \parallel A$ ; Ebene

$A, O \perp v_s'' = v_s \cdot \sin \alpha$ ; Abstand  $AO = \rho = \frac{v_s''}{\omega} = \frac{v_s}{\omega} \cdot \sin \alpha$ . Drehgeschwindigkeit  $\omega$ , Gleitgeschwindigkeit  $v_s' = v_s \cdot \cos \alpha$  (s. Abb. 12).

5. Zusammensetzung **zweier Drehungen**  $\omega_1$  und  $\omega_2$ .

a) Bei **parallelen Drehachsen**  $A_1$  und  $A_2$  (Achsenabstand  $\overline{A_1 A_2} = a$ ) folgt eine Drehung mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  um eine Achse  $O \parallel A_1 \parallel A_2$  in der Ebene  $A_1, A_2$ ; es gilt stets Abstand  $A_1 O = a_1 = a \cdot \frac{\omega_2}{\omega}$ , Abstand  $A_2 O = a_2 = a \cdot \frac{\omega_1}{\omega}$ .

Die resultierende Drehung hat

wenn  $\omega_1$  und  $\omega_2$  gleichsinnig sind, denselben Drehsinn und die Winkelgeschwindigkeit  $\omega = \omega_1 + \omega_2$ ; ihre Achse  $O$  liegt zwischen  $A_1$  und  $A_2$  (Abb. 13);

wenn  $\omega_1$  und  $\omega_2$  gegensinnig sind, den Drehsinn der größeren von beiden und die Winkelgeschwindigkeit  $\omega = \omega_1 - \omega_2$  bzw.  $\omega_2 - \omega_1$ ; ihre Achse  $O$  liegt außerhalb des Parallelstreifens  $A_1, A_2$  auf Seite der größeren Drehung (Abb. 14).

Sind  $\omega_1$  und  $\omega_2$  gegensinnig und dem Zahlenwerte nach gleich (**Drehungspaar**), so ergibt sich eine Schiebung, s. unter 1 (Abb. 10).

In den Abb. 13 (Planetenrädernetriebe; das große Rad steht fest, der Arm und das kleine Rad drehen sich) und Abb. 14 (Kurbelende einer Schubstange) ist die Kon-

Abb. 13.

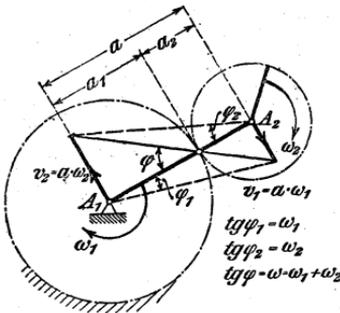
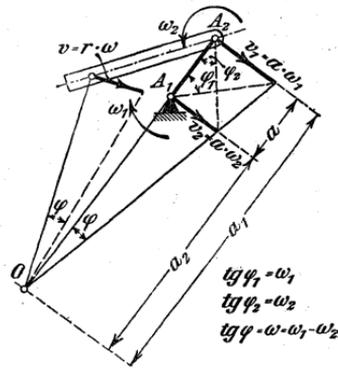


Abb. 14.



struktion der resultierenden Drehung unter Benutzung der Hilfswinkel  $\varphi$  (s. unter 2) durchgeführt. Man hat den Punkt  $A_1$  für die erste Drehung als festen Punkt, für die zweite als Punkt des die zusammengesetzte Bewegung ausführenden Körpers (kleines Rad des Planetenrädernetriebs, Schubstange) aufzufassen.

b) Bei **sich schneidenden Drehachsen**  $A_1$  und  $A_2$  [Schnittpunkt  $A$ ; Winkel  $(\omega_1, \omega_2 = \alpha)$ ] folgt eine Drehung um eine Achse  $AO$  in der

Abb. 15.

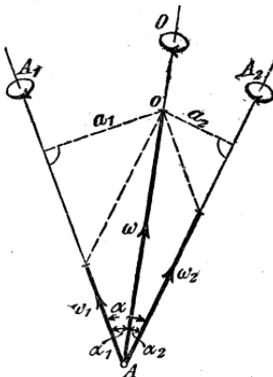
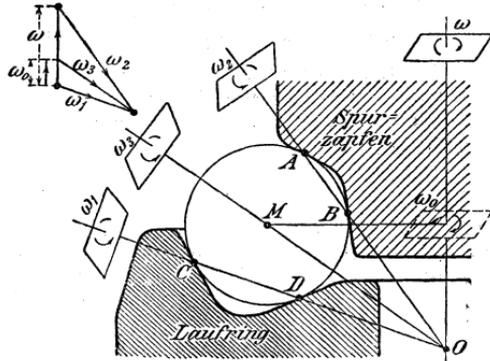


Abb. 16.



Ebene  $A_1, A_2$ ; der Drehvektor  $\omega$  (s. I, 2 S. 154), der Achsenlage, Winkelgeschwindigkeit und Sinn der resultierenden Drehung eindeutig bestimmt, ist die geometrische Summe der Drehvektoren  $\omega_1$  und  $\omega_2$  (**Parallelogramm** oder **Dreieck der Winkelgeschwindigkeiten**), Abb. 15.

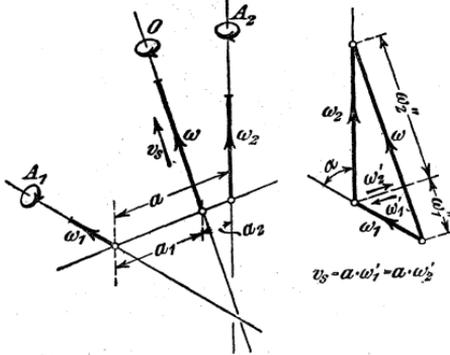
Es gilt

$$\omega = \omega_1 + \omega_2 = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + 2\omega_1\omega_2 \cos \alpha}; \quad \sin \alpha_1 = \frac{\omega_2}{\omega} \cdot \sin \alpha; \quad \sin \alpha_2 = \frac{\omega_1}{\omega} \sin \alpha.$$

Die vom Punkt  $O$  bei den beiden Drehungen beschriebenen Bogen sind gleich groß ( $ds = a_1 \cdot \omega_1 dt = a_2 \cdot \omega_2 dt = a_1 \omega_2 \sin \alpha \cdot dt$ ) und entgegengesetzt gerichtet.

**Beispiel:** Bewegung der Kugeln in einem Kugellager, s. Abb. 16. Die Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  des Spurzapfens gibt mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega_2$  der Kugel um die bewegliche Achse  $AB$  die resultierende Winkelgeschwindigkeit  $\omega_1$  um die in dem Lauftring augenblicklich festliegende Achse  $CD$ . Ebenso ergeben die Winkelgeschwindigkeit  $\omega_0$  des Kugelmittelpunktes und die Winkelgeschwindigkeit  $\omega_2$  der Drehung um die bewegliche Mittelpunktsachse  $MO$  zusammengesetzt die Winkelgeschwindigkeit  $\omega_1$ . (Soll die Kugel an den Berührungspunkten nur rollen, so müssen sich  $AB$  und  $CD$  auf der Achse des Spurzapfens schneiden.)

Abb. 17a u. b.



c) Bei sich kreuzenden Achsen  $A_1$  und  $A_2$  [Winkel  $(\omega_1, \omega_2) = \alpha$ , kürzester Achsenabstand  $= a$ , s. Abb. 17; 17a ist als perspektivisches Bild, 17b als Hilfsfigur, entsprechend Krafftack, in einer Ebene  $\perp a$  aufzufassen], folgt eine Schraubung um eine Achse  $O$ , die  $a$  rechtwinklig schneidet; die Richtung von  $O$ , die Größe und der Dreh-

sinn der resultierenden Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  folgt aus den Drehvektoren  $\omega_1$  und  $\omega_2$  mit Hilfe des Dreiecks der Winkelgeschwindigkeiten (s. unter 5b), wonach

$$\omega = \omega_1 + \omega_2 = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + 2\omega_1\omega_2 \cos \alpha}.$$

Die Lage von  $O$  und die Größe der Gleitgeschwindigkeit  $v_3$  werden gefunden durch Zerlegung von  $\omega_1$  und  $\omega_2$  senkrecht und parallel zu  $\omega$ ; die zu  $\omega$  senkrechten Komponenten  $\omega_1'$  und  $\omega_2'$  bilden ein Drehungspaar, folglich ist nach 1. die Gleitgeschwindigkeit

$$v_3 = a \cdot \omega_1' = a \omega_2' = a \cdot \frac{\omega_1 \cdot \omega_2}{\omega} \cdot \sin \alpha$$

mit dem eingezeichneten Pfeilsinn; die anderen beiden Komponenten  $\omega_1''$  und  $\omega_2''$  sind zwei gleichsinnige Drehungen um parallele Achsen, folglich ist nach 5a (Konstruktion, Abb. 13).

$$\text{Abstand } A_1 O = a_1 = a \cdot \frac{\omega_2''}{\omega} = a \cdot \frac{\omega_2 (\omega_2 + \omega_1 \cos \alpha)}{\omega^2};$$

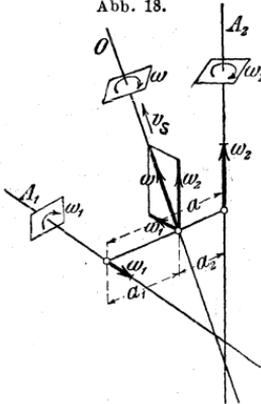
$$\text{Abstand } A_2 O = a_2 = a \cdot \frac{\omega_1''}{\omega} = a \cdot \frac{\omega_1 (\omega_1 + \omega_2 \cos \alpha)}{\omega^2}.$$

**Beispiel: Drehungsübertragung** zwischen zwei windschiefen Achsen durch Schraubenträger. Übersetzungsverhältnis  $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ , Pfeilsinn der Drehungen, Achsenabstand  $a$  und

Winkel  $(\omega_1, \omega_2) = \alpha$  gegeben (Abb. 18). Die Lage der beweglichen Zwischenachse  $O$  (Berührungslinie der Zahnflanken), die Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  und die Gleitgeschwindigkeit  $v_s$  der Schraubung um  $O$ , die mit der Drehung  $\omega_1$  zusammengesetzt die Drehung  $\omega_2$  liefert, erhält man nach den Regeln der Relativbewegung (s. IV, S. 153), wenn man die Absolutdrehung  $\omega_2$  mit der umgekehrten Fahrzeugdrehung  $\bar{\omega}_1$  zusammensetzt.

Da in Abb. 17a  $\omega_1$  den umgekehrten Pfeil wie in Abb. 18 hat, so gibt Abb. 17b zugleich die zeichnerische Lösung der jetzt vorliegenden Aufgabe.

Abb. 18.



### III. Ebene Bewegung (kinematische Geometrie).

#### a. Erklärungen und Grundbegriffe.

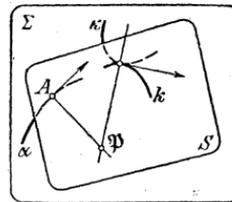
1. Die ebene Bewegung eines Körpers (Erklärung S. 155) wird ersetzt durch die Bewegung einer Ebene  $S$  (bewegtes System), die auf der festen Ebene  $\Sigma$  gleitet. Die bewegte Ebene enthält **Systempunkte**  $A, B, C \dots$  und **Systemkurven**  $k, l, m \dots$ .

Paust man die Systempunkte  $A, B, C \dots$  in ihren verschiedenen Lagen, die sie im Laufe der Zeit einnehmen, auf die feste Ebene durch, so erhält man auf dieser die **Punktbahnen**  $\alpha, \beta, \gamma \dots$ ; paust man ebenso die Systemkurven  $k, l, m \dots$  in ihren verschiedenen Lagen auf die feste Ebene durch, so werden diese Pausen umhüllt von den **Hüllbahnen**  $\varkappa, \lambda, \mu \dots$  (s. Abb. 19).

2. Der Uebergang aus einer Lage von  $S$  in die unendlich benachbarte besteht in einer Elementardrehung um den **augenblicklichen Drehpunkt** oder **Pol**  $\mathfrak{P}$  (vgl. I, 5, S. 155).

Durch den Pol gehen die Normalen aller von den Systempunkten augenblicklich beschriebenen Punktbahnelemente und ebenso die Normalen auf den Bogenelementen, in denen sich augenblicklich die Systemkurven und ihre Hüllbahnen berühren (s. Abb. 19).

Abb. 19.



Im Pol kann man sich für das betrachtete, unendlich kleine Zeitelement die Ebenen  $S$  und  $\Sigma$  durch einen Gelenkbolzen verbunden denken.

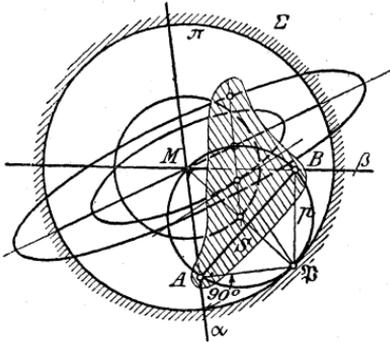
Der Pol ist eindeutig bestimmt durch die Normalen zweier Punktbahnen oder die Berührungsnormalen zweier Hüllbahnen und ihrer Systemkurven.

Alle Punkte der **bewegten** Ebene, die nach und nach zu Polen werden, bilden eine Systemkurve, die **Polkurve** (bewegliche Polbahn); die Punkte der festen Ebene, die im Laufe der Zeit zu Polen werden, bilden die **Polbahn** (feste Polbahn, **Leitkurve**). Sie ist die Hüllbahn der Polkurve.

Bei der Bewegung rollt die Polkurve auf der Polbahn, ohne zu gleiten.

Im allgemeinen ist die Bewegung der Systemkurven längs der Hüllbahnen ein Rollen und Gleiten; reines Rollen findet statt, wenn der augenblickliche Berührungspunkt ein Pol ist.

3. Hält man in einem bestimmten Augenblick die Ebene  $S$  fest und läßt  $\Sigma$  sich auf  $S$  bewegen derart, daß die **gegenseitige** (relative) **Bewegung** von  $S$  und  $\Sigma$  dieselbe bleibt wie vordem, so erhält man die **umgekehrte Bewegung**. Die Systempunkte  $A, B, \Gamma \dots$  in  $\Sigma$  beschreiben jetzt Bahnkurven auf  $S$ , die im allgemeinen anderer Art sind wie die Bahnkurven der ursprünglichen Bewegung. Die Systemkurven  $\alpha, \beta, \gamma \dots$  gleiten jetzt durch die festen Punkte  $A, B, C \dots$  hindurch, diese Punkte sind also die Hüllbahnen jener Systemkurven. Die Systemkurven  $x, l, \mu \dots$  erhalten als Hüllbahnen die Kurven  $k, l, m \dots$ . Die Polbahn wird zur Polkurve und umgekehrt.

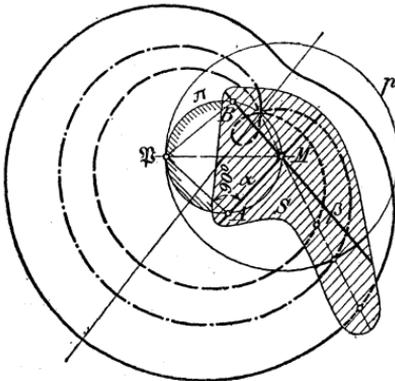


$l, m \dots$ . Die Polbahn wird zur Polkurve und umgekehrt.

An diesen geometrischen Beziehungen ändert sich nichts, wenn weder  $\Sigma$  noch  $S$  fest liegt, vorausgesetzt nur, beide bewegen sich so gegeneinander, daß Polkurve und Polbahn regelrecht aufeinander abrollen.

Polkurve und Polbahn führen dann den gemeinsamen Namen Rollkurven, Systemkurve und Hüllbahn den Namen Gleitkurven. Für jede Bewegung gibt es nur ein Rollkurvenpaar.

Abb. 21.



**Beispiel. Cardanisches Problem** (Abb. 20): Eine Ebene bewegt sich so auf einer anderen, daß zwei Punkte  $A$  und  $B$  der bewegten Ebene stets auf zwei sich im Punkte  $M$  schneidenden Geraden  $\alpha$  und  $\beta$  der festen Ebene gleiten.

**Pol  $\mathfrak{P}$ :** Schnittpunkt der in  $A$  und  $B$  auf  $\alpha$  und  $\beta$  errichteten Lote.

**Polkurve:** Kreis  $p$  durch  $A, B$  und  $M$ . **Polbahn:** Kreis  $\pi$  mit dem doppelten Halbmesser von  $p$  und dem Mittelpunkt  $M$ .

**Punktbahnen:** Für alle auf der Polkurve  $p$  liegenden Punkte der durch den betreffenden Punktgehende Durchmesser der Polbahn  $\pi$ ; für alle übrigen Punkte Ellipsen, insbesondere für den Mittelpunkt von  $p$  ein Kreis um  $M$ .

**Umkehrung** (Abb. 21): Eine Ebene bewegt sich so auf einer anderen, daß zwei einen starren Winkel bildende Geraden  $\alpha$  und  $\beta$  durch zwei Punkte  $A$  und  $B$  der festen Ebene ständig gleiten.

**Pol  $\mathfrak{P}$ :** Schnittpunkt der in  $A$  und  $B$  auf  $\alpha$  und  $\beta$  errichteten Lote. **Polkurve** Kreis  $\pi$ . **Polbahn:** Kreis  $p$ . **Punktbahnen:** Paskalsche Kurven; insbesondere beschreiben die Punkte auf der Polkurve Kardioiden mit Rückkehrpunkt (Spitze); Punkte außerhalb der Polkurve beschreiben Punktbahnen mit isoliertem Punkt; Punkte innerhalb der Polkurve solche mit Schleife,

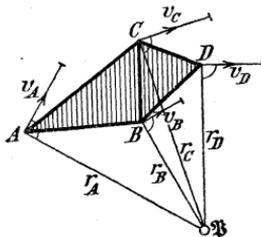
### b. Geschwindigkeitszustand.

1. Für die augenblickliche Geschwindigkeit der Punkte  $A, B, C \dots$  einer starren Ebene gilt (Abb. 22a u. b)

$$v_A = r_A \omega \qquad v_B = r_B \omega \qquad v_C = r_C \omega \dots$$

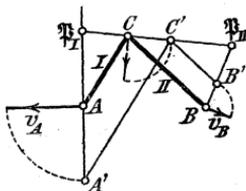
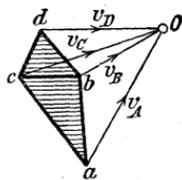
wo  $\omega$  die augenblickliche Winkelgeschwindigkeit um den Pol  $\mathfrak{P}$  und  $r_A, r_B, r_C \dots$  die Längen der Polstrahlen  $\mathfrak{P}A, \mathfrak{P}B, \mathfrak{P}C \dots$  bedeuten. Dreht man  $v_A, v_B, v_C \dots$  um die Punkte  $A, B, C \dots$  gleichsinnig um  $90^\circ$ , bis sie in die Polstrahlen fallen, so bilden die Endpunkte  $A', B', C' \dots$  dieser Strecken (der **lotrechten Geschwindigkeiten**) eine der Figur  $A, B, C \dots$  ähnliche und ähnlich gelegene Figur mit dem Aehnlichkeitspunkt  $\mathfrak{P}$ . Es ist daher  $A'B' \parallel AB, A'C' \parallel AC \dots$

Abb. 22a u. b.



**Anwendung:** Die Punkte  $A$  und  $B$  (Abb. 23) der im Punkte  $C$  gelenkig verbundenen Stäbe (Scheiben) I und II haben die augenblicklichen Geschwindigkeiten  $v_A$  und  $v_B$ ; gesucht die Pole  $\mathfrak{P}_I$  und  $\mathfrak{P}_{II}$  von I und II gegen die feste Zeichen-

Abb. 23.



ebene: Da  $v_C$  für I und II gemeinsam ist, liegen  $\mathfrak{P}_I$  und  $\mathfrak{P}_{II}$  im Schnittpunkt der Lotrechten Geschwindigkeiten von  $v_A$  und  $v_B$  mit der von  $v_C$ , deren Endpunkt  $C'$  im Schnittpunkt von  $A'C' \parallel AC$  und  $B'C' \parallel BC$  liegt.

2. Uebersichtlicher ist oft ein besonderer **Geschwindigkeitsplan** (Abb. 22b): Von einem Punkt  $O$  trägt man auf:  $aO =$  und  $\parallel v_A, bO =$  und  $\parallel v_B$  usw.;  $abcd$  ist ähnlich  $ABCD$  mit jeder Seite gleichsinnig um  $90^\circ$  gegen  $ABCD$  gedreht. Aehnlichkeitsverhältnis  $ABCD : abcd = 1 : \omega$ .

### c. Beschleunigungszustand.

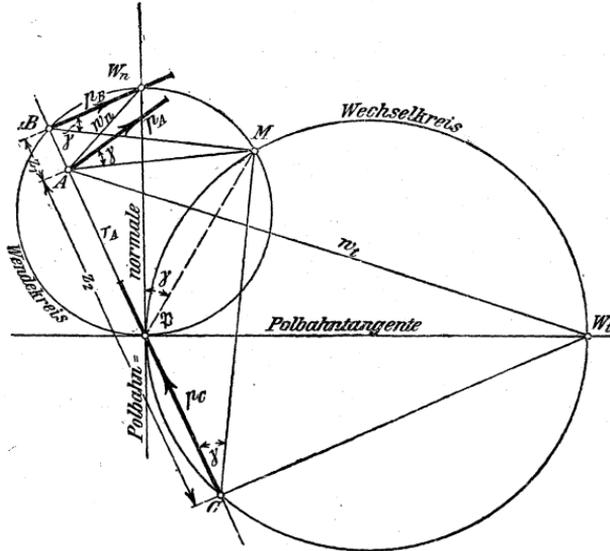
1. Denkt man sich einen Punkt die Polbahn so durchlaufend, das er stets mit dem augenblicklichen Pol zusammenfällt, so nennt man seine Geschwindigkeit  $u$  die **Wechselgeschwindigkeit des Poles**.

2. Alle System-Punkte der starren Ebene  $S$ , die augenblicklich **keine Normal-(Zentripetal-)beschleunigung** haben, die also augenblicklich Wendepunkte ihrer Bahn beschreiben (Krümmungshalbmesser  $\rho = \infty$ ), liegen auf dem **Wendekreis**, der die Polbahntangente im augenblicklichen Pol berührt (s. Abb. 24) und den Durchmesser  $d_1 = u : \omega$  hat, worin  $u$  die augenblickliche Wechselgeschwindigkeit des Poles  $\mathfrak{P}$  und  $\omega$  die augenblickliche Winkelgeschwindigkeit der Drehung um  $\mathfrak{P}$  ist.

Der Schnittpunkt  $W_n$  der Polbahnnormalen mit dem Wendekreis heißt **Wendepol**.

3. Alle Systempunkte der starren Ebene  $S$ , die augenblicklich **keine Tangentialbeschleunigung** haben, liegen auf dem **Wechselkreis**, der die Polbahnnormale im augenblicklichen Pol berührt (s. Abb. 24), und

Abb. 24.



den Durchmesser  $d_2 = u\omega : \varepsilon$  hat, wo  $\varepsilon$  die augenblickliche Winkelbeschleunigung der Drehung um den Pol ist.

Der Schnittpunkt  $W_t$  der Polbahnnormalen mit dem Wechselkreis heisst **Wechselpol**.

4. Für den Schnittpunkt  $M$  von Wende- und Wechselkreis, den **Beschleunigungspol**, ist die Gesamtbeschleunigung null.

5. Die Gesamtbeschleunigung eines Systempunktes  $A$  (Abb. 24) ergibt sich

$\alpha)$   $p_A = a\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$  ( $a = \overline{AM}$ ) und mit  $\overline{AM}$  den Winkel  $\gamma = M\mathcal{P}W_n$  bildend, für den  $\text{tg } \gamma = \varepsilon : \omega^2$  ist.

$\beta)$  als Resultierende der Beschleunigung  $p_1 = r\varepsilon$  winkelrecht zum Normalstrahl und der nach dem Wendepol  $W_n$  hin gerichteten Beschleunigung  $p_2 = w_n\omega^2$ , wo  $w_n = AW_n$  ist.

Pol  $\mathcal{P}$  hat die Gesamtbeschleunigung  $d_1\omega^2$  nach  $W_n$  hin.

$\gamma)$  als Resultierende der Normalbeschleunigung  $p_n = z_1\omega^2$  und der Tangentialbeschleunigung  $p_t = z_2\varepsilon = z_2\frac{d\omega}{dt}$ .

$z_1$  und  $z_2$  sind die auf dem Normalstrahl  $\mathcal{P}A$  gemessenen Entfernungen des Punktes  $A$  vom Wende- und Wechselkreise.

$\delta'$ ) als Resultierende aus der zum Pol  $\mathfrak{P}$  gerichteten Beschleunigung  $p' = r\omega^2$  und  $p'' = \omega t \varepsilon$  senkrecht auf dem Fahrstrahl  $\omega t = AW_t$  nach dem Wechseelpol.

**d. Koplane Bewegung dreier Ebenen.**

Für technische Anwendungen kommt lediglich in Betracht der

**Satz der drei Pole:** Beschreiben die augenblicklich in  $A$  und  $B$  zusammenfallenden Punkte der beiden beweglichen Ebenen  $S_1$  und  $S_2$  (Abb. 25) die Kurven  $\alpha_1, \alpha_2$  und  $\beta_1, \beta_2$  auf der festen Zeichenebene  $\Sigma$ , und beschreiben ferner die Punkte  $A$  und  $B$  der beweglichen Ebene  $S_2$  die Kurven  $\alpha$  und  $\beta$  auf der beweglichen Ebene  $S_1$ , so liegen die drei Pole

- $\mathfrak{P}_1 = \text{Pol von } S_1 \text{ gegen } \Sigma = \text{Schnittpunkt der Normalen in } A \text{ und } B \text{ auf } \alpha_1 \text{ und } \beta_1,$
- $\mathfrak{P}_2 = \text{Pol von } S_2 \text{ gegen } \Sigma = \text{Schnittpunkt der Normalen in } A \text{ und } B \text{ auf } \alpha_2 \text{ und } \beta_2,$
- $\mathfrak{P} = \text{Pol von } S_2 \text{ gegen } S_1 = \text{Schnittpunkt der Normalen in } A \text{ und } B \text{ auf } \alpha \text{ und } \beta$

in einer Geraden.

**Beispiel:** Für das Fachwerk (Abb. 26) sind sämtliche Pole der beweglichen Scheiben  $S_1, S_2, S_3, S_4$  gegen die Widerlagerscheibe  $\Sigma$  und außerdem die Pole der Scheiben gegeneinander zu bestimmen.

Von den 11 Polen

$(S_1 \Sigma)$	$(S_2 \Sigma)$	$(S_3 \Sigma)$	$(S_4 \Sigma)$
$(S_1 S_4)$	$(S_2 S_4)$	$(S_3 S_4)$	
$(S_1 S_3)$	$(S_2 S_3)$		
$(S_1 S_2)$			

sind die stark umrahmten unmittelbar gegeben. Die übrigen findet man wie folgt:

- liegt Pol  $(S_1 S_2)$  auf  $\left\{ \begin{matrix} (S_1 S_2) (S_3 S_2) \\ (S_1 S_4) (S_3 S_4) \end{matrix} \right.$
- " "  $(S_2 S_4)$  "  $\left\{ \begin{matrix} (S_2 S_1) (S_4 S_1) \\ (S_2 S_3) (S_4 S_3) \end{matrix} \right.$
- " "  $(S_2 \Sigma)$  "  $\left\{ \begin{matrix} \perp \text{ auf } g \text{ durch } (S_2 S_3) \\ (S_2 S_1) (\Sigma S_1) \end{matrix} \right.$

Es liegt Pol  $(S_3 \Sigma)$  auf  $\left\{ \begin{matrix} \perp \text{ auf } g \text{ durch } (S_3 S_2) \\ (S_3 S_1) (\Sigma S_1) \end{matrix} \right.$

" " "  $(S_4 \Sigma)$  "  $\left\{ \begin{matrix} (S_4 S_1) (\Sigma S_1) \\ (S_4 S_2) (\Sigma S_2) \end{matrix} \right.$

Abb. 25.

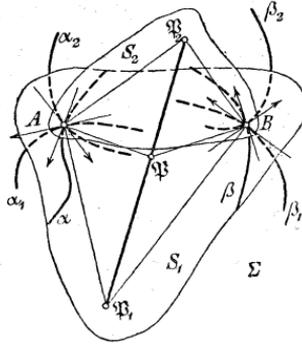
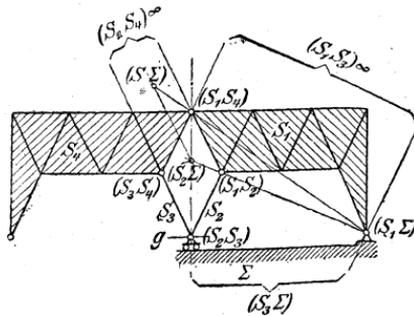


Abb. 26.



## II. PHYSIKALISCHE MECHANIK.

### A. Allgemeine Gesetze (Erfahrungsgesetze).

1. **Trägheitsgesetz (Galilei, 1638).** Jeder materielle Punkt bleibt ohne äußere Einwirkungen in Ruhe oder bewegt sich geradlinig und gleichförmig.

Zur Aenderung der Geschwindigkeit (nach Größe oder Richtung) bedarf es einer **Kraft**. (Dynamischer Kraftbegriff.)

Der Widerstand, den der Punkt seiner Geschwindigkeitsänderung entgegensetzt, heißt **Trägheitswiderstand**.

2. **Gesetz der Schwere (Galilei-Newton).** Ein frei im luftleeren Raume fallender Körper vollführt eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung. — Die Fallbeschleunigung  $g$  ist an demselben Ort für alle Körper gleich, u. zw. für das mittlere Deutschland (Breite  $50^\circ$ )

$$g = 9,81 \text{ m/sk}^2.$$

Am frei fallenden Körper wirkt somit eine Kraft, sein **Gewicht** (oder die Schwerkraft).

Für geringe Fallhöhen ist  $g$  unveränderlich, u. zw.

$$g = 9,806056 - 0,025028 \cos 2\varphi - 0,000003 h,$$

worin  $\varphi$  die geographische Breite und  $h$  die Höhe über dem Meeresspiegel, womit für  $h=0$  und

$$\varphi = 0^\circ \quad g \text{ am Aequator} = g_a = 9,781 \text{ m/sk}^2,$$

$$\varphi = 45^\circ \quad g = g_m = 9,806 \text{ m/sk}^2,$$

$$\varphi = 90^\circ \quad g \text{ an den Polen} = g_p = 9,831 \text{ m/sk}^2$$

wird und

$$g_p - g_a = \frac{1}{196} g_m.$$

Zahlenwerte, welche  $g$  enthalten, s. S. 43.

3. Hängt man einen Körper an einen elastischen Faden, so erfährt dieser eine Verlängerung, deren Ursache Kraft heißt (hier im besonderen die Schwerkraft), oder allgemein: Die Ursache einer Formänderung ist eine **Kraft**. (Statischer Kraftbegriff.)

An dem aufgehängten Körper wirkt in diesem Falle außer seinem Gewicht, unter dessen Einfluß er freifallend die Beschleunigung  $g$  annehmen würde, noch eine **vom Faden ausgeübte Kraft** (dessen Spannkraft), die ihm die gleiche, entgegengesetzt gerichtete Beschleunigung erteilt, so daß der Körper in Ruhe bleibt. Die beiden Kräfte sind gleich groß.

4. **Wechselwirkungs-Gesetz (Newton, 1687).** Die beiden Kräfte, die zwei Körper gegenseitig aufeinander ausüben, fallen in dieselbe Gerade, sind gleich groß und entgegengesetzt gerichtet.

Die Kraftübertragung kann dabei in beliebiger Weise erfolgen: durch Massenanziehung, S. 196, unmittelbare Berührung, durch Vermittlung eines Zwischengliedes, elektrische oder magnetische Anziehung.

5. **Beziehungen zwischen Masse, Beschleunigung und Kraft.** Unter dem Einfluß einer **gleichbleibenden Kraft** vollführt ein Körper eine **gleichmäßig beschleunigte Bewegung**.

Für mäßige Fallhöhen ist also die Anziehungskraft der Erde unveränderlich, da nach dem Gesetz der Schwere die Fallbewegung dann gleichmäßig beschleunigt ist (Atwoodsche Fallmaschine).

Die an demselben Körper von verschiedenen Kräften erzeugten Beschleunigungen verhalten sich wie die Kräfte, so daß

$$\frac{P_1}{p_1} = \frac{P_2}{p_2} = \dots \text{unveränderl.} = m; \left( \frac{P_1, P_2 \dots \text{wirkende Kräfte}}{p_1, p_2 \dots \text{erzeugte Beschleunigungen}} \right)$$

Das für jeden Körper unveränderliche Verhältnis  $m$  zwischen angreifender Kraft und hervorgebrachter Beschleunigung heißt die **Masse des Körpers**.

**Dynamische Grundgleichung (Newton, 1687): Kraft = Masse  $\times$  Beschleunigung.**

$$P = m \cdot p = m \cdot \frac{dv}{dt}.$$

Diese Gleichung gilt, welcher Art auch die am Körper wirkende Kraft sein mag (elastische Kraft, Schwerkraft, magnetische oder elektrische Kraft), insbesondere gilt auch

$$\text{Gewicht} = \text{Masse} \times \text{Fallbeschleunigung}; G = mg,$$

$$\text{Masse} = \frac{\text{Gewicht}}{\text{Fallbeschleunigung}}; m = \frac{G}{g}.$$

Für die Gewichte zweier Körper an demselben Ort gilt

$$G_1 = m_1 g; G_2 = m_2 g, \text{ also } \frac{m_1}{m_2} = \frac{G_1}{G_2},$$

d. h. die Massen zweier Körper verhalten sich wie ihre Gewichte.

6. Kräfte sind wie Geschwindigkeiten und Beschleunigungen **gerichtete Größen**, d. h. zu ihrer vollständigen eindeutigen Bestimmung ist außer der Angabe ihrer absoluten Größe (Zahlenwert) die ihrer Wirkungslinie und ihrer Richtung in dieser nötig.

7. **Gesetz der Erhaltung der Masse.** Die Masse eines Körpers bleibt bei allen physikalischen und chemischen Veränderungen, die er erleidet, unverändert.

Für chemische Veränderungen von Lavoisier ausgesprochen.

## B. Technisches und physikalisches Maßsystem.

Wird die Kraft bzw. die Masse als neuer Grundbegriff zu der Länge und der Zeit hinzugefügt, so erhält man das technische bzw. das physikalische Maßsystem.

Angaben für Geschwindigkeit und Beschleunigung s. S. 145, für Arbeit S. 196, Leistung S. 200; ferner auch Abschn. Elektrotechnik: Einleitung.

1. **Technisches Maßsystem.** Als **Einheit der Kraft** ist die Anziehungskraft der Erde in Paris auf 1 cdm destilliertes Wasser von 4<sup>0</sup> C gewählt ( $g = 9,806 \text{ m/sk}^2$ ). Diese Einheit heißt das **Kilogramm-Gewicht** (1 kg), kurz als Kilogramm bezeichnet.

Dafür ist als Urmaß ein in Paris aufbewahrtes Platinstück abgeglichen, nach dem andere Urmaße für die einzelnen Staaten hergestellt sind.

Nimmt man als Längeneinheit das m, als Zeiteinheit die sk, demnach als Beschleunigungseinheit  $1 \text{ m/sk}^2$ , so erhält man als Einheit der Masse

$$\frac{1 \text{ Krafteinheit}}{1 \text{ Beschleunigungseinheit}} = 1 \text{ kg} \frac{\text{sk}^2}{\text{m}}$$

**2. Physikalisches Maßsystem.** Als Einheit der **Masse** ist die eines cdm destillierten Wassers von  $4^0 \text{ C}$  gleich der des in Paris aufbewahrten Platinstücks gewählt. Diese Einheit heißt **1 Kilogramm-Masse** (1 kg).

Wählt man als Beschleunigungseinheit  $1 \text{ m/sk}^2$ , so wird die Einheit der Kraft

$$1 \text{ Masseneinheit} \times 1 \text{ Beschleunigungseinheit} = 1 \text{ kg m/sk}^2.$$

Im **C-G-S-System** ist die Einheit der Länge 1 cm, die Einheit der Zeit 1 sk, die Einheit der Masse  $0,001 \text{ kg} = 1 \text{ Gramm-Masse}$  (1 g), wonach die Einheit der Kraft

$$1 \text{ g cm/sk}^2 = 1 \text{ Dyne.}$$

Da die Masse  $1 \text{ g} = \frac{1}{1000} \text{ kg} = \frac{1}{9,81 \text{ m/sk}^2}$  ist, so ist

$$1 \text{ kg} = 981\,000 \text{ Dynen; } 1 \text{ Dyne} = 0,001\,019 \text{ g} = \sim 1 \text{ mg.}$$

### III. STATIK STARRER KÖRPER.

#### A. Allgemeine Begriffe.

1. Unter Statik starrer Körper versteht man die Aufstellung der Beziehungen, die zwischen den auf einen ruhenden Körper wirkenden Kräften bestehen (oder — im Sonderfall — auf einen in geradliniger, gleichförmiger Schiebungsbewegung befindlichen Körper).

Ueber den „Kraft“-Begriff und Maß der Kräfte s. physikalische Mechanik, S. 164 u. f.

Unter einem starren Körper versteht man eine Vereinigung von Massenpunkten, die in ihrer gegenseitigen Lage keine Aenderung durch den Einfluß irgendwelcher Kräfte erfahren.

Vollkommen starre Körper gibt es nicht; Voraussetzung für die Anwendbarkeit der für starre Körper abgeleiteten Sätze der Statik ist eine so geringe Formänderung der Körper unter Einfluß der Kräfte, daß die Lagenänderung der Angriffspunkte ohne merklichen Einfluß ist.

2. Wenn die Kräfte an dem Körper keine Bewegung oder Bewegungsänderung (also keine Beschleunigung oder Verzögerung) hervorrufen, so müssen sie sich nach dem Trägheitsgesetz von Galilei (s. S. 164) in ihrer Gesamtwirkung aufheben: sie halten sich das **Gleichgewicht**.

Das Gleichgewicht heißt **gesichert (stabil)**, wenn der Körper und mit ihm die auf ihn wirkenden Kräfte, unendlich wenig aus ihrer Lage gebracht, wieder in diese zurückkehren (wenn positive Arbeit zur Lagenänderung aufzuwenden ist); **unentschieden (indifferent)**, wenn die Kräfte auch für die neue Lage im Gleichgewicht bleiben (keine Arbeit zur Lagenänderung nötig ist); **unsicher (labil)**, wenn sich der Körper weiter von der innegehabten Gleichgewichtslage entfernt (wenn negative Arbeit aufzuwenden ist).

Ueber **Standfestigkeit** und **Stabilitätsmoment** s. S. 179.

3. **Äußere und innere Kräfte.** Die Kräfte, mit denen die einzelnen Massenpunkte eines Körpers aufeinander einwirken, heißen innere Kräfte, alle anderen äußere.

Wird ein unter der Wirkung von Kräften stehender Körper  $K$  von Körpern gestützt, so treten an den Berührungspunkten (Auflager, Widerlager) und im Inneren von  $K$  Formänderungen und Kräfte auf. Die Formänderungen dauern so lange an, bis an allen Stellen Gleichgewicht herrscht. ( $K$  befindet sich im Spannungszustande, vgl. IV. Abschn. Festigkeitslehre.)

Die vom Körper  $K$  auf die Stützkörper ausgeübten Kräfte, **Auflagerdrücke**, sind gleich groß und entgegengesetzt gerichtet den von den Stützkörpern auf  $K$  übertragenen Kräften, **Lagerwiderstände** (s. Wechselwirkungsgesetz von Newton, S. 164), **Stützenwiderstände**, **Lagerreaktionen**; die Wirkung der Stützkörper auf  $K$  wird vollständig durch diese Lagerwiderstände ersetzt, die zu den äußeren Kräften des Körpers  $K$  zu rechnen sind.

Alle Kräfte in der Natur erscheinen paarweise als Gegenkräfte (in derselben Geraden liegend, gleich groß, einander entgegengesetzt gerichtet). Betrachtet man einen Körper, also ein bestimmtes Gebiet, so treten darin die inneren Kräfte paarweise auf, hingegen die äußeren Kräfte einzeln, da deren Gegenkräfte außerhalb des Gebietes liegen; z. B. immer die Gewichte der Körper, deren Gegenkräfte am Mittelpunkt der Erde angreifen. Trennt man einen im Spannungszustande befindlichen Körper durch einen Schnitt in zwei Teile, so werden die an den Schnittstellen auftretenden Kräfte, die für den ganzen Körper innere sind, zu äußeren in bezug auf die beiden Teile.

Die inneren Kräfte bilden ein Gleichgewichtssystem; folglich müssen auch bei einem unter dem Einfluß von Kräften in Ruhe befindlichen gestützten Körper die äußeren Kräfte und die Stützenwiderstände im Gleichgewicht sein — dient zur Bestimmung der bei technischen Aufgaben stets als Unbekannte auftretenden Stützenwiderstände (s. S. 177) — und für jeden Teil eines Körpers gilt ebenso: die äußeren Kräfte, die Stützenwiderstände und die Kräfte an den Schnittstellen sind im Gleichgewicht — dient zur Bestimmung der Spannkkräfte (s. S. 186 u. Abschn. Festigkeitslehre).

4. Bei einem **starren Körper** darf man stets in einer beliebigen Geraden zwei beliebige gleich große, einander entgegengesetzt wirkende **Kräfte hinzufügen**, und jede Kraft in Richtung ihrer Wirkungslinie beliebig **verschieben**, ohne daß in der Wirkung der Kräfte auf den Körper eine Aenderung eintritt (soweit nicht die inneren Kräfte des Körpers — Festigkeit — in Frage kommen).

## B. Zusammensetzung, Zerlegung und Gleichgewicht der Kräfte.

Zeichnerische Behandlung s. S. 179 u. f.

Die **Mittelkraft** mehrerer an einem starren Körper angreifenden Kräfte ist die Kraft, welche dieselbe Wirkung hervorruft wie die einzelnen Kräfte in ihrer Gesamtheit (z. B. dieselbe Beschleunigung dem Körper erteilt wie die einzelnen Kräfte zusammen).

### a. Kräfte mit gemeinsamem Angriffspunkt.

1. Die **Mittelkraft  $R$  zweier in einem Punkt angreifenden Kräfte  $P_1$  und  $P_2$**  wird der Größe und Richtung nach durch die Diagonale des aus  $P_1$  und  $P_2$  gebildeten Parallelogramms dargestellt.

Nach Abb. 27 ist demnach

$$R = \sqrt{P_1^2 + P_2^2 + 2 P_1 P_2 \cos \alpha}$$

$$\sin \alpha_1 = (P_2 \sin \alpha) : R \quad \sin \alpha_2 = (P_1 \sin \alpha) : R.$$

Für  $\alpha = 90^\circ$  (Abb. 28)

$$\text{wird } R = \sqrt{P_1^2 + P_2^2}; \quad \cos \varphi = P_1 : R; \quad \sin \varphi = P_2 : R$$

für  $\alpha = 0^\circ$  „  $R = P_1 + P_2$  } Kräfte in einer Geraden.  
für  $\alpha = 180^\circ$  „  $R = P_1 - P_2$  }

Abb. 27.

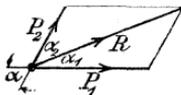
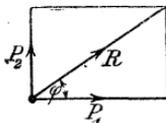


Abb. 28.



2. Umgekehrt läßt sich unter sinngemäßer Anwendung der Gleichungen unter 1 **eine Kraft  $R$**  in zwei sich auf  $R$  schneidende und mit  $R$  in einer Ebene liegende **Seitenkräfte zerlegen** und durch Wiederholung in drei sich in einem Punkte auf  $R$  schneidende, nicht in einer Ebene liegende.

Für mehr als zwei sich in einem Punkte schneidende Richtungen in der Ebene und mehr als drei im Raum ist die Aufgabe unbestimmt. S. auch S. 183.

3. **Mittelkraft  $R$  der in einem Punkt angreifenden Kräfte  $P_1, P_2, \dots, P_n$** : Man zerlegt jede der gegebenen Kräfte  $P_i$  in der Richtung dreier rechtwinkligen Koordinatenachsen in die Seitenkräfte

$$X_i = P_i \cos \alpha_i \quad Y_i = P_i \cos \beta_i \quad Z_i = P_i \cos \gamma_i,$$

worin  $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$  die Winkel zwischen  $P_i$  und den positiven Koordinatenachsen sind; addiert algebraisch die Seitenkräfte zu drei Einzelkräften

$$X = \Sigma(X_i) \quad Y = \Sigma(Y_i) \quad Z = \Sigma(Z_i)$$

und bildet die Mittelkraft

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2},$$

deren Richtungswinkel  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  mit den positiven Achsen bestimmt sind durch

$$\cos \alpha = X : R \quad \cos \beta = Y : R \quad \cos \gamma = Z : R.$$

Liegen die **Kräfte in einer Ebene**, so werden in den vorstehenden Gleichungen die Größen  $Z=0$ ,  $Z_i=0$ ,  $\gamma=90^\circ$ ,  $\gamma_i=90^\circ$  und  $\beta=90-\alpha$ ,  $\beta_i=90-\alpha_i$ .

4. **Gleichgewicht** herrscht, wenn  $R=0$ , d. h. wenn  
im Raume (3 Bedingungsgleichungen)

$$X = \Sigma (P_i \cos \alpha_i) = 0; \quad Y = \Sigma (P_i \cos \beta_i) = 0; \quad Z = \Sigma (P_i \cos \gamma_i) = 0$$

in der Ebene (2 Bedingungsgleichungen)

$$X = \Sigma (P_i \cos \alpha_i) = 0 \quad Y = \Sigma (P_i \sin \alpha_i) = 0.$$

### b. Kräftepaare und Momente.

1. Zwei gleich große, parallele und entgegengesetzt gerichtete Kräfte heißen ein Kräftepaar. Ein Kräftepaar läßt sich nicht auf eine Einzelkraft zurückführen.

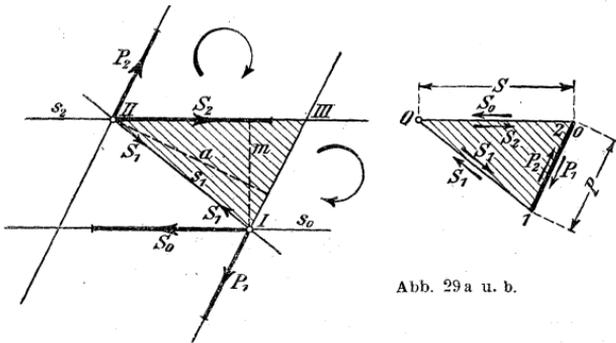


Abb. 29 a u. b.

Fügt man (nach dem hier allein anwendbaren Verfahren des Seilecks S. 180) in der beliebigen Geraden I II (Abb. 29) die Gegenkräfte  $S_1$ ,  $S_1$  zu, so werden die Mittelkräfte  $S_0$ ,  $S_2$  von  $P_1$ ,  $S_1$  bzw.  $P_2$ ,  $S_1$  wieder parallel, gleich groß und gegensinnig. Das neue Kräftepaar hat denselben Drehsinn wie das alte; überdies gilt  $P \cdot a = S \cdot m$  (folgt sofort aus der Ähnlichkeit der Dreiecke  $O_0I$  und  $II III I$  bzw. der rechtwinkligen Dreiecke  $I III m$  und  $II III a$ ).

2. **Verlegung und Verwandlung eines Kräftepaares.** Jedes Paar darf in seiner Ebene beliebig verschoben werden; dabei dürfen Kräfteabstand und Kraftgröße verändert werden, wenn nur ihr Produkt (Moment s. unter 3) dasselbe bleibt (vgl. Abb. 29). Jedes Paar darf aus seiner Wirkungsebene in eine Parallelebene verschoben werden.

Bei diesen erlaubten Verlegungen bleibt der Drehsinn derselbe.

3. (**Dreh-) Moment** des Kräftepaares  $P$ ,  $P$  heißt das Produkt aus der Größe  $P$  und dem Abstand  $a$  der beiden Kräfte ( $a =$  Arm des Paares)

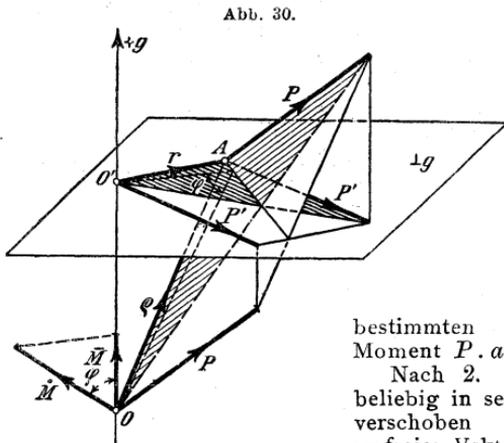
$$M = P \cdot a.$$

Mißt man die Kräfte in kg, die Länge in cm, so ist die Einheit des **Drehmomentes** = 1 cmkg. Im C-G-S-System (s. S. 166) ist die Einheit des Drehmomentes = 1 cm Dyne =  $1 \text{ g} \frac{\text{cm}^2}{\text{sek}^2} = 1 \text{ Erg}$ .

Das Moment wird veranschaulicht durch den Flächeninhalt des von den Kräften  $P, P'$  gebildeten Parallelogramms.

Drehmomente von Kräftepaaren, die in derselben Ebene liegen, werden als positiv oder negativ bezeichnet, je nachdem sie im Sinne des Uhrzeigers oder entgegengesetzt drehend erscheinen.

Im allgemeinen Falle wird ein Kräftepaar  $P, a$  nach Größe,



Richtung (seiner Wirkungsebene) und Drehsinn vollständig bestimmt durch seinen **Momentvektor** (Achsenmoment), d. i. eine Strecke, die winkelrecht zur Ebene des Paares steht, in den Halbraum hineinweist, von dem aus gesehen die Drehung des Paares im Sinne des Uhrzeigers erscheint, und deren Länge in einem

bestimmten Maßstabe gleich dem Moment  $P \cdot a$  ist (vgl. auch Abb. 30).

Nach 2. darf der Momentvektor beliebig in seiner Geraden und parallel verschoben werden (Momentvektor = freier Vektor).

4. **Kräftepaare werden zusammengesetzt**, indem man ihre Momentvektoren nach der Parallelogrammregel an einem beliebigen Punkte geometrisch wie Kräfte zusammensetzt. Kräftepaare in derselben oder in parallelen Ebenen addieren sich demnach algebraisch.

Schließt sich das Vieleck der Momentvektoren von selbst, so halten sich die Kräftepaare das **Gleichgewicht**.

5. **Kräftepaar  $P, a$  und Einzelkraft  $Q$  in derselben Ebene  $E$ .** Paar  $P, a$  darf nach 2. durch ein beliebig in  $E$  gelegenes gleichsinniges Paar  $Q, b$  ersetzt werden, wenn  $Q \cdot b = P \cdot a$  ist; legt man das neue Paar so, daß die Einzelkraft  $Q$  durch die eine Paarkraft aufgehoben wird, so bleibt die andere übrig, d. h.:

Durch Hinzufügung eines Kräftepaars  $P, a$  wird eine Einzelkraft  $Q$  um die Strecke  $b = a \cdot \frac{P}{Q}$  parallel verschoben.

Umgekehrt:

Soll eine Kraft  $Q$  um eine Strecke  $b$  parallel verschoben werden, so ist ein Kräftepaar vom Momente  $Q \cdot b$  zuzufügen.

6. Das (**Dreh-**) **Moment  $M$  einer Einzelkraft  $P$  in bezug auf einen Punkt  $O$**  ist das Produkt aus der Kraft  $P$  und dem winkelrechten Abstand  $O, P$ .

Es wird veranschaulicht durch den doppelten Flächeninhalt des Dreiecks  $O, P$  (s. Abb. 30).

Einheit des Momentes und Vorzeichenregel für den Fall, daß die Kräfte sämtlich in einer Ebene liegen, die auch den Bezugspunkt enthält, wie bei Kräftepaaren (s. unter 3).

Der nach 3. bestimmte **Momentenvektor**  $\vec{M}$  ist im Bezugspunkt aufzutragen und darf weder parallel, noch in seiner Geraden verschoben werden (gebundener Vektor). Vervollständigt man (s. Abb. 30) das Dreieck  $O, P$  durch Antragen von  $P$  im Punkte  $O$  zum Parallelogramm und bezeichnet den Vektor  $\vec{OA}$  vom Bezugspunkt zum Angriffspunkt der Kraft  $P$  mit  $\rho$ , so gilt  $\vec{M} = V(\rho, P)$  (in dieser Reihenfolge!).

Denn:  $\vec{M}$  steht senkrecht auf der Ebene von  $\rho$  und  $P$ , weist in den Halbraum hinein, von dem aus gesehen eine Drehung im Sinne des Uhrzeigers den ersten Vektor ( $\rho$ ) auf kürzestem Wege in den zweiten Vektor ( $P$ ) überführt, und die Länge von  $\vec{M}$  ist gleich dem Flächeninhalt des aus  $\rho$  und  $P$  gebildeten Parallelogramms. Das sind aber die charakteristischen Eigenschaften des **Vektorproduktes** (Parallelogrammvektors) aus  $\rho$  und  $P$  (vgl. Vektoranalysis).

7. Das (**Dreh-**) **Moment**  $\vec{M}$  einer Einzelkraft  $P$  in bezug auf eine Gerade  $g$  ist das in einer zu  $g$  winkelrechten Ebene bestimmte Moment der Projektion  $P'$  von  $P$  in bezug auf den Durchstoßpunkt  $O'$  von  $g$  (s. Abb. 30).

Es wird dargestellt durch den doppelten Flächeninhalt des Dreiecks  $O', P'$ .

Einheit des Momentes wie bei Kräftepaaren (s. unter 3).

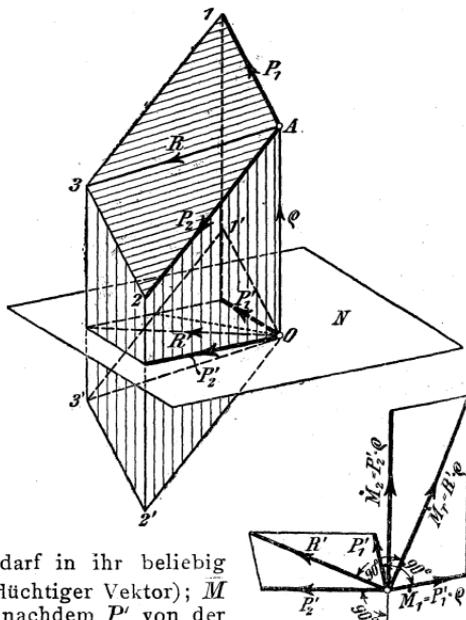
Der nach 3. bestimmte **Momentenvektor**

$\vec{M}$  ist in der Bezugsebene aufzutragen und darf in ihr beliebig verschoben werden (linienflüchtiger Vektor);  $\vec{M}$  ist positiv oder negativ, je nachdem  $P'$  von der als positiv gewählten  $g$ -Richtung aus gesehen im Sinne des Uhrzeigers dreht oder entgegengesetzt (der Pfeil von  $\vec{M}$  mit dem der  $+g$ -Richtung übereinstimmt oder nicht).

Zwischen dem Moment  $\vec{M}$  in bezug auf einen Punkt  $O$  und dem Moment  $\vec{M}$  in bezug auf eine durch  $O$  gehende Gerade  $g$  besteht die Beziehung

$$\vec{M} = \vec{M} \cdot \cos \varphi$$

Abb. 31.



( $\varphi = \sphericalangle(\overline{M}, \overline{M}) =$  Neigungswinkel der Ebenen  $O, P$  und  $O', P'$  (s. Abb. 30).

**8. Allgemeiner Momentensatz.** Ist  $R$  (s. Abb. 31) die Mittelkraft der beiden am Punkte  $A$  angreifenden Kräfte  $P_1, P_2$ , so gilt für jeden Bezugspunkt  $O$ : Das Moment der Mittelkraft ist gleich der **geometrischen** Summe der Momente der beiden Seitenkräfte.

$$\dot{M}_r = \dot{M}_1 + \dot{M}_2.$$

Beweis: S. Abb. 31, in der die Momente durch Parallelogrammflächen dargestellt sind; Abb. 31 b ist der Normalschnitt des Prismas mit den Momentenvektoren. Für den Normalschnitt gilt  $R' = P_1' + P_2'$ ; die Momentenvektoren von  $P_1, P_2$  und  $R$  stehen senkrecht auf  $P_1', P_2', R'$  und haben die Längen  $P_1' \cdot \rho, P_2' \cdot \rho, R' \cdot \rho$ , d. h. sie bilden ebenfalls ein Parallelogramm, das gegen das Parallelogramm  $P_1' P_2'$  um  $90^\circ$  gedreht und ihm ähnlich ist.

Der Satz gilt auch für beliebig viele Kräfte, die jedoch entweder einen gemeinsamen Angriffspunkt haben oder in derselben Ebene liegen müssen.

**Einfacher Momentensatz.** Liegen die Kräfte  $P_1, P_2$  und folglich auch ihre Mittelkraft  $R$  mit dem Momentenbezugspunkt  $O$  in derselben Ebene, so gilt

das Moment der Mittelkraft ist gleich der **algebraischen** Summe der Momente der beiden Seitenkräfte.

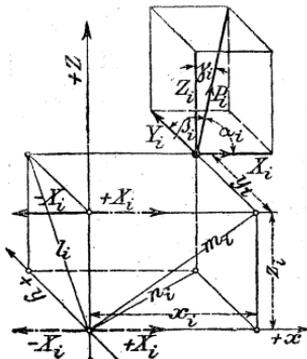
Beweis: Fasse Abb. 31 a nicht als perspektivisches Bild eines Prismas, sondern als ebene Figur auf; dann liest man sofort ab:  $\# OA 33' = \# 233' 2' + \# OA 22' = \# OA 11' + \# OA 22'$ .

Der Satz gilt auch für ein beliebiges ebenes Kräftesystem (Angriffspunkte zusammenfallend oder nicht).

**9. Zeichnerische Darstellung des Momentes im Seileck.** Das auf den Punkt  $A$  bezogene Moment der Resultierenden  $R$  (Abb. 44 S. 181) folgt aus dem Seileck zu  $\dot{M} = R \cdot r = H \cdot y$ ; darin ist  $H$  der Abstand des Krafteck-Poles  $O$  von  $R$  (Polweite der Kraft  $R$ ) und  $y$  die Strecke, die auf einer Parallelen zu  $R$  durch  $A$  von den Seilstrahlen ( $s_0$  und  $s_4$ ) abgeschnitten wird, die sich auf der Wirkungslinie von  $R$  schneiden. Obige Gleichung folgt sofort aus der Aehnlichkeit des schraffierten Dreiecks  $y, \rho$  mit dem Dreieck  $Oo_4$  (vgl. auch Abb. 51 S. 184).

$H$  ist im Kräftemaßstab,  $y$  im Längenmaßstab zu messen oder umgekehrt.

Abb. 32.



**c. Kräfte mit verschiedenem Angriffspunkt.**

Zeichnerische Behandlung s. S. 179 u. f.

**1. Zusammensetzung der Kräfte.** Man zerlegt jede Kraft  $P_i$  in die drei rechtwinkligen Komponenten  $X_i = P_i \cos \alpha_i$ ;  $Y_i = P_i \cos \beta_i$ ;  $Z_i = P_i \cos \gamma_i$  (Abb. 32) und trägt im Koordinatenanfang in der  $X$ -Achse die Kräfte  $+X_i$  und  $-X_i$ , in der  $Y$ -Achse die Kräfte  $+Y_i$  und  $-Y_i$ , in der  $Z$ -Achse die Kräfte  $+Z_i$  und  $-Z_i$  an. Die Kraft  $P_i$  ist dann ersetzt durch drei Seitenkräfte  $X_i, Y_i, Z_i$  und drei Kräftepaare mit den Momenten  $X_i y_i; Y_i z_i; Z_i x_i$ .

Trägt man noch die Kräfte  $+X_i$  und  $-X_i$  im Abstände  $x_i$  vom Koordinatenanfange auf der  $Z$ -Achse parallel zur  $X$ -Achse auf, so wird das Kräftepaar  $X_i l_i$  ersetzt durch die Kräftepaare  $X_i y_i$ , dessen Momentvektor in Richtung der  $+Z$ -Achse, und  $X_i z_i$ , dessen Momentvektor in Richtung der  $-Y$ -Achse liegt (s. S. 170, 3 und 4).

Es tritt daher für  $X_i l_i$   $+X_i y_i$  und  $-X_i z_i$   
 entsprechend für  $Y_i m_i$   $+Y_i z_i$  und  $-Y_i x_i$   
 für  $Z_i n_i$   $+Z_i x_i$  und  $-Z_i y_i$ .

Durch Zusammensetzen der Seitenkräfte nach 3, S. 168 und der Kräftepaare nach 4, S. 170, ergeben sich die Seitenkräfte

$$X = \Sigma(X_i) \quad Y = \Sigma(Y_i) \quad Z = \Sigma(Z_i)$$

mit der Mittelkraft  $R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$ ,

die Momente bezogen auf die Koordinatenachsen

$$M_x = \Sigma(Y_i z_i - Z_i y_i); \quad M_y = \Sigma(Z_i x_i - X_i z_i); \quad M_z = \Sigma(X_i y_i - Y_i x_i),$$

deren Mittelmoment  $M_r = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}$  ist.

Die Winkel  $\alpha, \beta, \gamma$  zwischen der Mittelkraft  $R$  und den Achsen und die Winkel  $\lambda, \mu, \nu$  zwischen dem Momentvektor des resultierenden Kräftepaars  $M_r$  und den Koordinatenachsen sind bestimmt durch

$$\begin{aligned} X &= R \cos \alpha & Y &= R \cos \beta & Z &= R \cos \gamma \\ M_x &= M_r \cos \lambda & M_y &= M_r \cos \mu & M_z &= M_r \cos \nu. \end{aligned}$$

Die Mittelkraft  $R$  und der Momentvektor des resultierenden Kräftepaars  $M_r$  schliessen den Winkel  $\varphi$  ein, für den

$$\cos \varphi = \cos \alpha \cos \lambda + \cos \beta \cos \mu + \cos \gamma \cos \nu = \frac{X M_x + Y M_y + Z M_z}{R M_r} \text{ ist.}$$

Wird die Achenstrecke  $M_r$  in die Komponenten  $M' = M_r \sin \varphi$  und  $M'' = M_r \cos \varphi$  zerlegt, von denen  $M' \perp R$  ist, so ergibt das  $M'$  entsprechende Kräftepaar, welches in einer Ebene mit der Mittelkraft  $R$  liegt, mit dieser zusammengesetzt eine um die Strecke  $M' : R$  in der Ebene des Kräftepaars  $M'$  parallel verschobene Kraft  $R$ .

Die Zusammensetzung von Kräften im Raume mit verschiedenem Angriffspunkt ergibt demnach im allgemeinen eine in einer bestimmten Geraden des Raumes wirkende Kraft  $R$  und ein Kräftepaar vom Moment  $M''$  in einer Ebene winkelrecht zu diesen Geraden.

Die Gerade heisst die **Zentralachse** des Kräftesystems, das Moment  $M''$  das **Hauptmoment**.

Das Kräftesystem ergibt nur ein Kräftepaar, wenn  $R = 0$ , d. h. wenn

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = 0,$$

und nur eine Einzelkraft, wenn  $M'' = 0$ , d. h. wenn

$$X M_x + Y M_y + Z M_z = 0.$$

Für ein **ebenes Kräftesystem** ist

$$M_x = 0, \quad M_y = 0, \quad Z = 0, \quad M = M_z,$$

somit  $X = \Sigma(X_i), \quad Y = \Sigma(Y_i), \quad M = \Sigma(X_i y_i - Y_i x_i)$

und  $R = \sqrt{X^2 + Y^2}.$

Die Mittelkraft  $R$  ergibt mit dem Moment (Kräftepaar)  $M$  eine parallele Kraft  $R$  gleicher Größe und Sinnes wie die Mittelkraft im Abstände  $a = M : R$  (vgl. 5, S. 170).

Ein ebenes Kräftesystem läßt sich demnach stets durch eine Einzelkraft oder (wenn die Mittelkraft  $R = 0$  wird) durch ein Kräftepaar ersetzen.

Benutzt man statt des **Rechts-Koordinatensystems** (Abb. 32) ein dazu symmetrisches **Links-Koordinatensystem** ( $+X$ - und  $-X$ -Richtung vertauscht), so wechseln die Formeln für  $M_x, M_y, M_z$  die Vorzeichen:

$$M_x = \sum (y_i z_i - z_i y_i), \quad M_y = \sum (z_i x_i - x_i z_i), \\ M_z = \sum (x_i y_i - y_i x_i).$$

2. Ein starrer Körper befindet sich unter der Einwirkung eines **räumlichen Kräftesystems** im **Gleichgewicht**, wenn für diese  $R = 0$  und  $M = 0$  ist, d. h. wenn folgende sechs Bedingungsgleichungen erfüllt sind:

$$X = 0 \quad Y = 0 \quad Z = 0 \quad \text{und} \\ M_x = 0 \quad M_y = 0 \quad M_z = 0.$$

Bei einem **ebenen Kräftesystem** herrscht **Gleichgewicht**, wenn folgende drei Bedingungsgleichungen erfüllt sind:

$$X = 0 \quad Y = 0 \quad M = 0,$$

an deren Stelle man auch nehmen kann

$$X = 0 \quad M_1 = 0 \quad M_2 = 0 \\ \text{oder} \quad M_1 = 0 \quad M_2 = 0 \quad M_3 = 0,$$

wo  $X$  die Summe der Seitenkräfte nach einer beliebigen Richtung,  $M_1, M_2, M_3$  die Momentensummen in bezug auf beliebige Punkte  $O_1, O_2, O_3$  in der Kräfteebene sind, mit der Beschränkung, daß  $O_1, O_2$  nicht  $\perp X$  und  $O_1, O_2, O_3$  nicht in einer Geraden liegen.

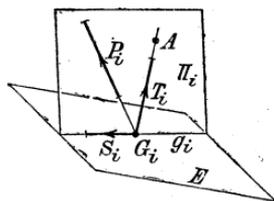
3. Ein beliebiges **räumliches Kräftesystem** läßt sich im allgemeinen auf unendlich viele Weisen wie folgt auf zwei sich kreuzende Kräfte zurückführen.

Man legt durch jede Kraft  $P_i$  und einen Punkt  $A$  eine Ebene  $\Pi_i$ , die eine Ebene  $E$  in der Geraden  $g_i$  schneidet;  $P_i$  schneidet  $E$  im Punkte  $G_i$  (Abb. 33). Man zerlegt  $P_i$  in zwei Seitenkräfte  $S_i$  und  $T_i$ , die in den Geraden  $g_i$  und  $G_i A$  liegen. Verfährt man so mit allen Kräften  $P_i$ , so erhält man ein Kräftesystem  $S_i$  in der Ebene  $E$  und ein Kräftesystem  $T_i$ , dessen sämtliche Kräfte durch  $A$  gehen. Beide Systeme ergeben je eine Einzelkraft  $S$  und  $T$ , die sich im allgemeinen kreuzen.

#### d. Satz der willkürlichen und virtuellen Verschiebungen.

Eine unter dem Einfluß äußerer Kräfte (s. S. 167) stehende Massengruppe, d. i. eine Anzahl von Massenpunkten, die aufeinander durch gegenseitige Kräfte (innere Kräfte, s. S. 167) einwirken,

Abb. 33.



ist im Gleichgewicht, wenn jeder ihrer Massenpunkte in Ruhe ist (oder sich gleichförmig und geradlinig bewegt, s. S. 164 u. 166).

1. Erteilt man jedem der Massenpunkte des im Gleichgewicht befindlichen Systems, auf das die beliebigen äußeren Kräfte  $P$  und die inneren Kräfte  $S$  in Richtung der Verbindungslinien der Massenpunkte

wirken, eine **völlig willkürliche** unendlich kleine **Verschiebung**

$i' = \delta_i$  (Abb. 34) und bildet die Summe der Seitenkräfte in Richtung  $\delta_i$  aller im Punkt  $i$  angreifenden Kräfte, wegen des Gleichgewichtes der Kräfte an jedem Massenpunkt  $= 0$ , multipliziert mit  $\delta_i$  und addiert über das ganze System, so ist

$$\sum P_i \delta_i \cos \alpha_i + \sum (S_{ik} \delta_i \cos \beta_{ik} + S_{ki} \delta_k \cos \beta_{ki}) = 0. \quad 1)$$

worin  $\alpha_i$  den Winkel zwischen  $P_i$  und  $\delta_i$ ,  $\beta_{ik}$  den Winkel zwischen  $S_{ik}$  und  $\delta_i$ ,  $\beta_{ki}$  den Winkel zwischen  $S_{ki}$  und  $\delta_k$  bezeichnet. Nach S. 196 ist die linke Seite der Gleichung 1 die Arbeit der Kräfte bei der Verschiebung.

Die Summe der Arbeiten der im Gleichgewicht befindlichen äußeren und inneren Kräfte bei völlig willkürlichen unendlich kleinen Verschiebungen der Angriffspunkte ist null.

Nach Abb. 34 ist

$$\delta_i \cos \beta_{ik} + \delta_k \cos \beta_{ki} = -\Delta = \sim - (l' - l) = \sim - \delta l$$

(genau bei unendlich kleinen Verschiebungen), und da

$$S_{ik} = S_{ki} = S;$$

so ist die Summe der Arbeiten der inneren Kräfte  $= \sum S \delta l$ , worin  $\delta l$  durch  $\delta_i$  bestimmt ist, und Gleichung 1 geht über in

$$\sum P_i \delta_i \cos \alpha_i - \sum S \delta l = 0. \quad 2)$$

2. Erteilt man den einzelnen, in allen praktisch wichtigen Fällen nicht frei beweglichen Massenpunkten unendlich kleine, mit den einschränkenden Bedingungen **verträgliche** Verschiebungen, d. i. eine **virtuelle Verschiebung**, und wählt die Verschiebung in geeigneter Weise, so vereinfacht sich Gleichung 1 bzw. 2.

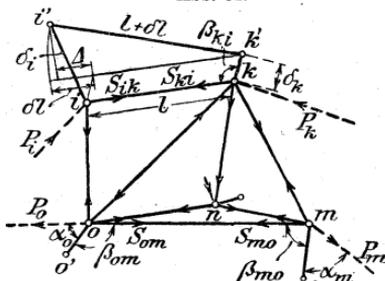
$\alpha$ ) Bei einer **virtuellen Verschiebung ohne Formänderung** des Gebildes (z. B. starrer Körper) fallen die inneren Kräfte aus Gleichung 1 und 2 heraus, da  $\delta l = 0$ , und es wird

$$\sum P_i \delta_i \cos \alpha_i = \sum (X \delta x + Y \delta y + Z \delta z) = 0 \quad 3)$$

worin  $X, Y, Z$  die Seitenkräfte von  $P$  nach drei rechtwinkligen Koordinatenachsen und  $\delta x, \delta y, \delta z$  die Projektionen von  $\delta$  sind (s. auch S. 196).

Für festliegende Punkte (Drehung um diese) fallen aus Gleichung 3 auch die Kräfte an diesen heraus, da hierfür  $\delta = 0$ .

Abb. 34.



Bei Verschiebung längs einer Führung fallen aus Gleichung 3 auch die Bahnwiderstände  $\perp$  zur Führung heraus (glatte Führung), da hierfür  $\alpha = 90^\circ$ ,  $\cos \alpha = 0$ ; hat die Führung Reibung (Reibungswinkel  $= \rho$ , s. S. 243), so ist die Verschiebung gegen die Führung um  $\sphericalangle \rho$  geneigt, d. h.  $\perp$  zum Bahnwiderstand zu wählen.

β) Bei einer **virtuellen Verschiebung** eines aus starren Teilen bestehenden **beweglichen Systems** fallen aus Gleichung 1 und 2 die inneren Kräfte der starren Teilkörper ( $\delta l_i = 0$ ), die Gelenkdrücke (Verschiebungen  $\delta$  und Drücke gleich groß, diese entgegengesetzt gerichtet) und die Stützwiderstände ( $\delta = 0$  oder  $\alpha = 90^\circ$ ) heraus; vergleiche  $\alpha$  (Prinzip der virtuellen Verschiebungen im engeren Sinne).

3. Sind mehrere **unbekannte Kräfte zu bestimmen**, so wählt man die virtuellen Verschiebungen so, daß die Arbeiten aller unbekanntener Kräfte bis auf die gerade gesuchte Null werden.

**Beispiel 1. Berechnung des innerlich statisch unbestimmten Fachwerkes**, Abb. 35.

Wenn die Spannkraft  $X$  in dem „überzähligen“ Stabe 13 bekannt ist, können die übrigen Stabkräfte (statisch bestimmt) zeichnerisch oder rechnerisch ermittelt werden. Man denke sich den überzähligen Stab entfernt und bestimme die Stabkräfte  $\mathfrak{S}$  in dem nunmehr statisch bestimmten Fachwerk. Dann bestimme man die durch die an den beiden Endpunkten des überzähligen Stabes in Richtung desselben angebrachten Kräfte  $X = 1$  hervorgerufenen Stabkräfte  $\sigma$ . Die im Stabe  $i$  wirklich auftretende Spannkraft ist dann  $S_i = \mathfrak{S}_i + \sigma_i X$ , wie aus der Konstruktion der Kräftepläne (s. S. 186) oder aus den Gleichgewichtsbedingungen (Gleichungen ersten Grades in den unbekanntener äußeren und Stabkräften) folgt.

Auf das von den beiden Lasten 1 und den Spannkraften  $\sigma$  gebildete Gleichgewichtssystem wird die Gleichung 2, S. 175 angewandt und als **willkürliche** Verschiebung der Knotenpunkte die gewählt, die durch die Formänderung des Trägers (ohne den Stab 13) infolge der äußeren Kräfte hervorgerufen wird. Die Längenänderung des Stabes  $i$ , der die Spannkraft  $S_i = \mathfrak{S}_i + \sigma_i X$  erhält, ist nach der Festigkeitslehre

$$\delta l_i = \frac{S_i l_i}{E_i f_i} = \frac{\mathfrak{S}_i l_i}{E_i f_i} + X \frac{\sigma_i l_i}{E_i f_i}$$

wo  $f_i$  den Querschnitt,  $l_i$  die Länge und  $E_i$  den Elastizitätsmodul des Stabes  $i$  bedeuten (s. Festigkeitslehre); die innere Arbeit ist demnach

$$-\sum (\sigma_i \delta l_i) = -\sum \left( \frac{\sigma_i \mathfrak{S}_i l_i}{E_i f_i} \right) - X \sum \left( \frac{\sigma_i^2 l_i}{E_i f_i} \right);$$

die äußere Arbeit der beiden Kräfte 1 ist mit  $\delta l = \Delta$ ;  $S = X$ ;  $\mathfrak{S} = 0$ ;  $\sigma = 1$ ;  $l = L$ ;  $f = F$ :

$$-1 \cdot \Delta = -1 (XL) : (EF).$$

Nach Gleichung 2, S. 175 ist  $-1 \cdot \Delta - \sum \sigma_i \delta l_i = 0$ , woraus durch Einsetzen der Werte für  $\Delta$  und Ausführung der Summation nur über die notwendigen Stäbe  $X$  zu bestimmen ist.

**Beispiel 2.** (Prinzip der virtuellen Verschiebungen im engeren Sinne.) **Brückengewoge**, Abb. 36. Erteilt man der Wagschale die unendlich kleine Senkung  $\delta p$ , so erfährt die Last  $Q$  infolge des Zusammenhanges der Stabverbindung die unendlich kleine Hebung  $\delta q$ . Es gilt demnach:

$$P \cdot \delta p - Q \cdot \delta q = 0, \quad \frac{P}{Q} = \frac{\delta q}{\delta p} \quad \text{mit} \quad \delta q = \delta_3 + \frac{x}{f} \cdot (\delta_2 - \delta_3)$$

$$\text{und} \quad \delta_1 = \delta p \cdot \frac{b}{a}, \quad \delta_2 = \delta p \cdot \frac{c}{a},$$

$$\delta_3 = \delta_1 \cdot \frac{e}{d} = \delta p \cdot \frac{b}{a} \cdot \frac{e}{d},$$

also  $\delta_1/\delta p$ ,  $\delta_2/\delta p$ ,  $\delta_3/\delta p$  nur abhängig von den konstanten Abmessungen der Wage. Soll die Wage brauchbar sein, so darf das Uebersetzungsverhältnis  $P/Q = \delta q/\delta p$  nicht von der Lage der Last  $Q$  auf der Brücke  $f$ , d. h. von dem veränderlichen  $x$  abhängen; folglich

$$\delta_2 = \delta_3 \quad \text{oder} \quad \frac{c}{b} = \frac{e}{d}$$

(die Brücke muß sich parallel heben und senken; entsprechendes gilt für alle Wäageapparate). Damit wird

$$\frac{P}{Q} = \frac{c}{a} = \frac{b}{a} \cdot \frac{e}{d} \left( \frac{c}{a} = \frac{1}{10} \text{ Dezimalwage, } \frac{c}{a} = \frac{1}{100} \text{ Centesimalwage} \right).$$

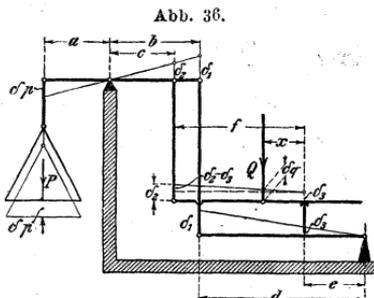


Abb. 36.

## C. Kräfte an gestützten starren Körpern.

### Stützwiderstände, Standfestigkeit.

Allgemeines über **innere und äußere Kräfte**, Stützenwiderstände s. u. 3, S. 167.

Sobald die Stützwiderstände bestimmt sind, sind diese zu den übrigen gegebenen Kräften als äußere Kräfte zu rechnen; man hat es also dann mit Kräften an einem freien Körper zu tun, wie unter B, S. 168 u. f.

1. **Arten der Stützung einer ebenen Scheibe** (Träger, Fachwerk). Jeder Stützwiderstand erfordert wie jede Kraft zu seiner vollständigen Bestimmung die Angaben 1) seiner Größe, 2) seiner Richtung, 3) eines Punktes seiner Wirkungsgeraden (Angriffspunkt); je nach Art der Lagerung sind keine, eine oder zwei dieser Angaben bekannt.

α) Bei einer **festen Einspannung** (Flächenlager) Abb. 37 bei A sind Angriffspunkt, Richtung und Größe des Stützwiderstandes unbekannt.

β) Bei einem **Kipplager** (festes Auflagergelenk) (Abb. 38 bei A) ist der Angriffspunkt des Stützwiderstandes durch die Mitte des Gelenkbolzens gegeben, unbekannt Größe und Richtung.

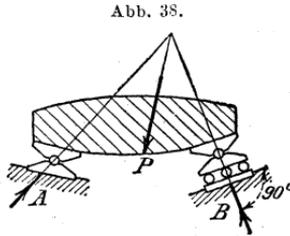
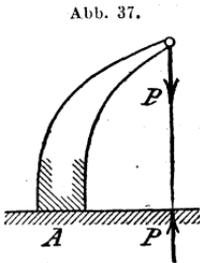
γ) Bei einem **Berührungslager** (bewegliche Einspannung) (Abb. 39 bei A) ist die Richtung des Stützwiderstandes gegeben, unbekannt Angriffspunkt und Größe.

δ) Bei einem **Berührungkipplager** (bewegliches Auflagergelenk) (Abb. 38 u. 39 bei B u. Abb. 40) sind Richtung und Angriffspunkt des Stützwiderstandes gegeben, unbekannt die Größe.

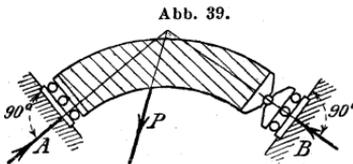
Häufig wird ein Berührungkipplager durch einen gelenkig angeschlossenen Stab (Pendelsäule oder Zugstange) ersetzt. Der Stützwiderstand fällt in die Achse des Stabes.

2. Sind die äußeren Kräfte ein **ebenes Kräftesystem** in der Ebene der Scheibe (Träger, Fachwerk), so sind für die in dieser Ebene liegenden **Stützwiderstände** die drei Gleichgewichtsbedingungen  $\sum H = 0$ ;

$\Sigma V=0$ ;  $\Sigma M=0$  (oder gleichwertig hiermit eine Seitenkräfte- und zwei Momentengleichungen oder drei Momentengleichungen) zur Bestimmung der Stützwiderstände vorhanden, s. S. 174.



$\beta$ ) bei Stützung an zwei Stellen durch ein Kipp- und ein Berührungskipplager (Abb. 38) oder durch ein Berührungskipp- und ein Berührungslager (Abb. 39);



bedingungen weniger als drei Gleichungen, so ist der Körper nur dann im Gleichgewicht, wenn die äußeren Kräfte (ohne die Stützwiderstände) die fehlenden Bedingungen des Gleichgewichts an und für sich erfüllen.

Abb. 40.

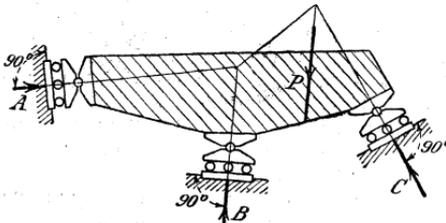
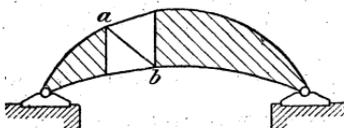


Abb. 41.



äußerer Kräfte, z. B. durch Temperaturänderung oder Anspannen des Stabes  $ab$ , sowohl Kräfte innerhalb des Trägers als auch Stützwiderstände (Horizontalschübe) hervorgerufen werden.

Der Träger heißt **äußerlich statisch bestimmt**, wenn die Gleichgewichtsbedingungen zur Bestimmung der Stützwiderstände genügen. Die Auflagerung muß dann erfolgen

$\alpha$ ) bei Stützung an einer Stelle durch feste Einspannung (Abb. 37);

$\gamma$ ) bei Stützung an drei Stellen durch drei Berührungskipplager, deren Normalen sich nicht in demselben Punkte schneiden (Abb. 40).

Schneiden sich die Normalen in einem Punkt, so ist der Träger um diesen Punkt drehbar (nicht fest gelagert), und die Stützkkräfte sind nicht bestimmbar (vgl. S. 183).

Verlangen die Auflagerbedingungen, so ist der Körper nur dann im Gleichgewicht, wenn die äußeren Kräfte (ohne die Stützwiderstände) die fehlenden Bedingungen des Gleichgewichts an und für sich erfüllen.

3. Genügen die Gleichgewichtsbedingungen zur Bestimmung der Stützwiderstände nicht, so heißt der Träger **äußerlich statisch unbestimmt**. Die Stützwiderstände lassen sich nur unter Beachtung der Formänderung finden.

4. Kennzeichnend für die **statisch bestimmten Lagerungen** ist, daß mit dem Verschwinden der äußeren Kräfte auch die Stützwiderstände null werden. Dies ist nicht der Fall bei einem **äußerlich statisch unbestimmten** Träger; z. B. einem Zweigelenkbogen (Abb. 41), bei dem ohne die Wirkung

5. Bilden mehrere (z. B. gelenkartig verbundene) Körper ein starres System, **Fachwerk**, so sind die an den Verbindungsstellen der einzelnen Teile auftretenden Drücke und Gegendrücke als innere Kräfte anzusehen, die für die Bestimmung der Stützwiderstände des Systems nicht in Betracht kommen.

Stützwiderstände eines vollwandigen und eines gegliederten Trägers sind unter sonst gleichen Umständen gleich.

Diese Drücke und Gegendrücke sind dagegen maßgebend für die Bestimmung der Kräfte innerhalb einer Konstruktion. Lassen sich dieselben nicht mit Hilfe der Gleichgewichtsbedingungen durch Zerlegung des Systems in die einzelnen Teile bestimmen, so heißt das System (Träger) **innerlich statisch unbestimmt**; dabei kann die Auflagerung statisch bestimmt oder unbestimmt sein. Auch hier können Spannungen in den Stäben auftreten, ohne daß äußere Kräfte wirken. Die Bestimmung der Kräfte ist nur möglich unter Beachtung der Formänderung (s. Beispiel 1 zu d auf S. 176).

Näheres s. III. Bd., Abschn. Statik der Baukonstruktionen.

6. Sind die an einen Körper angreifenden Kräfte ein **räumliches Kräftesystem**, so sind zur Bestimmung der **Stützwiderstände** sinngemäß, wie unter 1 bis 5 angegeben, die sechs Gleichgewichtsbedingungen unter 2, S. 174 anzuwenden.

7. Stützt sich ein Körper in drei Punkten, so kann die Lagerung unter sinngemäßer Anwendung des unter 1 Gesagten (z. B. allseitig bewegliches Kugelgelenk statt Kipplager) so getroffen werden, daß die Stützdrücke statisch bestimmbar sind. Bei mehr als drei Stützpunkten ist die Lagerung statisch unbestimmt.

Die durch die äußersten Stützpunkte gelegten Geraden sind die **Dreh- oder Kippkanten**, die Fläche des Vielecks heißt **Stützfläche**.

Die **Standfestigkeit** (Stabilität) ist gesichert, wenn die Mittelkraft der äußeren angreifenden Kräfte (einschließlich Gewicht) die stützende Ebene innerhalb der Stützfläche trifft. Ein Maß der Standfestigkeit ist das **Stabilitätsmoment**, d. i. das Moment der Mittelkraft in bezug auf die nächstgelegene Kippkante. Ist das Gewicht die einzige äußere Kraft, so muß also das Lot durch den Schwerpunkt des Körpers die Stützfläche treffen. (Ueber Schwerpunkt s. S. 188 u. f.)

Unter dem **dynamischen Stabilitätsmoment** versteht man das Produkt  $A = Gh$  aus dem Gewicht  $G$  des Körpers und der Strecke  $h$ , um die der Schwerpunkt beim Kippen um die nächstgelegene Kippkante gehoben wird, bis er senkrecht über derselben liegt ( $A$  ist die zum Kippen des Körpers aufzuwendende Arbeit, s. S. 196).

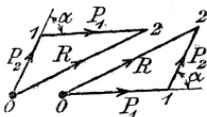
## D. Grundaufgaben der graphischen Statik (zeichnerische Zusammensetzung der Kräfte).

Eine Kraft wird durch eine Gerade mit bestimmter Lage, ihre Richtung durch Angabe eines Pfeiles und ihre Größe durch bestimmte Länge der Geraden dargestellt.

### a. Kräftezug, Krafteck.

1. Das Parallelogramm zweier sich schneidender Kräfte (Abb. 27, S. 168)

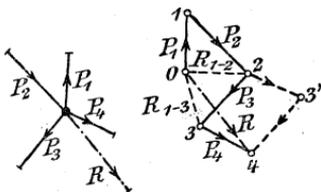
Abb. 42.



führt unmittelbar zur graphischen Zusammensetzung mittels des **Kräftedreiecks**, Abb. 42;  $R$  heißt die **Schlussseite** und gibt die Mittelkraft nach Größe und Richtung an; ihre Lage ist durch den Angriffspunkt  $O$  (Schnittpunkt) der Kräfte gegeben. Durch wiederholte Anwendung des Kräfte Dreiecks und unter Fortlassung der einzelnen Dreieckschlussseiten  $R_{1-2}$ ,  $R_{1-3}$ ...

findet man die Mittelkraft  $R$  der in einer Ebene liegenden, sich in einem Punkte schneidenden Kräfte  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$ ,  $P_4$ , (Abb. 43a) der Größe und Richtung nach, indem man von einem beliebigen Punkte  $O$  ausgehend

Abb. 43 a u. b.



(Abb. 43b) die Kräfte in beliebiger Reihenfolge der Größe und Richtung nach so aneinanderfügt, dass die die Richtung bezeichnenden Pfeile gleichsinnig verlaufen (**Kräftezug, Krafteck**). Die Größe und Richtung der im Angriffspunkt der gegebenen Kräfte angreifenden Mittelkraft ist durch die Schlussseite des Kräftezuges gegeben; ihr Richtungspfeil ist

ungleichsinnig mit denen der gegebenen Kräfte.

2. **Gleichgewicht** herrscht, wenn  $R = 0$  ist, d. h. wenn sich der Kräftezug von selbst schließt, oder: zu den Kräften  $P_1, P_2 \dots P_n$  muss eine Kraft  $R'$  hinzugefügt werden, deren Richtung und Größe die Schlussseite bestimmt, wobei alle Pfeile gleichsinnig laufen müssen.

Keht man im geschlossenen Kräftezug einen aller gleichsinnigen Pfeile um, so ist die betreffende Kraft die Mittelkraft aller übrigen.

3. Liegen die Kräfte nicht in einer Ebene, so wird der Kräftezug ein räumliches Vieleck. Zeichnet man die Projektionen der Kräfte auf zwei beliebige Ebenen (Grundriss und Aufriss), so sind die Schlusslinien der projizierten Kräfte die Projektionen des Schlusslinie des räumlichen Kräftezuges.

Beispiel: Umkehrung der Aufgabe unter d 2 S. 183, Abb. 50; I, II, III bekannt, gesucht  $R$ , so zeigt die Abb. 50b sofort den obigen Satz von den Projektionen der Schlusslinien.

### b. Seileck (Seilpolygon), Pol.

1. **Zusammensetzung beliebiger Kräfte in der Ebene:** Größe, Richtung, Sinn der Mittelkraft  $R$  der Kräfte  $P_1, P_2, P_3, P_4$  (Abb. 43a) bleiben bei Parallelverschiebung nach einem gemeinsamen Schnittpunkt unverändert (vgl. S. 172 unter I.) und lassen sich demnach mit Hilfe des Kräftezuges (s. oben, a 1 u. Abb. 43b) bestimmen.

Die Lage von  $R$  findet man wie folgt: von einem beliebigen Punkt  $O$ , dem **Pol**, in Abb. 44b ziehe man die Geraden  $OO_1, OO_2,$

$O_2, O_3, O_4$  und in Abb. 44 a den Linienzug  $s_0, s_1, s_2, s_3, s_4$  derart, daß die in Abb. 44 a u. b gleichbenannten Linien parallel sind, wobei

Abb. 44 a u. b.

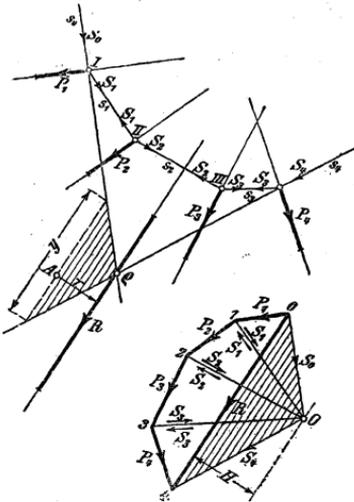
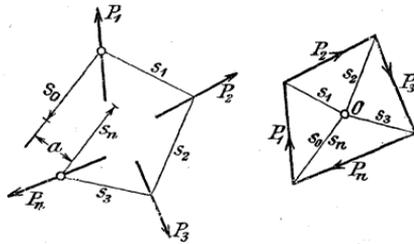


Abb. 45 a u. b.



die Lage von  $s_0$  in Abb. 44 a beliebig ist. Durch den Schnittpunkt von  $s_0$  und  $s_4$  muß  $R$  gehen, womit die Lage bestimmt ist.

Das Liniengebilde  $OO1234$  heißt **Kräfteplan**, die Geraden  $s_0, s_1, s_2, s_3, s_4$  in Abb. 44 b **Seilstrahlen**, der Linienzug  $s_0, s_1, s_2, s_3, s_4$  in Abb. 44 a **Seileck oder Seilpolygon**.

Beweis der Richtigkeit des Verfahrens (s. Abb. 44 a u. b): Fasse die Seilstrahlen als Kräfte  $S_0, S_1, S_2, S_3, S_4$  auf; füge in den mittleren Seileckseiten  $s_1, s_2, s_3$  je zwei Kräfte  $S_1, S_2, S_3$  mit entgegengesetztem Pfeilsinne zu; dann heben sich an den Punkten II und III  $P_2 S_1 S_2$  bzw.  $P_3 S_2 S_3$  fort; es bleiben am Punkte I  $P_1$  und  $S_1$ , die zusammengesetzt  $S_0$  liefern, und am Punkte IV  $P_4$  und  $S_3$ , die zusammen  $S_4$  liefern.

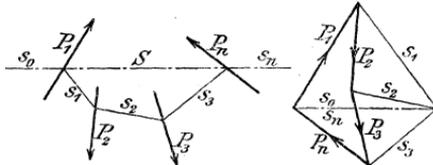
2. Folgende drei Fälle können eintreten:

α) Anfangs- und Endpunkt des Kraftecks im Kräfteplan fallen nicht zusammen (allgemeiner Fall); Ergebnis: Einzelkraft (Abb. 44 a u. b).

β) Anfangs- und Endpunkt des Kraftecks im Kräfteplan fallen zusammen, und die äußersten Seileckseiten sind infolgedessen parallel; Ergebnis: Kräftepaar (Abb. 45 a u. b, Kräftepaar =  $s_0 a = s_n a$ ).

γ) Anfangs- und Endpunkt des Kraftecks im Kräfteplan und die äußersten Seileckseiten fallen zusammen, d. h. Krafteck und Seileck sind von selbst geschlossen; Ergebnis: **Gleichgewicht** (Abb. 46 a u. b).

Abb. 46 a u. b.



Die beiden zusammenfallenden äußersten Seiten des Seilecks heißen dann die **Schlusslinie** ( $S$ , Abb. 46) des Seilecks.

3. Zeichnet man zu einer Kräftegruppe (Abb. 47) Kräfteplan und Seileck je mit einem Pol  $O_1$  und  $O_2$ , so liegen die Schnittpunkte ent-

sprechender Seileckseiten sämtlich auf einer zu  $O_1 O_2$  parallelen Geraden  $A_0 A_n$ , der **Polarachse** der beiden Seilecke.

4. Nimmt man als Pol den Anfangspunkt des Kräftezuges im

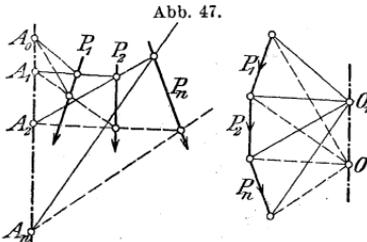


Abb. 47.

Kräfteplan, so geben die Seiten des Seilecks jeweils die Lage der Mittelkräfte aus allen der betreffenden Seite vorangehenden Kräften an. Die letzte Seite fällt mit der Mittelkraft aus allen Einzelkräften zusammen. Das Seileck heißt dann **Mittelkraftlinie** (Anwendung: Drucklinie in Gewölben, Dreigelenkbogen, Stützmauern).

5. Der Pol  $O$  ist so zu bestimmen, daß **das Seileck durch drei gegebene Punkte  $ABC$  geht** (Anwendung: Mittelkraftlinie = Drucklinie beim **Dreigelenkbogen**). Abb. 48a u. b für Parallelkräfte: Man bestimme

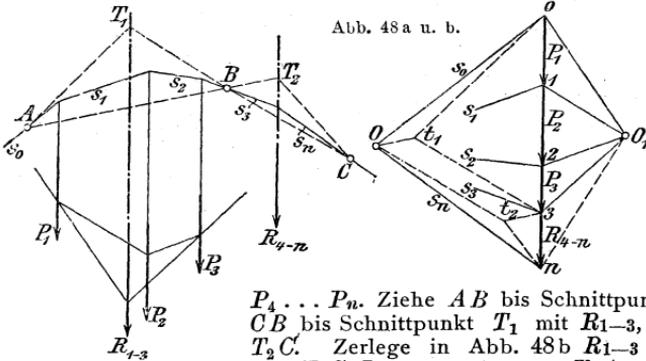


Abb. 48a u. b.

mit einem beliebigen Pol  $O_1$  die Mittelkraft  $R_{1-3}$  der zwischen  $A$  und  $B$  liegenden Kräfte  $P_1 P_2 P_3$ , und ebenso mit  $O_1$  (oderauch einem anderen Pol  $O_2$ )  $R_{4-n}$  der zwischen  $B$  und  $C$  liegenden Kräfte

$P_4 \dots P_n$ . Ziehe  $AB$  bis Schnittpunkt  $T_2$  mit  $R_{4-n}$ ,  $CB$  bis Schnittpunkt  $T_1$  mit  $R_{1-3}$ , ferner  $T_1 A$  und  $T_2 C$ . Zerlege in Abb. 48b  $R_{1-3}$  in Richtung  $T_1 A$  und  $T_1 C$ ,  $R_{4-n}$  in Richtung  $T_2 A$  und  $T_2 C$ ; ziehe die Parallelen durch  $t_1$  und  $t_2$  in Abb. 48b, so ist  $O$  der gesuchte Pol.

Das Seileck für Pol  $O$  durch  $ABC$  ist für  $s_0$ ,  $R_{1-3}$ ,  $R_{4-n}$  und  $s_n$  Mittelkraftlinie. Beim **Dreigelenkbogen** stellen  $s_0$  und  $s_n$  die **Kämpferdrücke**,  $s_3$  die Kraft am Mittelgelenk dar.

**c. Moment eines beliebigen ebenen Kräftesystems.**

Erklärung des Moments s. S. 170, unter b 6.

Das resultierende Moment  $M$  der Kräfte  $P_1, P_2, P_3, P_4$  (Abb. 44a) in bezug auf den Punkt  $A$  (gleich dem Moment der Mittelkraft  $R$ ) wird durch Zeichnen des Kräfteplans (Abb. 44b) und Seilecks (Abb. 44a) bestimmt. Aus der Ähnlichkeit der schraffierten Dreiecke folgt  $M = Rr = Hy$ , worin  $H$  die Polweite (Abstand  $H$  des Poles  $O$  von  $R$  im Kräfteplan) und  $y$  die von den beiden äußersten Seilstrahlen  $s_0$  und  $s_4$  auf einer Parallelen zu  $R$  durch  $A$  abgeschnittene Strecke ist.

$H$  ist im Kräftemaßstab,  $y$  im Längenmaßstab zu messen, oder umgekehrt. Vrgl. a. Abb. 51a.

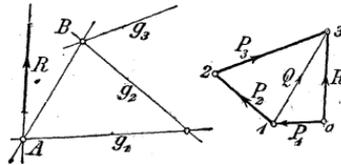
### d. Zerlegung der Kräfte.

(Siehe auch S. 168, unter a, 2.)

#### 1. In der Ebene.

$\alpha$ ) Zwei der Lage nach gegebene **parallele Kräfte**  $A, B$  zu finden, die den ihnen parallelen Kräften  $P_1, P_2 \dots P_n$  das Gleichgewicht halten: Zeichne Kräfteplan und Seileck (Abb. 51 a u. b, S. 184); ziehe in 51 a die Schlußlinie  $S$ , gegeben durch die Schnittpunkte der zugehörigen (hier äußersten) Seilstrahlen mit den Richtungen von  $A$  und  $B$ , dann in Abb. 51 b durch  $O$  eine Parallele zu  $S$ , welche  $P_1 + P_2 + \dots + P_n$  in  $A$  und  $B$  teilt.

Abb. 49 a u. b.



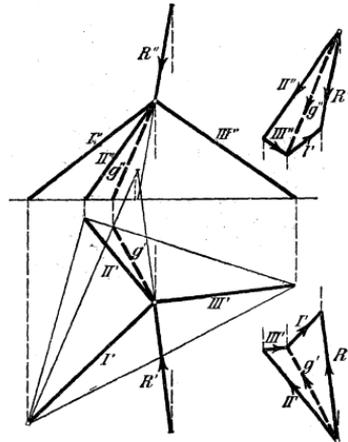
$\beta$ ) **Zerlegung der Kraft  $R$  nach drei sich nicht in einem Punkte schneidenden Richtungen (Verfahren von Culmann)**  $g_1 g_2 g_3$ , Abb. 49 a u. b.

$R$  schneidet  $g_1$  in  $A$ ,  $g_1$  und  $g_2$  schneiden sich in  $B$ ; zerlege  $R$  nach  $g_1$  und  $AB$  in  $P_1$  und  $Q$  und dann  $Q$  in  $B$  nach  $g_2$  und  $g_3$  in  $P_2$  und  $P_3$ .

Die Zerlegung in mehr als drei sich nicht in einem Punkte schneidende, in einer Ebene liegende Richtungen ist unbestimmt.

**2. Zerlegung der Kraft  $R$  in die drei sich in einem Punkte auf ihr schneidenden, nicht in einer Ebene liegenden Richtungen I, II, III:** In Abb. 50a sind die 3 Richtungen I, II, III und  $R$  in Aufriss und Grundriss gezeichnet. Die Ebene ( $RI$ ) schneidet die Ebene (II, III) in  $g$ ; man zerlegt  $R$  in Richtung I und  $g$  und dann  $g$  in Richtung II und III. Die Bestimmung der Projektionen  $g'$  und  $g''$  der Geraden  $g$  zeigt Abb. 50a, der Kräfte  $R, g, I, II, III$  Abb. 50b.

Abb. 50 a u. b.



**Anwendung:** Stabkräfte im dreieckigen Bock, Spannungsermittlung im räumlichen Fachwerk.

### e. Anwendungen.

1. Bestimmung des **Schwerpunktes** ebener Flächen s. u. b, S. 189, die Ermittlung der **Spannungsverteilung** in ebenen Querschnitten s. Abschn. Festigkeitslehre, der Stromverteilung in elektrischen Leitungsnetzen s. Abschn. Elektrotechnik.

2. **Biegemomente und Querkräfte** eines statisch bestimmten geraden **Balkens** auf 2 Stützen:

$\alpha$ ) mit zu seiner Achse winkelrechten **Einzelkräften** (Abb. 51 a bis c): Bei entsprechenden Auflagerbedingungen (s. S. 177 u. f.) müssen die Stützkräfte  $A$  u.  $B$  parallel  $P_1, P_2, P_3$  sein und mit diesen, damit der Balken im Gleichgewicht ist, ein geschlossenes Kräfteck (Abb. 51 b) bilden, ferner müssen die Schlufsseiten des Seilecks (s. 2  $\gamma$ , S. 181) zusammenfallen (Abb. 51 a). Zieht man zu diesen zusammenfallenden Schlufsseiten (Schlusslinie  $s$  des Seilecks) im Kräfteplan (Abb. 51 b) durch Pol  $O$  eine Parallele, so teilt diese  $\Sigma P_1, P_2 \dots P_n$  durch  $O$  in die Stützdrücke  $A$  u.  $B$ .

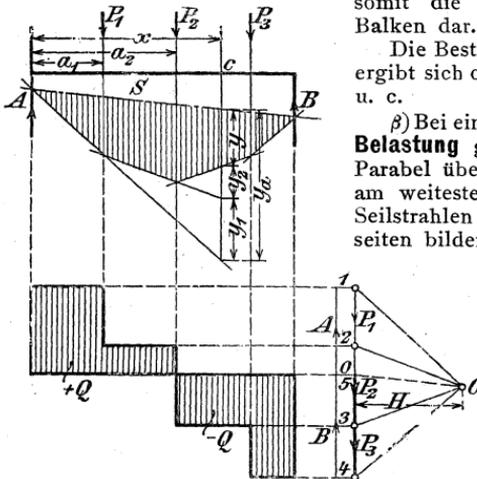
In einem Vertikalschnitt  $c$  müssen gemäß den Gleichgewichtsbedingungen am linken Balkenteil wirken das Moment

$$M = Ax - P_1(x - a_1) - P_2(x - a_2) = H(y_a - y_1 - y_2) = Hy$$

und die Querkraft  $Q = A - P_1 + P_2$ .

Linker Balkenteil:  $M$  positiv im Sinne der Uhrzeigerbewegung drehend,  $Q$  positiv in Richtung  $A$ , rechter Balkenteil umgekehrt!

Abb. 51 a bis c.



Die zwischen Seileck und Schlusslinie eingeschlossene Fläche stellt somit die **Momentenfläche** für den Balken dar.

Die Bestimmung der **Querkräfte**  $Q$  ergibt sich ohne weiteres aus Abb. 51 b u. c.

$\beta$ ) Bei einer **gleichmäßigen stetigen Belastung** geht das Seileck in eine Parabel über; die den im Kräfteplan am weitesten nach außen liegenden Seilstrahlen entsprechenden Seileckseiten bilden Tangenten der Parabel.

$\gamma$ ) Bei einer **ungleichmäßigen stetigen Belastung** unterteilt man diese in hinreichend schmale Streifen gleicher Breite, in deren Schwerpunkten man sich die stetige Last zu Einzellasten vereinigt denkt, zeichnet hierfür das Seileck, dessen

Seiten die Tangenten zu dem wahren Seileck sind und von ihm an den unter den Grenzlinien der Belastungsstreifen liegenden Punkten berührt werden.

$\delta$ ) Für **mittelbare Belastung** ergeben sich die Verhältnisse ohne weiteres bei sinngemäßer Anwendung aus den Regeln für unmittelbare Belastung, siehe Abb. 52 a bis c: Zeichne das Seileck wie für einen unmittelbar belasteten Balken; die Eckpunkte des Seilecks für den mittelbar belasteten liegen auf jenem unter den Stützpunkten der Zwischenträger. Die nicht schraffierten Teile der Momentenfläche des

unmittelbar belasteten Balkens sind die Momentenflächen der Zwischen-träger.

ε. Ermittlung der Querkräfte und Momente für **bewegliche Lasten**, s. ehe III. Bd., Abschnitt Statik der Baukonstruktionen.

**3. Bestimmung der Stabkräfte eines statisch bestimmten ebenen Fachwerks (Dreiecknetzes) mit ruhender Belastung.**

α) Vorausgesetzt wird, daß die **belastenden** (äußeren) **Kräfte in den Knotenpunkten** angreifen oder durch Zwischenträger auf diese übertragen werden, und daß die Knotenpunkte reibungsfreie Gelenke sind (die Stabkräfte demnach mit den Stabachsen zusammenfallen müssen: Druck- oder Zugbeanspruchungen).

Damit das ganze System im Gleichgewicht ist, müssen einerseits die äußeren Kräfte für sich (Bestimmung der Auflagerwiderstände s. auch S. 178), andererseits die an jedem Knotenpunkt angreifenden Kräfte im Gleichgewicht sein.

**Greifen die (äußeren) Kräfte nicht in den Knotenpunkten an**, sondern unmittelbar an den Stäben, z. B. an Stab 2, Abb. 53 a, so vereinige man je die Kräfte an jedem Stabe zu einer Mittelkraft  $R_2$ , Abb. 53 a. Von  $R_2$  werden durch den Stab auf die Knoten II III Kräfte  $R_I R_{II}$  und  $S$  ausgeübt, von denen  $R_I$  und  $R_{II}$  parallel  $R_2$ ,  $S$  gleich und entgegengesetzt in der Stabachse liegen.  $R_I$  und  $R_{II}$  bestimmt man durch Annahme eines beliebigen Punktes  $X$  auf  $R_2$  und Zeichnung

Abb. 53 a u. b.

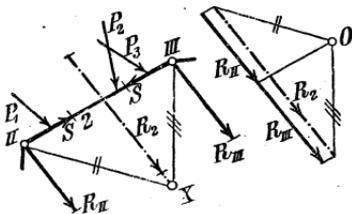
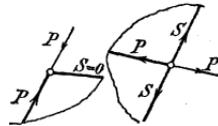


Abb. 54 a u. b.

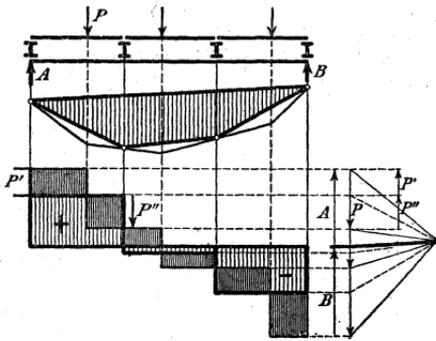


des Kraft- und Seilecks nach Abb. 53 a u. b. Hat man alle Knotenpunktskräfte  $R_I R_{II}$  bestimmt, so findet man die Kräfte  $S$ ,

wie unter  $\beta$ . angegeben. Die Beanspruchung der Stäbe ist dann bekannt, und die Ermittlung der Spannungen erfolgt nach Abschnitt Festigkeitslehre: Biegungs- und Druck- (Zug-) Beanspruchung.

Das vorstehende Verfahren ist auch anzuwenden, wenn einzelne Stäbe des Fachwerks wiederum aus Dreiecknetzen bestehen, in deren Knotenpunkten die Kräfte angreifen. Man denkt sich an Stelle des

Abb. 52 a bis c

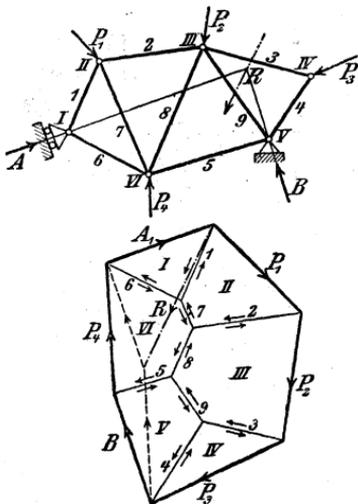


Dreiecknetzes zunächst einen Stab, bestimmt  $R_1$ ,  $R_2$ , darauf  $S$  und endlich die Stabkräfte des Dreiecknetzes.

Bei den oft vorkommenden Knotenpunkts-Bearbeitungen nach Abb. 54 a u. b müssen bei Gleichgewicht die in denselben Geraden liegenden Kräfte gleich und entgegengesetzt sein.

β) **Cremonascher Kräfteplan:** Sind an einem Knotenpunkt, z. B. III, Abb. 55 a, die Stabkräfte in 8 und 2 und  $P_2$  bekannt, so ergeben sich die unbekanntenen Stabkräfte in 3 und 9 aus dem Kräfteck III in Abb. 55 b. Sind die äußeren Kräfte bekannt, so kann man der Reihe nach für alle Knotenpunkte die Kräftecke zeichnen (Cremonascher Kräfteplan, da Cremona zuerst darauf hinwies).

Abb. 55 a u. b.



Das Verfahren ist in Abb. 55 a u. b angewandt. Man zeichnet das Fachwerksystem in passendem Maßstab, bestimmt mittels Kräfteplans und Seilecks die Auflagerwiderstände (in den meisten praktischen Fällen ist die Bestimmung der Auflagerkräfte durch symmetrische Anordnung usw. ohne Seileck möglich und, um die Abbildung übersichtlich zu erhalten, in Abb. 55 a u. b fortgelassen), fängt dann mit einem Knotenpunkt, der nur zwei Stäbe aufweist, z. B. I an, den Cremonaschen Kräfteplan zu zeichnen. Man beachte zur Erzielung

übersichtlicher Kräftepläne mit der Mindestzahl der erforderlichen Linien:

1. Im Vieleck der äußeren Kräfte muß dieselbe Reihenfolge herrschen, wie beim Umfahren des Fachwerks ( $A$ ,  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$ ,  $B$ ,  $P_4$ ).

2. Im Kräfteplan muß jede Gurtkraft durch den Schnittpunkt (Zusammenstoßpunkt) der beiden äußeren Kräfte gehen, die an den Endpunkten des Gurtstabes angreifen (z. B. 1 durch Schnitt ( $A$ ,  $P_1$ ); 2 durch Schnitt ( $P_1$ ,  $P_2$ ) usw.).

3. Bilden drei Stäbe im Fachwerk ein Dreieck, so müssen im Kräfteplan die entsprechenden Spannungen durch einen Punkt gehen (z. B. 1, 6, 7; 2, 7, 8 usw.).

4. Die an den Knotenpunkten angreifenden Kräfte müssen stets in der Reihenfolge aneinandergesetzt werden, in der man sie bei Umkreisung des Knotenpunktes trifft; die äußeren Kräfte sind als außerhalb des Fachwerks liegend zu betrachten (wie in Abb. 55 a gezeichnet).

Sind auf Grund des Kräfteplanes die Kräfte gegen den Knotenpunkt gerichtet, so erfährt der betreffende Stab eine Druckbeanspruchung (z. B. alle Stäbe Abb. 55 a); sind sie vom Knotenpunkt weggerichtet, eine Zugbeanspruchung.

γ) **Verfahren von Culmann** (Abb. 56); legt man einen das Fachwerk in zwei Teile mit je einem Auflager teilenden Schnitt, so müssen an jedem Teil die äußeren Kräfte und die in den geschnittenen Stäben sich das Gleichgewicht halten (s. S. 167). Setzt man die äußeren Kräfte

$A, P_1, P_2$   
mit Hilfe des Kraft- und Seilecks, Abb. 56 a u. b zu einer Resultierenden  $R$  zusammen und zerlegt diese in die drei Rich-

tungen der geschnittenen Stäbe nach dem Verfahren von Culmann, s. d., S. 183 und Abb. 56 a u. b, so sind die Stabkräfte bestimmt.

δ) **Schnittverfahren von Ritter** (Verfahren der statischen Momente). Die beiden Momentengleichungen in bezug auf die beiden Auflager liefern die Stützwiderstände. Legt man einen drei sich nicht in einem Punkte schneidende Stäbe treffenden Schnitt (wie in Abb. 56a) und bildet die Momentengleichungen für die Schnittpunkte je zweier der getroffenen Stäbe (3 Punkte), so erhält man 3 Gleichungen, in denen jedesmal die Stabkraft unbekannt ist, die nicht durch den zugehörigen Momentenbezugspunkt geht. S. auch III. Bd., u. Statik der Baukonstruktionen.

4. Bestimmung der **Kräfte in Balken und Fachwerken mit beweglicher Belastung, in Stützmauern und Gewölben**, s. III. Bd., Abschnitt Statik der Baukonstruktionen.

## C. Mittelpunkt der Parallelkräfte; Schwerpunkt.

### I. Mittelpunkt, statische Momente.

1. Die Mittelkraft  $R$  zweier gleichsinnigen parallelen Kräfte  $P_1$  und  $P_2$  (Abb. 57) teilt die Verbindungslinie der Angriffspunkte  $A_1, A_2$  im Punkte  $S$  in die Teile  $a_1$  und  $a_2$  (Konstruktion s. Abb. 57), für die

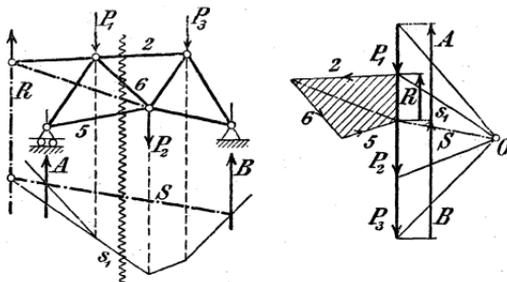
$$P_1 a_1 = P_2 a_2.$$

Die Lage von  $S$  ist völlig unabhängig von der Richtung der Parallelkräfte, d. h. dreht man  $P_1$  und  $P_2$  unter Beibehaltung der Parallelität beliebig um die Punkte  $A_1$  und  $A_2$ , so geht die Mittelkraft  $R$  stets durch denselben Punkt  $S$ , den **Mittelpunkt der Parallelkräfte**  $P_1$  und  $P_2$ .

Zieht man in der Ebene der Kräfte  $P_1$  und  $P_2$  eine beliebige Gerade  $gg$ , von der die Punkte  $A_1, A_2$  und  $S$  die Abstände  $x_1, x_2$  und  $\xi$  haben, so ist

$$P_1 x_1 + P_2 x_2 = R \xi = (P_1 + P_2) \xi \quad \xi = \frac{P_1 x_1 + P_2 x_2}{P_1 + P_2}.$$

Abb. 56 a u. b.



2. Entsprechend ist für beliebig viele ( $n$ ) gleichsinnige Parallelkräfte  $P_1, P_2 \dots P_n$  im Raume, deren Angriffspunkte die Abstände  $x_1, x_2 \dots x_n$  und deren Mittelpunkt den Abstand  $\xi$  von einer beliebigen Ebene haben,

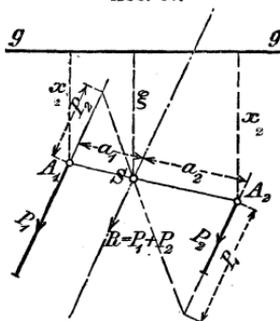
$$\xi \Sigma (P) = \Sigma (Px).$$

Für zwei weitere beliebige Ebenen (Abstände  $y_1, y_2 \dots y_n, \eta; z_1, z_2 \dots z_n, \zeta$ ) gilt ebenso

$$\eta \Sigma (P) = \Sigma (Py) \quad \zeta \Sigma (P) = \Sigma (Pz).$$

Durch die sich aus den Gleichungen ergebenden Abstände von den 3 Ebenen, die zweckmäßig als Koordinatenebenen eines rechtwinkligen Koordinatensystems gewählt werden, ist der Mittelpunkt der Parallelkräfte bestimmt.

3. Die Produkte  $P_1 x_1, P_2 x_2 \dots$  heißen die **statischen Momente** der Kräfte  $P_1, P_2 \dots$ , bezogen auf die  $yz$ -Ebene.



## II. Allgemeines über den Schwerpunkt.

1. Die an den einzelnen Teilchen eines Körpers angreifenden Gewichte der Körperteile können als Parallelkräfte angesehen werden. Der Mittelpunkt dieser Parallelkräfte heißt der **Schwerpunkt** des Körpers.

2. Bezeichnet man die Gewichte der einzelnen Körperteilchen mit  $G_1, G_2 \dots G_i \dots$ , das Gesamtgewicht mit  $G = G_1 + G_2 + \dots G_i + \dots$  so ist demnach

$$\xi G = \Sigma (G_i x_i) \quad \eta G = \Sigma (G_i y_i) \quad \zeta G = \Sigma (G_i z_i),$$

oder wenn man die Masse einführt ( $m$  und  $m_i$ )

$$m \cdot \xi = \Sigma m_i x_i, \quad m \cdot \eta = \Sigma m_i y_i, \quad m \cdot \zeta = \Sigma m_i z_i.$$

3. Für **homogene** Körper, bei denen das Gewicht der Raumeinheit  $\gamma$  (spezifisches Gewicht) unveränderlich ist, folgt  $G_1 = \gamma V_1, G_2 = \gamma V_2 \dots, G = \gamma V$ , wo  $V_1, V_2 \dots, V$  die Inhalte der Teilchen und des ganzen Körpers bezeichnen, und demnach

$$\xi V = \Sigma (V_i x_i) \quad \eta V = \Sigma (V_i y_i) \quad \zeta V = \Sigma (V_i z_i) \quad \text{oder}$$

$$\xi V = \int x dV \quad \eta V = \int y dV \quad \zeta V = \int z dV.$$

4. Für **homogene Stoff-Flächen**, bei denen das Gewicht der Flächeneinheit unveränderlich ist, folgt

$$\xi F = \int x dF \quad \eta F = \int y dF \quad \zeta F = \int z dF.$$

5. Für **homogene Stoff-Linien**, bei denen das Gewicht der Längeneinheit unveränderlich ist, folgt

$$\xi l = \int x dl \quad \eta l = \int y dl \quad \zeta l = \int z dl.$$

6. Geht eine Koordinatenebene (z. B. die  $yz$ -Ebene) durch den Schwerpunkt hindurch, so ist  $\xi = 0; \Sigma (G_i x_i) = 0$ ; woraus folgt:

α) Die Summe der statischen Momente für eine durch den Schwerpunkt gehende Ebene bzw. Gerade (Schwerebene bzw. -Achse) ist gleich null; und

β) Hat ein homogenes Gebilde eine Symmetrieebene, Symmetrieachse oder einen Mittelpunkt, so liegt der Schwerpunkt in diesen.

### III. Schwerpunktermittlung beliebiger homogener Gebilde.

#### a. Durch Rechnung.

1. Man zerlegt das Gebilde in Teile, deren Schwerpunkte bekannt sind (z. B. schmale Streifen, die als Rechtecke oder Trapeze aufgefasst werden können), und bildet für passend gewählte Bezugslinien oder Ebenen die statischen Momente der Gebildeteile, deren Summe gleich dem statischen Moment des ganzen Gebildes ist, woraus der Schwerpunktsabstand folgt (s. I, 2 u. 3, S. 188).

2. **Beliebige ebene Fläche** (Abb. 58). Man zerlege die Fläche durch Parallelen zur  $y$ -Achse in eine **gerade** ( $2n$ ) Anzahl Streifen von gleicher Breite  $h$ , dann ist näherungsweise

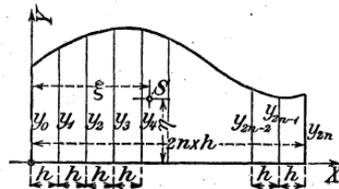
$$\xi = h \frac{1 \cdot 4y_1 + 2 \cdot 2y_2 + 3 \cdot 4y_3 + 4 \cdot 2y_4 + \dots + (2n-2)2y_{2n-2} + (2n-1)4y_{2n-1} + 2ny_{2n}}{y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \dots + 2y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n}}$$

$$\eta = \frac{1}{2} \frac{y_0^2 + 4y_1^2 + 2y_2^2 + 4y_3^2 + \dots + 2y_{2n-2}^2 + 4y_{2n-1}^2 + y_{2n}^2}{y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \dots + 2y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n}}$$

Ist der allgemeine Ausdruck für die Größe  $y$  eine ganze Funktion höchstens zweiten Grades der Abstände von der  $y$ -Achse, so ist die Formel genau richtig, und es brauchen nur die beiden Endparallelen und die mittlere Parallele in Rechnung gezogen zu werden.

3. **Beliebiger Körper**. Die vorstehende Formel unter 2. für  $\xi$  gilt auch näherungsweise für den Abstand des Schwerpunktes eines Körpers von einer Ebene, die den Körper begrenzt oder berührt, wenn man ihn durch Ebenen, die zur ersten parallel sind, in eine **gerade** Anzahl ( $2n$ ) Teile von gleicher Dicke  $h$  zerlegt und in die Formel statt der  $y$  die Flächeninhalte der entsprechenden Parallelschnitte einsetzt.

Abb. 58.



#### b. Durch Zeichnung.

1. **Linien** und ebene **Flächen**: Man zerlege die Linie oder Fläche in Teile mit bekannten Schwerpunktlagen. Die Größen dieser Teile (Längen bzw. Flächeninhalte) betrachtet man als Parallelkräfte, die in den Schwerpunkten der einzelnen Teile angreifen. Lässt man diese Parallelkräfte einmal wagrecht, das andere Mal senkrecht (oder auch

in zwei beliebigen anderen Richtungen) wirken und sucht jedesmal mit Hilfe des Seil- und Kräftezuges die Mittelkraft auf (s. b, 1, S. 180), so erhält man den Schwerpunkt des ganzen Gebildes im Schnittpunkt der beiden gefundenen Mittelkräfte. Bei Flächen pflegt man die einzelnen Teile in Rechtecke von derselben Grundlinie zu verwandeln (Reduzieren auf dieselbe Basis) und die Höhen dieser Rechtecke als Parallelkräfte anzusehen, mit denen wie vorstehend zu verfahren ist.

2. **Körper** zerlegt man entsprechend in Teilkörper, deren in ihren Schwerpunkten angreifende Gewichte wieder ein Parallelkräftesystem bilden. Projiziert man die Parallelkräfte mit ihren Angriffspunkten auf zwei zueinander winkelrechte Ebenen und sucht zu den beiden projizierten Parallelkräftesystemen die Mittelpunkte auf, so erhält man in ihnen die senkrechten Projektionen des Körperschwerpunktes.

### c. Besondere Fälle.

1. Kreist eine ebene Kurve von der Länge  $l$  um eine in ihrer Ebene liegende Achse, so folgt aus den Pappus-Guldinschen Regeln der Schwerpunktsabstand  $\varrho$  der Kurve von der Drehachse

$$\varrho = \frac{O}{l2\pi}, \text{ wenn } O \text{ (die Oberfläche des Umdrehungskörpers) bekannt ist.}$$

2. Kreist eine ebene Fläche vom Inhalt  $F$  um eine in ihrer Ebene liegende Achse, so folgt aus den Pappus-Guldinschen Regeln der Schwerpunktsabstand  $\varrho$  der Fläche von der Drehachse

$$\varrho = \frac{V}{F2\pi}, \text{ wenn } V \text{ (der Inhalt des Umdrehungskörpers) bekannt ist.}$$

3. Ist  $S$  der gemeinschaftliche Schwerpunkt zweier Gebilde mit den Gewichten  $G_1$  und  $G_2$  und den Schwerpunkten  $S_1$  und  $S_2$ , so ist

$$SS_1 : SS_2 = G_2 : G_1,$$

bei homogenen Gebilden  $= V_2 : V_1$  (Inhalte, bzw. Flächen oder Längen) und  $S_1S_2$  eine Gerade (gemeinsame Schwerachse).

Zur Bestimmung des gemeinschaftlichen Schwerpunktes mehrerer Körper ist das Vorstehende sinngemäß wiederholt anzuwenden.

## IV. Schwerpunktlagen für die technisch wichtigsten Linien, Flächen und Körper.

In den nachfolgenden Abbildungen ist der Schwerpunkt mit  $S$  bezeichnet.

### a. Schwerpunkt von Linien.

1. **Gerade Strecke:**  $S$  liegt im Mittelpunkte der Strecke.

2. **Dreieckumfang:** Sind  $A_1, B_1, C_1$  die Mittelpunkte der Seiten  $a, b, c$ , so liegt  $S$  im Mittelpunkt des dem Dreieck  $A_1B_1C_1$  eingeschriebenen Kreises.

Der Abstand  $\xi_a$  des Schwerpunktes von der Seite  $a$  ist

$$\xi_a = \frac{h_a}{2} \frac{b+c}{a+b+c},$$

worin  $h_a$  die zur Seite  $a$  gehörende Höhe ist.

3. **Parallelogrammumfang:**  $S$  liegt im Schnittpunkt der Diagonalen.

4. **Kreisbogen** (Abb. 59):  $S$  liegt auf der Halbierungslinie des Zentriwinkels in der Entfernung

$$\xi = r \frac{s}{b} = r \frac{\sin \alpha}{\text{arc } \alpha},$$

$$\text{arc } \alpha = \frac{\alpha^\circ}{180^\circ} \pi = \begin{cases} \text{Bogenmaß des halben} \\ \text{Zentriwinkels.} \end{cases}$$

Halbkreisbogen:  $\xi = 2r : \pi = 0,6366 r$

Viertelkreisbogen:  $\xi = 2r\sqrt{2} : \pi = 0,9003 r$

Sechstelkreisbogen:  $\xi = 3r : \pi = 0,9549 r$ .

5. **Beliebiger flacher Bogen** (Abb. 60): Abstand  $x \sim 2/3 h$ .

Genauigkeit: Nach vorstehender Formel wird  $x$  um weniger als 0,5 vH beim Sechstelkreisbogen und als 1,1 vH beim Viertelkreisbogen zu groß, als wenn es auf Grund der Gleichung unter 4. berechnet wird.

Abb. 59.

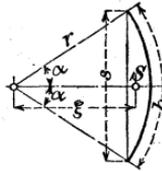
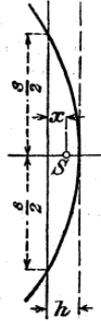


Abb. 60.



### b. Schwerpunkt von Flächen.

1. **Dreieck:**  $S$  liegt im Schnittpunkt der Mittellinien. Abstand des Schwerpunktes von einer Seite gleich einem Drittel der zugehörigen Höhe.

Sind die Koordinaten der Eckpunkte  $x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3$ , so sind die Koordinaten des Schwerpunktes

$$\xi = 1/3 (x_1 + x_2 + x_3)$$

$$\eta = 1/3 (y_1 + y_2 + y_3).$$

Sind  $z_1, z_2, z_3$  die Abstände der Eckpunkte von einer Ebene, so ist der Abstand des Schwerpunktes von dieser

$$\zeta = 1/3 (z_1 + z_2 + z_3).$$

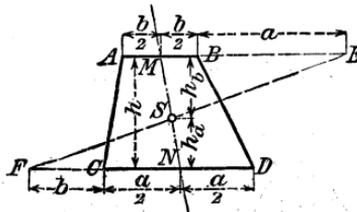
2. **Parallelogramm:**  $S$  liegt im Schnittpunkt der Diagonalen.

3. **Trapez:**  $a)$   $S$  liegt auf der Verbindungslinie der Mittelpunkte  $M$  und  $N$  der parallelen Seiten  $a$  und  $b$  (s. Abb. 61). Die Abstände  $h_a$  und  $h_b$  sind

$$h_a = \frac{h}{3} \frac{a+2b}{a+b}$$

$$h_b = \frac{h}{3} \frac{2a+b}{a+b};$$

Abb. 61.



daraus die Konstruktion: auf den Verlängerungen der parallelen Seiten trage man  $BE = a, CF = b$  ab.  $EF$  schneidet  $MN$  in  $S$ .

β)  $S$  hat von den beiden nichtparallelen Seiten  $AC$  und  $BD$  den wagerechten Abstand

$$\xi = \frac{1}{3} \frac{a^2 + ab + b^2}{a + b}.$$

Abstand von den parallelen Seiten  $s$ . unter  $\alpha$ .

γ) Man zerlegt das Trapez in 2 Dreiecke (Abb. 62) mit den Schwerpunkten  $S_1$  und  $S_2$ .  $S_1S_2$  schneidet  $MN$  in  $S$ .

4. **Viereck:** Man zerlege das Viereck durch die eine Diagonale in zwei Dreiecke mit den Schwerpunkten  $S_1$  und  $S_2$  (Abb. 63), durch die

Abb. 62.

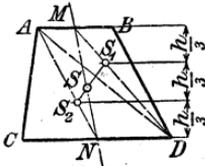


Abb. 63.

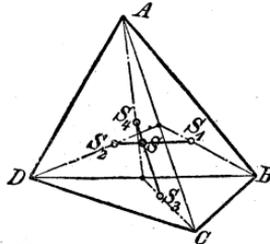
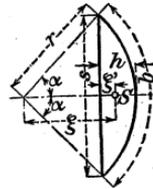


Abb. 64.



andere Diagonale in zwei Dreiecke mit den Schwerpunkten  $S_3$  und  $S_4$ .  $S_1S_2$  und  $S_3S_4$  schneiden sich in  $S$  (dabei ist  $S_1S_2 \parallel BD$ ;  $S_3S_4 \parallel CA$ , so dass man nur die Schwerpunkte  $S_1$  und  $S_3$  zu bestimmen braucht).

5. **Vieleck:** α) Wende sinngemäß das unter 4 angegebene Verfahren an mit Beachtung des Satzes unter c 3., S. 190

oder β) nach dem allgemeinen Verfahren u. **b.**, S. 189.

Regelmäßiges Vieleck: Der Schwerpunkt liegt im Mittelpunkt des um- bzw. eingeschriebenen Kreises.

6. **Kreisabschnitt** (Abb. 64): Es ist

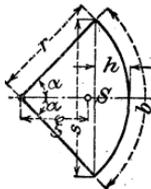
$$\xi = \frac{s^3}{12 F} = \frac{2}{3} \frac{r^3 \sin^3 \alpha}{F} = \frac{4}{3} \frac{r \sin^3 \alpha}{\text{arc } 2\alpha - \sin 2\alpha},$$

worin  $F = \frac{1}{2} r^2 (\text{arc } 2\alpha - \sin 2\alpha)$  der Inhalt des Kreisabschnittes und

$$\text{arc } 2\alpha = 2 \frac{\alpha^0}{180^0} \pi.$$

7. **Kreisabschnitt:** (Abb. 65)

Abb. 65.



$$\xi = \frac{2}{3} r \frac{s}{b} = \frac{2}{3} \frac{r \sin \alpha}{\text{arc } \alpha} = 38,1972 \frac{r \sin \alpha}{\alpha^0} = \frac{r^2 s}{3 F},$$

worin  $F = r^2 \text{arc } \alpha$  der Flächeninhalt des Ausschnittes.

$$\text{Halbkreisfläche: } \xi = \frac{4}{3} \frac{r}{\pi} = 0,4244 r$$

$$\text{Viertelkreisfläche: } \xi = \frac{4}{3} \frac{\sqrt{2}}{\pi} r = 0,6002 r$$

$$\text{Sechstelkreisfläche: } \xi = \frac{2}{\pi} r = 0,6366 r.$$

8. **Kreisringstück** (Abb. 66):

$$\xi = \frac{2}{3} \frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2} \frac{\sin \alpha}{\arccos \frac{r}{R}} = 38,1972 \frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2} \frac{\sin \alpha}{\alpha}$$

9. **Ellipsenabschnitt**: (Abb. 67). Die Schwerpunkte  $S$  der symmetrischen Ellipsenabschnitte  $A_1 B_1 C$  und  $A_2 B_2 C$  fallen mit dem Schwerpunkt des Abschnittes  $ABC$  eines Kreises zusammen, dessen Durchmesser die zur Sehne des Ellipsenabschnittes senkrechte Hauptachse ist.

10. **Parabelfläche**: (Abb. 68)

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \frac{3}{5} a & \eta_1 &= \frac{3}{8} b \text{ für } S_1 \\ \xi_2 &= \frac{3}{10} a & \eta_2 &= \frac{3}{4} b \text{ für } S_2. \end{aligned}$$

Abb. 66.

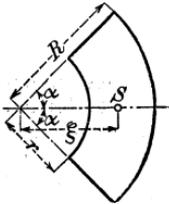


Abb. 67.

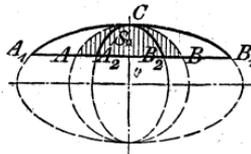
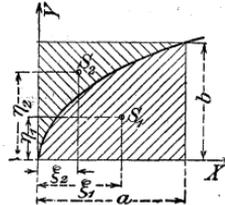


Abb. 68.



11. **Kugelzone und Kugelhaube**:  $S$  liegt in der Mitte der Höhe.

12. **Mantel der Pyramide oder des Kegels**:  $S$  liegt in der Verbindungslinie des Schwerpunktes der Grundfläche mit der Spitze (Schwerachse), um ein Drittel der Höhe von der Grundfläche entfernt.

13. **Mantel des abgestumpften Kreiskegels**: Ist  $h$  die Höhe des Kegelstumpfes,  $r$  der Halbmesser der oberen,  $R$  der der unteren Endfläche, so ist der Schwerpunktabstand von dieser

$$\xi = \frac{h}{3} \frac{R + 2r}{R + r}$$

c. **Schwerpunkt von Körpern.**

1. **Prisma und Zylinder mit parallelen Endflächen**:  $S$  liegt in der Mitte der Verbindungslinie zwischen den Schwerpunkten der Endflächen.

2. **Schief abgeschnittener gerader Kreis-zylinder**: Es sei (Abb. 69) die  $xy$ -Ebene die Symmetrieebene,

$h$  die Länge der Achse,

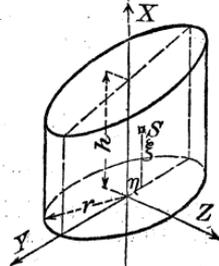
$r$  der Halbmesser des Grundkreises,

$\alpha$  der Neigungswinkel der schiefen Schnittfläche gegen die Grundfläche,

so ist

$$\eta = \frac{1}{4} \frac{r^2 \operatorname{tg} \alpha}{h} \quad \xi = \frac{h}{2} + \frac{1}{8} \frac{r^2 \operatorname{tg}^2 \alpha}{h}$$

Abb. 69.



3. **Zylinderhuf** (Abb. 70):

$$\eta = \frac{3}{16} \pi r \quad \xi = \frac{3}{32} \pi h.$$

Abb. 70.

Hufmantel:

$$\eta = \frac{1}{4} \pi r \quad \xi = \frac{1}{8} \pi h.$$

Hohler Huf ( $R, r, H, h$ ):

$$\eta = \frac{3}{16} \pi \frac{R^4 - r^4}{R^3 - r^3} \quad \xi = \frac{3}{32} \pi \frac{H^4 - h^4}{H^3 - h^3}.$$



4. **Pyramide und Kegel:**  $S$  liegt in der Schwerachse (vgl. 12 auf S. 193) um ein Viertel der Höhe von der Grundfläche entfernt.

5. **Pyramidenstumpf:** Ist  $h$  die Höhe des Pyramidenstumpfes, und sind  $A$  und  $B$  die Endflächen, so ist der Abstand des Schwerpunktes von der Fläche  $A$

$$\xi = \frac{h}{4} \frac{A + 2\sqrt{AB} + 3B}{A + \sqrt{AB} + B}.$$

6. **Abgestumpfter Kreiskegel:** Ist  $h$  die Höhe des Kegelstumpfes, und sind  $R$  und  $r$  die Halbmesser der Endflächen, so ist der Abstand des Schwerpunktes von der Endfläche mit dem Halbmesser  $R$

$$\xi = \frac{h}{4} \frac{R^2 + 2Rr + 3r^2}{R^2 + Rr + r^2}.$$

7. **Obelisk** (Abb. 42, S. 138): Der Abstand des Schwerpunktes von der Grundfläche  $ab$  ist

$$\xi = \frac{h}{2} \frac{ab + ab_1 + a_1b + 3a_1b_1}{2ab + ab_1 + a_1b + 2a_1b_1}.$$

8. **Keil:** Mit  $b_1 = 0$  folgt aus vorstehender Formel der Abstand des Schwerpunktes von der Grundfläche  $ab$  zu

$$\xi = \frac{h}{2} \frac{a + a_1}{2a + a_1}.$$

9. **Kugelabschnitt:** Bezeichnungen wie in Abb. 65, S. 192.

$$\xi = \frac{3}{4} \frac{(2r - h)^2}{3r - h}.$$

Diese Formel gilt auch für den Abschnitt desjenigen **Umdrehungs-ellipsoids**, dessen Drehungsachse gleich dem Durchmesser der Kugel ist. Der Abstand von der Fläche des Schnittkreises mit dem Durchmesser  $s = 2\rho$  ist

$$\xi' = \frac{h}{2} \frac{h^2 + 2\rho^2}{h^2 + 3\rho^2} = \frac{h}{4} \frac{4r - h}{3r - h}.$$

Halbkugel:  $\xi = \frac{3}{8} r.$

Halbe Hohlkugel:  $\xi = \frac{3}{8} \frac{R^4 - r^4}{R^3 - r^3}.$

10. **Kugelausschnitt:** Bezeichnungen wie in Abb. 65, S. 192;  $h$  die Höhe der Kalotte.

$$\xi = \frac{3}{8} (1 + \cos \alpha) r = \frac{3}{8} (2r - h).$$

11. **Umdrehungsparaboloid:** Ist die Achse der erzeugenden Parabel die Umdrehungsachse,  $h$  der Abstand des Scheitels von der Endfläche, so ist der Abstand des Schwerpunktes von der Endfläche

$$\xi = \frac{1}{3} h.$$

12. **Dreiaxsiges Ellipsoid** mit den Halbachsen  $a$ ,  $b$ ,  $c$ . Für einen Oktanten ist

$$\xi = \frac{3}{8} a \quad \eta = \frac{3}{8} b \quad \zeta = \frac{3}{8} c.$$

## IV. DYNAMIK STARRER KÖRPER.

### A. Grundbegriffe und allgemeine Gesetze.

#### a. Kräfte und Kraftfelder. Allgemeine Massenanziehung.

1. Man unterscheidet:

**Massenkräfte**, die auf die einzelnen Massenpunkte eines Körpers wirken (z. B. Schwerkraft, elektrische und magnetische Anziehungskraft), und

**Oberflächenkräfte**, die auf die Begrenzungsfläche eines Körpers wirken (z. B. Wasser-, Dampf- oder Gasdruck).

2. Man nennt den Raum, innerhalb dessen sich die Wirkungen einer physikalischen Kraft auf hineingebrachte Körper bemerkbar machen, das **Feld** der betreffenden **Kraft**.

Unter **Stärke** oder **Intensität des Feldes** an einem bestimmten Ort versteht man das Verhältnis der auf einen Massenpunkt an diesem Ort ausgeübten Kraft  $P$  zur Masse  $m$  des Punktes

$$i = \frac{P}{m}; \quad P = m \cdot i.$$

Die Einheit der Feldstärke stimmt mit der Einheit der Beschleunigung (s. S. 145) überein, ist also im technischen Maßsystem  $1 \text{ m/sk}^2$ , im C-G-S-System  $1 \text{ cm/sk}^2$ .

Die Feldstärke ist eine Vektorgröße.

3. Ein Kraftfeld heißt **homogen**, wenn die Feldstärke an allen Punkten gleich groß und gleich gerichtet ist.

Ein Kraftfeld heißt **Zentralkraftfeld mit dem Zentrum  $O$** , wenn die Richtung der auf den Massenpunkt  $m$  ausgeübten Kraft in jedem Punkte des Feldes durch  $O$  hindurchgeht und ihre Größe lediglich eine Funktion der jeweiligen Entfernung  $Om = r$  ist (z. B. Gravitationskraftfeld, elektrostatisches Kraftfeld, magnetisches Kraftfeld).

4. Eine durch das Kraftfeld derart gezogene Linie, daß ihre Richtung (Tangente) in jedem Punkte mit der Richtung der dort herrschenden Kraft übereinstimmt, heißt **Kraftlinie**.

Eine Fläche, die in jedem Punkte senkrecht steht zur dort herrschenden Kraft, heißt **Niveaufläche**.

5. Unter dem **Kraftfluß** durch das Flächenstück  $f$  einer Niveaufläche versteht man den Wert:

$$w = \int f i \cdot df.$$

Für eine beliebige Fläche (nicht Niveaufäche) ist:

$$w = \int i \cdot \cos(n, i) \cdot df,$$

wo  $n$  die auf  $df$  errichtete, in den Außenraum weisende Flächennormale bedeutet.

### 6. Newtonsches Gravitationsgesetz, Gesetz der allgemeinen Schwere. (1687).

Je zwei Massenteilchen verhalten sich so, als ob sie sich mit einer Kraft  $P$  anzögen, proportional den Massen  $m_1$ ,  $m_2$  und umgekehrt proportional dem Quadrate ihres Abstandes  $r$ .

$$P = k \cdot \frac{m_1 m_2}{r^2}.$$

Das Gewicht oder die Schwerkraft ist ein Sonderfall der allgemeinen Massenanziehung.

Die Gravitationskonstante  $k$ , d. i. die Kraft, mit der sich zwei im Abstände 1 cm von einander befindliche Gramm-Massen (s. S. 166) anziehen, ist rd. der 15 millionte Teil einer Dyne.

### b. Arbeit.

1. Unter der **Arbeit der** (veränderlichen) **Kraft  $P$  auf dem beliebigen (gerad- oder krummlinigen) Wege  $s_0$  bis  $s$**  versteht man das Linienintegral.

$$A = \int_{s_0}^s P_t \cdot ds = \int_{s_0}^s P \cdot \cos \varphi \cdot ds; \quad \varphi = \sphericalangle(P, ds).$$

$dA = P \cdot \cos \varphi \cdot ds$  heißt die **Elementararbeit** von  $P$  auf dem unendlich kleinen Wege  $ds$ .

Die Ausführung der Integration setzt voraus, daß  $P$  und  $\varphi$  als Funktionen von  $s$  gegeben sind.

Im technischen Maßsystem ist die Einheit der Arbeit **1 mkg**, im CGS-System 1 cm Dyne = **1 Erg**.

2. Setzt sich die Kraft (nach dem Parallelogrammgesetz) aus mehreren Teilkräften zusammen, so gilt:

**Die Arbeit der Gesamtkraft ist gleich der algebraischen Summe der Arbeiten der Teilkräfte.**

Setzt sich der Weg (nach dem Parallelogrammgesetz) aus mehreren Teilwegen zusammen, so gilt:

**Die Arbeit auf dem Gesamtwege ist gleich der algebraischen Summe der Arbeiten auf den Teilwegen.**

Kräfte und Wege sind Vektorgrößen, die Arbeit ist eine skalare Größe (durch einen Zahlenwert vollständig bestimmt).

Sind  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  die Komponenten der Kraft  $P$ ;  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  die des Wegelementes  $ds$ , so gilt demnach

$$A = \int_{s_0}^s P \cos \varphi ds = \int_{x_0, y_0, z_0}^{x, y, z} (X dx + Y dy + Z dz)$$

und bei Einwirkung mehrerer Kräfte  $P$

$$A = \sum_{s_0}^s P_i \cos \varphi_i ds = \sum_{x_0, y_0, z_0}^{x, y, z} (X_i dx + Y_i dy + Z_i dz).$$

3. Führt man die Geschwindigkeit  $v$  des Angriffspunktes in die Formeln ein, so folgt:

$$A = \int_{t_0}^t P v \cos \varphi dt = \int_{t_0}^t (X v_x + Y v_y + Z v_z) dt$$

bzw.

$$A = \sum_{t_0}^t \int P_i v_i \cos \varphi_i dt = \sum_{t_0}^t (X_i v_{xi} + Y_i v_{yi} + Z_i v_{zi}) dt.$$

Dabei ist vorausgesetzt, daß  $P, v, \varphi$  als Funktionen der Zeit  $t$  gegeben sind.

#### 4. Sonderfälle.

$\alpha$ ) **Arbeit eines Kräftepaars und einer Einzelkraft bei der Drehbewegung.** Es gilt:

$$A = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \bar{M} d\varphi = \int_{t_0}^t \bar{M} \omega dt \quad \left| \begin{array}{l} \bar{M} = \text{Moment für die Drehachse} \\ \varphi = \text{Drehwinkel} \\ \omega = \text{Winkelgeschwindigkeit} \end{array} \right.$$

oder

$$A = \int_{t_0}^t \bar{M} \omega \cos(\bar{M}, \omega) dt = \int_{t_0}^t (M_x \omega_x + M_y \omega_y + M_z \omega_z) dt$$

( $\bar{M}$  = Moment für den auf der Drehachse gelegenen Bezugspunkt = Nullpunkt des Koordinatensystems), vgl. S. 171.

$\beta$ ) **Arbeit bei der Bewegung im homogenen Kraftfeld.** Auf einem beliebigen Wege zwischen den parallelen Niveauebene  $F_1, F_2$  (Abstand  $a$ ) leistet die Feldkraft  $P = mi$  ( $i$  = Feldstärke) die Arbeit:

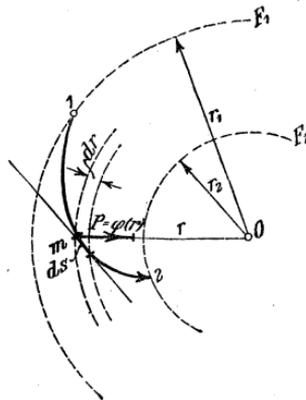
$$A = P \cdot a = mi \cdot a.$$

Dieselbe Arbeit muß von einer Kraft geleistet werden, die den Massenpunkt  $m$  entgegen der Kraft des Feldes von  $F_2$  nach  $F_1$  bringt.

$\gamma$ ) **Arbeit bei der Bewegung im Zentralkraftfeld.** Auf dem beliebigen Wege 1, 2, Abb. 71, zwischen den Kugelflächen  $F_1, F_2$  (Halbmesser  $r_1, r_2$ ) leistet die Feldkraft  $P = \varphi(r)$  die Arbeit:

$$A = \int_{r_1}^{r_2} \varphi(r) dr = \Phi(r_2) - \Phi(r_1).$$

Abb. 71.



**c. Lebendige Kraft (kinetische Energie, Wucht).**

1. Ist  $v$  die augenblickliche Geschwindigkeit eines Massenpunktes  $m$ , so heißt:

$$L = m \cdot \frac{v^2}{2}$$

seine **lebendige Kraft** oder **kinetische Energie** oder **Wucht**.

Im technischen Maßsystem ist die Einheit der lebendigen Kraft  $1 \frac{\text{kg} \cdot \text{sk}^2}{\text{m}} \cdot \left(\frac{\text{m}}{\text{sk}}\right)^2 = 1 \text{ mkg}$ , d. h. gleich der Arbeitseinheit; im C-G-S-System  $1 \text{ g} \left(\frac{\text{cm}}{\text{sk}}\right)^2 = 1 \text{ cm Dyne} = 1 \text{ Erg}$ .

2. Multipliziert man die für die beliebige krummlinige Bewegung eines Punktes nach S. 148 geltende Gleichung mit der Masse  $m$  des Punktes, so folgt:

$$m \frac{v^2}{2} - m \frac{v_0^2}{2} = \int_{s_0}^s P_t ds = \int_{s_0}^s P \cdot \cos \varphi \cdot ds,$$

worin  $P = m \cdot p$  die Resultierende aller am Punkte  $m$  angreifenden Kräfte,  $P_t$  die Tangentialseitenkraft von  $P$  in Richtung von  $ds$  und  $\varphi = \sphericalangle(P, ds)$  ist.

**Die Aenderung der lebendigen Kraft eines Massenpunktes bei Zurücklegung irgend eines Weges ist gleich der auf diesem Wege geleisteten Arbeit aller am Punkte angreifenden Kräfte (Prinzip der lebendigen Kraft).**

3. Faßt man die am Massenpunkt in Richtung der Bahrtangente wirkenden Kraftkomponenten zu einer resultierenden Triebkraft  $P$  und einem resultierenden Widerstand  $W$  zusammen, so gilt

$$P = W + T \quad (T = \text{Trägheitswiderstand; s. S. 164}).$$

Sind  $A_P, A_W, A_T$  die Arbeiten der Triebkraft, des Widerstandes und des Trägheitswiderstandes, so gilt entsprechend

$$A_P = -A_W - A_T$$

d. h. Arbeit der Triebkraft = Arbeit **zur Ueberwindung** des Widerstandes + Arbeit **zur Ueberwindung** des Trägheitswiderstandes.

Die Arbeit zur Ueberwindung des Trägheitswiderstandes ist identisch mit der Aenderung der lebendigen Kraft.

$$-A_T = \int_{s_0}^s m \frac{dv}{dt} \cdot ds = m \cdot \frac{v^2}{2} - m \cdot \frac{v_0^2}{2}.$$

Nimmt die Geschwindigkeit und damit die lebendige Kraft ab, so ist die Arbeit  $A_T$  des Trägheitswiderstandes positiv und kann zur Ueberwindung eines Widerstandes  $W$  dienen (Heranziehung von Schwungmassen zur Arbeitsleistung).

**d. Kräftefunktion und Potential.**

1.  $x, y, z$  seien die Koordinaten eines Massenpunktes in einem Kraftfelde; sind nun die Seitenkräfte  $X, Y, Z$  der dort herr-

schenden Kraft  $P$  die partiellen Differentialquotienten einer Funktion  $U = F(x, y, z)$  nach den drei Koordinatenrichtungen, gilt also:

$$X = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial U}{\partial z},$$

so heisst die Funktion  $U$  die zum Kraftfelde gehörige **Kräftefunktion** oder **Potentialfunktion**.

Bei einer beliebigen Bewegung des Angriffspunktes ergibt sich die geleistete Arbeit **unabhängig von der Art des Weges** zu

$$A = \int_{x_0, y_0, z_0}^{x, y, z} (X dx + Y dy + Z dz) = \int_{x_0, y_0, z_0}^{x, y, z} \left( \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz \right) \\ = \int_{U_0}^U dU = U - U_0$$

und nach c.

$$A = m \frac{v^2}{2} - m \frac{v_0^2}{2} = U_1 - U_0.$$

Sind die Bedingungsgleichungen  $X = \frac{\partial U}{\partial x}$  usw. nicht erfüllt, so ist der Ausdruck für die Elementararbeit  $dA = X \cdot dx + Y \cdot dy + Z \cdot dz$  kein vollständiges Differential (s. Mathematik), die Arbeit also vom Wege abhängig.

2. Kehrt der Massenpunkt, einen geschlossenen Weg beschreibend, wieder in seine Anfangslage zurück, so nimmt auch die Potentialfunktion als Funktion der Lage des Punktes wieder ihren Anfangswert an, d. h. die lebendige Kraft wird wieder  $m \frac{v_0^2}{2}$  (Prinzip der **Erhaltung** der lebendigen Kraft).

$\Pi = -U$  und  $\Pi_0 = -U_0$  heissen die **potentielle Energie** (Energie der Lage) des Massenpunktes in der Lage  $x, y, z$  bzw.  $x_0, y_0, z_0$ ; damit folgt:

$$m \frac{v^2}{2} + \Pi = m \frac{v_0^2}{2} + \Pi_0 = \text{konst.}$$

Z. B. im Schwerkraftfelde der Erde:  $m \frac{v^2}{2} + G \cdot z = m \frac{v_0^2}{2} + G \cdot z_0$  ( $G$  = Gewicht des Massenpunktes,  $z$  und  $z_0$  Höhen über einem beliebig gewählten Nullpunkt).

3. Bei einer Verschiebung des Massenpunktes innerhalb einer Niveaufläche wird keine Arbeit geleistet (Wegrichtung stets senkrecht zur Kraftrichtung), demnach ist  $U - U_0 = 0$ , also  $U = F(x, y, z) = U_0 =$  unveränderlich, die Gleichung der durch  $U_0$  bestimmten Niveaufläche.

4. Wirken auf einen Punkt mehrere Kraftfelder 1, 2 ... ein, deren jedes eine Kräftefunktion  $U_1, U_2 \dots$  hat, so ist die Kräftefunktion für das resultierende Feld  $U = U_1 + U_2 + \dots$ .

5. Für das **Gravitationskraftfeld** um ein Anziehungszentrum  $O$  von der Masse  $M$  gilt (vgl. S. 196 u. 197):

$$A = U - U_0 = k \cdot m \cdot M \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right),$$

insbesondere

$$V = U - U_{\infty} = k \cdot m \cdot M \cdot \frac{1}{r}.$$

$V$  heißt das **Newtonsche Potential** der Masse  $m$  im Punkte  $r$  und ist gleich der Arbeit, die von der Anziehungskraft geleistet wird, wenn  $m$  aus unendlicher Ferne auf beliebigem Wege nach  $r$  gelangt, oder **die Arbeit, die aufgewendet werden muß, um  $m$  von  $r$  aus gegen die Anziehungskraft des Feldes in die unendliche Ferne zu bringen.**

Uebt an Stelle des Punktes  $O$  ein ausgedehnter Körper die anziehenden Kräfte auf den Massenpunkt  $m$  aus, so wird das Potential  $V = km \int \frac{dM}{r}$ .

Für eine Kugel vom Halbmesser  $R$  und dem spez. Gewicht  $\gamma$  ( $M = \frac{4}{3} \pi R^3 \gamma$ ) ist in einem äußeren Punkt ( $r > R$ ) das Potential der Masse  $m$

$$V_a = km \cdot \frac{4}{3} R^3 \pi \frac{\gamma}{g} \cdot \frac{1}{r},$$

in einem inneren Punkt ( $r < R$ )

$$V_i = km \cdot 2 \pi \frac{\gamma}{g} \left( R^2 - \frac{r^2}{3} \right).$$

6. Die Summe der kinetischen und potentiellen Energie eines Massenpunktes heißt (mechanische) **Gesamtenergie** oder **Arbeitsvermögen** des Punktes.

Nach dem vorstehenden gilt demnach:

**Gehört zu einem Kraftfelde eine Potentialfunktion, so ist die Gesamtenergie eines im Felde sich bewegendem Massenpunktes an jeder Stelle dieselbe.**

### e. Leistung.

1. Legt der Angriffspunkt einer Kraft  $P$  in dem Zeiteilchen  $dt$  den Weg  $ds$  zurück, wobei die Elementararbeit

$$dA = P \cos \varphi ds$$

verrichtet wird, so nennt man den Quotienten

$$N = \frac{dA}{dt} = P v \cos \varphi, \quad \text{worin } v = \frac{ds}{dt}$$

die augenblickliche Geschwindigkeit ist, die **Leistung** oder den **Effekt** von  $P$  zur Zeit  $t$ .

Die Leistung ist wie die Arbeit (s. S. 196) eine skalare Größe.

Die **mittlere Leistung** während der Zeit  $\tau = t_1 - t_0$  ist

$$N_m = \frac{1}{\tau} \int_{s_0}^{s_1} P \cos \varphi ds.$$

Mißt man die Arbeit in **mkg**, die Zeit in **sk**, so erhält man die Leistung in **mkg/sk**. Die am meisten zur Leistungsmessung gebrauchte technische Einheit ist die **Pferdestärke (PS) = 75 mkg/sk**. Im CGS-System (s. S. 166 u. S. 196) ergibt sich die Leistung in **Erg/sk**.

Die in der Elektrotechnik gebräuchliche Einheit ist **1 Watt = 10<sup>7</sup> Erg/sk**; für größere Leistungen **1 Kilowatt = 1000 Watt**.

Es ist **1 PS = 75 mkg/sk = 736 Watt**,

Mit Hilfe der Leistung ergibt sich die in der Zeit  $t_0$  bis  $t_1$  geleistete Arbeit zu

$$A = \int_{t_0}^{t_1} N dt \text{ und } = N(t_1 - t_0), \text{ wenn } N \text{ unveränderlich ist.}$$

Mißt man die Leistung in PS, die Zeit in st, so ergibt sich die Arbeit in Pferdekraftstunden (PSst); entsprechend Kilowattstunde (Kw st) usw.

**f. Zeichnerische Darstellung der Arbeit und Leistung.**

Entsprechend den beiden Gleichungen

$$A = \int_{s_0}^{s_1} P_t ds \text{ und } A = \int_{t_0}^{t_1} N dt$$

ergeben sich zwei Diagramme für die Arbeit.

1. Man trägt die Wege  $s$  als Abszissen, die jeweilige Größe der Tangentialkraft  $P_t$  (in Richtung des Weges) als Ordinaten einer Kurve in rechtwinkligen Koordinaten auf. Das von den beiden zu  $s_0$  und  $s_1$  gehörigen Ordinaten sowie der Kurve und der Abszissenachse eingeschlossene Flächenstück  $F'$  stellt die auf dem Wege  $s_0$  bis  $s_1$  verrichtete Arbeit dar. Verwandelt man die Fläche  $F'$  in ein Rechteck mit der Grundlinie  $s_1 - s_0$  und der Höhe  $P_m$ , so ist  $P_m$  die mittlere Kraft, die, unveränderlich auf dem ganzen Wege wirkend, die gleiche Arbeit verrichtet wie die veränderliche Kraft  $P_t$ .

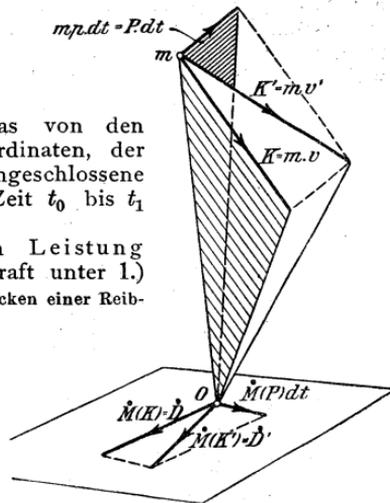
Anwendung: Indikator-Diagramme der Kolbenkraftmaschinen. Formänderungsarbeit bei Festigkeitsmaschinen.

2. Man trägt die Zeiten  $t$  als Abszissen, die Leistungen  $N$  als Ordinaten einer Kurve auf. Das von den beiden zu  $t_0$  und  $t_1$  gehörigen Ordinaten, der Kurve und der Abszissenachse eingeschlossene Flächenstück stellt die in der Zeit  $t_0$  bis  $t_1$  verrichtete Arbeit dar.

(Bestimmung der mittleren Leistung entsprechend der der mittleren Kraft unter 1.)

Anwendung: Diagramm für das Einrücken einer Reibkupplung.

Abb. 72.



**g. Bewegungsgröße, Impuls, Kraftantrieb.**

Aus dem Dreieck der Geschwindigkeitsvektoren für zwei unendlich benachbarte Punkte (s. Abb. 4b, S. 148) folgt (s. Abb. 72):

$$m \cdot p \cdot dt = P \cdot dt = m v' \rightarrow m v = \vec{d}(m v) = \vec{d}K$$

(geometrische Differenz).

Man nennt den Vektor  $K = m \cdot v$  die augenblickliche **Bewegungsgröße** oder den augenblicklichen **Impuls** des Massenpunktes, den (unendlich kleinen) Vektor  $P dt$  den **Elementarantrieb** der Kraft  $P$  für das Zeitelement  $dt$ .

Im **technischen Maßsystem** ist die **Einheit des Impulses** und des Antriebes  $1 \text{ kg} \frac{\text{sk}^2}{\text{m}} \cdot \frac{\text{m}}{\text{sk}} = 1 \text{ kg} \cdot \text{sk}$ , im **C-G S-System**  $1 \text{ g} \frac{\text{cm}}{\text{sk}}$ .

Für die auf die Koordinatenachsen projizierten Bewegungen gilt, wie für jede geradlinige Bewegung:

$$P_x \cdot dt = m \cdot v_x' - m \cdot v_x = d(m v_x) = dK_x$$

$$\int_{t_0}^t P_x \cdot dt = m \cdot v_x - m \cdot v_{x_0} = K_x - K_{x_0}$$

usw. für  $y$ - und  $z$ -Achse.

$\int_{t_0}^t P_x dt$  heißt der **Antrieb der Kraft**  $P_x$  in der Zeit  $t_0$  bis  $t$ .

**Die Zunahme der Bewegungsgröße (des Impulses) ist gleich dem Antriebe der Kraft.**

(Zunahme geometrisch bzw. algebraisch, je nachdem die Bewegung krumm- oder geradlinig ist, Zeit unendlich klein oder endlich.)

Der Impuls kann aufgefaßt werden als diejenige **Stoßkraft** (s. S. 241), die den Massenpunkt in seiner augenblicklichen Lage aus der Ruhe momentan auf die Geschwindigkeit  $v$  bringen würde.

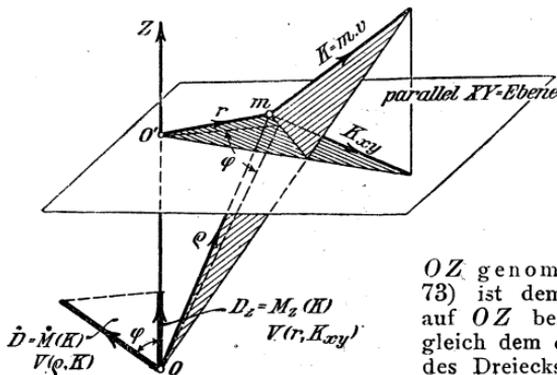
### h. Impulsmoment, Drall, Flächensatz.

1. Wendet man auf das Parallelogramm der Impulse für zwei unendlich benachbarte Punkte, s. Abb. 72, den allgemeinen Momentensatz (S. 172) an, indem man das Parallelogramm von dem gewählten Bezugspunkt  $O$  aus projiziert und die doppelten Flächeninhalte der entstandenen Dreiecke  $(O, K)$ ;  $(O, K')$ ;  $(O, P dt)$  als Momentvektoren im richtigen Sinne senkrecht zu den Dreiecksebenen aufträgt, so folgt:

$$\dot{M}(P) \cdot dt = \dot{M}(K') \rightarrow \dot{M}(K) = \dot{D} \rightarrow \dot{D} = \overline{d} \dot{D}$$

(geometrische Differenz).

Abb. 73.



Der Vektor des **Impulsmomentes** (des **Momentes der Bewegungsgröße**)

$$\dot{D} = \dot{M}(K) = \dot{M}(m v)$$

heißt der augenblickliche **Drall** des

Massenpunktes in bezug auf den Punkt  $O$ .

Der für die Achse  $OZ$  genommene **Drall**  $D_z$  (Abb. 73) ist dementsprechend als das auf  $OZ$  bezogene Impulsmoment gleich dem doppelten Flächeninhalt des Dreiecks  $(O', K_{xy})$ , d. i. der

Projektion des Dreiecks ( $O, K$ ) auf eine Ebene senkrecht zur Achse. Es gilt mit  $\varphi =$  Neigungswinkel der beiden Dreiecksebenen = Winkel zwischen der  $Z$ -Achse und dem Drall für den Punkt  $O$ :

$$D_z = \dot{D} \cdot \cos(\dot{D}, z) \quad \text{oder} \quad \overline{M}(K) = \dot{M}(K) \cdot \cos \varphi.$$

Damit folgt:

$$M_z(P) \cdot dt = M_z(K') - M_z(K) = D_{z'} - D_z = dD_z$$

$$\int_{t_0}^t M_z(P) dt = M_z(K) - M_z(K_0) = D_z - D_{z_0}$$

usw. für  $x$ - und  $y$ -Achse.

**Die Zunahme des Dralls (des Impulsmomentes) ist gleich dem Antriebe des Kraftmomentes.**

(Zunahme geometrisch oder algebraisch, je nachdem Drall und Kraftmoment für einen Punkt oder eine Achse genommen werden, Zeit unendlich klein oder endlich.)

2. Projiziert man das Bogenelement  $ds = v dt$  der Bahnkurve des Massenpunktes von dem Bezugspunkt  $O$  aus (Abb. 74), so erhält man ein unendlich schmales Dreieck  $df$ ; die Größe  $\dot{v}_f = \frac{df}{dt}$  heißt die augenblickliche **Flächen-**(Sektoren-) **Geschwindigkeit**, sie wird als Vektor in  $O$  senkrecht zur Ebene von  $df$  aufgetragen, in den Halbraum hineinweisend, von dem aus gesehen  $v$  im Sinne des Uhrzeigers drehend erscheint.

In dieselbe Richtung fällt auch der augenblickliche Drall  $\dot{D}$ , und es ist:

$$\dot{D} = 2m \cdot \frac{df}{dt} = 2m \cdot \dot{v}_f.$$

Entsprechend wird:

$$D_z = 2m \cdot \frac{df_{xy}}{dt} = 2m \cdot v_{fz} = 2m \cdot \dot{v}_f \cdot \cos(\dot{v}_f, z),$$

**d. h.  $2m \times$  Zunahme der Flächengeschwindigkeit = Antrieb des Kraftmomentes.**

(Zunahme geometrisch oder algebraisch, je nachdem man Flächengeschwindigkeit und Kraftmoment um einen Punkt oder eine Achse nimmt, Zeit unendlich klein oder endlich.)

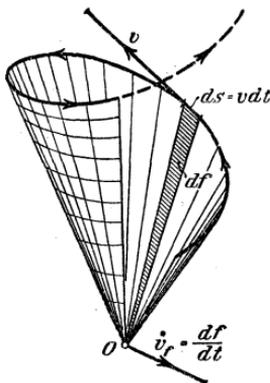
Die analytische Fassung des Flächensatzes lautet bei Zerlegung nach drei rechtwinkligen Achsen:

$$2m \cdot d \left( \frac{df_{yz}}{dt} \right) = d [m (y v_z - z v_y)] = (y P_z - z P_y) \cdot dt \text{ usw.}$$

$$2m \left( \frac{df_{yz}}{dt} - \frac{df_{yz}^{(0)}}{dt} \right) = m (y \cdot v_z - z \cdot v_y) - m (y_0 v_{z_0} - z_0 \cdot v_{y_0}) = \int_{t_0}^t (y P_z - z P_y) dt \text{ usw.}$$

(Linkskoordinatensystem; s. S. 174).

Abb. 74.



## B. Bewegung des Massenpunktes unter dem Einfluß von Kräften.

### a. Freie geradlinige Bewegung des Massenpunktes.

Alle am Punkte angreifenden Kräfte müssen stets eine in die Richtung der Geraden fallende Mittelkraft  $P$  ergeben.

Die dynamische Grundgleichung ist in der einfachen Form

$$P = m \frac{dv}{dt}$$

anzusetzen.

#### Beispiel 1. Freier Fall im luftleeren Raum.

Auf einen im luftleeren Raum freifallenden Körper wirkt nur die Schwerkraft (Anziehungskraft der Erde), die für geringe Fallhöhen unveränderlich ist und demnach dem Körper eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung erteilt (Werte für die Fallbeschleunigung  $g$  s. S. 164).

Rechnet man die Zeit vom Beginn des Fallens, so erhält man für die nach  $t$  sek erlangte Geschwindigkeit  $v$  und für die durchfallene Höhe  $h$  (Geschwindigkeitshöhe zu  $v$ )

$$v = gt = \sqrt{2gh} \quad \text{und} \quad h = \frac{g}{2} t^2 = \frac{v^2}{2g}.$$

#### Beispiel 2. Freier Fall mit Berücksichtigung des Luftwiderstandes.

Der Luftwiderstand  $W$  sei dem Quadrate der Geschwindigkeit  $v$  proportional;  $W = mgv^2 : k^2$ , worin  $k$  die Geschwindigkeit bedeutet, für welche  $W = G = mg$  wird (Geschwindigkeit des gleichförmigen Fallens);  $m$  ist die Masse und  $G$  das Gewicht des Massenpunktes.

1) Für den Fall eines Körpers aus der Höhe  $h$  folgt

$$\text{die Endgeschwindigkeit} \quad v = k \sqrt{1 - e^{-\frac{2gh}{k^2}}}$$

$$\begin{aligned} \text{und die Falldauer} \quad t &= \frac{k}{g} \operatorname{Ar} \operatorname{Cg} \frac{v}{k} = \frac{k}{g} \ln \left\{ e^{\frac{gh}{k^2}} + \sqrt{\frac{2gh}{k^2} - 1} \right\} \\ &= \frac{k}{g} \operatorname{Ar} \operatorname{Cof} \left( \operatorname{Cof} \frac{gh}{k^2} + \operatorname{Sin} \frac{gh}{k^2} \right) \end{aligned}$$

vgl. hierzu die Hyperbelfunktionen S. 65, e s. S. 48.

2) wenn ein Körper mit der Geschwindigkeit  $c$  nach oben geworfen wird, ist

$$\text{die Steighöhe} \quad h = \frac{k^2}{2g} \ln \left( 1 + \frac{c^2}{k^2} \right)$$

$$\text{und die Steigdauer} \quad t = \frac{k}{g} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{c}{k}.$$

Kommt der Körper in derselben Wagerechten wieder an, so besitzt er die Endgeschwindigkeit

$$v = \frac{c}{\sqrt{1 + \frac{c^2}{k^2}}}.$$

Die Geschwindigkeit  $k$  in m/sk ergibt sich aus der Formel

$$k^2 = \frac{2g^2 m}{\psi \gamma F} = \frac{2gG}{\psi \gamma F},$$

worin  $F$  die senkrecht zur Bewegungsrichtung genommene grösste Querschnittfläche des Körpers in  $\text{qm}$ ,  $\gamma$  das Gewicht von 1  $\text{cbm}$  Luft ( $= 1,293 \text{ kg}$ ),  $m$  die Masse des Körpers,  $G$  das Gewicht in  $\text{kg}$ ,  $\phi$  einen von der Gestalt des Körpers abhängigen Erfahrungskoeffizienten (für kugelförmige Körper  $\phi = 0,5$ ) bedeutet.

Beispiel: Für eine Gufseisenkugel (1  $\text{cbm}$  wiegt 7250  $\text{kg}$ ) vom Halbmesser  $r$  (in  $\text{m}$ ) wird

$$k = 541,6 \sqrt{r} \text{ m/sk.}$$

### Theorie der geradlinigen Schwingungen.

#### 1. Harmonische Schwingung (s. auch S. 147, Abb. 3).

Der Massenpunkt  $m$  befinde sich zur Zeit  $t$  in der Entfernung  $x$  von der Anfangslage ( $t = 0$ ); eine Kraft proportional dem Ausschlage  $x$  sei bestrebt, den Punkt in die Anfangslage zurückzuführen.

Die Bewegungsgleichung lautet:

$$m \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} = -k \cdot x \quad \text{oder} \quad \frac{d^2 x}{dt^2} + \alpha^2 x = 0; \quad \text{wo } \alpha = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Das allgemeine Integral ist:

$$x = A \cdot \cos \alpha t + B \cdot \sin \alpha t.$$

das sich unter den vorliegenden Anfangsbedingungen ( $x = 0$  für  $t = 0$ ) vereinfacht in:

$$x = r \cdot \sin \left( t \sqrt{\frac{k}{m}} \right) = r \cdot \sin \left( 2 \pi \frac{t}{T} \right) = r \cdot \sin (\omega t);$$

$r = \text{Amplitude} = \text{grösster Ausschlag,}$

$T = 2 \pi \sqrt{\frac{m}{k}} = \text{Dauer einer vollen Schwingung,}$

$\omega = \frac{2 \pi}{T} = \text{Kreisfrequenz} = \text{Winkelgeschwindigkeit der zur Darstellung benutzten Drehstrecke (s. S. 147),}$

$n = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2 \pi} = \text{Frequenz} = \text{Schwingungszahl.}$

#### 2. Gedämpfte freie Schwingung.

Aufser der rückführenden Kraft  $kx$  wirke noch ein der jeweiligen Geschwindigkeit proportionaler Widerstand; die Bewegungsgleichung wird dann:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -k \cdot x - c \cdot \frac{dx}{dt}; \quad c = \text{Dämpfungsfaktor.}$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{c}{m} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} \cdot x = 0.$$

Das allgemeine Integral ist:

$$x = A \cdot e^{\alpha t} + B \cdot e^{\beta t},$$

wo  $\alpha$  und  $\beta$  die Wurzeln der quadratischen Gleichung:

$$u^2 + \frac{c}{m} \cdot u + \frac{k}{m} = 0,$$

also:

$$\left. \begin{matrix} \alpha \\ \beta \end{matrix} \right\} = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\frac{c^2}{4m^2} - \frac{k}{m}} = -\frac{c}{2m} \pm \frac{\gamma}{2m}.$$

Für  $t = 0$  sei  $x = 0$  und  $\frac{dx}{dt} = v_0$ .

a)  $c^2 < 4km$ ; mit  $\gamma' = \sqrt{4km - c^2}$  folgt:

$$x = \frac{2mv_0}{\gamma'} \cdot e^{-\frac{c}{2m}t} \cdot \sin\left(\frac{\gamma'}{2m} \cdot t\right).$$

Schwingung mit allmählich abnehmender Schwingungsweite (Amplitude). (S. Abb. 75.)

Die konstante Schwingungsdauer beträgt  $T = \frac{4\pi \cdot m}{\sqrt{4km - c^2}}$  und ist um so größer, je größer  $c$ , d. h. je stärker die Dämpfung.

Die Amplituden nehmen nach einer geometrischen Reihe ab; für zwei aufeinanderfolgende Schwingungsweiten — zwischen denen eine halbe Schwingungsdauer liegt — gilt:  $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{1}{e^{-\frac{cT}{4m}}}$ ;

$$\lambda = \lg a_n - \lg a_{n+1} = \frac{cT}{4m} = \frac{\pi c}{\sqrt{4km - c^2}}$$

heißt das **logarithmische Dekrement** der Schwingung.

b)  $c^2 > 4km$ ; es folgt:

$$x = \frac{m \cdot v_0}{\gamma} e^{-\frac{c}{2m}t} \cdot \left( e^{+\frac{\gamma}{2m}t} - e^{-\frac{\gamma}{2m}t} \right).$$

Abb. 75.

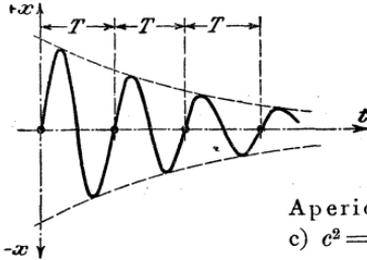
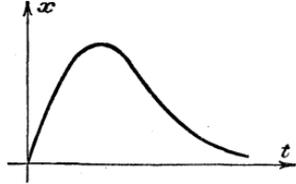


Abb. 76.



Aperiodische Bewegung (s. Abb. 76).

c)  $c^2 = 4km$ ; es gilt:

$$x = v_0 \cdot t \cdot e^{-\frac{c}{2m}t}.$$

Bewegung ebenfalls aperiodisch.

**Anwendung:** Theorie der elektrischen Meßinstrumente; Öffnen und Schließen eines Gleichstromkreises (Dämpfung = Selbstinduktion).

### 3. Erzwungene Schwingungen.

Auf den Massenpunkt wirke außer der rückführenden Kraft  $k \cdot x$  und dem Dämpfungswiderstande  $c \cdot \frac{dx}{dt}$  noch eine mit der Zeit

periodisch veränderliche Kraft  $P \cdot \sin \omega t$ , die **erregende Schwingung**.

Die Bewegungsgleichung lautet:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = P \cdot \sin \omega t.$$

Es folgt:

$$x = x_1 + x_2 \quad \text{mit:}$$

$$x_1 = e^{-\frac{c}{2m}t} \cdot \left[ A \cdot \cos\left(\frac{\gamma'}{2m}t\right) + B \cdot \sin\left(\frac{\gamma'}{2m}t\right) \right] \quad \text{und}$$

$$x_2 = C \cdot \sin(\omega t - \varphi);$$

die gedämpfte Schwingung  $x_1$  (vgl. oben unter 2) genügt für sich der Differentialgleichung:  $m \frac{d^2 x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = 0$  und heißt **Eigenschwingung** des Massenpunktes, sie klingt allmählich infolge der Dämpfung ab, und es bleibt nur noch die **erzwungene Schwingung**  $x_2$  bestehen, deren Amplitude  $C = \frac{P}{\sqrt{(c\omega)^2 + (k - m\omega^2)^2}}$  ist.  $x_2$  hat dieselbe Frequenz bzw. Schwingungsdauer wie die Erregerschwingung, hat aber gegen diese eine durch die Dämpfung bedingte **Phasenverschiebung**  $\varphi$ , bestimmt durch  $\text{tg } \varphi = \frac{c\omega}{k - m\omega^2}$ .

**Resonanz** tritt ein, wenn  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ , d. h. wenn die Schwingungsdauer oder die Frequenz der Erregerschwingung mit der der **dämpfungsfreien Eigenschwingung** ( $\omega$  oben unter 1) übereinstimmt; dann wird  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ,  $C = \frac{P}{c} \cdot \sqrt{\frac{m}{k}}$ , d. h. bei geringer Dämpfung nimmt die Amplitude erhebliche Werte an.

Ist keine Dämpfung vorhanden, so bleibt die Eigenschwingung neben der erzwungenen Schwingung dauernd bestehen (Interferenzerscheinungen, Schwebungen).

**Anwendung:** Allgemeine Theorie des Wechselstromkreises, Resonanzschwingungen der Schiffswellen, Akustik, Optik.

4. Ist die **Erregerschwingung**  $y$  **zelternerisch** durch einen periodischen Kurvenzug **gegeben** (z. B. Tangentialdruckdiagramm der Dampfmaschine), so muß man sie, um sie der Rechnung und der dynamischen Behandlung zugänglich zu machen, in eine **Fouriersche Reihe** entwickeln:

$$y = \frac{1}{2} A_0 + A_1 \cdot \cos \omega t + A_2 \cdot \cos 2\omega t + A_3 \cdot \cos 3\omega t + \dots \\ + B_1 \cdot \sin \omega t + B_2 \cdot \sin 2\omega t + B_3 \cdot \sin 3\omega t + \dots$$

Es gilt:

$$A_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} y \cdot dt; \quad A_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} y \cdot \cos k\omega t \cdot dt; \quad B_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} y \cdot \sin k\omega t \cdot dt.$$

Die Bestimmung dieser Koeffizienten geschieht (s. S. 128) meist auf zeichnerisch-rechnerischem Wege unter Zuhilfenahme des Polarplanimeters.

### b. Freie krummlinige Bewegung des Massenpunktes.

Alle am Punkte angreifenden Kräfte müssen stets eine Mittelkraft  $P$  ergeben, die in der Ebene der Bahnlinie — bei doppelt gekrümmter Bahnkurve in der jeweiligen Schmiegungeebene — liegt.

Die dynamische Grundgleichung ist in der allgemeinen Form:

$$P = m \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (\text{geometrische Geschwindigkeitszunahme})$$

anzusetzen.

Die weitere Behandlung kann auf drei verschiedene Weisen erfolgen.

1. Man zerlegt  $P$  in Richtung der Bahntangente und Bahnnormale (Hauptnormale) in eine Tangential- oder Umfangskraft  $P_t$  und eine Normal- oder Zentripetalkraft  $P_n$ . Es gilt:

$$P_t = P \cos \varphi = m \frac{dv}{dt}, \quad P_n = P \sin \varphi = m \frac{v^2}{\rho}$$

( $\varphi = \sphericalangle [P, v]$ ,  $\rho =$  Krümmungshalbmesser der Bahn).

Die  $P_n$  entsprechende, gleich groÙe und entgegengesetzt gerichtete Komponente des **Trägheitswiderstandes** heißt **Zentrifugalkraft**.

**Anwendung:** Drehbewegung (s. S. 209).

2. Man bildet die dynamischen Grundgleichungen für die auf ein rechtwinkliges Achsenkreuz projizierte Bewegung:

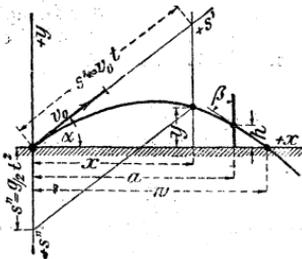
$$X = mp_x = m \frac{dv_x}{dt} = m \frac{d^2x}{dt^2}, \quad Y = mp_y = m \frac{dv_y}{dt} = m \frac{d^2y}{dt^2},$$

$$Z = mp_z = m \frac{dv_z}{dt} = m \frac{d^2z}{dt^2}.$$

#### Anwendungsbeispiel. Wurfbewegung ohne Berücksichtigung des Luftwiderstandes.

Auf einen Massenpunkt wirke augenblicklich eine Kraft, die dem Punkt im Augenblick ihres Aufhörens zur Zeit  $t=0$  die Geschwindigkeit  $v_0$  unter dem Winkel  $\alpha$  zur Wagerechten erteilt. Dauernd wirkt auf den Punkt die Schwerkraft, wodurch er lotrecht die Beschleunigung  $-g$  erhält (s. Abb. 77).

Abb. 77.



Die Wurfbewegung setzt sich demnach aus einer gleichförmigen und gleichmäßig beschleunigten (bzw. verzögerten) Bewegung zusammen.

Wege

$$x = v_0 t \cos \alpha \quad y = v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2$$

woraus die Gleichung der Bahnlinie

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{g}{2 v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 \quad (\text{Parabel})$$

$$\text{Wurfzeit (für } y = 0) \quad t = \frac{2 v_0 \sin \alpha}{g}$$

$$\text{Wurfweite (für } y = 0) \quad w = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$$

Schufswinkel für eine vorgeschriebene Wurfweite bei gegebener Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  folgt aus

$$\sin 2\alpha = \frac{g}{v_0^2} w$$

(zwei Winkel  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$ , die sich zu  $90^\circ$  ergänzen, flacher Schuß, Bogenschuß).

Größte Wurfweite

$$w_{\max} = \frac{v_0^2}{g} = \text{doppelte Geschwindigkeitshöhe ergibt sich für } \alpha = 45^\circ.$$

Geschwindigkeiten

$$v_x = v_0 \cos \alpha \quad v_y = v_0 \sin \alpha - gt \quad v = \sqrt{v_0^2 - 2gy}$$

Höchster Bahn-Punkt (für  $v_y = 0$ )

$$t = \frac{v_0 \sin \alpha}{g} \quad x = \frac{w}{2} \quad y_{\max} = \frac{v_0^2}{2g} \sin^2 \alpha$$

Eine Wand im Abstände  $a$  wird in der Höhe  $h = a \operatorname{tg} \alpha - \frac{g}{2v_0^2} \frac{a^2}{\cos^2 \alpha}$  mit der Geschwindigkeit  $v = \sqrt{v_0^2 - 2gh}$

nach Ablauf der Zeit  $t = \frac{a}{v_0 \cos \alpha}$

unter dem Winkel  $\beta$  getroffen, wo  $\operatorname{ctg} \beta = \frac{1}{2} \frac{v_0^2 \sin 2\alpha - a}{\frac{v_0^2}{2g} \cos^2 \alpha}$

3. Man zerlegt die am Massenpunkt angreifende Kraft in Richtung und normal zum Fahrstrahl (Radiusvektor) von einem festen Punkt aus.

**Anwendung:** Zentralbewegung (s. S. 195) (Kraft normal zum Radiusvektor gleich Null), insbesondere Planetenbewegung.

### Drehbewegung des Massenpunktes.

Der Massenpunkt  $m$  drehe sich in einem Kreise vom Halbmesser  $r$  mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  um die Achse  $a$ .

1. Es gilt dann:

$\alpha$ ) für die Geschwindigkeit, die Tangential-, Normal- und Gesamtbeschleunigung:

$$v = r \cdot \omega, \quad p_t = r \frac{d\omega}{dt} = r \cdot \varepsilon, \quad p_n = \frac{v^2}{r} = r \cdot \omega^2, \quad p = r \sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2};$$

$\beta$ ) für die Tangential-, Normal- und **Gesamtkraft:**

$$P_t = m \cdot r \frac{d\omega}{dt} = m \cdot r \cdot \varepsilon, \quad P_n = m \cdot r \cdot \omega^2, \quad P = mr \sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2};$$

$\gamma$ ) für das gesamte antreibende **Moment** ( $P_n$  schneidet die Achse, hat also das Moment Null):

$$M = P_t \cdot r = (m \cdot r^2) \cdot \frac{d\omega}{dt} = (mr^2) \cdot \varepsilon;$$

$\delta$ ) für die **Arbeit** ( $P_n$  steht senkrecht zur Bewegungsrichtung, leistet also keine Arbeit):

$$dA = P_t \cdot r d\varphi = M d\varphi = M \cdot \omega dt \quad A = \int_{\varphi}^{\varphi'} M d\varphi = \int_t^{t'} M \cdot \omega dt;$$

e) für die **lebendige Kraft**:

$$L = m \cdot \frac{v^2}{2} = (m r^2) \cdot \frac{\omega^2}{2}.$$

2. Der Größe und Richtung nach und in bezug auf ein rechtwinkliges Links-Koordinatensystem (s. S. 174) gilt (Abb. 78a u. 78b) für die Drehgeschwindigkeit

$$v = r \omega = \omega \cdot \rho \cdot \sin(\omega, \rho) = V(\omega, \rho),^*)$$

$$v_x = \omega_y \cdot z - \omega_z \cdot y, \quad v_y = \omega_z \cdot x - \omega_x \cdot z, \quad v_z = \omega_x \cdot y - \omega_y \cdot x;$$

Abb. 78 a.

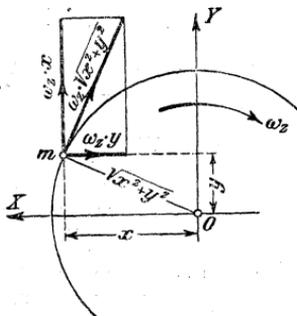
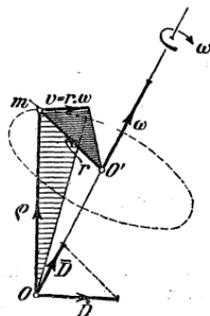


Abb. 78 b.



für den Impuls:

$$K = m \cdot v = m \cdot r \omega = V(\omega, m \rho),^*)$$

$$K_x = m \omega_y \cdot z - m \omega_z \cdot y, \quad K_y = m \omega_z \cdot x - m \omega_x \cdot z,$$

$$K_z = m \omega_x \cdot y - m \omega_y \cdot x;$$

für den Drall in bezug auf den **Punkt O** der Drehachse (Nullpunkt)

$$\dot{D} = \rho \cdot K = \rho \cdot m \cdot r \omega = V(\rho, K),^*)$$

$$D_x = +m \cdot (y^2 + z^2) \cdot \omega_x - m \cdot y x \cdot \omega_y - m \cdot z x \cdot \omega_z,$$

$$D_y = -m \cdot x y \cdot \omega_x + m \cdot (z^2 + x^2) \cdot \omega_y - m \cdot z y \cdot \omega_z,$$

$$D_z = -m \cdot x z \cdot \omega_x - m \cdot y z \cdot \omega_y + m \cdot (x^2 + y^2) \cdot \omega_z;$$

für den Drall in bezug auf die **Drehachse selbst**

$$\bar{D} = r \cdot K = (m r^2) \cdot \omega = \dot{D} \cdot \cos(\dot{D}, \omega).$$

### c. Unfreie Bewegung eines Massenpunktes.

Die unfreie Bewegung wird dadurch auf eine freie zurückgeführt, daß man die den Bewegungsbedingungen entsprechenden **Zwangs-kräfte (Bahnwiderstände, Mittelkraft = Q)** zu den gegebenen äußeren Kräften (Mittelkraft = P) hinzufügt.

Die dynamische Grundgleichung nimmt also die Form an:

$$P \rightarrow Q = m \frac{dv}{dt}.$$

\*) Begriff des Vektorproduktes s. Momente 6, S. 171.

Die äußere Kraft, die auf den Massenpunkt ausgeübt werden muß, um ihm unter den gegebenen Bedingungen den Geschwindigkeitszuwachs  $\vec{dv}$  zu erteilen, ist demnach

$$P = m \frac{d\vec{v}}{dt} \rightarrow Q,$$

und umgekehrt der Widerstand, den der Massenpunkt unter den gegebenen Bedingungen der Aenderung seiner Geschwindigkeit um  $\vec{dv}$  entgegengesetzt:

$$W = Q \rightarrow m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt},$$

also nicht mehr gleich dem Trägheitswiderstande, wie bei der freien Bewegung.

### 1. Bewegung auf vorgeschriebener Bahnlinie.

α) **Bahnlinie vollkommen glatt.** Die Zwangskraft reduziert sich auf einen normal zur Führungslinie stehenden Bahnwiderstand  $N$ .

Zerlegt man die gegebene äußere Kraft  $P$  nach Richtung der Bahntangente und winkelrecht dazu in die beiden Seitenkräfte

$$P_t = P \cdot \cos \alpha$$

und  $P_n = P \cdot \sin \alpha$ ,

so gilt, da die Zwangskraft in der Tangentenrichtung keine Komponente hat:

$$P_t = m \frac{dv}{dt} = mpt.$$

$P_n$  muß dagegen mit  $N$  eine Mittelkraft ergeben, die gleich der Zentripetalkraft der mit der vorliegenden nach Geschwindigkeit und Bahnform übereinstimmenden freien Bewegung ist, d. h. (s. Abb. 79)

$$P_n + N = C = m \frac{v^2}{\rho} \quad (\text{geometrische Addition}).$$

Die Gegenkraft (Reaktion)  $\vec{N}$  zum Bahnwiderstand  $N$  heißt **Bahndruck** (Druck auf die Bahn), die Gegenkraft  $\vec{C}$  zur Zentripetalkraft  $C$  heißt **Zentrifugalkraft** (Fliehkraft).

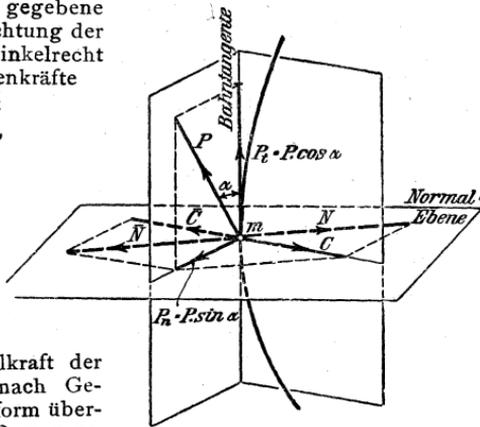
β) **Bahnlinie rauh.** Dann tritt außer dem Normalwiderstand  $N$  ein Tangentialwiderstand  $F$ , die **Reibung**, auf; sie ist der Bewegungsrichtung entgegengesetzt und kann proportional dem Normalwiderstand (bzw. Normalbahndruck) angenommen werden

$$F = \mu \cdot N,$$

$\mu$  heißt Reibungszahl oder Reibungskoeffizient der gleitenden Bewegung (s. S. 243 u. f.).

An der Bahn greift die gleich große Gegenkraft  $\vec{F}$  an, welche die Bahn in Richtung der Bewegung zu verschieben sucht.

Abb. 79.



Es gilt jetzt:

$$P_t - F = P \cdot \cos \alpha - \mu \cdot N = m \frac{dv}{dt} = m \cdot p_t,$$

während die Gleichung für  $P_n$  unverändert bleibt.

## 2. Bewegung auf vorgeschriebener Führungsfäche.

$\alpha$ ) **Vollkommen glatte Führungsfäche.** Die Zwangskraft reduziert sich auf den Normalwiderstand  $N$ . Zerlegt man die äußere Kraft  $P$  nach Richtung der Flächennormalen und der Tangente an die auf der Fläche liegende Bahnlinie in  $P_n$  und  $P_t$ , so gilt

$$P_t = m \frac{dv}{dt} = m \cdot p_t \quad \text{und}$$

$$P_n + N = C = m \cdot \frac{v^2}{\rho} = m \rho \omega^2 = m p_n \quad (\text{algebraische Addition}).$$

$\beta$ ) **Rauhe Führungsfäche.** Zum Normalwiderstand  $N$  kommt der Reibungswiderstand  $F = \mu \cdot N$  entgegengesetzt der Bewegungsrichtung hinzu; während die Gleichung für die Normalbeschleunigung unverändert bleibt, tritt an Stelle der vorigen für  $p_t$  die Gleichung

$$P_t - F = m \cdot \frac{dv}{dt} = m \cdot p_n.$$

## 3. Satz der lebendigen Kraft für die unfreie Bewegung. Reibungsarbeit.

Besteht die Zwangskraft lediglich in einem Normalwiderstande der Bahn, so ist die Arbeit der Zwangskraft gleich null; der Satz von der lebendigen Kraft unterscheidet sich in keiner Weise von dem bei der freien Bewegung.

Die **Reibung** ist dagegen stets der Bewegung entgegengerichtet (mit der Umkehr der Bewegung ändert auch sie ihre Richtung um  $180^\circ$ ); die **Reibungsarbeit** hat daher immer den negativen Wert

$$\int_{s_0}^s F \cdot ds = - \int_{s_0}^s \mu N ds,$$

d. h. ein Teil der Arbeit der äußeren Kräfte wird stets zur Ueberwindung der Reibungsarbeit verbraucht.

Existiert für  $P$  eine Potentialfunktion  $U$ , so gilt

$$m \frac{v^2}{2} - m \frac{v_0^2}{2} = U - U_0 - \int_{s_0}^s \mu N ds.$$

Bei Beschreibung einer geschlossenen Kurve kann also die lebendige Kraft nie wieder den ursprünglichen Wert annehmen.

Ausführliches über Reibung s. Abschn. V, S. 243.

**Beispiel 1. Bewegung eines Massenpunktes in einem wagerechten Kreise, Kegelpendel.**

Auf den Massenpunkt wirke außer der Schwerkraft  $G$  keine äußere Kraft; die Führungsrinne mit dem Halbmesser  $r$  sei vollkommen glatt.

Die Tangential-Seitenkraft ist  $= 0$ , daher  $p_t = 0$ . Die Normal-Seitenkraft ist gleich der Schwerkraft  $G$ .

Diese muß mit dem Bahnwiderstand  $N$  zusammen die Zentripetalkraft  $C$  ergeben. Aus Abb. 80 folgt

$$N^2 = G^2 + C^2 = G^2 + \left(m \frac{v^2}{r}\right)^2 = G^2 + (m \omega^2 r)^2$$

$$N = m \sqrt{g^2 + \left(\frac{v^2}{r}\right)^2},$$

worin  $v$  die Umfangs-,  $\omega$  die Winkelgeschwindigkeit (s. S. 149),  $g = 9,81 \text{ m/sk}^2$  bedeutet.

$N$  bildet mit der Achse des Kreises einen Winkel  $\alpha$ , für den

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{C}{G} = \frac{v^2}{rg} = \omega^2 \frac{r}{g}.$$

Soll die kreisförmige Bewegung durch ein Pendel (**Kegelpendel**) erzwungen werden, so muß die **Pendelhöhe**

$h = r : \operatorname{tg} \alpha = gr^2 : v^2 = g : \omega^2$  sein. Die Umlaufzeit  $T$  ist

$$T = 2\pi \frac{r}{v} = 2\pi \sqrt{\frac{h}{g}}.$$

**Beispiel 2. Bewegung eines Massenpunktes in einem senkrechten Kreis (mathematisches Pendel).**

Die Bewegungsgleichung lautet (s. Abb. 81)

$$m \cdot l \cdot \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -m g \cdot \sin \varphi.$$

Der Satz von der lebendigen Kraft liefert mit  $\alpha =$  größter Ausschlagwinkel

$$m \frac{l^2}{2} \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = mgl(\cos \varphi - \cos \alpha); \quad t = \sqrt{\frac{l}{2g}} \int_{\varphi}^{\alpha} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos \varphi - \cos \alpha}} \quad (\text{elliptisches Integral.})$$

Durch Reihenentwicklung und Integration folgt die **Dauer einer einfachen Schwingung**, d. h. die Zeit zwischen zwei Durchgängen durch die Lotrechte

$$T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left[ 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}\right)^2 \sin^4 \frac{\alpha}{2} + \dots \right].$$

Bei  $\alpha \leq 8^\circ$  ist hinreichend genau (bis  $\sim 1 \text{ vT}$ ):

$$T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}},$$

d. h. die Schwingungsdauer ist unabhängig von der Schwingungsweite.

Die Länge des **Sekundenpendels** in  $m$  ist

$$l = g : \pi^2,$$

d. h. für die mittlere Breite Deutschlands,  $\varphi = 50^\circ$  und Meereshöhe ( $g = 9,81 \text{ m/sk}^2$ )

$$l = 0,994 \text{ m}.$$

Die Geschwindigkeit im tiefsten Punkt ist

$$v = \sqrt{2gh},$$

also die Spannkraft des Fadens (Bahndruck) im tiefsten Punkte am größten, u. zw.

$$\bar{N} = mg + m \frac{v^2}{l} = mg \frac{l+2h}{l}.$$

Ist  $\alpha > 90^\circ$ , so wird die Spannkraft in der Nähe  $\frac{2}{3}(h-l)$  über dem Aufhängepunkt gleich null (Bewegungsumkehr). — Ist die Geschwindigkeit im tiefsten Punkte  $\geq \sqrt{5lg}$ , so durchläuft der Punkt den ganzen Kreis. Die Spannkraft  $\bar{N}$  nimmt im höchsten Punkt ihren kleinsten, jedoch immer noch positiven Wert an.

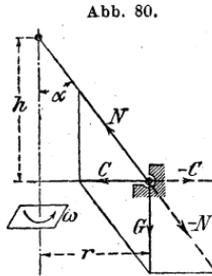


Abb. 80.

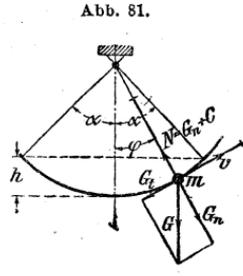


Abb. 81.

### d. Zusammengesetzte und Relativbewegung.

1. Multipliziert man die Gleichung für die Beschleunigung der zusammengesetzten Bewegung unter III. (S. 152) mit der Masse  $m$  des bewegten Punktes, so folgt

$$P = J + \rightarrow F + \rightarrow Z = m \cdot \frac{\overrightarrow{dv}}{dt}.$$

$J = m \cdot j$  ist die **Relativkraft**, die der freien Bewegung des Massenpunktes auf der Führungslinie im ruhenden Raum entspricht;  $F = m \cdot f$  die **Führungskraft**, die am Punkt  $m$  wirken würde, wenn er die augenblickliche Fahrzeugbewegung ausführte;  $Z = m \cdot z$  die **Zusatzkraft** der zusammengesetzten Bewegung.

$P$  bedeutet die **gesamte** am Punkt **tatsächlich wirkende Kraft**. Bei der **unfreien Bewegung** längs einer am Fahrzeug befestigten Führungslinie (z. B. Laufradkanal einer Turbine oder Zentrifugalpumpe) ist statt  $P$  zu schreiben  $P + \rightarrow Q$ , wo  $Q$  die von der Führungslinie auf den Punkt  $m$  übertragene **Zwangskraft** ist.

2. Ist die **Absolutbewegung** als gegeben anzusehen, so folgt für die Relativkraft

$$J = P + \rightarrow \overline{F} + \rightarrow \overline{Z} = P + \rightarrow \overline{F} + \rightarrow C,$$

wo  $\overline{F}$  die Gegenkraft zu  $F$  und  $C$  oder  $\overline{Z}$  die **Corioliskraft**, die Gegenkraft zu  $Z$  bedeutet.

Bei der unfreien Relativbewegung ist wieder zu setzen  $P + \rightarrow Q$  statt  $P$ ;  $\overline{F}$  und  $C$  heißen auch erste und zweite Zusatzkraft der Relativbewegung. Bei gleichförmiger Drehung des Bezugssystems wird  $F$  mit der Zentripetalkraft,  $\overline{F}$  mit der Zentrifugalkraft identisch; bei einer Schiebung des Bezugssystems sind  $Z$  und  $C$  null.

Herrscht relatives **Gleichgewicht** in bezug auf das Fahrzeug, so ist die Relativkraft  $J$  null; es müssen sich also Absolutkraft ( $P$ ), erste und zweite Zusatzkraft ( $\overline{F}$  und  $C$ ) das Gleichgewicht halten.

## C. Bewegung der Massenpunktgruppe unter der Einwirkung von Kräften.

Die Bewegung der Massenpunktgruppe (des Punkthaufens) wird dadurch auf die Gesetze für die freie Bewegung eines Massenpunktes zurückgeführt, dafs man an jedem einzelnen Punkt der Gruppe zu den **äußeren** gegebenen Kräften noch die **innere** Kraft (Spannkraft) hinzufügt, die die übrigen Punkte der Gruppe auf ihn ausüben.

Die **inneren Kräfte** der ganzen Punktgruppe bilden nach dem Satz von Wirkung und Gegenwirkung ein **Gleichgewichtssystem**; daraus ergeben sich wichtige Vereinfachungen.

### I. Allgemeine Sätze.

#### a. D'Alembertsches Prinzip.

1. Die Mittelkraft der am  $i^{\text{ten}}$  Punkt der Gruppe mit der Masse  $m_i$  wirkenden äußeren Kräfte sei  $P_i$ , die innere, von den übrigen

Punkten der Gruppe herrührende Kraft heiße  $S_i$ . Dann ist die Resultante von  $P_i$  und  $S_i$  die **Beschleunigungs-** oder **Effektivkraft**  $E_i$ , die sich auch aus der am Punkte  $m_i$  beobachtbaren Beschleunigung  $e_i$  ergibt zu:  $E_i = m_i \cdot e_i$ .

Denkt man sich den **Trägheitswiderstand**  $T_i$ , gleich  $E_i$ , aber entgegengesetzt gerichtet (s. S. 164), hinzu, so stehen  $P_i$ ,  $S_i$  und  $T_i$  im Gleichgewicht, d. h.:

An jedem einzelnen Massenpunkt der Gruppe halten sich die äußere Kraft  $P_i$ , die innere Kraft  $S_i$  und der Trägheitswiderstand  $T_i$  das Gleichgewicht.

Für die Massenpunktgruppe als **Ganzes**, an dem das System der inneren Kräfte schon für sich im Gleichgewicht ist, folgt demnach:

**$\alpha$ . Die äußeren Kräfte  $P$  und die Trägheitswiderstände  $T$  aller Punkte der Gruppe sind im Gleichgewicht.**

Gleichbedeutend hiermit ist die Aussage:

**$\beta$ . Die resultierende Einzelkraft  $E$  und das resultierende Moment  $\dot{M}$  ( $E$ ) der Beschleunigungs-(Effektiv-)Kräfte stimmen für jeden Bezugspunkt überein mit der resultierenden Einzelkraft  $P$  und dem resultierenden Moment  $\dot{M}$  der äußeren angreifenden Kräfte.**

Die analytische Fassung des d'Alembertschen Prinzips lautet demnach:

$$E_x = \sum m_i e_{xi} = m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = \sum P_{xi} = P_x \text{ usw.}$$

$$(\text{oder: } E = \sum m_i e_i = P)$$

und

$$M_x(E) = \sum m_i (y_i e_{zi} - z_i e_{yi}) = \sum m_i \left( y_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} - z_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} \right) = M_x(P) \\ = \sum (y_i P_{zi} - z_i P_{yi}) \text{ usw. (vgl. S. 174; Links-Koordinatensystem)}$$

$$[\text{oder: } \dot{M}(E) = \sum \dot{M}(m_i e_i) = \dot{M}].$$

2. Liegt eine **erzwungene** (unfreie) Bewegung vor, so sind die **Zwangskräfte** (Bahnwiderstände) den äußeren Kräften hinzuzurechnen. (Vgl. unfreie Bewegung, S. 210.)

Also analytisch

$$E_x = P_x + Q_x \text{ usw. oder } E = P + \rightarrow Q$$

und

$$M_x(E) = M_x(P) + M_x(Q) \text{ usw. oder } \dot{M}(E) = \dot{M}(P) + \rightarrow \dot{M}(Q).$$

3. Durch Anwendung des d'Alembertschen Prinzips wird jede Aufgabe der Dynamik in eine solche der Statik verwandelt.

Das Prinzip gilt für **starre und nichtstarre** Punktgruppen, da es sich nur auf das ganz allgemeingültige Wechselwirkungsgesetz stützt.

### **b. Satz vom Impuls und vom Drall. Verallgemeinertes Trägheitsgesetz.**

1. Setzt man die Impulse  $K_i = m_i v_i$  der einzelnen Punkte der Gruppe wie Kräfte an einem beliebigen Bezugspunkt 0 zusammen, so

erhält man im allgemeinen eine **Impulsschraube**, bestehend aus dem **Einzelpuls** — Impuls schlechtweg —  $\mathbf{K}$  und dem **Impulsmoment** oder **Drall**  $\mathbf{D}$  des Punkthaufens.

Die für jeden einzelnen Punkt geltenden Gleichungen

$$\vec{d} K_i = \vec{d} (m_i v_i) = E_i dt = P_i dt + S_i . dt$$

und

$$\vec{d} D_i = \vec{d} \dot{M} (m_i v_i) = \dot{M} (E_i) . dt = \dot{M} (P_i) dt + \dot{M} (S_i) dt$$

(s. S. 201 u. 202) liefern bei Summierung über den ganzen Punkthaufen, da die inneren Kräfte ein Gleichgewichtssystem bilden

$$\vec{d} \mathbf{K} = \mathbf{P} . dt \text{ oder } d\mathbf{K}_x = \mathbf{P}_x . dt \text{ usw.}$$

$$\vec{d} \mathbf{D} = \dot{\mathbf{M}} . dt \text{ oder } d\mathbf{D}_x = \mathbf{M}_x . dt \text{ usw.}$$

d. h.:

Die geometrische Aenderung des Impulses der ganzen Massenpunktgruppe ist gleich dem Antriebe der resultierenden äußeren Kraft. Die geometrische Aenderung des Dralls der ganzen Massenpunktgruppe ist gleich dem Antriebe des resultierenden Momentes der äußeren Kräfte. (Gültig für starre und nichtstarre Punkthaufen.)

2. Bei der **kräftefreien** Bewegung ( $\mathbf{P} = 0$ ,  $\dot{\mathbf{M}} = 0$ ) bleiben **Impuls und Drall** der Größe und Richtung nach **konstant**. (Verallgemeinertes Trägheitsgesetz.)

3. Der Trägheitswiderstand des ganzen Punkthaufens setzt sich im allgemeinen aus einer Einzelkraft und einem Kräftepaar zusammen, die bezüglich gleich groß, aber entgegengesetzt gerichtet sind den zeitlichen Aenderungen des Impulses und des Dralls

$$\mathbf{T} = - \frac{\vec{d} \mathbf{K}}{dt}; \quad \dot{\mathbf{M}} (\mathbf{T}) = - \frac{\vec{d} \mathbf{D}}{dt}.$$

### c. Schwerpunkts-Sätze.

1. Aus den Gleichungen für die Schwerpunktslage der Punktgruppe mit der Gesamtmasse  $m$  (s. S. 188):

$$m . x_s = \sum m_i x_i \text{ usw. (oder: } m . \rho_s = \sum m_i . \rho_i)$$

folgt durch Differentiation nach der Zeit für die Schwerpunkts-**geschwindigkeit**:

$$\alpha) \quad m . v_{xs} = \sum m_i . v_{xi} \text{ usw. (oder: } m . v_s = \sum m_i v_i),$$

und durch abermalige Differentiation für die Schwerpunkts-**beschleunigung**.

$$\beta) \quad m . e_{xs} = \sum m_i . e_{xi} \text{ usw. (oder: } m . e_s = \sum m_i e_i),$$

mithin nach dem d'Alembertschen Prinzip (s. S. 215).

$$\gamma) \quad m . e_{xs} = \mathbf{P}_x \text{ usw. (oder: } m . e_s = \mathbf{P})$$

d. h.:

**Denkt man die Gesamtmasse der Punktgruppe in ihrem Schwerpunkt vereinigt**, so ist jederzeit dessen Impuls gleich dem

(Einzel-)Impuls des ganzen Punkthaufens, dessen Beschleunigungskraft gleich der (Einzel-) Beschleunigungskraft des ganzen Punkthaufens; **die Bewegung des Schwerpunktes erfolgt so, als ob alle äußeren Kräfte parallel zu ihren wirklichen Lagen an ihm angriffen (Prinzip der Bewegung des Schwerpunktes).**

Ist  $\mathbf{P} = 0$ , d. h. reduziert sich das System der äußeren Kräfte auf ein Kräftepaar (oder auf null), so bewegt sich der Schwerpunkt geradlinig und gleichförmig oder bleibt in Ruhe. (Prinzip der **Erhaltung** der Schwerpunktsbewegung). (Gültig für starre **und nichtstarre** Punktgruppen).

2. Die Bewegung der **starr**en Punktgruppe kann (nach S. 155) aufgefasst werden als eine **Schiebungsbewegung** — gleichartig mit der Bewegung des Schwerpunktes — **kombiniert mit Drehungen** um fortwährend wechselnde Schwerpunktsachsen.

In jedem Augenblick gilt für die Relativgeschwindigkeit und die Relativbeschleunigung des  $i^{\text{ten}}$  Massenpunktes bezogen auf den Schwerpunkt (s. S. 153)

$$v_i' = v_i \rightarrow v_s \quad \text{und} \quad e_i' = e_i \rightarrow e_s.$$

Da die Resultierenden der Zusatzimpulse  $m_i v_s$  und der Zusatzkräfte  $m_i e_s$  durch den Schwerpunkt gehen, so folgt durch Anwendung des allgemeinen Momentensatzes (s. S. 172) für den Schwerpunkt als Bezugspunkt:

$$\alpha) \quad \mathbf{D}' = \sum \dot{M}(m_i v_i') = \sum \dot{M}(m_i v_i) = \mathbf{D}$$

$$\beta) \quad \dot{\mathbf{M}}(\mathbf{E}') = \sum \dot{M}(m_i e_i') = \sum \dot{M}(m_i e_i) = \dot{\mathbf{M}}(\mathbf{E})$$

mithin nach d'Alembert (s. S. 215):

$$\gamma) \quad \dot{\mathbf{M}}(\mathbf{E}') = \dot{\mathbf{M}}$$

d. h.:

In bezug auf den Schwerpunkt ist der relative Drall gleich dem absoluten Drall, das Moment der relativen Beschleunigungskräfte gleich dem Moment der absoluten Beschleunigungskräfte; **die Drehung um den Schwerpunkt erfolgt so, als ob dieser fest wäre.**

3. **Schiebung und Drehung** im betrachteten Sinne sind also völlig **unabhängig voneinander**, erstere hängt **nur** von der resultierenden **Einzelkraft P**, letztere **nur** vom resultierenden **Moment  $\dot{\mathbf{M}}$**  der äußeren gegebenen Kräfte ab.

Die **allgemeine Bewegung** des starren Körpers kann hiernach dynamisch zurückgeführt werden auf die **Bewegung eines Massenpunktes** (nämlich des mit der Gesamtmasse des Körpers behafteten Schwerpunktes) und auf die **Bewegung des Körpers um einen festen Punkt** (Kreiselbewegung, s. S. 226).

#### d. Satz von der lebendigen Kraft und Arbeit.

1. An jedem Satz Punkt der Gruppe gilt für ein unendlich kleines Zeitteilchen:

$$\begin{aligned} d\left(m_i \frac{v_i^2}{2}\right) &= E_i \cdot v_i \cos(E_i, v_i) dt \\ &= P_i v_i \cdot \cos(P_i, v_i) dt + S_i \cdot v_i \cdot \cos(S_i, v_i) dt. \end{aligned}$$

Ist die Punktgruppe **starr**, so ist die Gesamtarbeit aller inneren Kräfte gleich null (s. S. 175), und es folgt bei Summierung über den ganzen Punkthaufen:

$$\begin{aligned} d\mathbf{L} &= d\left(\sum m_i \frac{v_i^2}{2}\right) = \sum E_i v_i \cos(E_i v_i) dt \\ &= \sum P_i v_i \cdot \cos(P_i, v_i) dt = d\mathbf{A} \end{aligned}$$

und entsprechendes für endliche Bewegungen bzw. Zeiträume. Also:

**Die Aenderung der lebendigen Kraft der ganzen starren Massenpunktgruppe ist gleich der von sämtlichen äußeren Kräften (einschl. der Bahnwiderstände) geleisteten Arbeit.**

2. Bewegt sich der Punkthaufen in einem Kraftfelde, das eine **Potentialfunktion**  $U$  hat (s. S. 199), so gilt, wenn auch die Arbeit der Bahnwiderstände null ist:

$$d\mathbf{A} = \sum dA_i = \sum dU_i = d(\sum U_i) = d\mathbf{U},$$

wo  $\mathbf{U} = \sum U_i$  das Potential der ganzen Gruppe im Kraftfelde bedeutet.

Es gilt demnach auch wie beim einzelnen Massenpunkt das **Erhaltungsgesetz**:

$$\mathbf{L} - \mathbf{L}_0 = \mathbf{U} - \mathbf{U}_0$$

oder auch:

$$\mathbf{L} + \mathbf{H} = \text{konst.}$$

( $\mathbf{H} = -\mathbf{U} =$  potentielle Energie der Punktgruppe).

3. Ist der Punkthaufen **nicht starr**, so müssen die **Arbeiten der inneren Kräfte mit berücksichtigt werden**. Es gilt das Erhaltungsgesetz, wenn auch die inneren Kräfte eine Potentialfunktion haben:

$$\mathbf{L} - \mathbf{L}_0 = \mathbf{U}^{(a)} - \mathbf{U}_0^{(a)} + \mathbf{U}^{(i)} - \mathbf{U}_0^{(i)}$$

bzw.

$$\mathbf{L} + \mathbf{H}^{(a)} + \mathbf{H}^{(i)} = \text{konst.}$$

Gruppe elektrisch geladener Punkte, auf die von außen noch weitere elektrische Kräfte ausgeübt werden, oder unser Planetensystem unter der Einwirkung äußerer Himmelskörper.

### e. Starrer Punkthaufen (Körper). Arbeit der äußeren Kräfte. Lebendige Kraft. Impuls und Drall.

Die Bewegung der starren Punktgruppe kann in jedem Augenblick und für einen beliebigen Bezugspunkt (Nullpunkt eines rechtwinkligen Koordinatensystems) aufgefaßt werden als eine Schiebung mit der Geschwindigkeit  $u$  des Bezugspunktes und eine Drehung  $\omega$  um eine Achse durch den Bezugspunkt. Schiebungsrichtung und Drehachse fallen im allgemeinen nicht zusammen.

Es gilt für die Geschwindigkeit des  $i$ ten Punktes der Gruppe (vgl. Drehbewegung 2, S. 210).

$$v_i = u + \rightarrow r_i \omega = u + \rightarrow V(\omega, \rho_i) \text{ und } v_{xi} = u_x + \omega_y \cdot z_i - \omega_z \cdot y_i \text{ usw.}$$

Damit erhält man

$$1. \text{ Arbeit der äußeren Kräfte } [\sum P_i \cos(P_i, v_i) v_i dt]$$

$$\begin{aligned} d\mathbf{A} &= \mathbf{P} \cdot \cos(\mathbf{P}, u) \cdot u dt + \dot{\mathbf{M}} \cdot \cos(\dot{\mathbf{M}}, \omega) \cdot \omega dt \\ &= (\mathbf{P}_x u_x + \mathbf{P}_y u_y + \mathbf{P}_z u_z + \mathbf{M}_x \omega_x + \mathbf{M}_y \omega_y + \mathbf{M}_z \omega_z) dt, \end{aligned}$$

wo

$$\mathbf{P}_x = \Sigma P_{xi} \text{ usw.}; \quad \mathbf{M}_x = \Sigma (y_i P_{zi} - z_i P_{yi}) \text{ usw. (s. S. 174).}$$

## 2. Lebendige Kraft $(\Sigma m_i \frac{v_i^2}{2})$ .

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \frac{1}{2} m \cdot (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2) \\ &+ \frac{1}{2} \cdot (J_x \omega_x^2 + J_y \omega_y^2 + J_z \omega_z^2 - 2J_{yz} \omega_y \omega_z - 2J_{zx} \omega_z \omega_x - 2J_{xy} \omega_x \omega_y) \\ &+ m [u_x (\omega_y z_s - \omega_z y_s) + u_y (\omega_z x_s - \omega_x z_s) + u_z (\omega_x y_s - \omega_y x_s)] \\ &= m \frac{u^2}{2} + J \cdot \frac{\omega^2}{2} + m \cdot [\dots] \end{aligned}$$

( $x_s, y_s, z_s$  = Schwerpunktskoordinaten;  $J_x, J_y, J_z, J$  = Trägheitsmomente für die Koordinatenachse bezw. für die Drehachse;  $J_{yz}, J_{zx}, J_{xy}$  = Zentrifugalmomente; s. S. 231.)

Bei reiner **Schiebung** ist  $\mathbf{L} = m \cdot \frac{u^2}{2}$ , bei reiner **Drehung**

$$\mathbf{L} = J \frac{\omega^2}{2}. \quad (\text{Vgl. Drehbewegung 1 } \epsilon, \text{ S. 210.})$$

Für den **Schwerpunkt** als Bezugspunkt ( $u = v_s$ ) gilt

$$\mathbf{L} = m \cdot \frac{v_s^2}{2} + J \cdot \frac{\omega^2}{2}.$$

Fallen bei reiner **Drehung** die Koordinatenachsen mit den Hauptträgheitsachsen für den Bezugspunkt zusammen, so ist

$$\mathbf{L} = \frac{1}{2} \cdot (J_x \cdot \omega_x^2 + J_y \cdot \omega_y^2 + J_z \cdot \omega_z^2).$$

## 3. Impuls $(\vec{\Sigma} m_i v_i)$ .

$$\mathbf{K} = m \cdot u + \rightarrow m \cdot r_s \omega = m u + \rightarrow m \cdot V(\omega, \rho_s).^*)$$

( $r_s$  und  $\rho_s$  = Abstände des Schwerpunktes von der Drehachse und vom Nullpunkt.)

$$K_x = m u_x + m \cdot (\omega_y z_s - \omega_z y_s) \text{ usw.}$$

## 4. Drall $(\vec{\Sigma} \dot{M}(m_i v_i))$ .

$$\dot{D} = V(\rho_s, m u) + \rightarrow J \cdot \omega + \rightarrow V[\omega, \vec{\Sigma} V(h_i, m_i r_i)].^*)$$

( $h_i$  = Abstand des Punktes  $i$  von einer Ebene durch den Nullpunkt senkrecht zur Drehachse,  $\vec{\Sigma} V(h_i, m_i r_i)$  = vektorielles Zentrifugalmoment = Momentvektor der Zentrifugalkraft für  $\omega = 1$ , s. S. 222.)

$$D_x = m \cdot (y_s \cdot u_z - z_s \cdot u_y) + J_x \cdot \omega_x - J_{yx} \cdot \omega_y - J_{zx} \cdot \omega_z \text{ usw.}$$

(vgl. Drehbewegung 2, S. 210.)

Reine **Drehung** (um feste Achse oder festen Punkt): Die Glieder mit  $u$  fallen fort; der **Drall für die Drehachse** wird:

$$\bar{D} = J \cdot \omega \quad (\text{vgl. Drehbewegung 2, S. 210.})$$

\*) Begriff des Vektorproduktes s. Momente 6 S. 171.

fallen die **Hauptträgheitsachsen** für den Bezugspunkt mit den Koordinatenachsen zusammen, so werden die **Drallkomponenten**:

$$D_x = J_x \cdot \omega_x, \quad D_y = J_y \cdot \omega_y, \quad D_z = J_z \cdot \omega_z.$$

Drall und Drehvektor fallen **nur** zusammen, wenn einer dieser beiden Vektoren in eine Hauptträgheitsachse fällt.

### 5. Festes und bewegliches Achsenkreuz.

Trägheits- und Zentrifugalmomente sind **nur dann** als konstante, lediglich von Form und Massenverteilung des Punkthaufens (starrten Körpers) abhängige Koeffizienten, für die die einfache geometrische Veranschaulichung durch das Trägheitsellipsoid gilt, anzusehen, wenn man sich auf ein **im Körper festes**, alle Bewegungen desselben mitmachendes **Achsenkreuz** bezieht (Nullpunkt = Bezugspunkt, Achsen fast immer mit den Hauptträgheitsachsen für den Bezugspunkt zusammenfallend).

In bezug auf ein **im Raume festes Achsenkreuz** ändern  $J_x$  usw. von Augenblick zu Augenblick ihre Werte.

## f. Lagrangesche Gleichungen.

1. Wendet man auf die Gleichgewichtsaussage des d'Alembertschen Prinzips den Satz der virtuellen Verschiebungen im engeren Sinne (2β, S. 176) an, so folgt

$$\Sigma \left[ \left( P_x - m \frac{d^2 x}{dt^2} \right) \delta x + \left( P_y - m \frac{d^2 y}{dt^2} \right) \delta y + \left( P_z - m \frac{d^2 z}{dt^2} \right) \delta z \right] = 0.$$

Voraussetzung ist, daß die inneren Kräfte  $S$  bei den Verschiebungen  $\delta x$  usw. keine Arbeit leisten, daß keine arbeitverzehrenden Reibungen auftreten, daß die Verschiebungen  $\delta x$  usw. mit den etwa vorliegenden Bedingungen verträglich sind.

2. Die Lage des gegebenen Systems (etwa eine Reihe gelenkig verbundener starrer Körper) sei durch unabhängige Bestimmungsstücke  $q_1, q_2$  usw. (**verallgemeinerte Koordinaten**, die nicht durch irgendwelche Bedingungsbeziehungen miteinander verbunden sind; z. B. beim Kreisel, s. S. 226, die drei Eulerschen Winkel, beim Kurbeltrieb der Kurbeldrehwinkel usw.) festgelegt.

Es gilt dann für jede Koordinate  $q_i$  eine Gleichung von der Form:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = F_i.$$

Darin ist  $L$  die lebendige Kraft des Systems,  $\dot{q}_i = \frac{dq_i}{dt}$ ,  $F_i$  die **auf die Koordinate  $q_i$  reduzierte äußere Kraft**, d. h. die bei der Aenderung  $\delta q_i$  geleistete Arbeit aller äußeren Kräfte dividiert durch  $\delta q_i$ .

## II. Bewegung des starren Körpers unter dem Einfluß von Kräften.

Die Sätze über die Bewegung der Massenpunktgruppe gelten sinngemäß auch für die Bewegung des kontinuierlich zusammenhängenden starren Körpers. In den Formeln ist überall  $m_i$  durch  $dm$  und  $\Sigma$  durch  $\int$  zu ersetzen.

### a. Drehung des Körpers um eine feste Achse.

**1. Bewegungsgleichungen.** Aus den für den einzelnen Massenpunkt geltenden Formeln (S. 209) folgt:  
für das resultierende **beschleunigende** (antreibende) **Moment** in bezug auf die Drehachse

$$M = \varepsilon \int r^2 dm = J \cdot \varepsilon = J \cdot \frac{d\omega}{dt},$$

für die **Arbeit**

$$A = \int M \cdot d\varphi = \int M \cdot \omega \cdot dt,$$

für die **lebendige Kraft**

$$L = \frac{\omega^2}{2} \cdot \int r^2 dm = J \cdot \frac{\omega^2}{2},$$

demnach

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi} M d\varphi = \int_0^t M \cdot \omega dt = \frac{J}{2} (\omega^2 - \omega_0^2),$$

für die augenblickliche **Leistung**

$$N = M \cdot \omega = M \cdot \frac{2\pi n}{60} \text{ in mkg/sk}$$

oder in PS

$$N = M \cdot \frac{2\pi n}{60 \cdot 75} = P \cdot r \cdot \frac{2\pi n}{4500}$$

$$M = P \cdot r = \frac{60 \cdot 75}{2\pi} \cdot \frac{N}{n} = 716,2 \frac{N}{n},$$

wo noch  $P$  die Umfangskraft in kg und  $r$  deren Hebelarm in m bezeichnet.

$\frac{N}{n}$  heißt **Leistungs-** oder **Effektquotient**.

**2. Beschleunigungsarbeit.** Die Arbeit, die erforderlich ist, um den Körper aus dem Ruhezustand auf seine normale Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  (Umdrehungszahl  $n$ ) zu beschleunigen (den Trägheitswiderstand zu überwinden), ist nach dem Prinzip der lebendigen Kraft

$$A' = L = J \cdot \frac{\omega^2}{2} \quad \text{oder mit} \quad \omega = \frac{2\pi n}{60} = \frac{\pi n}{30}$$

$$A' = \frac{\pi^2}{1800} \cdot J \cdot n^2 = 0,00548 \cdot J \cdot n^2.$$

Führt man den Trägheitshalbmesser  $k$  (s. S. 231) ein, so folgt

$$A' = (mk^2) \cdot \frac{\omega^2}{2}.$$

In der technischen Praxis wird an Stelle des Ausdrucks  $mk^2 = J$  vielfach das **Schwungmoment**  $G D^2$  benutzt, wo  $G = mg$  ( $g = 9,81 \text{ m/sk}^2$ )

das Gewicht des Körpers und  $D = 2k$  sein Trägheitsdurchmesser ist; demnach

$$J = \frac{GD^2}{4g}; \quad GD^2 = 4g \cdot J = 4\gamma \cdot J'.$$

$\gamma$  = spezifisches Gewicht des Körpermaterials in kg/cbm,  
 $J'$  = **geometrisches** Trägheitsmoment des Körpers in m<sup>5</sup>.

Für das **Schwungmoment** ist die Einheit **kg · m<sup>2</sup>** üblich, für größere Werte t. m<sup>2</sup>.

Damit wird die Beschleunigungsarbeit

$$A' = \frac{\pi^2}{1800} \cdot \frac{GD^2}{4g} \cdot n^2 = 0,00014 \cdot (GD^2) \cdot n^2.$$

**3. Reduktion der Massen.** Unter der auf den Halbmesser  $l$  und die Winkelgeschwindigkeit  $\omega_0$  (Umdrehungszahl  $n_0$ ) **reduzierten Masse** eines starren Körpers versteht man die Masse eines am Halbmesser  $l$  rotierenden Punktes, der bis zur Erreichung der Winkelgeschwindigkeit  $\omega_0$  (Umlaufzahl  $n_0$ ) dieselbe Beschleunigungsarbeit verbraucht wie der Körper bis zur Erreichung seiner normalen Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  (Umlaufzahl  $n$ ); d. h.

$$(m_{\text{red}} l^2) \cdot \frac{\omega_0^2}{2} = J \cdot \frac{\omega^2}{2}$$

$$m_{\text{red}} = \frac{J}{l^2} \cdot \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 = \frac{J}{l^2} \cdot \left(\frac{n}{n_0}\right)^2 = \frac{GD^2}{4gl^2} \cdot \left(\frac{n}{n_0}\right)^2.$$

(Anwendung: Reduktion der Motormassen, Vorgelege usw. bei Kranen, Winden usw. auf die Seilmittellinie zur Bestimmung der Massendrücke beim Anfahren und Bremsen.)

$$m_{\text{red}} = \frac{J}{l^2} = \frac{GD^2}{4gl^2} \quad \text{heißt die auf den Halbmesser } l$$

reduzierte Masse.

#### 4. Zentrifugalkräfte am rotierenden starren Körper.

a) Bei der Zusammensetzung der Zentrifugalkräfte aller Massenteilchen an dem beliebigen Bezugspunkt  $O = \text{Nullpunkt des im Körper festen, mit ihm rotierenden}$  (vgl. S. 220) **Achsenkreuzes**  $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}\mathfrak{Z}$  ( $\mathfrak{Z}$ -Achse = Drehachse) erhält man im allgemeinen eine resultierende Einzelkraft  $\mathbf{C}$  und ein resultierendes Moment  $\dot{M}(\mathbf{C})$ ; es gilt (s. Abb. 82):

$$\mathbf{C}_x = +\omega^2 \int x dm = +m \cdot x_s \omega^2; \quad \mathbf{C}_y = +\omega^2 \int y dm = +m \cdot y_s \omega; \quad \mathbf{C}_z = 0$$

( $x_s, y_s, z_s = \text{Schwerpunktskoordinaten}$ )      und:

$$M_x(\mathbf{C}) = -\omega^2 \int y z dm = -\omega^2 \cdot J_{yz};$$

$$M_y(\mathbf{C}) = +\omega^2 \int x z dm = +\omega^2 \cdot J_{xz}; \quad M_z(\mathbf{C}) = 0.$$

Es folgt noch mit  $r_s = \text{Abstand des Schwerpunktes von der Drehachse}$ :

$$\mathbf{C} = m \cdot r_s \cdot \omega^2; \quad \dot{M}(\mathbf{C}) = \omega^2 \cdot \sqrt{J_{xz}^2 + J_{yz}^2}.$$

$\mathbf{C}$  ist parallel dem vom Schwerpunkt auf die Drehachse gefällten Lot und berechnet sich so, als ob die Gesamtmasse  $m$  im Schwerpunkt vereinigt wäre, greift aber im allgemeinen **nicht** im Schwerpunkt an.

b) Liegt der Schwerpunkt in der Drehachse, so wird  $C=0$ , während im allgemeinen  $\bar{M}(C) \neq 0$  ist.

Erst wenn auch  $J_{x_3} = J_{y_3} = 0$ , d. h. wenn die Drehachse eine Hauptträgheitsachse ist (s. S. 234), wird auch  $\bar{M}(C) = 0$ , der Körper ist in bezug auf die  $\beta$ -Achse **vollständig ausbalanciert**. ( $x_s = y_s = 0$ : statische Ausbalancierung,  $J_{x_3} = J_{y_3} = 0$ : dynamische Ausbalancierung.)

**Sonderfälle:**

1. Sind die  $x\beta$ - und die  $xy$ -Ebene Symmetrieebenen des um die  $\beta$ -Achse drehenden starren Körpers, so folgt als resultierende Zentrifugalkraft:  $C = m \bar{x}_s \cdot \omega^2$ . Der Angriffspunkt liegt nach dem Satz vom Mittelpunkt der Parallelkräfte (s. S. 187) auf der  $x$ -Achse im Abstände:  $l = \bar{J}_x / m \cdot \bar{x}_s$ , wo  $\bar{J}_x = \int x^2 dm$  das Trägheitsmoment für die  $y\beta$ -Ebene ist. Für einen sich in der Richtung der  $x$ -Achse erstreckenden stabförmigen Körper von geringen Querschnittsabmessungen darf statt dessen gesetzt werden:  $l = J / m \cdot \bar{x}_s$  ( $J$  = polares Trägheitsmoment für die Drehachse); **Angriffspunkt der Zentrifugalkraft = Schwingungsmittelpunkt** (vgl. S. 224) = **Stoßpunkt**;  $l$  ist durch einen Schwingungsversuch leicht zu bestimmen.

2. Der Körper habe eine durch die Drehachse gehende Symmetrieebene. Ein Schnitt winkelrecht zur Drehachse habe den Flächeninhalt  $F_x$  und den Schwerpunktsabstand  $s_x$  von der Drehachse. Trägt man in der aus Abb. 83 ersichtlichen Weise die Produkte  $F_x \cdot s_x = \eta$  als Ordinaten einer Kurve auf, so erhält man das **Diagramm der Zentrifugalkräfte**. Durch den Schwerpunkt  $\Sigma$  der von der Kurve und der Achse eingeschlossenen Fläche geht die Zentrifugalkraft des Körpers.

(Anwendung zur Bestimmung der Zentrifugalkräfte der Regulatorstangen. Das Diagramm wird bei unveränderlichem Querschnitt ein Trapez; s. das mittlere Stück der Abb. 83.

Abb. 82.

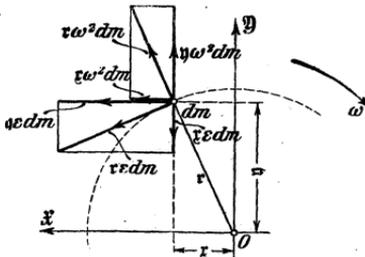
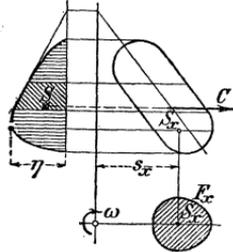


Abb. 83.



**5. Widerstände der Achslagerung. Freie Achsen.**

a) Die Drehachse ( $\beta$ -Achse des rechtwinkligen mit dem Körper rotierenden Achsenkreuzes) sei im Nullpunkt und im Punkte  $O'$  (Abstand  $OO' = a$ ) gelagert. Die Lagerwiderstände seien  $A$  und  $B$ , die Resultierende der äußeren angreifenden Kräfte  $P$ , ihr Moment  $\bar{M}$ .

Die **Trägheitswiderstände** (vgl. Abb. 83) setzen sich zusammen aus den **Zentrifugalkräften**  $r\omega^2 dm$  (Komponenten und Momente s. unter 4) und den der Geschwindigkeitszunahme entgegenwirkenden **Umfangskräften**  $r \frac{d\omega}{dt} \cdot dm = r \cdot \epsilon dm$ , mit den Komponenten und Momenten:

	$\mathcal{X}$	$\mathcal{Y}$	$\mathcal{Z}$
Komponenten	$+\int \eta \varepsilon dm = +m \cdot \eta_s \varepsilon$	$-\int \xi \varepsilon dm = -m \xi_s \varepsilon$	0
Momente	$+\int \xi \zeta \varepsilon dm = +J_{\mathcal{X}\zeta} \cdot \varepsilon$	$+\int \eta \zeta \varepsilon dm = +J_{\mathcal{Y}\zeta} \cdot \varepsilon$	$-\int r^2 \varepsilon dm = -J_{\mathcal{Z}} \cdot \varepsilon$

Zur Bestimmung der Lagerwiderstände hat man also nach d'Alembert (s. S. 215):

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_x + A_x + B_x &+ m \cdot \xi_s \omega^2 + m \cdot \eta_s \varepsilon = 0 \\ \mathbf{P}_y + A_y + B_y &+ m \cdot \eta_s \omega^2 - m \cdot \xi_s \varepsilon = 0 \\ \mathbf{P}_z + A_z + B_z &= 0 \\ \mathbf{M}_x &- B_y \cdot a - J_{\mathcal{Y}\zeta} \cdot \omega^2 + J_{\mathcal{X}\zeta} \cdot \varepsilon = 0 \\ \mathbf{M}_y &+ B_x \cdot a + J_{\mathcal{X}\zeta} \cdot \omega^2 + J_{\mathcal{Y}\zeta} \cdot \varepsilon = 0 \\ \mathbf{M}_z &- J_{\mathcal{Z}} \cdot \varepsilon = 0 \end{aligned}$$

$A_i$  und  $B_i$  sind einzeln nur mit Hinzuziehung der Elastizitätstheorie oder unter besonderen Bedingungen bestimmbar; ist z. B. in  $O'$  ein Halslager (nur Führung), in  $O$  ein Spurlager (Führung und Stützung), so ist  $B_z = 0$ ,  $A_z = -P_z$ .

Die Lagerwiderstände  $A$  und  $B$  rotieren mit dem Körper um die  $\mathcal{Z}$ -Achse.

b) Die  $\mathcal{Z}$ -Achse heißt eine **freie Achse**, wenn die winkelrecht zur Drehachse stehenden Seitenkräfte  $A_x = A_y = B_x = B_y = 0$  werden;

dies ist z. B. der Fall, wenn äußere Kräfte fehlen ( $\mathbf{P}_x = \mathbf{P}_y = \mathbf{P}_z = \mathbf{M}_x = \mathbf{M}_y = \mathbf{M}_z = 0$ ), der Schwerpunkt in der Drehachse liegt ( $\xi_s = \eta_s = 0$ ) und die Drehachse eine Hauptträgheitsachse ist ( $J_{\mathcal{X}\zeta} = J_{\mathcal{Y}\zeta} = 0$ ); oder wenn die beiden letzten Bedingungen erfüllt sind, als äußere Kraft nur die Schwerkraft wirkt und die  $\mathcal{Z}$ -Achse vertikal steht.

**6. Physisches Pendel.** Es gilt mit den Bezeichnungen der Abb. 84.

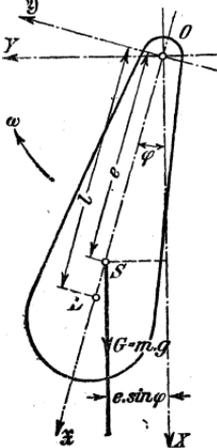
$$J \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = J \cdot \varepsilon = -m \cdot g e \cdot \sin \varphi,$$

d. h. das Pendel schwingt genau so wie ein mathematisches Pendel (s. S. 213) von der Länge

$$(\text{reduzierte Pendellänge}) \quad l = \frac{J}{m \cdot e}.$$

Trägt man auf der Verbindungslinie Aufhängepunkt — Schwerpunkt vom ersteren aus die Strecke  $l$  ab, so heißt der Endpunkt der Schwingungsmittelpunkt des Pendels, eine durch ihn zur Aufhängungs- (Dreh-) Achse parallele Gerade die Schwingungsachse. Vertauscht man Aufhängungsachse und Schwingungsachse, so bleibt die Schwingungszeit dieselbe.

Abb. 84.



Für die **Widerstände des Aufhängepunktes** gelten bei symmetrischem Pendel ( $\eta_s = 0$ ) folgende Ansätze in bezug auf ein im Körper festes d. h. mit ihm schwingendes Achsenkreuz  $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}\mathfrak{Z}$ :

in Richtung der  $\mathfrak{X}$ -Achse:  $A_x = -mg \cdot \cos \varphi - m \cdot e \cdot \omega^2$

„ „ „  $\mathfrak{Y}$ - „ :  $A_y = +mg \cdot \sin \varphi + m \cdot e \cdot \varepsilon$ ,

darin ist einzusetzen:

$$\varepsilon = -\frac{mge}{J} \cdot \sin \varphi \quad (\text{aus der Bewegungsgleichung}) \text{ und}$$

$$\omega^2 = +\frac{2mge}{J} \cdot (\cos \varphi - \cos \alpha)$$

(aus dem Prinzip der lebendigen Kraft;  $\alpha =$  größter Ausschlagwinkel).

**Glockenstühle.** Ist  $G$  das Gewicht einer in gewöhnlicher Weise aufgehängten Glocke nebst Klöppel, so ist nach Köpcke der beim Läuten auftretende

größte wagerechte Schub  $H_{\max} = 1,56 G$  bei  $50^\circ$  Ausschlag und

größte lotrechte Druck  $V_{\max} = 3,11 G$  bei  $0^\circ$  Ausschlag.

Bei  $H_{\max}$  ist  $V = \sim G$ .

Vorausgesetzt ist ein größter Ausschlag von  $110^\circ$ .

Man benützt das physische Pendel zur **Bestimmung der Trägheitsmomente** von unregelmäßig zusammengesetzten Körpern oder Querschnitten. Ist  $n$  die Anzahl der einfachen Schwingungen/min,  $G$  in kg das Gewicht und  $e$  in cm die Entfernung zwischen Schwerpunkt und Drehachse, so ist das auf die Drehachse bezogene Trägheitsmoment des Körpers oder Querschnittes in  $\text{cm} \cdot \text{kg} \cdot \text{sk}^2$

$$J = \frac{60^2}{\pi^2} \frac{Ge}{n^2} = 364,76 \frac{Ge}{n^2}$$

und das Trägheitsmoment für die parallele Schwerachse

$$J_s = 364,76 \frac{Ge}{n^2} - \frac{G}{g} e^2$$

( $g = 981 \text{ cm/sk}^2$ ).

### 7. Drehung mit gleichbleibender Winkelgeschwindigkeit.

a) Der **Drall** für den Nullpunkt des im Körper festen  $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}\mathfrak{Z}$ -Kreuzes ist bestimmt durch (s. S. 219)

$$\mathbf{D}_x = -J_{3x} \cdot \omega, \quad \mathbf{D}_y = -J_{3y} \cdot \omega, \quad \mathbf{D}_z = J_3 \cdot \omega.$$

Er ist **im Körper** der Größe und Richtung nach konstant, rotiert mit diesem und beschreibt dabei **im festen Raum** den Mantel eines gerade abgeschnittenen Kreiskegels, dessen Achse die  $\mathfrak{Z}$ -Achse ist.

Die **Trägheitswiderstände** reduzieren sich auf die **Zentrifugalkräfte**.

b) Ist  $\xi_s = \eta_s = 0$  und die  $\mathfrak{Z}$ -Achse vertikal und sind außer der Schwerkraft weitere äußere Kräfte nicht vorhanden, so bilden die senkrecht zur Drehachse stehenden Komponenten der Lagerwiderstände  $A$  und  $B$  ein Kräftepaar. Für dessen Moment gilt nach dem Satz vom Drall:

$$\dot{M}(A, B) = \frac{d\mathbf{D}}{dt} \text{ und nach d'Alembert: } \dot{M}(A, B) + \dot{M}(C) = 0$$

folgt.

$$\frac{d\mathbf{D}}{dt} = -\dot{M}(C).$$

Die **Drehung mit gleichbleibender Winkelgeschwindigkeit um eine feste Drehachse** ist also (im Gegensatz zur Schiebung mit konstanter Geschwindigkeit) im allgemeinen **keine freie**, sondern eine **erzwungene Bewegung** (Zwangskräfte = Lagerwiderstände). Sie wird zu einer freien erst, wenn  $J_{xz} = J_{xy} = 0$ , d. h. der Drall in die Drehachse fällt, diese selbst eine Hauptträgheitsachse für den Nullpunkt ist.

### III. Drehung des starren Körpers um einen festen Punkt. Kreiselbewegung.

**1. Drehachse (Drehvektor) und Drall.** a) Die Bewegung ist in jedem Augenblick eine Drehung um eine durch den festen Punkt gehende Achse; die Achse ändert von Moment zu Moment ihre Lage zum festen Raum (in dem sie den festen Achsenkegel — Herpolhodiekegel — beschreibt) und zum Körper selbst (in dem sie den beweglichen Achsenkegel — Polhodiekegel — beschreibt); beweglicher und fester Achsenkegel rollen bei der Bewegung aufeinander ab (vgl. auch S. 155).

b) Bezeichnet man ebenso wie die Drehachse auch den Drall in jeder Lage sowohl im festen Raum ( $\mathbf{D}$ ) wie auch im Kreisel ( $\mathfrak{D}$ ), so erhält man einen festen und einen beweglichen Drallkegel; je zwei zusammengehörige Bogenelemente  $\overline{d\mathbf{D}}$  und  $\overline{d\mathfrak{D}}$  der Begrenzungskurven beider Kegelmäntel sind im allgemeinen nicht gleich groß, d. h. die beiden Drallkegel gleiten im allgemeinen während der Bewegung aufeinander [vgl. Eulersche Gleichungen (c, S. 227) und auch Drehung um eine feste Achse, S. 225].

c) Zwischen Drall, Drehvektor und Trägheitsellipsoid für den Unterstützungspunkt besteht folgende geometrische Beziehung:

Der Drall steht in jedem Augenblick senkrecht auf der Ebene, die das Trägheitsellipsoid im Schnittpunkt mit dem augenblicklichen Drehvektor berührt.

Für den bei den Anwendungen stets vorliegenden Fall des **symmetrischen Kreisels** (Trägheitsellipsoid für den Unterstützungspunkt = Rotationsellipsoid; Kreiselsschwerpunkt auf der Umdrehungsachse des Ellipsoides) liegen daher **Drall und Drehvektor stets in einer durch die Kreiselachse gehenden (Meridian-) Ebene**, s. Abb. 85.

**2. Die Eulerschen Gleichungen.** a) Die Lage des Kreisels, d. h. des mit ihm fest verbundenen  $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}\mathfrak{Z}$ -Kreuzes gegen ein im Raume festes Achsenkreuz  $XYZ$  (gemeinschaftlicher Nullpunkt = Unterstützungspunkt), wird am einfachsten durch die drei Eulerschen unsymmetrischen Winkel  $\varphi, \psi, \vartheta$  bestimmt (s. Abb. 86):

$\psi$  = Winkel zwischen  $\mathfrak{Z}\mathfrak{B}$ -Ebene und  $ZX$ -Ebene = Winkel zwischen Knotenlinie und  $Y$ -Achse (Knotenlinie = derjenige Halbstrahl der Schnittlinie von  $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}$ - und  $XY$ -Ebene, von dem aus gesehen die  $Z$ -Achse durch eine Rechtsdrehung auf kürzestem Wege in die  $\mathfrak{Z}$ -Achse gelangt).

$\vartheta$  = Winkel zwischen  $\mathfrak{Z}$ -Achse und  $Z$ -Achse = Winkel zwischen  $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}$ -Ebene und  $XY$ -Ebene.

$\varphi$  = Winkel zwischen  $\mathfrak{X}\mathfrak{B}$ -Ebene und  $\mathfrak{Z}\mathfrak{B}$ -Ebene = Winkel zwischen  $\mathfrak{Y}$ -Achse und Knotenlinie.

b) Die Winkelgeschwindigkeiten  $\varphi' = \frac{d\varphi}{dt}$ ,  $\psi' = \frac{d\psi}{dt}$ ,  $\vartheta' = \frac{d\vartheta}{dt}$  um die  $+Z$ -Achse, die  $+Z$ -Achse und die Knotenlinie stehen mit

Abb. 85.

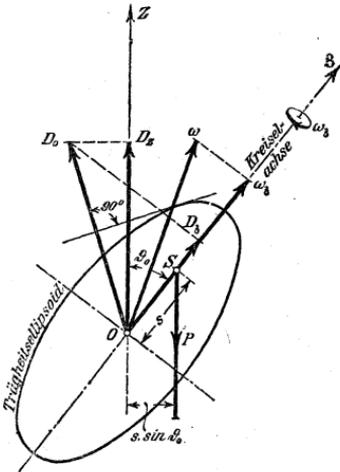
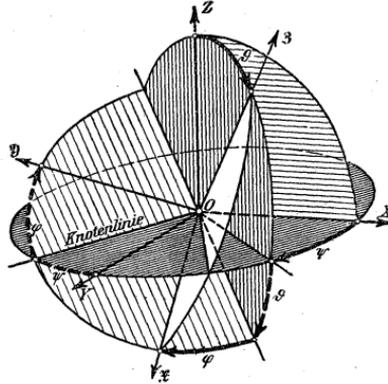


Abb. 86.



den Winkelgeschwindigkeitskomponenten für das feste und das bewegliche Achsenkreuz in folgenden Beziehungen:

$$\left. \begin{aligned} \omega_x &= +\varphi' \cdot \sin \vartheta \cdot \cos \psi - \vartheta' \cdot \sin \psi \\ \omega_y &= +\varphi' \cdot \sin \vartheta \cdot \sin \psi + \vartheta' \cdot \cos \psi \\ \omega_z &= +\varphi' \cdot \cos \vartheta + \psi' \\ \text{und} \\ \omega_x &= -\psi' \cdot \sin \vartheta \cdot \cos \varphi + \vartheta' \cdot \sin \varphi \\ \omega_y &= +\psi' \cdot \sin \vartheta \cdot \sin \varphi + \vartheta' \cdot \cos \varphi \\ \omega_z &= +\varphi' + \psi' \cdot \cos \vartheta \end{aligned} \right\}$$

Eulersche  
geometrische  
Gleichungen.

c) Für die **Dralländerung im festen Raum** gilt nach S. 216  $\frac{d\dot{\mathbf{D}}}{dt} = \dot{\mathbf{M}}$ ;  $\frac{d\dot{\mathbf{D}}}{dt}$  kann aufgefasst werden als die Geschwindigkeit des Drallendpunktes im festen Raum; die Geschwindigkeit des Drallendpunktes **im bewegten Körper** ist folglich nach dem Satz über die Relativgeschwindigkeit (s. S. 153):

$$\frac{d\dot{\mathbf{D}}}{dt} = \frac{d\dot{\mathbf{D}}}{dt} \rightarrow v \quad \text{mit} \quad v = V(\omega, \dot{\mathbf{D}}) = -V(\dot{\mathbf{D}}, \omega) \quad (\text{s. S. 210})$$

$v$  = Geschwindigkeit **des Kreiselpunktes**, der augenblicklich mit dem Drallendpunkt zusammenfällt.

Mithin:

$$\frac{\vec{d}\hat{\mathfrak{D}}}{dt} = \frac{\vec{d}\hat{\mathbf{D}}}{dt} + \mathfrak{V}(\hat{\mathbf{D}}, \omega) = \hat{\mathbf{M}} + \mathfrak{V}(\hat{\mathbf{D}}, \omega) \quad \text{oder}$$

$$\frac{d\mathfrak{D}_x}{dt} = \mathbf{M}_x + \mathbf{D}_y \omega_3 - \mathbf{D}_3 \omega_y \quad \text{usw.}$$

und wenn die  $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}\mathfrak{Z}$ -Achsen mit den Hauptträgheitsachsen zusammenfallend genommen werden:

$$\left. \begin{aligned} J_x \cdot \frac{d\omega_x}{dt} &= \mathbf{M}_x + (J_y - J_3) \cdot \omega_y \cdot \omega_3 \\ J_y \cdot \frac{d\omega_y}{dt} &= \mathbf{M}_y + (J_3 - J_x) \cdot \omega_3 \cdot \omega_x \\ J_3 \cdot \frac{d\omega_3}{dt} &= \mathbf{M}_3 + (J_x - J_y) \cdot \omega_x \cdot \omega_y \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Eulersche} \\ \text{dynamische} \\ \text{Gleichungen.} \end{array}$$

**3. Der freie symmetrische Kreisel unter der Einwirkung der Schwerkraft.** Die  $Z$ -Achse des im Raume festen Achsenkreuzes sei vertikal; das Gewicht des Kreisels sei  $P$ ; der Abstand seines Schwerpunktes vom Unterstützungspunkt  $s$ ; der **Momentvektor der Schwerkraft** also  $\hat{\mathbf{M}} = P \cdot s \cdot \sin \vartheta$ , **in die Knotenlinie fallend**; die Hauptträgheitsmomente für den Unterstützungspunkt seien  $J_x = J_y = A$ ,  $J_3 = C$ .

Für den ganzen Verlauf der Bewegung gilt:

$\alpha$ ) Die **Projektion des Dralls auf die  $Z$ -Achse (Vertikale) ist konstant.**

Denn:  $\frac{\vec{d}\hat{\mathbf{D}}}{dt} = \hat{\mathbf{M}}$ , d. h. stets wagerecht gerichtet.

$\beta$ ) Die **Projektion des Dralls auf die  $\mathfrak{Z}$ -Achse (Kreiselachse) ist konstant.**

Denn:  $\frac{\vec{d}\hat{\mathfrak{D}}}{dt} = \hat{\mathbf{M}} + \mathfrak{V}(\hat{\mathbf{D}}, \omega)$ ;  $\mathfrak{V}(\hat{\mathbf{D}}, \omega)$  steht aber **beim symmetrischen Kreisel** (s. I c, S. 226),  $\hat{\mathbf{M}}$  stets senkrecht zur Kreiselachse.

Nimmt man noch das **Prinzip der lebendigen Kraft** zu Hilfe, so erhält man als die drei Bewegungsgleichungen des Kreisels (wenn für  $t=0$  noch  $\vartheta'=0$ , d. h. die Neigung der Kreiselachse gegen die Vertikale ein Größt- oder Kleinstwert ist):

$$\mathbf{D}_z = C \cdot (\varphi' + \psi' \cdot \cos \vartheta) \cdot \cos \vartheta + A \cdot \psi' \cdot \sin^2 \vartheta$$

$$\mathbf{D}_3 = C \cdot (\varphi' + \psi' \cdot \cos \vartheta)$$

$$\frac{A}{2} (\psi'^2 \cdot \sin^2 \vartheta + \vartheta'^2) + P \cdot s \cdot \cos \vartheta = \frac{A}{2} \psi_0'^2 \cdot \sin^2 \vartheta_0 + P \cdot s \cdot \cos \vartheta_0$$

Es folgt mit der Abkürzung  $\cos \vartheta = z$ :

$$t = \int_{z_0}^z \frac{dz}{\sqrt{Z}}, \quad \psi' = \int_{z_0}^z \frac{\mathbf{D}_z - \mathbf{D}_3 \cdot z}{A(1-z^2)} \cdot \frac{dz}{\sqrt{Z}},$$

$$\varphi' = \int_{z_0}^z \frac{\mathbf{D}_3 - \mathbf{D}_z \cdot z}{A(1-z^2)} \cdot \frac{dz}{\sqrt{Z}} + \mathbf{D}_3 \left( \frac{1}{C} - \frac{1}{A} \right) \cdot t,$$

wo  $Z$  ein Ausdruck dritten Grades in  $z$  ist, dessen Koeffizienten sich aus  $A, C, P, s, D_0, D_1, z_0 = \cos \vartheta_0$  zusammensetzen ( $t, \psi, \varphi =$  elliptische Integrale von  $z$ ).

Eine nähere Untersuchung der Integralausdrücke auf Grund der Eigenschaften von  $\sqrt{Z}$  zeigt (Schwerpunkt oberhalb des Unterstützungspunktes vorausgesetzt), vgl. Abb. 87a: Die sphärische Kurve, die ein beliebiger Punkt der Kreiselachse (z. B. der Schwerpunkt) auf der zugehörigen Kugel um den Unterstützungspunkt beschreibt, verläuft innerhalb einer wagerechten Kugelzone, deren Begrenzungsparallelkreise von dem beschreibenden Punkt abwechselnd berührt werden; die Bogen zwischen zwei aufeinanderfolgenden Berührungspunkten mit dem oberen Parallelkreis sind untereinander kongruent und werden durch den Berührungspunkt mit dem unteren Parallelkreis in je zwei symmetrische Halbbogen geteilt; die Anzahl der Bogen ist je nach den Anfangsbedingungen endlich (Mindestzahl 1) oder unendlich groß. Im Sonderfall setzen sich die Bogen auf dem oberen Parallelkreis mit Spitzen auf.

**4. Reguläre und pseudo-reguläre Präzession.**

a) Unter gewissen Bedingungen (s. unten) schrumpft die Kugelzone, in der die Bewegung des Kreiselschwerpunktes stattfindet, auf einen Parallelkreis zusammen; dann

Abb. 87 b.

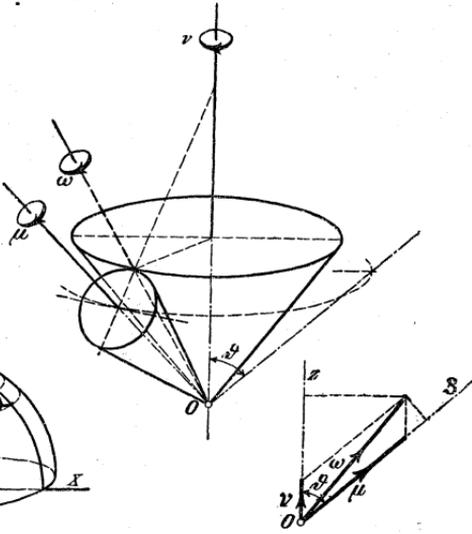
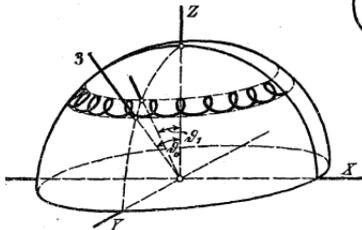


Abb. 87 a.



wird mit  $\vartheta = \vartheta_0 = \text{konst.}$  auch  $\psi' = \nu = \text{konst.}$  und  $\varphi' = \mu = \text{konst.}$ ; die aus  $\nu$  und  $\mu$  resultierende Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  wird ebenfalls konstant und behält während des ganzen Verlaufs der Bewegung ihre anfängliche Neigung gegen Vertikale und Kreiselachse bei (beweglicher und fester Achsenkegel = Kreiskegel); **reguläre Präzession**,  $\nu =$  Präzessionsgeschwindigkeit, s. Abb. 87 b.

Die Bedingungsgleichung für die reguläre Präzession lautet

$$P \cdot s = C \cdot \mu \cdot \nu - (A - C) \nu^2 \cos \vartheta_0$$

(vgl. unter 5, S. 230).

b) Hat der anfängliche Drall  $D_0$  eine beträchtliche Größe im Vergleich zur Schwerewirkung und fällt er überdies mit der Kreiselachse nahezu zusammen, so wird die Kugelzone sehr schmal und die Bogen der vom Schwerpunkt beschriebenen Kurve erhalten so kleine Ab-

messungen und werden so schnell durchlaufen, daß der Schein einer regulären Präzession erweckt wird; **pseudoreguläre Präzession** (gewöhnlicher beim Spielkreisel in Betracht kommender Fall); die Kurve des Schwerpunktes kann mit völliger Genauigkeit als Zyklode mit sehr kleinem Rollkreis aufgefaßt werden (fortschreitende Bewegung des Rollkreismittelpunktes auf dem mittleren Parallelkreis der Kugelzone = **Präzession**, gleichzeitige Drehbewegung des Rollkreises um seinen Mittelpunkt = **Nutation**) (vgl. Abb. 87b).

**5. Trägheitswiderstand (Deviationswiderstand) des symmetrischen Kreisels bei regulärer Präzession.** Der Drall behält seine GröÙe bei und wandert auf einem Kreiskegel um die Vertikale; die Richtung der Dralländerung, d. i. zugleich des Momentes, das zur Aufrechterhaltung der Bewegung aufgewendet werden muß, ist parallel zur Knotenlinie; das Gegenmoment ist der **Trägheitswiderstand**.

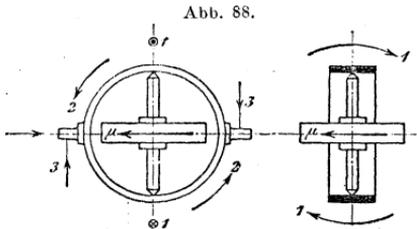
Es gilt demnach

$$M(\mathbf{T}) = -M_x \cdot \sin \vartheta - M_y \cdot \cos \vartheta.$$

Setzt man die Werte für  $M_x$  und  $M_y$  aus den Eulerschen Gleichungen ein (wobei  $J_x = J_y = A$ ,  $J_z = C$ ,  $\vartheta = \text{konst.}$ ,  $\vartheta' = 0$ ,  $\psi' = \nu$ ,  $\varphi' = \mu$  ist), so folgt

$$M(\mathbf{T}) = -C\mu\nu \cdot \sin \vartheta + (A - C) \cdot \nu^2 \cdot \sin \vartheta \cdot \cos \vartheta.$$

Das erste Glied auf der rechten Seite ist das Moment der Corioliskräfte, das zweite das Moment der ersten Zusatzkräfte (Zentrifugalkräfte der Drehung um die Vertikale) der aus den Drehungen  $\mu$  und  $\nu$  zusammengesetzten Kreiselbewegung (vgl. unter d. S. 214); da die Relativkräfte (Zentripetalkräfte der Drehung um die Kreiselachse) sich gegenseitig fortheben, ist die Summe der beiden Momente bereits der gesamte Trägheitswiderstand.



Für den bei den praktischen Anwendungen meist vorliegenden Fall  $\vartheta = 90^\circ$

wird einfacher

$$M(\mathbf{T}) = -C \cdot \mu \cdot \nu.$$

**6. Anwendung der Trägheitswirkungen des Kreisels (Schiffskreisel, Elnschienenbahnkreisel).** Man lagert den um seine Achse mit großer Winkelgeschwindigkeit  $\mu$  umlaufenden Kreisel in einem in Zapfen drehbaren Rahmen (Kreisel + Rahmen = **Kreiselverband**) (Abb. 88).

Es kommen zwei Trägheitswirkungen in Betracht:

$\alpha$ ) Erteilt man dem Kreiselrahmen eine kleine Winkelgeschwindigkeit (Präzession  $\nu$ ) um die wagerechte Achse im Sinne der Pfeile 1, 1, so strebt der zugehörige Trägheitswiderstand ( $C\mu\nu$ ) den Kreiselverband im Sinne der Pfeile 2, 2 zu verdrehen. Wird die Verdrehung durch ein gleich großes entgegenwirkendes Kräftepaar 3, 3 verhindert, so behalten die Winkelgeschwindigkeiten  $\mu$  und  $\nu$  dauernd ihre Werte bei.

$\beta$ ) Verdreht man den Kreiselverband im Sinne der Pfeile 3, 3, so tritt eine Drehung (Präzession) des Kreiselrahmens um seine wagerechte Achse im Sinne der Pfeile 1, 1 ein.

Beim **Schiffskreisel (Schlick)** ist die Schwingungsachse des Kreiseldrahmens parallel der Querachse des Schiffes angeordnet; überdies liegt der Schwerpunkt des **Kreiselpendels** unterhalb der Schwingungsachse. Wird das Schiff durch einen Wellenstoß in Rollschwingungen (Schwingungen um die Längsschwerachse) versetzt, so antwortet der Kreisel nach  $\beta$ ) mit Schwingungen in der Längsrichtung des Schiffes, wodurch nach  $\alpha$ ) ein dem störenden Kräftepaar 3, 3 entgegengesetztes Moment 2, 2 hervorgerufen wird. Wichtig ist die Wirkung der auf der Drehachse des Kreiseldrahmens angebrachten **Bremse**, die so bedient werden muß, daß der **Kreisel möglichst in Phase mit dem Schiff schwingt** (gleichzeitiger Durchgang durch die Mittellagen, gleichzeitig größter Ausschlag); dann wird die an das Schiff übertragene Wellenergie fortdauernd vermindert, die Schiffsschwingungen wirksam verringert (der ungebremste Kreisel eilt um eine Viertelperiode den Schiffsschwingungen nach, die Energie pendelt zwischen Schiff und Kreiselverband hin und her, die Schwingungen werden wohl verlangsamt, aber nicht gedämpft).

Beim **Einschienenbahnkreisel** muß der Kreiseldrahmen bei Seitenneigungen des Wagens über den Betrag der sich nach  $\beta$ ) von selbst einstellenden natürlichen Präzession **beschleunigt** werden; dann ist das Moment 2, 2 imstande, den Wagen wieder aufzurichten. Für das Durchfahren von Kurven werden zwei entgegengesetzt umlaufende Kreisel angeordnet, die durch einen Mechanismus so verbunden sind, daß sie stets gegenläufige Bewegungen machen.

## D. Trägheits- und Zentrifugalmomente.

### I. Sätze über Trägheits- und Zentrifugalmomente und deren Bestimmung.

#### a. Allgemeines.

1. Die Summe der Produkte aus den Massenteilchen  $dm$  eines Körpers und dem Quadrat ihrer Entfernung  $r$  von einer Geraden heißt das **Trägheitsmoment  $J$  des Massenkörpers**, bezogen auf diese Gerade als Achse

$$J = \int r^2 dm.$$

Für eine **endliche** Anzahl von Massenpunkten ist zu schreiben:

$$J = \sum m_i r_i^2.$$

Das Trägheitsmoment ist stets eine positive Größe.

Misst man die Längen in  $m$ , die Massen in  $kg$   $sk^2/m$ , so erhält man das Massen-Trägheitsmoment in  $m \cdot kg \cdot sk^2$  [im C-G-S-System (s. S. 166) in  $g \text{ cm}^2$ ].

Setzt man  $J = mk^2$ , wo  $m$  die Gesamtmasse des Körpers ist, so heißt  $k$  der **Trägheitshalbmesser** (Trägheitsarm) der Masse  $m$ .

Besteht ein Körper (Fläche, Linie) aus mehreren ( $n$ ) Teilen, so ist sein Trägheitsmoment gleich der Summe der Trägheitsmomente der einzelnen Teile, bezogen auf dieselbe Achse

$$J = J_1 + J_2 + J_3 + \dots + J_n.$$

#### 2. Trägheitsmomente für parallele Achsen.

Ist  $J_s$  das Trägheitsmoment eines Körpers von der Masse  $m$ , bezogen auf eine durch den Schwerpunkt gehende Achse,  $J$  das Trägheitsmoment, bezogen auf eine im Abstände  $e$  parallele Achse, so ist

$$J = J_s + m e^2 \qquad J_s = J - m e^2.$$

Bei parallelen Achsen hat also die Schwerpunktschwerachse das kleinste Trägheitsmoment.

Sind  $J_1$  und  $J_2$  die Trägheitsmomente zweier Körper, bezogen auf zwei parallele Schwerachsen, so ist das Trägheitsmoment des aus beiden Körpern zusammengesetzten Körpers für die neue parallele Schwerachse derselben

$$J = J_1 + J_2 + \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} e^2,$$

worin  $e$  den Abstand der parallelen Schwerachsen der beiden Körpermassen  $m_1$  und  $m_2$  bedeutet.

3. Das Massenteilchen  $dm$  habe die Koordinaten  $x, y, z$ ; eine beliebige, durch den Koordinatenanfang gehende Achse bilde mit den Koordinatenachsen die Winkel  $\alpha, \beta, \gamma$ . Dann ist mit  $r^2 = x^2 + y^2 + z^2 - (x \cdot \cos \alpha + y \cdot \cos \beta + z \cdot \cos \gamma)^2$  das Trägheitsmoment in bezug auf diese Achse

$$J = \cos^2 \alpha \int (y^2 + z^2) dm + \cos^2 \beta \int (z^2 + x^2) dm + \cos^2 \gamma \int (x^2 + y^2) dm \\ - 2 \cos \beta \cos \gamma \int yz dm - 2 \cos \gamma \cos \alpha \int zx dm - 2 \cos \alpha \cos \beta \int xy dm.$$

Setzt man

$$J_x = \int (y^2 + z^2) dm = A, \quad J_y = \int (z^2 + x^2) dm = B, \quad J_z = \int (x^2 + y^2) dm = C \\ J_{yz} = \int yz dm = D, \quad J_{zx} = \int zx dm = E, \quad J_{xy} = \int xy dm = F,$$

so sind  $A, B, C$  die Trägheitsmomente, bezogen auf die Koordinatenachsen und  $D, E, F$  die **Zentrifugalmomente** in bezug auf die Koordinatenebenen  $xy$  und  $zx$ ,  $yz$  und  $xy$  und  $zx$  und  $yz$  (auch Deviationsmomente oder Trägheitsprodukte).

Das Zentrifugalmoment kann positiv, null oder negativ sein.

Die Maßeinheiten für das Zentrifugalmoment sind dieselben wie für das Trägheitsmoment, also m. kg. sk<sup>2</sup> bzw. g. cm<sup>2</sup>.

Das Trägheitsmoment wird

$$J = A \cos^2 \alpha + B \cos^2 \beta + C \cos^2 \gamma - 2D \cos \beta \cos \gamma \\ - 2E \cos \gamma \cos \alpha - 2F \cos \alpha \cos \beta.$$

Trägt man auf der Achse vom Koordinatenanfang aus die Strecke  $\rho = 1 : \sqrt{J}$  ab, so erhält man für die Koordinaten  $\xi, \eta, \zeta$  des Endpunktes von  $\rho$  die Gleichung

$$A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2 - 2D\eta\zeta - 2E\zeta\xi - 2F\xi\eta = 1,$$

d. i. ein Ellipsoid mit dem Mittelpunkt im Koordinatenanfang  $O$  (Poinsoisches **Trägheitsellipsoid** für den Punkt  $O$ ).

Im Sonderfall geht das Trägheitsellipsoid in ein Umdrehungselipsoid oder eine Kugel über.

Für jeden Punkt des Raumes gibt es im allgemeinen drei mit den Achsen des Trägheitsellipsoides zusammenfallende, zueinander winkelsechte Achsen, für die das Trägheitsmoment einen größten oder kleinsten Wert annimmt; sie heißen die **Hauptträgheitsachsen**, die zugehörigen Trägheitsmomente die **Hauptträgheitsmomente**.

Hat ein Körper eine Symmetrieebene, so ist jede Winkelrechte zu dieser eine Hauptträgheitsachse für ihren Fufspunkt. Hat ein Körper eine Symmetrieachse, so ist diese eine der drei Hauptträgheitsachsen für jeden ihrer Punkte.

Das Trägheitsellipsoid für den Schwerpunkt heißt **Zentralellipsoid**.

4. Nimmt man die Achsen des Trägheitsellipsoides als Koordinatenachsen, so ist die Gleichung desselben

$$A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2 = 1,$$

worin  $A, B, C$  die Hauptträgheitsmomente sind.

Die Zentrifugalmomente  $D, E, F$  bezogen auf je zwei der Hauptträgheitsachsen sind  $= 0$ .

Das Trägheitsmoment  $J$  für eine Achse, welche die Winkel  $\alpha, \beta, \gamma$  mit den Hauptträgheitsachsen einschließt, ist

$$J = A \cos^2 \alpha + B \cos^2 \beta + C \cos^2 \gamma.$$

5. Das **Trägheitsmoment  $J$  eines geometrischen Körpers** ergibt sich aus dem des Massenkörpers, wenn an Stelle des Massenteilchens  $dm$  das **Volumenteilchen  $dv$**  gesetzt wird:

$$J = \int r^2 dv.$$

Eine entsprechende Bedeutung haben die **Trägheitsmomente geometrischer Flächen** (statt  $dm$  das Flächenteilchen  $df$ ) und **Linien** (statt  $dm$  das Längenteilchen  $dl$ ).

Mißt man die Länge in **cm**, demnach die Fläche in **qcm** und das Volumen in **cm<sup>3</sup>**, so erhält man das Trägheitsmoment einer geometrischen Linie in **cm<sup>2</sup>**, einer geometrischen Fläche in **cm<sup>4</sup>**, eines geometrischen Körpers in **cm<sup>6</sup>**.

## 6. Trägheits- und Zentrifugalmomente ebener Flächen.

$\alpha$ ) Das Trägheitsmoment eines ebenen Flächenstückes  $F$ , bezogen auf eine in seiner Ebene liegende Achse heißt das **achsiale (äquatoriale) Trägheitsmoment** von  $F$ , bezogen auf diese Achse; das Trägheitsmoment, bezogen auf eine zur Ebene winkelrechte Achse heißt das **polare Trägheitsmoment  $J_p$**  von  $F$ , bezogen auf den Pol  $O$ , den Schnittpunkt der Achse und der Ebene.

Wählt man  $O$  zum Nullpunkt eines rechtwinkligen Koordinatennetzes, so ergibt sich für das polare Trägheitsmoment

$$J_p = \int r^2 df = \int x^2 df + \int y^2 df = J_y + J_x.$$

$J_x$  und  $J_y$  sind die **achsialen Trägheitsmomente** von  $F$ , bezogen auf die  $x$ - und die  $y$ -Achse.

$\beta$ ) Der Wert des **achsialen Trägheitsmomentes** ändert sich nicht, wenn die Fläche  $F$  oder Teile derselben parallel zur Achse verschoben werden; der des **polaren** ändert sich nicht, wenn  $F$  oder Teile davon um den Pol gedreht werden.

$\gamma$ ) **Achsiale Trägheitsmomente** für parallele Achsen  $s$ , unter 2, S. 232, wo statt  $m$  die Fläche  $F$  zu setzen ist,

δ) Achsiale Trägheitsmomente für Achsen durch einen Punkt. Bezogen auf eine mit der  $x$ -Achse den Winkel  $\alpha$  bildende Achse  $OX'$  (Abb. 89) wird das achsiale Trägheitsmoment

$$J_{\alpha} = \int (y \cos \alpha - x \sin \alpha)^2 df = J_x \cos^2 \alpha + J_y \sin^2 \alpha - J_{xy} \sin 2\alpha,$$

worin  $J_{xy} = \int xy df$  das **Zentrifugalmoment** von  $F$ , bezogen auf die  $x$ - und  $y$ -Achse ist.

Trägt man auf der Achse  $OX'$  die Strecke  $\rho = 1 : \sqrt{J_{\alpha}}$  vom Nullpunkt aus ab, so erhält man für die Koordinaten  $\xi, \eta$  des Endpunktes von  $\rho$  die Gleichung

$$J_x \xi^2 + J_y \eta^2 - 2 J_{xy} \xi \eta = 1,$$

d. i. die Gleichung einer Ellipse, der **Trägheitsellipse**, mit dem Nullpunkt als Mittelpunkt.

Die Winkel  $\alpha_0$  und  $90^\circ + \alpha_0$ , welche die zueinander winkelrechten Ellipsenachsen, die **Hauptträgheitsachsen**, mit den Achsen des Koordinatennetzes einschließen, sind zu bestimmen aus

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2 J_{xy}}{J_y - J_x}.$$

Die Trägheitsmomente für diese Achsen, die **Hauptträgheitsmomente**, sind

$$\left. \begin{aligned} J_{\max} &= A \\ J_{\min} &= B \end{aligned} \right\} = \frac{J_x + J_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{J_y - J_x}{2}\right)^2 + J_{xy}^2}.$$

Die Achse für  $J_{\max}$  heißt **erste**, die für  $J_{\min}$  **zweite Hauptachse**.

Wählt man die Trägheitshauptachsen zu Koordinatenachsen, so wird das Trägheitsmoment für eine unter dem Winkel  $\alpha$  gegen die  $x$ -Achse geneigte Gerade

$$J_{\alpha} = A \cos^2 \alpha + B \sin^2 \alpha \quad \left| \begin{aligned} A &= J_x \\ B &= J_y \end{aligned} \right.$$

und die Gleichung der Trägheitsellipse  $A\xi^2 + B\eta^2 = 1$ , da für die Trägheitshauptachsen das Zentrifugalmoment  $J_{xy} = 0$  ist.

Die Trägheitsellipse für den Schwerpunkt von  $F$  heißt **Zentralellipse**.

ε) Setzt man  $A = Fa^2$ ,  $B = Fb^2$ ,  $J_x = Fk^2$ , so heißen  $a$  und  $b$  die **Trägheitshalbmesser** (-arme) für die Hauptachsen,  $k$  der Trägheitshalbmesser für die Achse unter dem Winkel  $\alpha$ .

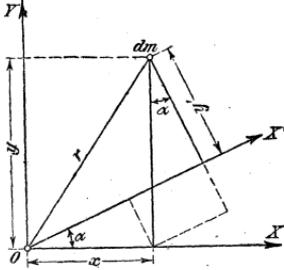
Zieht man im Abstand  $k$  von der unter dem Winkel  $\alpha$  gegen die  $x$ -Achse geneigten Achse eine Parallele zu dieser und macht dasselbe für alle durch den Punkt  $O$  gehenden Achsen, so erhält man die Tangenten einer **zweiten** (der Culmannschen) **Trägheitsellipse** (Anwendung in der graphischen Statik).

Erste und zweite Trägheitsellipse sind ähnlich und ähnlich gelegen, da das Verhältnis der kleinen und großen Achsen bei beiden  $= \sqrt{A} : \sqrt{B}$  ist.

ζ) Trägt man auf der durch den Schwerpunkt  $S$  gehenden ersten Hauptachse von  $S$  aus beiderseits die Länge  $c$ , bestimmt durch

$$A - B = Fc^2,$$

Abb. 89.



ab, so erhält man die **Festpunkte**  $F_1$  und  $F_2$  der Fläche  $F$ . Für diese haben die Trägheitsmomente, bezogen auf alle durch sie gehenden Achsen, denselben Wert  $A$ , die Trägheitsellipse ist sonach ein Kreis.

η) Berechnung des Zentrifugalmomentes  $J_{xy}$  für rechtwinklige Achsen. Bezieht sich  $J'_{xy}$  auf zwei rechtwinklige Schwerachsen  $SX'$  und  $SY'$  einer ebenen Fläche  $F$ , so ist  $J_{xy}$  für zwei neue, um  $\xi, \eta$  parallel verschobene Achsen  $OX$  und  $OY$

$$J_{xy} = J'_{xy} + F\xi\eta \quad (\xi, \eta = \text{Schwerpunktskoordinaten}).$$

Da für die Hauptachsen eines Rechtecks (als Symmetrieachsen)  $J'_{xy} = 0$  ist, so folgt für Flächen, die aus einzelnen Rechtecken  $f_1, f_2, f_3, \dots$  mit parallelen Seiten gebildet sind, bezogen auf zwei mit den Rechteckseiten parallele Achsen

$$J_{xy} = \Sigma f\xi\eta.$$

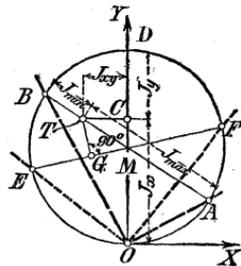
Zerlegt man beliebige Flächen in schmale Streifen  $f$ , parallel zu einer Achse  $OX$  oder  $OY$ , so kann man sie als Rechtecke auffassen und erhält

$$J_{xy} = \int xy \, df \sim \Sigma f\xi\eta.$$

9) Trägheitskreis von Mohr-Land. Sind für zwei rechtwinklige Achsen  $OX$  und  $OY$  (Abb. 90) die Trägheitsmomente  $J_x$  und  $J_y$  und das Zentrifugalmoment  $J_{xy}$  gegeben, so mache man  $OC = J_x$ ,  $CD = J_y$  und  $CT \perp OY$  und  $CT = J_{xy}$ . Der über  $OD = J_x + J_y = J_p$  (dem polaren Trägheitsmoment, bezogen auf  $O$ ) als Durchmesser beschriebene Kreis mit dem Mittelpunkt  $M$  heißt der **Trägheitskreis** für den Punkt  $O$  als Pol; der Punkt  $T$  heißt **Trägheitshauptpunkt**. Der durch  $T$  gehende Durchmesser liefert die beiden Trägheitshauptachsen  $OA$  mit  $J_{\max} = TA$  und  $OB$  mit  $J_{\min} = TB$ .

Für zwei beliebige aufeinander senkrecht stehende Achsen, z. B.  $OE$  und  $OF$ , liefert das Lot  $TG$  von  $T$  auf den Durchmesser  $EF$  das Zentrifugalmoment und die Strecken  $EG$  bzw.  $FG$  die Trägheitsmomente bezogen auf  $OE$  bzw.  $OF$ .

Abb. 90.



**b. Bestimmung der Trägheitsmomente ebener Flächenstücke.**

1. Für die einfachen Querschnitte des Brücken- und Eisenbaues entnimmt man die Trägheitsmomente den vorhandenen Tabellenwerken: Geusen und Milicezck, Böhm und John, Scharowski, Zimmermann, Deutsches Normalprofilbuch; **s. a. Abschnitt: Stoffkunde.**

2. Für die unregelmäßigen Querschnitte des Maschinenbaues führt am schnellsten ein rechnerisch-zeichnerisches Verfahren zum Ziel, ähnlich dem für die Bestimmung des Schwerpunktes, S. 189.

Man zerlegt den maßstäblich gezeichneten Querschnitt durch Parallelen zur Achse, für die das Trägheitsmoment bestimmt werden soll, in so schmale Streifen, dafs diese als Rechtecke angesehen werden können; entnimmt aus der Zeichnung Flächeninhalt  $f$  und Schwerpunktsabstand  $y$  der Streifen und bildet die Summe  $\Sigma y^2 \cdot f \sim J$ . Die Rechnung wird am besten tabellarisch durchgeführt,

Voraussetzung ist, daß die Streifen schmal genug genommen werden, um gegen  $y^2 \cdot f$  das Trägheitsmoment des Streifens in bezug auf seine parallele Schwerpunktsachse  $\left(\frac{b h^3}{12} = \frac{f h^2}{12}\right)$  vernachlässigen zu können.

Will man größere regelmäÙige Stücke des Querschnittes, deren Schwerpunktslage  $y$ , Flächeninhalt  $f$  und Trägheitsmoment  $i_s$  für die parallele Schwerachse sofort angeschrieben werden können, nicht erst noch in Streifen zerlegen, so hat man statt  $y^2 \cdot f$  zu setzen:  $y^2 \cdot f + i_s$ .

Soll das Trägheitsmoment eines unregelmäÙigen Querschnittes, dessen Schwerpunkt vorläufig noch nicht bekannt ist, in bezug auf eine **der Richtung nach** gegebene **Schwerachse** bestimmt werden, so berechnet man zunächst nach dem vorstehenden das Trägheitsmoment für eine **beliebige** parallele Achse und reduziert auf die Schwerachse durch Subtraktion des Werts  $F \cdot \eta^2$ ; Querschnittsinhalt  $F$  sowohl wie Schwerpunktsabstand  $\eta$  ergeben sich bei der tabellarischen Berechnung gleich mit.

## II. Trägheitsmomente technisch wichtiger Linien, Flächen und Körper.

(Ausführlichere Angaben über Trägheitsmomente üblicher Querschnittformen s. im Abschn. IV., Festigkeitslehre unter Biegezugfestigkeit, sowie im Abschn. V., Stoffkunde, bei den deutschen Normalprofilen.)

Im folgenden bedeutet  $m$  die Gesamtmasse des Gebildes. Es sind **homogene Gebilde** vorausgesetzt, so daß  $m = \gamma V : g$ , wo  $\gamma$  das spezifische Gewicht des Körperstoffes,  $V$  den Rauminhalt des Körpers und  $g$  die Fallbeschleunigung bezeichnet.

Der Zeiger bei  $J$  bezeichnet in den folgenden Angaben die Achse, auf die das Trägheitsmoment  $J$  bezogen ist.  $J'$  bedeutet überall ein polares Trägheitsmoment.

**1. Gerade Strecke** von der Länge  $2l$ , deren Mitte auf der Achse  $X$  liegt, und die mit der Achse den Winkel  $\alpha$  bildet,

$$J_x = \frac{1}{3} m (l \sin \alpha)^2 = \frac{2}{3} l^3 \sin^2 \alpha.$$

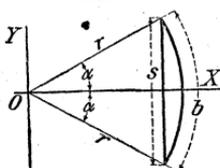
Für  $\alpha = 90^\circ$  (d. h.  $2l$  senkrecht zur Achse)

$$J_x^{(1)} = \frac{1}{3} m l^2 = \frac{2}{3} l^3.$$

Für eine gerade Strecke  $l$ , deren einer Endpunkt auf der Achse  $X$  liegt, ist entsprechend

$$J_x = \frac{1}{3} m (l \sin \alpha)^2 = \frac{1}{3} l^3 \sin^2 \alpha \quad \text{und} \quad J_x^{(1)} = \frac{1}{3} m l^2 = \frac{1}{3} l^3.$$

Abb. 91.



**2. Kreislinie:** polares Trägheitsmoment, bezogen auf den Mittelpunkt  $J_{o'} = m r^2 = 2 \pi r^3$ , achsiales in bezug auf einen Durchmesser  $J_d = \frac{1}{2} J_{o'}$ .

Kreisbogen. (Abb. 91.)

$$J_x = \frac{1}{2} m r^2 \left( 1 - \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\text{arc } \alpha} \right)$$

$$J_y = \frac{1}{2} m r^2 \left( 1 + \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\text{arc } \alpha} \right), \quad J_{m'} = J_x + J_y = m r^2$$

$$\left( m = 2r \text{ arc } \alpha = 2r \frac{\pi \alpha^\circ}{180^\circ} \right).$$

**3. Ellipsenumfang:** Mit  $\mu = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$  ( $a$  = halbe große,  $b$  = halbe kleine Achse) ist

$$m = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \cdot [1 - \frac{1}{16} \cdot \mu^2 - \frac{5}{384} \cdot \mu^4 - \dots]$$

und das Trägheitsmoment bezogen auf die große Achse ( $x$ -Richtung)

$$J_x = \pi \cdot b^2 \cdot \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \cdot [1 + \frac{1}{4} \mu - \frac{1}{16} \mu^2 + \frac{3}{122} \mu^3 - \dots]$$

$$= \frac{1}{2} m \cdot b^2 \cdot \frac{1 + \frac{1}{4} \mu - \frac{1}{16} \mu^2 + \frac{3}{122} \mu^3 - \dots}{1 - \frac{1}{16} \mu^2 - \frac{5}{384} \mu^4 - \dots}$$

**4. Dreieckfläche.**  $S$  ist der Schwerpunkt des Dreiecks (Abb. 92).

$$J_x = \frac{1}{2} m h^2 = \frac{1}{4} b h^3$$

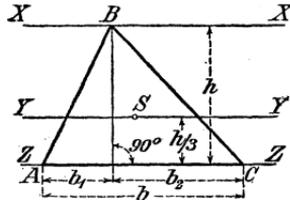
$$J_y = \frac{1}{18} m h^2 = \frac{1}{36} b h^3$$

$$J_z = \frac{1}{6} m h^2 = \frac{1}{12} b h^3$$

$$J'B = \frac{1}{4} b h^3 + \frac{1}{12} (b_1^3 + b_2^3) h$$

$$J'S = \frac{1}{36} b h^3 + \frac{1}{12} (b_1^3 + b_2^3) h - \frac{1}{18} b h (b_2 - b_1)^2.$$

Abb. 92.



**5. Viereckfläche.** (Vrgl. 2., S. 134,

Abb. 39)

$$J_D = \frac{1}{12} D (h_1^3 + h_2^3).$$

Parallelogramm. (Bezeichnungen s. S. 134 unter 2.)

$$J_D = \frac{1}{48} D (D_1 \sin \varphi)^3$$

Rhombus.

$$J_D = \frac{1}{48} D D_1^3.$$

Rechteck. (Abb. 93)  $J_D = \frac{1}{48} D^4 \sin^3 \varphi.$

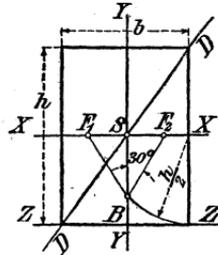
$$J_x = \frac{1}{12} m h^2 = \frac{1}{12} b h^3$$

$$J_y = \frac{1}{12} m b^2 = \frac{1}{12} b^3 h$$

$$J'S = \frac{1}{12} m (b^2 + h^2) = \frac{1}{12} (b^3 h + b h^3)$$

$$J_z = \frac{1}{3} m h^2 = \frac{1}{3} b h^3.$$

Abb. 93.



Für eine beliebige Achse ergibt sich das Trägheitsmoment mittels der Festpunkte  $F_1$  und  $F_2$  nach  $\eta$ , S. 235. Man findet  $F_1$  und  $F_2$  nach Abb. 93, indem man  $XB = \frac{1}{2} h$  macht und  $BF_1$  und  $BF_2$  unter  $30^\circ$  gegen  $YY$  zieht.

Quadrat. Seitenlänge =  $h$ . Es ist

$$J_x = J_y = \frac{1}{12} h^4 \quad J'S = \frac{1}{6} h^4 \quad J_z = \frac{1}{3} h^4 \quad J_D = \frac{1}{12} h^4 = J_x.$$

**6. Regelmäßiges Vieleck.** Ist  $m$  der Flächeninhalt,  $a$  die Seite,  $R$  der Halbmesser des umschriebenen,  $r$  der des eingeschriebenen Kreises, so ist für eine beliebige, durch den Mittelpunkt  $O$  gehende Aequator-Achse

$$J_x = \frac{1}{24} m (6 R^2 - a^2) = \frac{1}{48} m (12 r^2 + a^2)$$

ferner

$$J_o' = 2 J_x \quad (m = F \text{ s. S. 134.})$$

**7. Kreisfläche.** Durchmesser =  $d$ . Es ist für einen Durchmesser als  $x$ -Achse

$$J_x = \frac{1}{4} m r^2 = \frac{1}{4} \pi r^4 = \frac{1}{64} \pi d^4 \quad J_o' = \frac{1}{2} m r^2 = \frac{1}{2} \pi r^4.$$

Halbkreisfläche: Es ist für den begrenzenden Durchmesser als  $x$ -Achse

$$J_x = J_y = \frac{1}{4} m r^2 = \frac{1}{8} \pi r^4.$$

Für den Mittelpunkt  $O$ :  $J_{O'} = \frac{1}{2} m r^2 = \frac{1}{4} \pi r^4$ .

Für den Schwerpunkt  $S$

$$J_{S'} = \frac{1}{2} m r^2 \left( 1 - \frac{32}{9 \pi^2} \right) = 0,6396 m r^2 = \frac{1}{4} \pi r^4 \left( 1 - \frac{32}{9 \pi^2} \right) = 0,5025 r^4.$$

**8. Kreisringfläche.** Aeußerer Halbmesser  $= R$ , innerer  $= r$ , mittlerer  $= \rho$ , Ringbreite  $= \delta$ . Es ist für einen Durchmesser als Achse

$$J_x = \frac{1}{4} m (R^2 + r^2) = \frac{1}{4} \pi (R^4 - r^4) = \pi \rho \delta (\rho^2 + \frac{1}{4} \delta^2)$$

$$J_{O'} = 2 J_x = \frac{1}{2} m (R^2 + r^2) = \frac{1}{2} \pi (R^4 - r^4).$$

**9. Kreisabschnitt.** Bezeichnungen wie in Abb. 91, S. 236.

$$J_x = \frac{1}{4} m r^2 \left( 1 - \frac{2}{3} \frac{\sin^3 \alpha \cos \alpha}{(\arccos \alpha - \sin \alpha \cos \alpha)} \right)$$

$$J_y = \frac{1}{4} m r^2 \left( 1 + \frac{2 \sin^3 \alpha \cos \alpha}{(\arccos \alpha - \sin \alpha \cos \alpha)} \right)$$

$$J_{O'} = \frac{1}{2} m r^2 \left( 1 + \frac{2}{3} \frac{\sin^3 \alpha \cos \alpha}{(\arccos \alpha - \sin \alpha \cos \alpha)} \right).$$

Für den Schwerpunkt  $S$  ist  $J_{S'} = J_{O'} - m \cdot \overline{OS}^2$

$m = F$  s. S. 135.  $\overline{OS}$  s. S. 192.

**10. Kreisabschnitt.** Bezeichnungen wie in Abb. 91, S. 236.

$$J_x = \frac{1}{4} m r^2 \left( 1 - \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\arccos \alpha} \right) = \frac{1}{4} r^4 \left( 1 - \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\arccos \alpha} \right) \arccos \alpha$$

$$J_y = \frac{1}{4} m r^2 \left( 1 + \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\arccos \alpha} \right) = \frac{1}{4} r^4 \left( 1 + \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\arccos \alpha} \right) \arccos \alpha$$

$$J_{O'} = \frac{1}{2} m r^2 = \frac{1}{4} b r^3 = \frac{1}{2} r^4 \arccos \alpha = \frac{\pi \alpha^0}{360^\circ} r^4 = \frac{\pi r^4}{2n},$$

wenn der Kreisabschnitt der  $n$ te Teil der Kreisfläche.

Für den Schwerpunkt  $S$  als Pol ist

$$J_{S'} = \frac{1}{2} m r^2 \left( 1 - \frac{8}{9} \frac{s^2}{b^2} \right) = \frac{1}{4} b r^3 \left( 1 - \frac{8}{9} \frac{s^2}{b^2} \right) = \frac{1}{2} r^4 \left( 1 - \frac{8}{9} \frac{\sin^2 \alpha}{(\arccos \alpha)^2} \right) \arccos \alpha.$$

**11. Ellipsenfläche.** Für den Durchmesser  $2a$  als  $x$ -Achse, Durchmesser  $2b$  als  $y$ -Achse ist

$$J_x = \frac{1}{4} m b^2 = \frac{1}{4} \pi a b^3; \quad J_y = \frac{1}{4} m a^2 = \frac{1}{4} \pi a^3 b.$$

Für den Mittelpunkt  $O$  als Pol

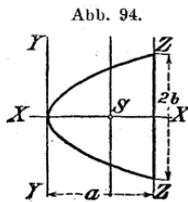
$$J_{O'} = \frac{1}{4} m (a^2 + b^2) = \frac{1}{4} \pi a^3 b \left( 1 + \frac{b^2}{a^2} \right).$$

**12. Parabelfläche** (Abb. 96).

$$J_x = \frac{1}{5} m b^2 = \frac{4}{15} a b^3 \quad J_y = \frac{3}{7} m a^2 = \frac{4}{7} a^3 b$$

$$J_z = \frac{8}{35} m a^2 = \frac{32}{105} a^3 b$$

$$J_s = \frac{12}{175} m a^2 = \frac{16}{175} a^3 b \quad J_{S'} = J_x + J_s.$$



**13. Gerades Prisma und gerader Zylinder** mit dem zu den Seiten senkrechten Querschnitte  $F$  und der Höhe  $h$ . Die zu den parallelen Endflächen winkelrechte  $z$ -Achse geht durch den Schwerpunkt  $S$  des Körpers und ist parallel zu den Seiten; die Achse  $QQ$  steht in  $S$  auf  $ZZ$  senkrecht. Die Trägheitsmomente von  $F$  seien  $i_q$ , bezogen auf  $QQ$ , und  $i_z$ , bezogen auf  $ZZ$ . Für den Körper ist

$$J_q = \frac{1}{12} F h^3 + h i_q \quad \text{und} \quad J_z = h i_z.$$

**14. Rechtwinkliges Parallelepiped** (Rechtkant). Für die  $z$ -Achse = Verbindungslinie der Mittelpunkte beider Endflächen, deren Seiten  $a$  und  $b$  und deren Abstand  $c$  sind, ist

$$J_z = \frac{1}{12} m (a^2 + b^2) = \frac{1}{12} a b c (a^2 + b^2).$$

Für die durch den Schwerpunkt parallel zu  $a$  verlaufende Achse  $QQ$

$$J_q = \frac{1}{12} m (b^2 + c^2) = \frac{1}{12} a b c (b^2 + c^2).$$

Würfel (Kante =  $a$ )  $J_z = J_q = \frac{1}{6} a^5$ .

**15. Rechtwinklige Pyramide.** Grundfläche ein Rechteck mit den Seiten  $a$  und  $b$ , Höhe =  $h$ . Für die  $z$ -Achse = Verbindungslinie der Spitze mit der Mitte der Grundfläche ist

$$J_z = \frac{1}{20} m (a^2 + b^2) = \frac{1}{60} a b h (a^2 + b^2).$$

Für die Schwerachse  $QQ$  parallel zu  $a$

$$J_q = \frac{1}{20} m (\frac{3}{4} h^2 + b^2) = \frac{1}{60} a b h (\frac{3}{4} h^2 + b^2).$$

**16. Gerader Kreiszyylinder.** Halbmesser der Grundfläche =  $r$ , Höhe =  $h$ , Achsen s. u. **13**.

$$J_z = \frac{1}{2} m r^2 = \frac{1}{2} \pi r^4 h.$$

$$J_q = \frac{1}{4} m (\frac{1}{3} h^2 + r^2) = \frac{1}{4} \pi r^2 h (\frac{1}{3} h^2 + r^2).$$

Zylindermantel  $J_z = m r^2 = 2 \pi r^3 h$   $J_q = \frac{1}{2} m (r^2 + \frac{1}{6} h^2)$ .

**17. Hohlzylinder.**  $R$  und  $r$  der äußere und innere Halbmesser,  $h$  die Höhe,  $\delta = R - r$  die Dicke,  $\rho = \frac{1}{2} (R + r)$  der mittlere Halbmesser. Achsen s. u. **13**.

$$J_z = \frac{1}{2} m (R^2 + r^2) = \frac{1}{2} \pi h (R^4 - r^4) \\ = m (\rho^2 + \frac{1}{4} \delta^2) = 2 \pi h \rho (\rho^2 + \frac{1}{4} \delta^2)$$

$$J_q = \frac{1}{4} m (R^2 + r^2 + \frac{1}{3} h^2) = \frac{1}{8} m (4 \rho^2 + \delta^2 + \frac{2}{3} h^2).$$

**18. Gerader Kreiskegel.** Höhe =  $h$ , Seite =  $s$ . Achsen s. u. **13**.

$$J_z = \frac{3}{10} m r^2 = \frac{1}{10} \pi r^4 h$$

$$J_q = \frac{3}{2} m (r^2 + \frac{1}{4} h^2) = \frac{1}{20} \pi r^2 h (r^2 + \frac{1}{4} h^2).$$

Mantelfläche  $J_z = \frac{1}{2} m r^2 = \frac{1}{2} \pi s r^3$ .

**19. Abgestumpfter Kreiskegel.** Höhe =  $h$ , Seite =  $s$ , Halbmesser der Grundflächen =  $R$  und  $r$ . Achsen s. u. **13**.

$$J_z = \frac{3}{10} m \frac{R^5 - r^5}{R^3 - r^3} = \frac{1}{10} \pi h \frac{R^5 - r^5}{R - r} \\ = \frac{1}{10} \pi h (R^4 + R^3 r + R^2 r^2 + R r^3 + r^4).$$

Mantelfläche  $J_z = \frac{1}{2} M (R^2 + r^2) = \frac{1}{2} \pi s \frac{R^4 - r^4}{R - r} \\ = \frac{1}{2} \pi s (R^3 + R^2 r + R r^2 + r^3).$

**20. Kugel.** Halbmesser =  $r$ . Für jeden Durchmesser als Achse ist

$$J = \frac{2}{5} m r^2 = \frac{8}{15} \pi r^5.$$

Hohlkugel.  $R$  der äußere,  $r$  der innere Halbmesser

$$J = \frac{2}{5} m \frac{R^5 - r^5}{R^3 - r^3} = \frac{8}{15} \pi (R^5 - r^5).$$

Halbkugel. Liegt der Anfangspunkt der Koordinaten im Mittelpunkte, und ist  $r$  der Halbmesser, so ist

$$J_x = J_y = J_z = \frac{2}{5} m r^2 = \frac{4}{15} \pi r^5.$$

Kugeloberfläche. Für jeden Durchmesser als Achse ist

$$J = \frac{2}{3} m r^2 = \frac{8}{3} \pi r^4.$$

**21. Kugelabschnitt** von der Höhe  $h$ ; Kugelhalbmesser =  $r$ . Bezogen auf die Symmetrieachse ist

$$J_z = m h \frac{2 r^2 - 1,5 r h + 0,3 h^2}{3 r - h} = \frac{1}{3} \pi h^3 (2 r^2 - 1,5 r h + 0,3 h^2).$$

**22. Kugelausschnitt.** Höhe der Kalotte =  $h$ ; Kugelhalbmesser =  $r$ . Bezogen auf die Symmetrieachse ist

$$J_z = \frac{1}{5} m (3 r h - h^2) = \frac{2}{15} \pi r^2 h^2 (3 r - h).$$

**23. Dreiachsiges Ellipsoid.** Vgl. auch S. 140. Bezogen auf die mit dem Durchmesser  $2c$  zusammenfallende  $z$ -Achse ist

$$J_z = \frac{1}{5} m (a^2 + b^2) = \frac{4}{15} \pi a b c (a^2 + b^2).$$

Entsprechend ist für die mit den Durchmessern  $2a$  und  $2b$  zusammenfallenden Achsen

$$J_x = \frac{1}{5} m (b^2 + c^2) \text{ und } J_y = \frac{1}{5} m (a^2 + c^2).$$

**24. Umdrehungsellipsoid.** Sind  $a$  und  $b$  die Halbachsen, so ist, wenn  $2b$  die Drehachse des Umdrehungskörpers,

$$J_a = \frac{2}{5} m a^2 = \frac{8}{15} \pi a^4 b,$$

wenn  $2a$  die Drehachse des Umdrehungskörpers

$$J_b = \frac{2}{5} m b^2 = \frac{8}{15} \pi a b^4.$$

**25. Umdrehungsparaboloid.** Höhe =  $h$ . Bezogen auf die Parabelachse (als Drehachse) ist

$$J_z = \frac{1}{8} m r^2 = \frac{1}{6} \pi r^4 h.$$

Bezogen auf die dazu winkelrechte Achse durch den Schwerpunkt ist

$$J_q = \frac{1}{6} m (r^2 + \frac{1}{3} h^2) = \frac{1}{36} \pi r^2 h (3 r^2 + h^2).$$

**26. Ring** (Abb. 95), Ring mit rechteckigem Querschnitt s. 17., S. 239 Hohlzylinder.

Ist der Querschnitt ein Kreis mit dem Halbmesser  $a$ , so ist

$$J_z = m (R^2 + \frac{3}{4} a^2) = \frac{1}{2} \pi^2 R a^2 (4 R^2 + 3 a^2)$$

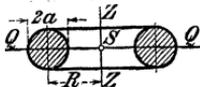
$$J_q = m (\frac{1}{2} R^2 + \frac{5}{8} a^2) = \pi^2 R a^2 (R^2 + \frac{5}{4} a^2).$$

Ist der Querschnitt eine Ellipse mit den Halbachsen  $a$  und  $b$  und dabei die Achse  $2b$  parallel zu  $ZZ$ , so ist

$$J_z = m (R^2 + \frac{3}{4} a^2) = \frac{1}{2} \pi^2 R a b (4 R^2 + 3 a^2)$$

$$J_q = m (\frac{1}{2} R^2 + \frac{5}{8} b^2) = \pi^2 R a b (R^2 + \frac{5}{4} b^2).$$

Abb. 95.



## E. Der Stoß.

Die gerade Linie, die im Berührungspunkte zweier sich stoßenden Körper zur gemeinsamen Berührungsebene winkelrecht steht, heißt Stoßlinie. Befinden sich die Schwerpunkte der Körper in dieser Linie, so heißt der Stoß ein **zentrischer** oder **Zentralstoß**, im anderen Falle ein **exzentrischer Stoß**. Fallen die Bewegungsrichtungen der beiden sich berührenden Punkte in die Stoßlinie, so heißt der Stoß **gerade**, im anderen Falle **schief**.

Unter einer Momentan- oder Stoßkraft versteht man eine außerordentlich (im Grenzfall unendlich) große Kraft, die nur eine außerordentlich (im Grenzfall unendlich) kurze Zeit wirkt. Sie wird gemessen durch die Aenderung des Impulses (der Bewegungsgröße), die sie an dem von ihr betroffenen Massenpunkt hervorbringt und die gleich dem Antriebe der Stoßkraft ist:

$$m \cdot \Delta v = m(v' - v) = \int_t^{t'} P dt = \mathfrak{P}.$$

Gegenüber den Stoßkräften dürfen im allgemeinen die Wirkungen endlicher stetiger Kräfte vernachlässigt werden.

### a. Gerader, zentrischer Stoß.

Zwei Massen  $m_1$  und  $m_2$  mit den gleich gerichteten Geschwindigkeiten  $v_1$  und  $v_2$  treffen aufeinander. Zwischen  $v_1$  und  $v_2$  und den Geschwindigkeiten nach dem Stoße,  $c_1$  und  $c_2$ , besteht dann die Beziehung

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 c_1 + m_2 c_2.$$

Den Quotienten  $\frac{c_2 - c_1}{v_1 - v_2} = k$  nennt man die **Stoßziffer** oder den Koeffizienten der Stoßelastizität; die Größe hängt von den elastischen bzw. plastischen Eigenschaften der stoßenden Körper ab, und ist für den vollkommen unelastischen Stoß  $= 0$ , für den vollkommen elastischen  $= 1$ , so daß im allgemeinen  $0 \leq k \leq 1$ ; Bestimmung von  $k$  s. u. **§. S. 242**.

### 1. Vollkommen unelastischer Stoß.

Die beiden Massen bewegen sich nach dem Stoße mit der gemeinsamen Geschwindigkeit

$$c = c_1 = c_2 = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}.$$

Der Verlust an lebendiger Kraft beträgt für beide Körper zusammen

$$E = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2)^2.$$

## 2. Vollkommen elastischer Stofs.

Der Verlust an lebendiger Kraft  $E$  ist gleich null. Die Geschwindigkeiten nach dem Stofse betragen

$$c_1 = \frac{(m_1 - m_2) v_1 + 2 m_2 v_2}{m_1 + m_2} \quad \text{und} \quad c_2 = \frac{(m_2 - m_1) v_2 + 2 m_1 v_1}{m_1 + m_2}.$$

Für  $v_2 = 0$  wird

$$c_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \quad \text{und} \quad c_2 = \frac{2 m_1}{m_1 + m_2} v_1.$$

Ist  $m_1 = m_2$ , so wird  $c_1 = v_2$  und  $c_2 = v_1$ .

## 3. Unvollkommen elastischer Stofs.

Haben die beiden Körper die Stofsziffer  $k$ , so ist

$$c_1 = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2 - m_2 (v_1 - v_2) k}{m_1 + m_2}$$

$$c_2 = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2 + m_1 (v_1 - v_2) k}{m_1 + m_2}$$

$$E = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2)^2 (1 - k^2).$$

Die Stofsziffer  $k$  ergibt sich aus  $k^2 = h_1 : h$ , worin  $h_1$  die Höhe bezeichnet, bis zu der eine Kugel zurückprallt, wenn man sie aus der Höhe  $h$  auf eine wagerechte, ebene, fest liegende Platte (also Masse  $= \infty$  anzusehen) niederfallen läßt. Die Gröfse von  $k^2$  hängt wesentlich ab von der Geschwindigkeit, mit der die Kugel auftrifft, d. h. von  $h$ . Bei mäfsigen Geschwindigkeiten ist für Elfenbein  $k = 8/9$ , für Stahl und Kork  $k = 5/9$ , für Glas  $k = 15/16$ , Holz  $k = 1/2$  für  $v \sim 2,8$  m/sk.

## b. Gerader, exzentrischer Stofs.

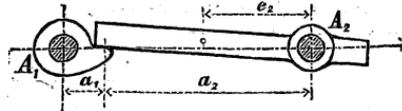
Zwei um parallele Achsen  $A_1$  und  $A_2$  (Abb. 96) sich drehende Körper treffen mit den Winkelgeschwindigkeiten  $\omega_1$  und  $\omega_2$  zusammen.

Die Trägheitsmomente der beiden Körper, bezogen auf die Drehachsen, seien  $J_1$  und  $J_2$ . Es gelten alsdann die Formeln für den geraden, zentrischen Stofs (s. u. a. 1—3), wenn man statt der Massen die auf den Stofspunkt bezogenen Massen (s. S. 222)

$$\frac{J_1}{a_1^2} \quad \text{und} \quad \frac{J_2}{a_2^2}$$

einführt und statt der Geschwindigkeiten  $v_1$  und  $v_2$  die Werte  $a_1 \omega_1$  und  $a_2 \omega_2$ . Die Geschwindigkeiten  $c_1$  und  $c_2$  nach dem Stofse haben dann die Punkte der Körper in der Stofslinie. Soll die Uebertragung der Stofswirkung (Prellung) auf die Achse  $A_2$  vermieden werden, so müssen Stofspunkt und Dreh-

Abb. 96.



punkt  $A_2$  in derselben Beziehung zueinander stehen wie Schwingungsmittelpunkt und Aufhängungspunkt beim physischen Pendel (s. S. 224), d. h., es muß  $a_2 = \frac{J_2}{m_2 e_2}$  sein, wenn  $e_2$  den Abstand des Schwerpunktes von der Drehachse bedeutet.

## V. REIBUNGSWIDERSTÄNDE.

### A. Reibungszahlen.

#### a. Reibung der Ruhe.

Stützt sich ein Körper unter dem Einflusse einer äußeren Kraft  $P$  gegen einen anderen Körper, so kann er auch dann noch im Gleichgewicht sein, wenn die Richtung der Kraft mit der Stütz- oder Berührungsnormalen einen Winkel einschließt, der kleiner oder gleich einem bestimmten Winkel  $\varrho_0$  ist. Der Winkel  $\varrho_0$  hängt von der Beschaffenheit der Oberflächen ab. Die Stützkraft ist stets von der gleichen Größe und Richtung wie die äußere Kraft. Durch Zerlegung der gesamten Stützkraft in zwei Seitenkräfte gemäß Abb. 97 nach der Berührungsnormalen und senkrecht zu dieser erhält man die normale Stützkraft  $N$  und die tangentielle Stützkraft  $W_r$ ;  $W_r$  ist die Reibungsstützung. Wie aus vorstehendem folgt, ist

$$W_r \leq N \operatorname{tg} \varrho_0 \leq N \mu_0,$$

$\mu_0 = \operatorname{tg} \varrho_0$  wird als **Reibungszahl** oder **Reibungskoeffizient der Ruhe**,  $\varrho_0$  als **Reibungswinkel der Ruhe** bezeichnet.

Wenn die äußere Kraft, die auch die Mittelkraft mehrerer Kräfte sein kann, um mehr als den Grenzwinkel  $\varrho_0$  von der Normalen abweicht, so kann die tangentielle Stützkraft den Gleichgewichtszustand nicht herbeiführen. Die beiden Körper müssen sich gegeneinander verschieben.

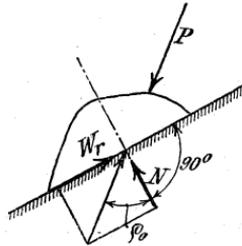
Tafel der Reibungszahlen der Ruhe für verschiedene Baustoffe s. S. 245.

#### b. Gleitende Reibung.

1. Verschieben sich zwei Körper, die mit der Normalkraft  $N$  aneinandergepreßt werden, gegeneinander, so ist dabei ein mit der Bewegungsrichtung zusammenfallender, aber entgegengesetzt wirkender Widerstand, der **Reibungswiderstand**  $W$ , zu überwinden.

Berühren sich die Körper in einer endlichen Fläche (z. B. niedere Elementenpaare), so ist die gegenseitige Bewegung eine rein gleitende, der Reibungswiderstand die sogen. **gleitende Reibung**; berühren sie sich in einer Linie (z. B. höhere Elementenpaare), so kann die Bewegung sowohl gleitend als rollend um die Berührungslinie sein; die

Abb. 97



letztere Bewegung erzeugt die **rollende** oder **wälzende Reibung** (s. S. 248). Bei Berührung in einem Punkte unterscheidet man außer der gleitenden und rollenden Bewegung noch die praktisch unwichtige bohrende Bewegung um die Normale.

2. Man pflegt die Größe des Reibungswiderstandes  $W$  in Abhängigkeit vom Normaldruck  $N$  auszudrücken und schreibt

$$W = \mu N,$$

worin  $\mu$  die **Reibungszahl** oder der **Reibungskoeffizient der gleitenden Bewegung** heißt.

$\mu$  ist jedoch abhängig von: dem Stoff und der Beschaffenheit der Berührungsflächen, den Schmiermitteln zwischen den sich berührenden Flächen, der spezifischen Flächenpressung, der Geschwindigkeit der Reibungsbewegung und der Temperatur.

Bei reichlich geschmierten Reibungsflächen ist nach Petroff der Reibungskoeffizient:

1. dem Koeffizienten der inneren Reibung des betreffenden flüssigen Schmiermittels bei der gegebenen Temperatur,

2. der relativen Geschwindigkeit der reibenden Teile direkt proportional, dagegen

3. der wirklichen mittleren Dicke der zwischen den Reibungsflächen befindlichen Schmierschicht und

4. dem auf die Flächeneinheit der Berührungsfläche ausgeübten Drucke umgekehrt proportional.

5. Bei konstanter Temperatur ist die Dicke der Schmierschicht der Quadratwurzel aus der spezifischen Belastung der Berührungsfläche umgekehrt proportional.

6. Die Temperatur der Schmierschicht ist von den Eigenschaften des Schmiermittels, von der Geschwindigkeit, vom Drucke, von der Wärmeleitung der die Schmierschicht umgebenden Körper und von der umgebenden Lufttemperatur abhängig.

Der Widerstand der gleitenden Reibung  $W$  wächst also im allgemeinen nicht in gleichbleibendem Verhältnis mit dem Normaldruck  $N$ .

$\mu$  ist stets kleiner als  $\mu_0$ .

In wichtigen Fällen sind besondere Versuche zur Ermittlung von  $\mu$  anzustellen.

3. Die Mittelkraft von  $W$  und  $N$  bildet mit der Normalen einen Winkel  $\varrho$ , den **Reibungswinkel**, für den

$$\operatorname{tg} \varrho = \mu \text{ ist.}$$

Der Kreisbogen vom Öffnungswinkel  $2\varrho$  und der Normalen als Achse wird **Reibungskegel** genannt.

4. Ist ein Körper unter dem Einflusse einer Kraft oder vermöge seiner Trägheit in Bewegung, so ist seine Verschiebung durch eine weitere noch so kleine Kraft, z. B. rechtwinklig zur Gleitrichtung in der Bewegungsebene, im Sinne dieser Kraft möglich, wobei der Reibungswiderstand seine Richtung so ändert, daß seine Komponente in der Richtung der ablenkenden Kraft dieser gleich wird.

Hiervon wird praktisch Gebrauch gemacht, wenn der Einfluß der Reibung gegenüber kleinen Kräften, die man behufs einer beabsichtigten Bewegung wirken läßt, möglichst ausgeschaltet werden soll.

**5. Reibungszahlen  $\mu$  und  $\mu_0$  nach Morin u. a. (Flächendrücke 0,96 bis 1,37 kg/qcm).**

Reibende Körper	Lage der Fasern*)	Reibungszahl der gleitenden Bewegung: $\mu$				Reibungszahl der Ruhe: $\mu_0$			
		trocken	wenig fettig	geschmiert	mit Wasser	trocken	wenig fettig	geschmiert	mit Wasser
<b>Metall auf Metall.</b>									
Bronze auf Bronze . . . . .	.	0,20	.	.	.	.	.	.	.
" auf Gußeisen . . . . .	.	0,21	.	.	.	.	.	.	.
" auf Schweifeseisen . . . . .	.	.	0,16	.	.	.	.	.	.
Gußeisen auf Gußeisen oder Bronze . . . . .	.	.	0,15	.	0,31	.	0,16	.	.
Schweifeseisen auf Gußeisen oder Bronze . . . . .	.	0,18	.	.	.	0,19	.	.	.
Schweifeseisen auf Schweifeseisen . . . . .	.	0,44	.	.	.	.	0,13	.	.
Stahl auf Stahl . . . . .	.	.	.	.	.	0,15	.	.	.
<b>Verschiedene Körper.</b>									
Gußeisen auf Eiche . . . . .	=	0,49	0,19	(trock. Seife)	0,22	.	.	.	0,65
Schweifeseisen auf Eiche . . . . .	=	.	.	0,08 (Talg)	0,26	.	.	0,11 (Talg)	0,65
Messing auf Eiche . . . . .	=	.	.	.	.	0,62	.	.	.
Eiche auf Eiche . . . . .	⊥	0,48	.	0,16 (Seife)	0,62	.	.	0,44 (trock. Seife)	0,71
	⊥	0,34	.	.	0,25	0,54	.	.	.
	⊥	0,19	.	.	.	0,43	.	.	.
Rindsleder auf Eiche . . . . .	Leder flach	.	.	.	.	0,61	.	.	.
	Leder hochktg.	0,33	.	.	0,29	0,43	.	.	0,79
Rindsleder als Kolbenliderung (vgl. S. 247) . . . . .	flach	0,56	0,23	0,15 (Oel, Seife)	0,36	.	.	0,12 (Oel, Seife)	0,62
Lederriemen auf Eichen-trommel . . . . .	=	0,27	.	.	.	vrgl. S. 262	0,47	0,28	0,12
" auf Gußeisen . . . . .	flach	0,56	.	.	0,36	.	.	.	0,38
Hanfseil auf rauhem Holz . . . . .	.	.	.	.	.	0,50	.	.	.
" " poliertem " . . . . .	.	.	.	.	.	0,33	.	.	.
Eiche, Weißbuche und Pockholz auf poliertem Granit oder poliertem Messing . . . . .	=	.	.	.	.	.	.	.	.
	⊥	.	.	.	.	.	.	.	.
Steine oder Ziegel auf Ziegel . . . . .	.	glatt bearbeitet	.	.	.	0,53—0,73	.	.	.
	.	mit frischem Mörtel	.	.	.	0,50—0,70	.	.	.
Steine und Kies auf Walzisen . . . . .	.	.	.	.	.	0,42—0,49	.	.	.
Steine und Kies auf Holz . . . . .	.	.	.	.	.	0,46—0,60	.	.	.
Mauerwerk auf Beton . . . . .	.	.	.	.	.	0,76	.	.	.
Mauerwerk auf gewachsenem Boden . . . . .	.	trocken und hart	.	.	.	0,65	.	.	.
	.	mittel	.	.	.	0,45	.	.	.
	.	nass und lettig	.	.	.	0,30	.	.	.
Stahl auf Eis . . . . .	.	0,014	.	.	.	0,027	.	.	.

\*) = bedeutet, daß die Bewegung in der Richtung der Fasern beider Körper, ⊥, daß sie senkrecht gegen die Faser des gleitenden Körpers erfolgt, und ⊥ bedeutet, daß sich Hirnholz auf Langholz in der Faserrichtung des Langholzes bewegt.

### 6. Reibungszahlen der gleitenden Bewegung nach Rennie.

Die Oberflächen wurden geschmiert und dann abgewischt, so daß die Berührungsfächen nur wenig gefettet waren.

Flächendruck in Kg/qcm	Schweiß- eisen aufSchweiß- eisen				Flächendruck in Kg/qcm	Schweiß- eisen aufSchweiß- eisen			
	Gufseisen auf Schweiß- eisen	Stahl auf Gufseisen	Messing auf Gufseisen	Gufseisen auf Schweiß- eisen		Stahl auf Gufseisen	Messing auf Gufseisen		
$\mu =$					$\mu =$				
8,79	0,140	0,174	0,166	0,157	34,10	0,403	0,366	0,356	0,221
13,08	0,250	0,275	0,300	0,225	36,77	0,409	0,366	0,357	0,223
15,75	0,271	0,292	0,333	0,219	39,37	Flächen ange- griffen	0,367	0,358	0,233
18,28	0,285	0,321	0,340	0,214	42,18		0,367	0,359	0,234
20,95	0,297	0,329	0,344	0,211	44,58	0,367	0,367	0,235	
23,62	0,312	0,333	0,347	0,215	47,25	0,376	0,403	0,233	
26,22	0,350	0,351	0,351	0,206	49,92	0,434	Flächen ange- griffen	0,234	
27,42	0,376	0,363	0,353	0,205	55,12	0,434		0,232	
31,50	0,395	0,365	0,354	0,208	57,65	0,434	0,273		

### 7. Reibungszahlen für besondere Fälle.

1. Eiserne **Radreifen** auf trockenen eisernen **Schienen**, nach Poirée.  
(Eisenbahnwagen von 3400 bis 8400 kg Gewicht.)

Geschwindigkeit $v$ in km/st	16,56	26,28	31,68	51,48	72,00	79,20
Reibungszahl	$\mu = 0,209$	0,206	0,171	0,145	0,136	0,112

2. Stählerne **Radreifen** auf **Stahlschienen**, nach Galton.

Geschwindigkeit $v$ in km/st Beginn	10,93	21,8	43,9	65,8	87,6	96,48
Reibungszahl	$\mu = 0,242$	0,088	0,072	0,07	0,057	0,038
		0,027				0,027

3. Gufseiserne **Bremsklötze** an stählernen **Radreifen**, nach Galton.

Geschwindigkeit $v$ in km/st Beginn	8,05	16,09	40,93	72,36	96,48
Reibungszahl	$\mu = 0,330$	0,273	0,242	0,166	0,127
				0,127	0,074

Ist  $v$  die (gleichbleibende) Fahrgeschwindigkeit in km/st, so haben Versuche von Wichert\*) für die gleitende Reibung zwischen Bremsklötzen aus Stahlguf und stählernen Radreifen ergeben

$$\mu = \beta \frac{1 + 0,0112v}{1 + 0,06v}$$

worin für trockene Reibungsflächen  $\beta = 0,45$ , für nasse  $\beta = 0,25$  ist. Soll ein Zug von der Anfangsgeschwindigkeit  $v$  zum Stillstande gebracht werden, so kann man für die ganze Bremsdauer eine mittlere Reibungszahl  $\mu'$  in Rechnung stellen. Für verschiedene  $v$  ergeben sich folgende Reibungszahlen, wobei  $\mu'$  für ungünstige Verhältnisse (feuchte Schienen) bestimmt ist:

Geschwindigkeit $v$ in km/st	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
Trockene Reibungsflächen, $\mu =$	0,450	0,313	0,250	0,215	0,192	0,176	0,164	0,154	0,147	0,141
Nasse Reibungsflächen, $\mu =$	0,250	0,174	0,139	0,119	0,107	0,098	0,091	0,086	0,082	0,078
Mittlerer Wert, $\mu' =$	.	0,201	0,164	0,142	0,128	0,117	0,109	0,103	0,098	0,094

\*) S. Z. d. B. 1894 S. 78.

**4. Bremsen, nach L. Klein\*)** s. a. II. Bd., Fördermaschinen.

$\mu$  bei Geschwindigkeiten von 1 bis 20 m/sk und Drücken von 0,5 bis 10 kg/qcm annähernd unveränderlich.

**Werte von  $\mu$ .**

Holz in Längsfasern, Bremskränze sauber bearbeitet.

	Buche	Eiche	Pappel	Ulme	Weide
Gufseisen . . .	0,29—0,37	0,30—0,34	0,35—0,40	0,36—0,37	0,46—0,47
Schmiedeseisen .	0,54	0,51—0,40	0,65—0,60	0,60—0,49	0,63—0,60

Bei Gufseisen gelten die höheren Werte, wenn die Bremsscheibe mit Benzin gereinigt; die niedrigeren, wenn die Scheibe nur sauber abgewischt ist; bei Schmiedeseisen ist das Entgegengesetzte der Fall.

Für unbearbeitetes Schmiedeseisen ist  $\mu$  schwankend und wesentlich kleiner als für glatte Scheiben.

**5. Druckwasser-Hebezeuge, nach H. Lang.**

a) Bronze- oder Pockholz-Schieber auf Bronze.  $\mu$  ist unveränderlich bei langsamer, wechselseitiger Bewegung und bei Flächen-drücken von 2 bis 100 at.

Schieber unausgesetzt gefettet . . . . .  $\mu = 0,06$ .

Schieber mittels zahlreicher Nuten vom Wasser benetzt  $\mu = 0,10$ .

Schieber trocken laufend und knarrend . . . . .  $\mu$  bis 0,30.

b) Stopfbüchsen mit Hanf, Baumwolle oder Lederstulp gedichtet.  $\mu$  ist unveränderlich bei Wasserpressungen zwischen 1 und 50 at.

$\alpha$ ) **Baumwolle** oder **Hanf**, lose oder geflochten, in heißem Talg getränkt, Kolben glatt, Büchse nicht fest angepresst, also **Packung** noch elastisch, gewöhnliche Abmessungen — selbst noch nach Monaten . . . . .  $\mu = 0,06$  bis 0,11.

$\beta$ ) **Baumwolle** oder **Hanf**, schwierige Verpackung (schwere Stopfbüchse, ungünstige Lage usw.) . . . . .  $\mu$  bis 0,25;

$\gamma$ ) **Lederstulp**,

weiches Leder, gute Ausführung . . . . .  $\mu = 0,08$  bis 0,07;

hartes, stark lohbares Leder . . . . .  $\mu = 0,10$  bis 0,13;

ungünstige Anlage (rauhes Kolben, schmutziges Wasser usw.) . . .  $\mu$  bis 0,20.

Weiteres s. Abschnitt Maschinenteile, unter Stopfbüchsen.

**6. Schleifsteine.** Die Reibungszahl zwischen grobkörnigem Sandstein und Gufseisen  $\mu = 0,21$  bis 0,24, Stahl  $\mu = 0,29$ , Schmiedeseisen  $\mu = 0,41$  bis 0,46, je nachdem der Stein frisch geschärft oder stumpf ist; für feinkörnigen Sandstein ist im Mittel zwischen dem nassen Steine und Gufseisen  $\mu = 0,72$ , Stahl  $\mu = 0,94$ , Schmiedeseisen  $\mu = 1,0$ .

**7. Werte  $\mu$  der Gesamtreibung für Straßenzüge.**

a. bei eisernen Radreifen.\*\*)

Glatte Granitplatten-Bahn . . . . . 0,006.

Gleise der Straßenzüge im Mittel . . . . . 0,006 bis 0,008.

Gute Asphaltstraße . . . . . 0,010.

Vorzügliches Steinpflaster . . . . . 0,015.

\*) S. Mitteil. ü. Forschungsarbeiten, Heft 10, herausgeg. v. V. d. I. u. „Glückauf“ 1903, S. 387.

\*\*) Z. d. B. 1888, S. 543.

Chaussierte StraÙe, gewöhnl. Schotter, in vorzügl. Zustande	0,016.
Gutes Holzpflaster . . . . .	0,018.
Gutes Steinpflaster . . . . .	0,020.
Chaussierte StraÙe, in gutem Zustande . . . . .	0,023.
dsgl., mit Staub usw. bedeckt . . . . .	0,028.
Geringes Steinpflaster . . . . .	0,033.
Chaussierte StraÙe, mit Schlamm bedeckt, ausgefahren . . . . .	0,035.
Erdwege, sehr gute . . . . .	0,045.
Chaussierte StraÙe von sehr geringer Beschaffenheit . . . . .	0,050.
Erdwege, gute bis schlechte . . . . .	0,080 bis 0,160.
Loßer Sand . . . . .	0,15 bis 0,30.

b. bei Gummiradreifen.

Die Art der Bereifung sowie das Gummifabrikat ist von wesentlichem Einfluß. Bei Geschwindigkeiten von 25 km/st haben Versuche mit Automobilen auf Asphaltbahnen ergeben:  $\mu = 0,021$  bis  $0,031$ .

**8. Reibungszahlen für Schlitten.**

Unbeschlagene Holzkufen	} ungeschmiert . . . . . 0,38. } geschmiert mit trockener Seife . . . . . 0,15. } geschmiert mit Talg . . . . . 0,07.
auf glatter Holz- oder Steinbahn,	
Unbeschlagene Holzkufen auf Schnee und Eis . . . . .	
Beschlagene Holzkufen auf Schnee und Eis . . . . .	0,02.

9. Reibungswiderstände von **Eisenbahnfahrzeugen** s. III. Bd.; Reibungswiderstand von Schiffen s. I. Bd., Dynamik flüssiger Körper und II. Bd.. Schiffbau.

**c. Rollende Reibung.**

1. Rollt ein Zylinder, ohne zu gleiten, auf einer wagerechten, ebenen Unterlage, gegen die er mit der Kraft  $Q$  (Normaldruck) geprefst wird (Abb. 98), so ist zur Erzielung der Drehung um den Stützpunkt ein Kräftepaar mit dem Momente

$$M = Qf$$

zu überwinden. Die Größe  $f$  (in cm), der Hebelarm oder die **Reibungszahl der rollenden Bewegung**, ist z. B.

für Pockholz auf Pockholz . . . . .	$f = 0,047$ cm,
„ Ulmenholz auf Pockholz . . . . .	$f = 0,081$ cm,
„ Eisen auf Eisen (und Stahl auf Stahl) i. M. . . . .	$f = 0,05$ cm.

2. Wird das Kräftepaar  $M$  überwunden, z. B. durch eine im Schwerpunkt angreifende Kraft  $P$  (Abb. 99), so gilt für  $P$  die Beziehung

$$Pr = M = Qf.$$

Greift eine Kraft  $P'$  am Umfange dem Stützpunkte gegenüber an (Abb. 99), so gilt

$$P' 2r = M = Qf.$$

3. Wird eine Last  $Q$  auf einer Walze fortgeschoben (Abb. 100) und bedeutet  $f$

Abb. 98.



Abb. 99.

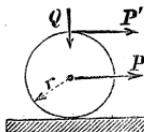
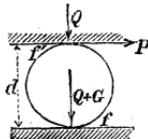


Abb. 100.



die Reibungszahl der rollenden Bewegung für Walze und Unterlage,  $f'$  die für Walze und Last,  $G$  das Eigengewicht der Walze, so ist

$$Pd = M = Qf' + (Q + G)f.$$

4. Ein Zylinder vom Halbmesser  $r$  beginnt auf einer schiefen Ebene zu rollen, wenn ihr Steigungsverhältnis  $\operatorname{tg} \alpha = f : r$  ist; hieraus folgt  $f = r \operatorname{tg} \alpha$ .

## B. Kraft- und Arbeitsverhältnisse der Getriebe.

### a. Allgemeines.

Bezeichnet  $Q$  den Nutzwiderstand eines Getriebes in kg,  
 $P$  die wirkliche Betriebskraft in kg,  
 $q$  den Weg von  $Q$  in Richtung von  $Q$  in m,  
 $p$  den gleichzeitigen Weg von  $P$  in m,

so heißt 
$$\eta = \frac{Qq}{Pp} = \frac{\text{Nutzarbeit}}{\text{gesamte aufgewendete Arbeit}}$$

der **Wirkungsgrad** des Getriebes. Die **Reibungsarbeit**  $A_r = Pp - Qq$ .

Bezeichnet  $P_0$  in kg die ideelle Betriebskraft, welche die Nutzlast  $Q$  ohne Vorhandensein der Reibungswiderstände im Gleichgewichte halten würde, und  $Q_0$  in kg die ideelle Nutzlast, die durch die wirkliche Betriebskraft bei reibungsloser Bewegung überwunden werden könnte, so ist auch

$$\eta = \frac{P_0}{P} = \frac{Q}{Q_0}.$$

Ist für den Rückwärtsgang des Getriebes  $\eta \leq 0$ , so heißt das Getriebe **selbsthemmend** (selbstsperrend); infolge der Reibungswiderstände ist eine Rückwärtsbewegung alsdann von selbst nicht möglich.

Besteht ein Getriebe aus mehreren Teilgetrieben mit den Wirkungsgraden  $\eta_1, \eta_2, \eta_3 \dots$ , so ist der **Gesamtwirkungsgrad**

$$\eta = \eta_1 \eta_2 \eta_3 \dots$$

Das Verhältnis der Reibungsarbeit  $A_r = Pp - Qq$  zur Nutzarbeit  $A_n = Qq$  heißt **verhältnismäßiger Arbeitsverlust**  $\mathfrak{B}$ .

Es ist 
$$\mathfrak{B} = \frac{A_r}{A_n} = \frac{Pp}{Qq} - 1 \quad \text{und} \quad \eta = \frac{1}{1 + \mathfrak{B}}.$$

### b. Keile.

#### 1. Bewegung in Keilnuten.

Wird ein Prisma in eine Keilnut vom Neigungswinkel  $= 2\alpha$  durch die Kraft  $Q$  gepreßt (Abb. 101), so beträgt der bei der Bewegung längs der Achse des Prismas zu überwindende Reibungswiderstand

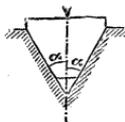


Abb. 101.

$$W = Q \frac{\mu}{\sin \alpha} = Q \mu' \quad \left( \mu' = \frac{\mu}{\sin \alpha} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Reibungszahl für} \\ \text{Keilnutenbewegung} \end{array} \right. \right).$$

Hierbei ist die infolge der Elastizität des Materials beim Eindringen des keilförmigen Umfanges entstehende Reibung außer acht gelassen.

Wird diese berücksichtigt, so ist (s. a. Abschn. Maschinenteile: Reibräder)

$$W = Q \frac{\mu}{\sin \alpha + \mu \cos \alpha}$$

Wirkungsgrad für Keilnuten  $\eta = 0,88 - 0,90$ .

### 2. Keilkette.

Der Keil werde in Richtung der Kraft  $P$  verschoben (Abb. 102); dadurch werde die Kraft  $Q$  überwunden. Die Stützendrücke  $N_1$ ,  $N_2$  und  $N_3$  sowie  $P$  ergeben sich mittels Zeichnung, wenn  $\varrho_1$ ,  $\varrho_2$ ,  $\varrho_3$  die entsprechenden Reibungswinkel bedeuten, nach Abb. 103.

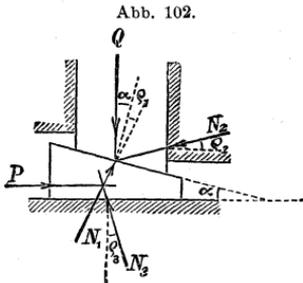


Abb. 102.

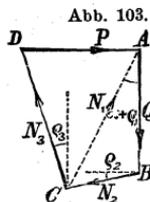


Abb. 103.

Ziehe  $AC$  unter  $\alpha + \varrho_1$  gegen  $Q$ ,  $BC$  parallel zu  $N_2$ , d. i. unter  $90^\circ + \varrho_2$  gegen  $AB$ ; durch den Schnittpunkt  $C$  lege  $CD$  parallel zu  $N_3$ , d. i. unter  $\varrho_3$  gegen  $AB$ . Die Parallele durch  $A$

zu  $P$  ist alsdann  $AD = P$ . Rechnerisch ist hiernach

$$N_1 : Q = \cos \varrho_2 : \cos (\alpha + \varrho_1 + \varrho_2)$$

$$P : N_1 = \sin (\alpha + \varrho_1 + \varrho_2) : \cos \varrho_3$$

$$P : Q = \frac{\cos \varrho_2 \sin (\alpha + \varrho_1 + \varrho_2)}{\cos \varrho_3 \cos (\alpha + \varrho_1 + \varrho_2)}$$

Z. B. ist für  $\varrho_1 = \varrho_2 = \varrho_3 = \varrho$   $P = Q \operatorname{tg} (\alpha + 2\varrho)$

Wirkungsgrad  $\eta = \operatorname{tg} \alpha : \operatorname{tg} (\alpha + 2\varrho)$

Kraft zum Lösen des Keiles  $P_1 = Q \operatorname{tg} (2\varrho - \alpha)$

Selbsthemmung ist vorhanden, solange  $\alpha < 2\varrho$  bzw.  $< \varrho_1 + \varrho_2$ .

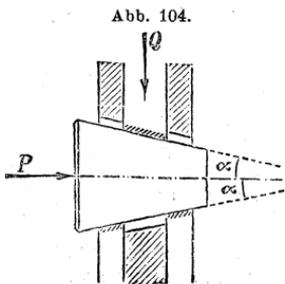


Abb. 104.

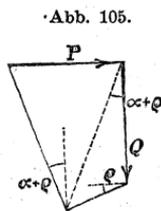


Abb. 105.

Für die Keilkette Abb. 104 ergibt sich (vgl. Abb. 105)

$$P = \frac{2 Q \cos \varrho \sin (\alpha + \varrho)}{\cos (\alpha + 2\varrho)}$$

$$= \frac{2 Q \operatorname{tg} (\alpha + \varrho)}{1 - \operatorname{tg} \varrho \operatorname{tg} (\alpha + \varrho)}$$

$$\sim 2 Q \operatorname{tg} (\alpha + \varrho)$$

$$P_1 \sim 2 Q \operatorname{tg} (\varrho - \alpha)$$

$$\eta = \operatorname{tg} \alpha : \operatorname{tg} (\alpha + \varrho)$$

Selbsthemmung ist vorhanden, solange  $\alpha < \varrho$  bzw.  $2\alpha < \varrho_1 + \varrho_2$ .

### c. Zapfen und Lager. α. Allgemeines.

Die bisher übliche Berechnungsweise\*) der Zapfen- und Lagerreibung nahm eine unveränderliche Reibungszahl an und machte bestimmte Voraussetzungen über die Druckverteilung, je nachdem es sich um neue oder eingelaufene Zapfen handelte. Die Ergebnisse sind jedoch, wie durch Versuche nachgewiesen ist, den tatsächlichen Verhältnissen gegenüber mit erheblichen Fehlern behaftet.\*\*)

Die angestellten Versuche erstrecken sich nur auf zylindrische Tragzapfen und ebene Spurzapfen, so daß eine begründete Reibungsberechnung für andere Zapfenformen z. Z. nicht möglich ist.

#### β. Tragzapfengleitlager.

##### 1. Reibungswiderstand.

Ist  $P$  der auf den Zapfen ausgeübte Druck in kg,  
 $l$  die Länge und  $2r$  der Durchmesser des Zapfens in cm,  
 $p = \frac{P}{2rl}$  der mittlere Normaldruck (spezifische Lagerbelastung)  
 in kg/qcm,  
 $\mu_1$  die Zapfenreibungszahl,  
 $\bar{\mu} = \mu_1 p$  die Zapfenreibungszahl der Flächeneinheit (spezifische Reibungszahl), so ist

das **Moment der Zapfenreibung** für den zylindrischen Zapfen (Abb. 106)

$$M = \mu_1 P r \text{ in cmkg.}$$

Die sekundliche Reibungsarbeit bei  $n$  Uml./min

$$A_r = \frac{M \pi n}{30} = \mu_1 \frac{P r \pi n}{30} \text{ in cmkg/sk.}$$

Bei kegelförmigen Zapfen (Abb. 107) ist für  $r$  der mittlere Halbmesser

$$r_m = \frac{r + R}{2} \text{ zu nehmen.}$$

Abb. 106.

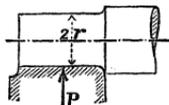
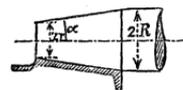


Abb. 107.



Für die **zeichnerische** Behandlung kann die Zapfenreibung dadurch Berücksichtigung finden, daß man den Lagergedruck nicht durch die Zapfenachse gehen läßt, sondern berührend an einen Kreis, den (Zapfen-) Reibungskreis, legt, dessen Halbmesser sich zu  $a = \mu_1 r$  ergibt.

##### 2. Werte der Zapfenreibungszahl $\mu_1$ .

1. Die Zapfenreibungszahl ist wegen der unvermeidlichen Ungenauigkeit bei der Herstellung größer für neue und geringer für eingelaufene Zapfen.

2. Die Zapfenreibungszahl ist abhängig von der Lagerbelastung, der Zapfenumfangsgeschwindigkeit, der Temperatur, dem Schmiermittel und der Lagerform. Aus den Versuchen von Thurston,\*\*\*) Tower,\*\*\*)

\*) Vgl. Bach, Maschinenelemente, 10. Aufl., S. 502 u. f.

\*\*) Vgl. Sommerfeld, Hydrodynamische Theorie der Schmiermittelreibung. Zeitschrift f. Math. u. Physik 1904 S. 97.

\*\*\*) Engineer, 1884, Bd. 58 S. 57 u. f.

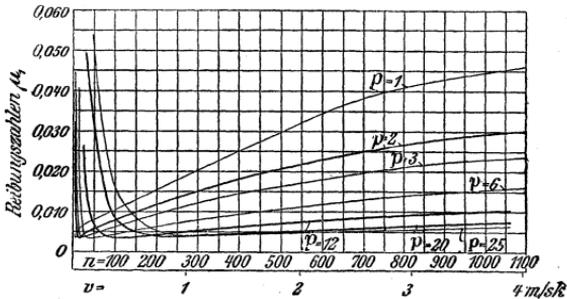
Stribeck,\*) Lasche,\*\*) Heimann\*\*\*) folgt für vollkommen geschmierte Zapfen:

a) Für ungeteilte Lager, bei denen eine ununterbrochene Druckverteilung rings um die Welle möglich ist, ist die spezifische Reibungszahl  $\bar{\mu}$  vom Druck unabhängig, die Zapfenreibungszahl also dem Flächen-  
druck umgekehrt proportional. Für geteilte oder besonders aus-  
gesparte Lager, bei denen eine ununterbrochene Druckverteilung rings  
um die Welle nicht vorhanden ist, gilt das genannte Gesetz nicht  
mehr. Die Reibung wächst (bei gleichem Drucke) mit der Größe der  
Reibungsfläche.

b) Die Reibungszahl der Ruhe ist unabhängig von der Pressung.  
Die Reibungszahl der Bewegung nimmt mit zunehmender Geschwindig-  
keit zunächst ab, und zwar bei kleinen Pressungen schneller als bei  
größeren. Nach Erreichung eines für alle (zulässigen) Pressungen  
annähernd gleichen Mindestwertes nimmt die Reibung wieder zu: bei  
kleinen Pressungen schneller als bei großen, um einer von der Ge-  
schwindigkeit unabhängigen Grenze, die bei 10 m/sk erreicht wird,  
zuzustreben. (Vrgl. Abb. 108.)

Abb. 108 nach Stribeck.

Versuchsgegenstand: Sellerslager mit Ringöler, 70 mm Durchmesser,  
230 mm Länge. Schmierung durch Gasnotorenöl. Oeltemperatur 25° C.



c) Eine Temperatursteigerung innerhalb gewisser Grenzen (0° bis 40°)  
hat eine Verminderung von  $\mu_1$  zur Folge, u. zw. verändert sich  $\mu_1$  un-  
gefähr umgekehrt proportional der Temperatur über dem Nullpunkte.

d) Die spezifische Reibungszahl ist angenähert umgekehrt propo-  
rtional der Oelschichtdicke bezüglich dem Lagerspielraum.

3. Bezüglich der Einwirkung verschiedener Schmierverfahren  
ermittelte Tower bei einem Stahlzapfen in Bronzeschale mit  $d = 102$  mm,  
 $l = 152$  mm für Rüböl (Umfangsgeschwindigkeit 0,8 m/sk): †)

\*) S. Z. d. V. d. I. 1902 S. 1341.

\*\*) S. Z. d. V. d. I. 1902 S. 1881.

\*\*\*) S. Z. d. V. d. I. 1905 S. 1161.

†) S. Z. d. V. d. I. 1885 S. 836 u. f.

Bei Oelbad . . . .  $p_m = 18,5$  kg/qcm .  $\mu_1 = 0,00139$   
 „ Dochtschmierung und  $p_m = 17,1$  kg/qcm .  $\mu_1 = 0,00980$   
 „ Reibekissen . . . .  $p_m = 19,1$  kg/qcm .  $\mu_1 = 0,00900$

4. Reibungsziffern  $\mu_1$  für verschiedene Oelsorten nach Versuchen des Materialprüfungsamts\*) mittels Martensscher Oelprobiermaschine (Stahlzapfen  $d = 100$  mm,  $l = 70$  mm in Oelbad) sind in Tafel I zusammengestellt.

Tafel I.

Bezeichnung des Oeles	Druck in kg/qcm								
	10			25			40		
	Geschwindigkeit in m/sk								
	0,5	1,0	2,0	0,5	1,0	2,0	0,5	1,0	2,0
Rohes Rüböl . .	0,01068	0,01297	0,01862	0,00599	0,00617	0,00965	0,00497	0,00565	0,00676
Rohes Rüböl (aus den Achsbüchsen entnommen) . .	0,05341	0,02518	0,05722	—	0,02139	0,03727	—	—	—
Rohes Rüböl (fil- triert) . . . .	0,01373	0,01572	0,02289	0,00849	0,00959	0,01375	0,00676	0,00764	0,01031
Ger. Rüböl . . .	0,00748	0,01373	0,01434	0,00635	0,00782	0,01075	0,00554	0,00642	0,00802
Amerik. Mineral- öl, durchsichtig, dünnflüssig . .	0,00504	0,00763	0,00961	0,00458	0,00532	0,00611	0,00378	0,00390	0,00451
Russ. Mineralöl, durchsichtig, dünnflüssig . .	0,00763	0,01251	0,01572	0,00623	0,00819	0,00996	0,00493	0,00573	0,00760
Deutsches Zylinder- öl, undurchsichtig, dickflüssig . . . .	0,08027	0,06791	0,05921	0,04094	0,03617	0,03122	0,03083	0,02590	0,02109
Gasmotorenöl (Mischöl) . . .	0,00702	0,00916	0,01389	0,00586	0,00752	0,00947	0,00481	0,00619	0,00714

5. Die Abhängigkeit der Reibungszahl von Geschwindigkeit und Flächendruck zeigen die von Stribeck\*\*) und Lasche\*\*\*) gefundenen Werte der Abb. 111 und der Tafeln II u. III.

Tafel II: Werte  $\mu_1$  nach Stribeck.

Versuchsgegenstand: Weißmetallager mit Ringöler;  $2r = 70$  mm,  $l = 70$  mm. Schmierung durch Gasmotorenöl. Oeltemperatur 25°.

$v =$ m/sk	$p = 1$	2,25	4	9	16	25	36	49
7,7	—	0,0573	0,04	0,0209	0,0136	0,0112	—	—
4,03	0,067	0,048	0,0355	0,02	0,0128	0,0102	0,0087	0,0077
2,78	0,05	0,039	0,0288	0,0168	0,0114	0,0091	0,008	0,0071
1,39	0,0415	0,0302	0,0213	0,0126	0,0085	0,007	0,0063	0,0059
0,97	0,028	0,0212	0,0156	0,0091	0,0064	0,0052	0,0048	0,0045
0,23	0,018	0,0108	0,0081	0,0051	0,0035	0,0030	0,0027	0,0026
0,12	0,013	0,0072	0,0052	0,0032	0,0025	0,0021	0,0020	0,0020
0,044	0,0095	0,0046	0,0031	0,0020	0,0019	0,0017	0,0017	0,0025
0,029	0,0074	0,0039	0,0036	0,0018	0,0016	0,0017	0,0023	0,0058
0,018	0,0067	0,0034	0,0033	0,0017	0,0016	0,0019	0,0031	0,0089
0	—	0,21	0,21	0,21	0,21	0,22	0,22	0,23

\*) Vgl. Mittell. d. Materialprüfungsamts Groß-Lichterfelde.

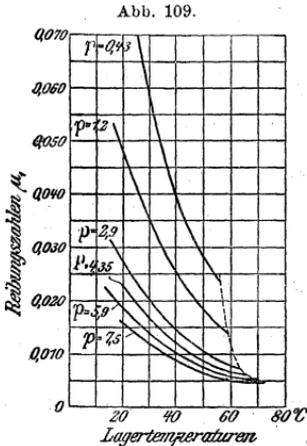
\*\*) Z. d. V. d. I. 1902 S. 1341 u. f.    \*\*\*) Z. d. V. d. I. 1902 S. 1881 u. f.

## Tafel III nach Lasche.

Versuchsgegenstand: Stahlzapfen. Lagerschalen: Weifsmetall.  
 $d = 110$  mm,  $l = 240$  mm,  $p = 6,5$  kg/qcm. Oeltemperatur  $50^\circ$ .  
 Schmierung mit Imperial 0.

$v$ m/sk	3	5	10	15	20	23
$\mu$	0,0057	0,0067	0,0083	0,0104	0,010	0,0102

6. Einfluss der Lagertemperatur nach Stribeck, Abb. 109 (Versuchsgegenstand wie bei Abb. 111). Umdrehungen i. d. Min. 1100 entsprechend 4,03 m/sk Umfangsgeschwindigkeit.



7. Für überschlägliche Rechnungen, bei denen eine gewisse Sicherheit gegen zu niedrige Beurteilung der Reibung verlangt wird, kann genommen werden: bei guter Schmierung mit Rüböl, Mineralfett, Mineralöl oder deren Mischungen mit Petroleum für gut eingeschliffene Stahlzapfen in Bronzelagern  $\mu_1 = 0,06$ . Bei schlechter Schmierung und im Freien (Seiltriebe, Drehscheiben, Schiebebühnen usw.) ist  $\mu_1 = 0,08$  bis  $0,10$ .

 $\gamma$ . Spurzapfenlager.

## 1. Reibungswiderstand.

Ist  $P$  der Zapfendruck in der Zapfenachse in kg,

$dF$  ein Element der Zapfenoberfläche in qcm,  
 $y$  dessen Abstand von der Drehachse in cm,  
 $p$  der unveränderliche Normaldruck in  $dF$  in kg/qcm,  
 $\mu$  die Reibungszahl für gleitende Reibung,

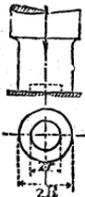
so ist das Moment der Zapfenreibung

$$M = \mu p \int y dF \text{ in cmkg,}$$

die sekundliche Reibungsarbeit bei  $n$  Uml./min

$$A = \frac{M \pi n}{30} \text{ in cmkg/sk.}$$

Abb. 110.



Für den Zapfen nach Abb. 110 folgt dann für:  
 „Ebene Ringfläche“ (Kammzapfen bei Halslagern)

$$M = \frac{2}{3} \mu P \frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2};$$

„Voller ebener Zapfen“

$$M = \frac{2}{3} \mu P R.$$

2. Werte der Reibungszahl  $\mu$ .

1. Allgemeines über Veränderlichkeit von  $\mu$  und seine Größe vgl. S. 244. Im übrigen gilt auch hier das Gesetz wie für Tragzapfen, dafs die Reibungszahl umgekehrt mit der Pressung und direkt mit der Dünflüssigkeit des Oeles, d. h. mit zunehmender Temperatur abnimmt,\*) und zwar umsoweniger, je gröfser die Pressung ist.

2. Einflufs von Pressung und Temperatur auf die Reibungszahl nach Versuchen von Woodbury\*) aus nachstehender Tafel:

Versuchsgegenstand: Ringzapfen aus Stahl, 57,8 mm äufserer und 36,3 mm innerer Durchmesser. Geschwindigkeit 300 Uml./min. Schmierung mit Paraffinöl.

$p$ in at	Temperatur				
	15,5° C.	21° C.	26,5° C.	32° C.	37,5° C.
0,07	0,34	0,268	0,212	0,17	0,138
0,35	0,09	0,074	0,0620	0,0520	0,0436
0,70	0,0554	0,0468	0,0402	0,0348	0,0302
1,05	0,0435	0,0375	0,0325	0,0280	0,0257
1,4	0,0375	0,0327	0,0289	0,0257	0,0227
1,76	0,0336	0,0296	0,0265	0,0236	0,0210
2,1	0,0307	0,0273	0,0245	0,0222	0,0199
2,46	0,0286	0,0256	0,0231	0,0210	0,0190
2,8	0,0221	0,0243	0,0221	0,0201	0,0181

## d. Kugellager.

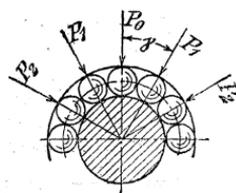
## 1. Reibungswiderstand.

Ist  $P$  die Belastung eines Laufringes in kg,  
 $S$  die Summe aller Einzelbelastungen der Kugeln in kg,  
 $\gamma$  der Winkel der Stütznormalen zweier benachbarter Kugeln,  
 $d$  der Kugeldurchmesser in cm,  
 $D_0$  der Durchmesser des Kreises der Kugelmittelpunkte im cm,  
 $f$  die Reibungszahl der rollenden Bewegung in cm,  
 $\mu_i$  die ideelle Reibungszahl für Kugellager,  
 $r$  der Halbmesser der Welle in cm,  
 so ist unter Beibehaltung der übrigen Bezeichnungen wie unter  $\beta$ , nach Stribeck\*\*) (vgl. Abb. 111),

$$M = Sf \frac{D_0}{d} = \mu_i Pr \text{ cmkg}$$

$$Ar = Sf \frac{D_0}{d} \frac{\pi n}{30} \text{ cmkg/sk}$$

Abb. 111.



\*) S. Z. d. V. d. I. 1885 S. 450 u. f.

\*\*) S. Z. d. V. d. I. 1901 S. 121.

$$S = P_0 + 2P_1 + 2P_2 + \dots + 2P_n$$

$$P_1 = P_0 \cos^{3/2} \gamma \quad P_2 = P_0 \cos^{5/2} 2\gamma \text{ usf.}$$

$$P = P_0 (1 + 2 \cos^{3/2} \gamma + 2 \cos^{5/2} 2\gamma + \dots + 2 \cos^{5/2} n\gamma).$$

Für  $z = 10$  bis 20 Kugeln im Umfange einer Laufrinne ergibt sich dann angenähert

$$P_0 = \frac{5}{z} P \quad S \sim 1,2 P \quad f = \frac{r \mu_i}{1,2 \frac{D_0}{d}}$$

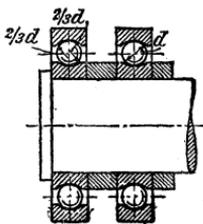
Die Reibungsarbeit  $A_r$  vermindert sich mit abnehmendem Verhältnis  $D_0 : d$ , wird also um so kleiner, je weniger Kugeln der Lauftring faßt (s. auch Abschnitt Maschinenteile, Lager).

## 2. Zapfenreibungszahlen $\mu_i$ .

Die ideelle Reibungszahl  $\mu_i$  ist innerhalb weiter Grenzen von der Umdrehungszahl und Temperatur unabhängig, nimmt dagegen mit wachsender Belastung ab.

1. Versuche von Stribeck zeigen, dafs für  $\mu_i$  die Bauart des Lagers von weitgehendstem Einflufs ist. Für ein Lager nach Abb. 112 mit  $r = 3,5$  cm,  $D_0 = 10,2$  cm,  $d = 7/8'' = 2,2225$  cm (Laufringe aus Stahl, sauber geschliffen, die Laufflächen der Ringe bilden im Querschnitt Kreisbogen, deren Halbmesser  $2/3$  des Kugeldurchmessers betragen, diese Konstruktion für grofse Belastungen am besten geeignet) ist  $\mu_i$ :

Abb. 112.



Belastung $P$ in kg	Umdrehungen i. d. Min.		
	65	385	780
380	0,0033	0,0035	0,0037
850	0,0020	0,0021	0,0022
1100	0,0017	0,0018	0,0019
1580	0,0016	0,0016	0,0017
2050	0,0015	0,0015	0,0015
<b>3000</b>	<b>0,0015</b>	<b>0,0013</b>	<b>0,0013</b>
4900	.	.	0,0011

## ε. Rollenlager.\*)

### 1. Reibungswiderstand.

Ist  $P$  die Gesamtlagerbelastung in kg,

$b$  die Rollenlänge in cm,

$d$  der Rollendurchmesser in cm,

$z$  die Zahl der Rollen,

$D_0$  der Durchmesser des Kreiszyinders, auf dem die Rollenachsen sich bewegen,

$$p = \frac{P}{\frac{z}{5} l d} \text{ die grösste spezifische Lagerbelastung,}$$

\*) S. Z. d. V. d. I. 1902 S. 1463.

so gelten nach Stribeck sinngemäß die gleichen Formeln wie für Kugellager.

Unter Beibehaltung der übrigen Bezeichnungen wie unter  $\beta$  und  $\delta$  ist dann

$$M = 1,2 P f \frac{D_0}{d} = \mu_i P r \text{ cmkg.}$$

Größte Belastung der Rollen bei  $z = 10$  bis  $20$  angenähert

$$P_0 = 5 \frac{P}{z}.$$

## 2. Zapfenreibungszahlen $f$ und $\mu_i$ .

Die Reibung ist fast unabhängig von der Geschwindigkeit, und auch die Reibung der Ruhe unterscheidet sich nur unerheblich von der Reibung der Bewegung. (Kleiner Anlaufwiderstand.) Mit wachsender Belastung nimmt die Reibung ab, ebenso mit zunehmender Temperatur.

Für Rollenlager verschiedener Bauarten haben Versuche ergeben:

$p = 3$	$5$	$7,5$	$10$	$15$
$f = 0,0045$	$0,0034$	$0,0027$	$0,0023$	$0,0018;$

dann  $\mu_i = \frac{1,2 D_0}{r d} f.$

## d. Schrauben.

### 1. Flachgängiges (Rechteck-) Gewinde.

Es sei

$r$  der Halbmesser der mittleren Schraubenlinie,  
 $h$  die Steigung oder Ganghöhe der Schraube,  
 $\alpha$  der Steigungswinkel der mittleren Schraubenlinie ( $\text{tg} \alpha = h : 2 \pi r$ ),  
 $\mu = \text{tg} \varrho$  die Reibungszahl der gleitenden Bewegung (vgl. S. 243 u. f.).

Abb. 113.

Für die **Bewegung** der Schraube ist

$$P = Q \text{tg} (\alpha \pm \varrho) = Q \frac{h \pm 2 \pi r \mu}{2 \pi r \mp \mu h}$$

(ohne Berücksichtigung der Halszapfenreibung);

das obere Zeichen gilt für die Bewegung entgegengesetzt der Richtung von  $Q$ , das untere Zeichen für die Bewegung im Sinne von  $Q$ .

Die Kraft  $P$  ist hierbei rechtwinklig zur Achse im Abstand  $r$  von dieser wirkend gedacht (Abb. 116). Die Kraft  $K$ , gleichgerichtet mit  $P$ , am Hebelarm  $R$  angreifend, folgt aus Abb. 113 zu

$$Pr = KR.$$

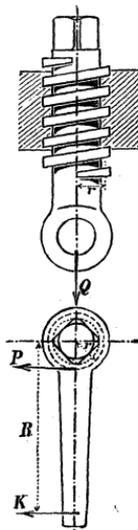
Selbsthemmung tritt ein, wenn

$$\alpha \geq \varrho,$$

wobei die Reibungsziffer der Ruhe in Frage kommt.

Wirkungsgrad  $\eta = \text{tg} \alpha : \text{tg} (\alpha + \varrho)$ , bzw.

$$\eta = \text{tg} (\alpha - \varrho) : \text{tg} \alpha.$$



$\eta$  wird am größten für  $\alpha = 45^\circ - \frac{1}{2} \rho$ ; z. B. ist  $\eta_{\max} = 0,81$  für  $\alpha = 42^\circ$  bei  $\mu = 0,1$ . Da  $\eta$  nur für  $\alpha$  bis  $\sim 20^\circ$  stark zunimmt, so geht man meist nur bis  $\alpha = 20^\circ$ ; hierfür wird  $\eta = 0,74$ . Bei Pressen, bei denen es auf große Kraftübersetzung ankommt, wählt man  $\alpha$  bis  $3^\circ$  herab, wofür  $\eta = 0,27$  wird.

## 2. Scharfgängiges (Dreieck-) Gewinde.

$\beta$  der halbe Kantenwinkel des Gewindes,  
 $r$  der Halbmesser der mittleren Schraubenlinie,  
 $h$  die Steigung oder Ganghöhe der Schraube,  
 $\alpha$  der Steigungswinkel der mittleren Schraubenlinie ( $\operatorname{tg} \alpha = h : 2\pi r$ ),  
 $\mu = \operatorname{tg} \rho$ , vrgl. S. 243 u. f.)

Kräfte  $P$  und  $Q$  wie vorstehend beim flachgängigen Gewinde.

1. Für die **Bewegung** der Schraube ist

$$P = Q \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \mu \cos \alpha \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \beta}}{1 \mp \mu \sin \alpha \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \beta}}$$

Da  $\alpha$  gegen  $\beta$  in der Regel klein, so ist sehr angenähert

$$\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \beta} = 1 : \cos \beta,$$

setzt man dann

$$\frac{\mu \cos \alpha}{\cos \beta} = \operatorname{tg} \rho',$$

so wird

$$P = Q \operatorname{tg} (\alpha \pm \rho').$$

Das obere Zeichen gilt für Bewegung entgegengesetzt der Richtung von  $Q$ , das untere Zeichen für Bewegung im Sinne von  $Q$ .

Selbsthemmung tritt ein, wenn  $\alpha \leq \rho'$ , wobei die Reibungsziffer der Ruhe in Frage kommt.

Wirkungsgrad  $\eta = \operatorname{tg} \alpha : \operatorname{tg} (\alpha + \rho')$ , bzw.  $\eta = \operatorname{tg} (\alpha - \rho') : \operatorname{tg} \alpha$ .

Für das Dreiecksgewinde ist also, da  $\rho' > \rho$ , der Wirkungsgrad kleiner als für das Rechtecksgewinde. Für  $\beta = 0$  ist  $\eta$  am größten.

Beispiel. Es sei  $\alpha = 2^\circ 10'$ ;  $\beta = 27^\circ 30'$ ;  $\mu = \operatorname{tg} \rho = 0,16$ , also  $\rho = 9^\circ 5,5'$ .

Es wird  $\frac{0,16 \cdot \cos 2^\circ 10'}{\cos 27^\circ 30'} = 0,180$  also  $\rho' = 10^\circ 10'$

mithin  $P = Q \operatorname{tg} (\alpha + \rho') = Q \operatorname{tg} 12^\circ 10' = 0,216 Q$   $\eta = \frac{\operatorname{tg} 2^\circ 10'}{\operatorname{tg} 12^\circ 10'} = 0,175$

Für Rechtecksgewinde würde sein

$$P = Q \operatorname{tg} (\alpha + \rho) = 0,199 Q \quad \eta = 0,190$$

Selbsthemmung in beiden Fällen.

Durch Zeichnung ergibt sich  $P$ , wie aus Abb. 114 und 115 ersichtlich, indem man zuerst  $\rho'$  aufsucht.

Abb. 114.

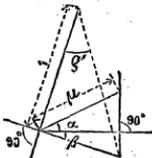
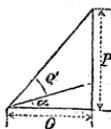


Abb. 115.



2. Ist für eine Schraube mit Dreiecksgewinde  $d$  der Gewindedurchmesser in den Spitzen,  $d_1$  der Kerndurchmesser und  $s_0$  die Schlüsselweite, so ist

$$r = \frac{d + d_1}{4} \operatorname{tg} \alpha = \frac{2h}{\pi(d + d_1)}$$

$$\operatorname{tg} \rho' = \frac{\mu \cos \alpha}{\cos \beta} \quad r_0 = \frac{d + s_0}{4} \sim 1,4 r$$

Alsdann ist zum **Anziehen der Mutter** ein Drehmoment auszuüben

$$M = Pr + Qr_0\mu' = [\operatorname{tg}(\varrho' + \alpha) + 1,4\mu'] Qr$$

und zum **Lösen der Mutter**

$$M = [\operatorname{tg}(\varrho' - \alpha) + 1,4\mu'] Qr,$$

wenn  $\mu'$  die Reibungszahl zwischen Mutter und Unterlage und  $r_0$  den mittleren Halbmesser der Mutter-Sitzfläche bedeutet.

**Beispiel.** Für eine Schraube mit **internationalem** Gewinde (vgl. Abschn. Maschinenteile, Schrauben) sei  $d = 20$  mm,  $d_1 = 16,48$  mm,  $h = 2,5$  mm,  $2\beta = 60^\circ$ ; mithin  $r = 9,12$  mm,  $\operatorname{tg} \alpha = 0,04360$ ,  $\alpha = 2^\circ 30'$ . Ist  $\mu = \mu' = 0,41$ , so findet sich  $\varrho' = 25^\circ 20'$ .

Zum **Anziehen** der Mutter ist erforderlich ein Moment

$$M = (\operatorname{tg} 27^\circ 50' + 1,4 \cdot 0,41) Qr = 1,102 Qr = 10,0 Q \text{ in mmkg.}$$

Zum **Lösen** der Mutter ist erforderlich ein Moment

$$M = (\operatorname{tg} 22^\circ 50' + 1,4 \cdot 0,41) Qr = 0,995 Qr = 9,1 Q \text{ in mmkg.}$$

## e. Zahnräder.

### 1. Stirnräder.

#### Bestimmung des verhältnismäßigen Arbeitsverlustes $\mathfrak{B}$ .

Berühren sich zwei Profile in  $E$  (Abb. 116) und bedeuten  $ES$  die Berührungsnormale,  $M_1$  und  $M_2$  die Mittelpunkte der beiden Räder, so erhält man den verhältnismäßigen Arbeitsverlust (s. S. 249)  $\mathfrak{B}$  für die augenblickliche Stellung durch Zeichnung wie folgt: Man ziehe zu  $ES$  im Abstände  $\mu$  eine Parallele. Die beiden Halbmesser  $M_1E$  und  $M_2E$  schneiden auf dieser eine Strecke  $AB$  ab, die, in demselben Maßstabe wie  $\mu$  gemessen, den Wert von  $\mathfrak{B}$  angibt. ( $\mu$  ist die Reibungszahl der gleitenden Bewegung.)

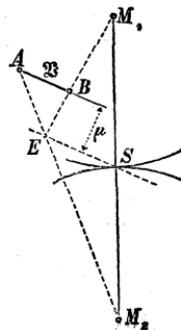
Für die üblichen Zahnprofilformen ist  $\mathfrak{B}$  sehr annähernd proportional den Längen der Eingriffbogen  $e$ , gemessen vor und hinter der Zentrale  $M_1M_2$ . (Vgl. Abschnitt Maschinenteile, II.) Als Mittelwert von  $\mathfrak{B}$  für den Eingriffbogen  $e_1$  ergibt sich daher (solange nur ein Zahn im Eingriff ist)  $\frac{1}{2}\mathfrak{B}_1$ , wenn  $\mathfrak{B}_1$  den dem Endpunkte des Eingriffbogens  $e_1$  entsprechenden Wert von  $\mathfrak{B}$  bedeutet.

Sind die Eingriffbogen vor und hinter der Zentrale gleich, so ist dieser Wert unmittelbar als mittlerer verhältnismäßiger Arbeitsverlust  $\mathfrak{B}_m$  des Zahnrädergetriebes zu betrachten.

Sind die Eingriffbogen verschieden, u. zw. gleich  $e_1$  und  $e_2$ , die den Endpunkten der Eingriffbogen entsprechenden Werte  $\mathfrak{B}_1$  und  $\mathfrak{B}_2$ , so kann nach Grashof als Mittelwert gelten

$$\mathfrak{B}_m = \frac{\mathfrak{B}_1 e_1 + \mathfrak{B}_2 e_2}{2(e_1 + e_2)}.$$

Abb. 116.



Bedeutend  $z_1$  und  $z_2$  die Zähnezahlen der im Eingriffe befindlichen Räder,  $t$  die Zahnteilung,  $\tau_1 = \frac{e_1}{t}$ ,  $\tau_2 = \frac{e_2}{t}$ ,  $\tau = \tau_1 + \tau_2$  die Eingriffsdauern, so findet sich auch

$$\mathfrak{B} = \pi \mu \left( \frac{1}{z_1} \pm \frac{1}{z_2} \right) \frac{\tau_1^2 + \tau_2^2}{\tau_1 + \tau_2} \sim \pi \mu \left( \frac{1}{z_1} \pm \frac{1}{z_2} \right) \frac{\tau}{2}.$$

Das + -Zeichen gilt für Vollräder, das - -Zeichen für Hohlräder.

Beachtet man, daß bei einer Eingriffsdauer  $\tau$  zwischen 1 und 2 abwechselnd 1 und 2 Zähne im Eingriffe stehen, so erhält man für  $\mathfrak{B}$  genauer

$$\mathfrak{B} = \pi \mu \left( \frac{1}{z_1} \pm \frac{1}{z_2} \right) (\tau_1^2 + \tau_2^2 - \tau_1 - \tau_2 + 1) \quad \text{oder}$$

$$\mathfrak{B} \sim \pi \mu \left( \frac{1}{z_1} \pm \frac{1}{z_2} \right) \left( \frac{\tau^2}{2} - \tau + 1 \right) = \pi \mu \left( \frac{1}{z_1} \pm \frac{1}{z_2} \right) \psi.$$

$\mu = 0,1$  bis  $0,3$ , je nach Material und Oberflächenbeschaffenheit der Räder, wobei diese Werte für gut eingelaufene Räder noch unterschritten, für rohe Räder noch überstiegen werden können.

Mit dem Mittelwert  $\mu = 0,16$ ,  $\pi \mu = 0,5$  wird

für $\tau = 1$	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0
$\psi = 0,5$	0,505	0,520	0,545	0,58	0,625	0,68	0,745	0,82	0,905	1,0

$\tau_1$  und  $\tau_2$  sind für die gebräuchlichen Verhältnisse bei Zykloiden- und Evolventenverzahnung allein von den Zähnezahlen  $z_1$  und  $z_2$  abhängig, u. zw. für

Zykloidenverzahnung:										Evolventenverzahnung:									
$z_1 = 7$	10	15	20	30	40	50	$\infty$	$z_1 = 20$	25	30	40	50	60	8					
$\tau_1 = 0,58$	0,60	0,64	0,66	0,68	0,69	0,71	0,75	$\tau_1 = 0,84$	0,90	0,92	0,97	0,99	1,02	1,24					

Ist die Zahnform gezeichnet, so empfiehlt sich das Verfahren unter II. im Abschnitt Maschinenteile.

Bei der **zeichnerischen** Bestimmung der Reibungsverluste in einem Getriebe läßt sich der Verlust durch Zahnreibung an einem Räderpaare dadurch berücksichtigen, daß man die Richtung des Zahndruckes nicht durch den Berührungspunkt  $S$  der beiden Teilkreise legt, sondern durch einen Punkt der Zenträle, der von  $S$  nach dem Mittelpunkt des getriebenen Rades hin um die Strecke  $\xi = \mu \frac{1}{2} t$  verschoben ist.

Gesamtwirkungsgrad eines Stirnradvorgeleges einschl. Zapfenreibung (maschinengeformte rohe Zähne)  $\eta = 0,92$  bis  $0,95$ .

## 2. Keglräder.

Die Formeln unter 1. für Vollräder gelten auch hier, wenn man

$$\text{statt } \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} \text{ den Wert } \sqrt{\frac{1}{z_1^2} + \frac{1}{z_2^2} + \frac{2 \cos \varepsilon}{z_1 z_2}} \text{ setzt,}$$

unter  $\varepsilon$  den Winkel verstanden, den die Achsen der beiden Räder miteinander bilden.

## 3. Schraubenräder.

Zu der eigentlichen Zahnreibung tritt noch die meist viel größere Reibung hinzu, die durch Gleiten der Zähne in ihrer Breitenrichtung

entsteht. Bezeichnen  $\gamma$  und  $\gamma_1$  die Neigungswinkel der beiden Schraubenräder, so ist der von diesem Gleiten herrührende verhalmis- masige Arbeitsverlust

$$\mathfrak{B}_s = \frac{\sin \gamma_1 \sin (\gamma + \varrho)}{\sin \gamma \sin (\gamma_1 - \varrho)} - 1.$$

Für den besonderen Fall der **Schraube ohne Ende** (mit  $\gamma_1 = 90^\circ - \gamma$ ) wird

$$\mathfrak{B}_s = \frac{\operatorname{tg} (\gamma + \varrho)}{\operatorname{tg} \gamma} - 1 = \frac{1 + \frac{2 \pi r}{t} \mu}{1 - \frac{t}{2 \pi r} \mu} - 1,$$

wenn  $t$  die Teilung,  $r$  den mittleren Halbmesser der Schnecke und  $\mu = \operatorname{tg} \varrho$  die Reibungszahl für gleitende Bewegung bedeutet.

Der Verlust durch Zahnreibung beträgt in diesem Falle

$$\mathfrak{B} = \frac{\pi \mu}{z} \psi \quad (z = \text{Zähnezahl des Schraubenrades, } \psi \text{ s. S. 260}).$$

Werte für  $\mu$  vgl. S. 246, wobei über die Abhängigkeit von  $\mu$  das auf S. 244 Gesagte zu beachten ist. Vgl. auch Abschn. Maschinenteile, Schneckenräder.

Nach Stribeck für eingelaufene, eingängige Schnecken, Guseisen auf Guseisen (äußerer Durchmesser 95 mm, Kerndurchmesser 60 mm)  $z = 30$ , Zahnbreite 77 mm, Ganghöhe 25,13 mm, Schneckenraddurchmesser 240 mm),  $P =$  Zahndruck,  $v =$  Gleitgeschwindigkeit im Teilkreis.

$v$ m/sk	$P$ kg	$\mu$ (bei 60° C.)
0,5	500	0,060
1	500	0,051
1,5	500	0,047
2	400	0,040
3	250	0,030
4	160	0,025

## f. Zugmittel.

### 1. Kraftverhältnisse.

Bezeichnet bei einem um einen Zylinder geschlungenen Zugmittel (Riemen, Seil, Bremsband) (Abb. 117)

$S_1$  die Spannkraft am ziehenden Ende in kg,

$S_2$  „ „ „gezogenen „ „ „

$P = S_1 - S_2$  die durch die Reibungsstutzung übertragbare Umfangskraft, die gleich ist dem Reibungswiderstand  $W$  zwischen Zugmittel und Zylinder,

$\alpha = 2 \pi \frac{\alpha^0}{360^\circ}$  den Umschlingungswinkel,

$e$  die Grundzahl der nat. Log. (s. S. 48),

so ist ohne Berücksichtigung von Zentrifugalkräften die Abhängigkeit vorgenannter Gröſsen bestimmt durch:

$$S_1 = S_2 e^{\mu \alpha}.$$

$$P = \frac{e^{\mu \alpha} - 1}{e^{\mu \alpha}} S_1 = (e^{\mu \alpha} - 1) S_2 = W.$$

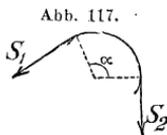


Abb. 117.

Für  $\mu$  ist, je nachdem zwischen Zugmittel und Zylinder eine gegenseitige Bewegung stattfindet oder nicht, die Reibungsziffer der Bewegung oder der Ruhe einzusetzen.

Werte von  $\mu$  und  $\mu_0$  (vgl. auch I. Bd. Abschn. Maschinenteile, Riemen- und Seilbetrieb):

Lederriemen auf Scheiben aus				Hanfseile				Eiserne Bremsbänder auf eisernen Scheiben
Holz		Gufseisen		auf Eisentrommeln	auf Holztrommeln	auf rauhem Holz	auf poliertem Holz	
Zustand des Riemens:								
etwas gefettet	sehr gefettet	etwas gefettet	feucht					
0,47	0,12	$\mu_0 = 0,28$	0,38	$\mu_0 = 0,25$	$\mu_0 = 0,4$	$\mu_0 = 0,5$	$\mu_0 = 0,33$	$\mu_0 = \mu = 0,18$

Werte von  $e^{\mu\alpha}$  s. nachstehende Tafel. Es ist  $e^{\pi} = 23,1407$  und  $\log e^{\pi} = 1,3643764$ .

**Tafel für  $e^{\mu\alpha}$ .**

$\frac{\alpha}{2\pi}$	$\mu$								
	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,35	0,4	0,45	0,5
0,1	1,06	1,1	1,13	1,17	1,21	1,25	1,29	1,33	1,37
0,2	1,13	1,21	1,29	1,37	1,46	1,55	1,65	1,76	1,87
0,3	1,21	1,32	1,45	1,60	1,76	1,93	2,13	2,34	2,57
0,4	1,29	1,46	1,65	1,87	2,12	2,41	2,73	3,10	3,51
0,425	1,31	1,49	1,70	1,95	2,23	2,55	2,91	3,33	3,80
0,45	1,33	1,53	1,76	2,03	2,34	2,69	3,10	3,57	4,11
0,475	1,35	1,56	1,82	2,11	2,45	2,84	3,30	3,83	4,45
0,5	1,37	1,60	1,87	2,19	2,57	3,00	3,51	4,11	4,81
0,525	1,39	1,64	1,93	2,28	2,69	3,17	3,74	4,41	5,20
0,55	1,41	1,68	2,00	2,37	2,82	3,35	3,98	4,74	5,63
0,6	1,46	1,76	2,13	2,57	3,10	3,74	4,52	5,45	6,59
0,7	1,52	1,93	2,41	3,00	3,74	4,66	5,81	7,24	9,02
0,8	1,65	2,13	2,73	3,51	4,52	5,81	7,47	9,60	12,35
0,9	1,76	2,34	3,10	4,11	5,45	7,24	9,60	12,74	16,90
1,0	1,87	2,57	3,51	4,81	6,59	9,02	12,35	16,90	23,14
1,5	2,57	4,11	6,59	10,55	16,90	27,08	43,38	69,49	111,32
2,0	3,51	6,59	12,35	23,14	43,38	81,31	152,40	285,68	535,49
2,5	4,81	10,55	23,14	50,75	111,32	244,15	535,49	1174,5	2579,9
3,0	6,59	16,90	43,38	111,32	285,68	733,14	1881,5	4828,5	12391
3,5	9,02	27,08	81,31	244,15	733,14	2199,90	6610,7	19851	59608
4,0	12,35	43,38	152,40	535,49	1881,5	6610,7	23227	81610	286744

## 2. Arbeitsverluste.

### α. Arbeitsverlust durch Steifigkeit des Zugmittels.

1. Ist  $d$  der Seildurchmesser oder die Ketteneisenstärke (bzw. der Gelenkbolzendurchmesser) in cm,

$R$  der Halbmesser des Wickelkreises in cm,

so bewirkt die innere **Reibungssteifigkeit** des Zugmittels beim Ablauf (für  $S_1$ ) eine Verkürzung des Hebelarmes  $R$  um  $\xi_1$  (in cm) und beim Auf Laufe (für  $S_2$ ) eine Verlängerung des Hebelarmes  $R$  um  $\xi_2$  (in cm). Es ist alsdann für gleichzeitiges Auf- und Abwickeln

$$S_1 (R - \xi_1) = S_2 (R + \xi_2).$$

Angenähert ist  $\xi_1 = \xi_2 = \xi$ , also  $\xi_1 + \xi_2 = 2\xi$ , so daß sich mit hinreichender Genauigkeit ergibt

$$S_1 = \left(1 + \frac{2\xi}{R}\right) S_2.$$

Findet nur ein Aufwickeln statt, so ist  $\xi_1$  nicht vorhanden und

$$S_1 = \left(1 + \frac{\xi}{R}\right) S_2.$$

Für Ketten ist angenähert  $2\xi = \mu d$ , worin  $\mu = 0,2$  bis  $0,3$  die Reibungszahl der Kettenglieder oder der Gelenkbolzen vom Durchmesser  $d$  ist.

Für Hanfseile rechne man  $\xi = 0,03 d^2$  bis  $0,06 d^2$ , je nach der Bauart, Material und Beschaffenheit der Seile.

Für Drahtseile liegen zuverlässige Werte, die von der Bauart des Seiles, dem Seil- und Wickeldurchmesser abhängig sind, nicht vor. Man nehme etwa die gleichen Werte wie für Ketten.

2. Die **elastische Steifigkeit** des Stoffes, also der Arbeitsaufwand für die Formänderung des Zugmittels, kommt für gleichzeitige Auf- und Abwicklung nicht in Betracht, da hierdurch an der Auf- und Ablaufstelle der Hebelarm  $R$  um ein Gleiches vergrößert wird; die beim Auf Laufe zum Krümmen (Biegen) des Zugmittels verbrauchte Arbeit wird also beim Ablauf durch das Geradestrecken wieder gewonnen.

Erfolgt dagegen nur ein Aufwickeln, so ist, besonders bei Drahtseilen, der durch die Krümmung des Zugmittels bewirkte Arbeitsverlust für die Kraftverhältnisse zu berücksichtigen.

### β. Arbeitsverlust durch Gleiten des Zugmittels\*)

auf den Scheiben infolge seiner elastischen Dehnung (nicht durch Gleiten infolge ungenügender Reibung zwischen Scheibe und Zugmittel).

Es bezeichne

$f$  den Querschnitt des Zugmittels in qcm,

$c = P : f$  die zu übertragende Kraft in kg/qcm (vgl. I. Bd. Abschn. Maschinenteile, Riemen- und Seilbetrieb),

$\alpha = 1 : E$  die Dehnungszahl in qcm/kg

Infolge der Aenderung der Spannkraft von der Auflauf- zur Ablaufstelle ändert sich die Länge des Zugmittels, so daß die treibende Scheibe

\*) Vgl. C. Bach, Die Maschinen-Elemente, 10. Aufl. Stuttgart 1908. S. 414, 429, 434, 477 u. 480.

ein längeres Stück aufwickelt, als sie abgibt; umgekehrt bei der getriebenen Scheibe. Hierdurch entsteht ein verhältnismässiger Geschwindigkeitsverlust, der gleich dem verhältnismässigen Arbeitsverlust  $\mathfrak{B}$  ist und unter der Annahme einer unveränderlichen Dehnungszahl und gleichmässiger Verteilung der Spannung über jeden Querschnitt des Zugmittels

$$\mathfrak{B} = \alpha \frac{S_1 - S_2}{f} = \alpha \frac{P}{f}$$

für die treibende und die getriebene Scheibe zusammen (geschlossener Trieb) sein würde.

Da  $P$  an der Innenseite des Zugmittels (Riemen) übertragen wird, also exzentrisch zur Mittellinie angreift, ist die Spannung und damit die Dehnung an der die Scheibe berührenden Seite wesentlich gröfser, als  $S_1 \alpha : f$  ergibt, und demnach auch  $\mathfrak{B} > \alpha P : f$ . Ferner ist zu beachten, dafs  $\alpha$  mit zunehmender Spannung abnimmt, wodurch der Wert von  $\mathfrak{B}$  verringert wird.

Den Einflufs der ungleichmässigen Spannungsverteilung und die Veränderlichkeit von  $\alpha$  berücksichtigt Bach durch eine Erfahrungszahl  $\varphi$ , so dafs

$$\mathfrak{B} = \varphi \alpha \frac{P}{f} = \varphi \frac{P}{fE} = \varphi \frac{c}{E} \text{ ist.}$$

Der Wert von  $\varphi$  ist gröfser als 1 und kann nach C. Bach etwa gesetzt werden:

für Lederriemen  $\varphi = 2,0$ , Hanfseile  $\varphi = 1,25$ , Drahtseile  $\varphi = 1,5$ .

Es berechnet sich dann:

- für neue Lederriemen mit  $\varphi = 2$ ;  $c = 10 \text{ kg/qcm}$ ;  $E = 1250 \text{ kg/qcm}$ ;  
 $\mathfrak{B} = 2 \cdot 10 : 1250 = 0,016 = 1,6 \text{ vH}$ ;
- für gebrauchte Lederriemen mit  $\varphi = 2$ ;  $c = 10 \text{ kg/qcm}$ ;  $E = 2250 \text{ kg/qcm}$ ;  
 $\mathfrak{B} = 2 \cdot 10 : 2250 = 0,009 = 0,9 \text{ vH}$ ;
- für Hanfseile\*) mit  $\varphi = 1,25$ ;  $c = 9,6 \text{ kg/qcm}$ ;  $E = 7500 \text{ kg/qcm}$ ;  
 $\mathfrak{B} = 1,25 \cdot 9,6 : 7500 = 0,0016 = 0,16 \text{ vH}$ ;
- für neue Drahtseile\*) mit  $\varphi = 1,5$ ;  $c = 300 \text{ kg/qcm}$ ;  $E = 700000 \text{ kg/qcm}$ ;  
 $\mathfrak{B} = 1,5 \cdot 300 : 700000 = 0,00064 = 0,064 \text{ vH}$ .

### 7. Werte von Wirkungsgraden $\gamma$ .

1. Rollenzüge mit  $180^\circ$  Umschlingungsbogen bei kleinen Geschwindigkeiten (einschliesslich Zapfenreibung):

Bei Ketten- und Drahtseilrollen

für feste Rollen 0,94 bis 0,96

„ lose „ 0,97

Bei Hanfseilrollen mit einem Seildrm. von

1,6      2,6      3,6      4,6      5,2 cm

für feste Rollen 0,94–0,96    0,91–0,95    0,89–0,93    0,84–0,92    0,85–0,91

für lose „      0,97      0,96      0,95      0,94      0,93

2. Riemen- und Seiltriebe für gröfsere Leistungen vgl. Abschn. Maschinenteile, Riemen- und Seiltrieb.

\*)  $c$  und  $E$  sind auf den tatsächlichen Querschnitt der Litze bzw. der Eisendrähte bezogen, also auf einen Querschnitt von  $\sim 0,66 \pi d^2 : 4$  bzw.  $0,42 \pi d^2 : 4$ , wenn  $d$  der Seildurchmesser ist.

# B. MECHANIK TROPFBAR FLÜSSIGER KÖRPER.

## I. STATIK TROPFBAR FLÜSSIGER KÖRPER.

### 1. Besondere statische Eigenschaften.

Bei tropfbaren Flüssigkeiten genügt das Gewicht des kleinsten Teiles zu einer Verschiebung aller Teilchen untereinander.

Die Oberfläche (Flüssigkeitsspiegel) bildet sich, soweit sie nicht von festen Körpern begrenzt ist, allein unter dem Einfluß von Schwere, Massenanziehung, und dem auf ihr lastenden Drucke. Die Teilchen von gleichem Einheitsgewicht bilden Schichten parallel zur Oberfläche. In der Nähe fester Körper (Gefäßwand oder die Wandfläche eingetauchter Körper) krümmt sich die Oberfläche unter dem Einfluß von Adhäsion und Kohäsion der Flüssigkeit. Bei überwiegender Adhäsion (benetzte Wand) steigt die Oberfläche zwischen nahe gelegenen Wandflächen empor (Kapillarität); Quecksilber mit seiner überwiegenden Kohäsion zeigt entgegengesetztes Verhalten. Wasser steigt in Röhren vom Durchmesser  $d$  in mm um die Höhe  $h \sim 30 : d$  in mm empor; zwischen Platten im Abstände  $a$  in mm wird  $h \sim 15 : a$ .

Die Elastizität ist sehr geringfügig. (Raumverminderung für je 1 kg/qcm Druck bei Wasser 0,000044, Aether 0,000111, Quecksilber 0,000003.)

**Gesetz von Pascal:** Wird eine Flüssigkeit einem äußeren Druck ausgesetzt, der nur in einer Richtung wirkt, so pflanzt sich dieser Druck auf alle Teile nach allen Richtungen hin unverändert fort.

### 2. Grundgleichungen von L. Euler.

Bedeutung

$x, y, z$  die rechtwinkligen Koordinaten eines Punktes  $P$  der Flüssigkeit,

$X, Y, Z$  die Seitenkräfte der in  $P$  wirkenden, beschleunigenden Kraft nach den drei Koordinatenachsen,

$p$  den Druck auf die Flächeneinheit bei  $P$ ,

$g$  die Beschleunigung durch die Schwere = 9,81 m/sk<sup>2</sup>,

$\gamma$  das Gewicht der Raumeinheit der Flüssigkeit,

so ist für ein unendlich kleines Parallelepipedon der Flüssigkeit von den Seiten  $dx, dy, dz$ , dessen eine Ecke in  $P$  liegt, im Zustande des Gleichgewichtes

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\gamma}{g} X \qquad \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\gamma}{g} Y \qquad \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\gamma}{g} Z$$

$$dp = \frac{\gamma}{g} (Xdx + Ydy + Zdz).$$

Für die freie Oberfläche sowie für alle Flächen gleichen Druckes (Niveauflächen) wird

$$Xdx + Ydy + Zdz = 0.$$

Die Mittelkraft der drei Kräfte  $X, Y, Z$  ist in jedem Punkte winkelrecht zu den Flächen gleichen Druckes gerichtet.

### 3. Hydrostatischer Druck.

#### α. Normaldruck (oder Seitendruck) auf eine Fläche.

1. Ebene Fläche.

Bedeutet

$F$  den Inhalt der gedrückten ebenen Fläche in qm,

$h$  den lotrechten Abstand ihres Schwerpunktes vom Flüssigkeitsspiegel in m,

$\alpha$  den Neigungswinkel von  $F$  gegen die Wagerechte,

$\gamma$  das Gewicht der Raumeinheit der Flüssigkeit in kg,

$x$  und  $y$  die Koordinaten des Druckmittelpunktes (Angriffpunktes des Flüssigkeitsdruckes), wenn die  $x$ -Achse die Schnittlinie der durch  $F$  gelegten Ebene mit dem Flüssigkeitsspiegel und die  $y$ -Achse eine in derselben Ebene rechtwinklig zur  $x$ -Achse gerichtete Linie ist,

$e$  die Entfernung der Oberkante von  $F$  von der  $x$ -Achse,

$S$  das statische Moment } von  $F$ , bezogen auf die  $x$ -Achse,

$J$  das Trägheitsmoment } von  $F$ , bezogen auf die  $x$ - und die

$J_{xy}$  das Zentrifugalmoment von  $F$ , bezogen auf die  $x$ - und die  $y$ -Achse, so ist der

$$\text{Normaldruck oder Seitendruck} = Fh\gamma,$$

und die Koordinaten des Angriffpunktes der Mittelkraft sind

$$y = \frac{J}{S} = \frac{J \sin \alpha}{Fh} \quad x = \frac{J_{xy}}{S} = \frac{J_{xy}}{Fh} \sin \alpha.$$

Besitzt  $F$  winkelrecht zur  $x$ -Achse eine Symmetrieachse, die man als  $y$ -Achse wählt, so wird  $x = 0$ .

Abstand  $y$  für verschiedene Flächen:

**Rechteck**, Oberkante parallel zum Flüssigkeitsspiegel, Abstand Oberkante von Unterkante =  $a$ :

$$y = \frac{a}{3} \frac{3e + 2a}{2e + a} + e; \quad \text{für } e = 0 \text{ wird } y = \frac{2}{3} a.$$

**Trapez**, die parallelen Seiten  $b_o$  und  $b_u$  parallel zum Flüssigkeitsspiegel,  $b_o$  die höher gelegene Seite,  $a$  der Abstand der Seite  $b_o$  von  $b_u$ :

$$y = \frac{a}{2} \frac{2e(b_o + 2b_u) + a(b_o + 3b_u)}{3e(b_o + b_u) + a(b_o + 2b_u)} + e.$$

**Dreieck**, Grundlinie parallel zum Flüssigkeitsspiegel, Abstand der Spitze von der Grundlinie =  $a$ :

Wenn die Grundlinie oberhalb der Spitze,

$$y = \frac{a}{2} \frac{2e + a}{3e + a} + e; \text{ für } e = 0 \text{ wird } y = \frac{1}{2}a;$$

wenn die Spitze im Flüssigkeitsspiegel,  $y = \frac{3}{4}a$ .

**Kreis** vom Durchmesser  $2a$  oder

**Ellipse** mit lotrechter Hauptachse  $2a$ :

$$y = a + e + \frac{1}{4} \frac{a^2}{a + e}.$$

Berührt der Kreis oder die Ellipse den Flüssigkeitsspiegel, so wird  $y = \frac{5}{4}a$ .

## 2. Gekrümmte Fläche.

Die gekrümmte Fläche ist in ebene Teilflächen zerlegt zu denken, deren Normaldrücke, wie unter 1. angegeben, zu bestimmen sind. Durch Zusammensetzung der nach drei Richtungen zu zerlegenden Einzeldrücke erhält man zunächst in diesen Richtungen je eine Mittelkraft; die Vereinigung dieser Mittelkräfte zu einer Gesamtmittelkraft ist nur möglich, wenn sich ihre Richtungen im Raume schneiden (vgl. c. S. 173).

### β. Lotrechter Druck, Auftrieb und Abtrieb, Stabilität schwimmender Körper, Auftrieb gekenterter Körper.

1. Der lotrechte Druck (**Auftrieb und Abtrieb**) auf eine benetzte Fläche ist gleich dem Gewichte der lotrecht zwischen ihr und der Oberfläche der Flüssigkeit gedachten Flüssigkeitssäule. Die Mittelkraft des Druckes geht durch den Schwerpunkt dieser Flüssigkeitssäule.

2. Ein eingetauchter Körper vom Gewichte  $S$  und mit dem Schwerpunkt  $s$  erfährt einen Auftrieb (Gewichtverlust)  $D$  gleich dem Gewichte der vom Körper verdrängten Flüssigkeit (**Displacement**), deren Schwerpunkt  $d$  sei. Der lotrechte Auftrieb geht durch den Punkt  $d$ .

Der Körper schwimmt frei (ohne Einwirkung äußerer Kräfte), wenn  $D = S$  und zugleich  $d$  und  $s$  in derselben Lotrechten (Schwimmachse) liegen. Bleibt  $D < S$ , so sinkt der Körper unter.

Treten Kräfte hinzu, die den Körper um  $s$  drehen (kippen) und die Schwimmachse um den Winkel  $\alpha$  ablenken, so trifft der Auftrieb  $D$  die Schwimmachse in einem Punkte, der das **Metazentrum** genannt wird.

Bedeutet noch

- $m$  den Abstand des Metazentrums vom Körperschwerpunkt  $s$ ,
- $e$  den Abstand des Flüssigkeitsschwerpunktes  $d$  von  $s$ , u. zw. sei  $e$  positiv, wenn  $d$  oberhalb  $s$  liegt, sonst negativ,
- $F$  die Größe des eingetauchten lotrechten Querschnittes,
- $b$  die Breite von  $F$  am Flüssigkeitsspiegel, bei  $\alpha = 0$ ,
- $l$  die Länge des Körpers, soweit dieser gleiches  $F$  mit  $b$  besitzt,
- $\gamma$  das Gewicht der Raumeinheit der Flüssigkeit,

dann gilt als **Mafs der Stabilität** das Drehmoment des Auftriebes  $= Fl\gamma m \sin \alpha$ .

Hierin ist zu setzen:

bei parallelen ein- und austauchenden Seitenwänden

$$m = \frac{b^3}{24F} \left( 1 + \frac{1}{\cos^2 \alpha} \right) + e,$$

bei gekrümmten Seitenwänden mit  $b$  unveränderlich innerhalb  $\alpha$

$$m = \frac{b^3}{12F} \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\sin \alpha} + e.$$

Stabilität ist auch noch bei negativem  $e$  vorhanden, solange das Glied mit  $b^3 > e$ .

3. Ein gekenterter, noch Luft enthaltender Hohlkörper erfährt allein durch die eingeschlossene Luft einen Auftrieb gleich dem Gewichte der gedachten Flüssigkeitssäule, die zur Basis die Flüssigkeitsoberfläche im luftgefüllten Raume und zur Höhe den Abstand der beiden Flüssigkeitsoberflächen innerhalb und außerhalb des Luftraumes hat.

Der Gesamtauftrieb ist gleich dem Gewichte der vom Körper und von der eingeschlossenen Luft verdrängten Flüssigkeit; die Mittelkraft des Gesamtauftriebes geht durch den Schwerpunkt dieser Flüssigkeitsmasse. Schwimmt der Hohlkörper, so bestimmt sich seine Stabilität wie unter 2. angegeben.

#### **$\gamma$ . Druck in beliebig bestimmter Richtung.**

Für eine beliebig gestaltete Fläche ist die Mittelkraft des Flüssigkeitsdruckes in einer bestimmten Richtung gleich der Summe der Produkte für alle Flächenelemente, gebildet aus der Projektion der Elemente winkelrecht zu dieser Richtung, dem Abstand ihres Schwerpunktes vom Flüssigkeitsspiegel und dem Gewichte der Raumeinheit.

Der Druck auf eine Ebene  $F$ , deren Schwerpunktsabstand vom Spiegel  $h$  ist, wird in einer Richtung, die mit  $F$  den spitzen Winkel  $\beta$  einschließt,  $= Fh\gamma \sin \beta$ .

Der Druckmittelpunkt ist dem für den Normaldruck gleich.

## **II. DYNAMIK TROPFBAR FLÜSSIGER KÖRPER.**

### **A. Allgemeines.**

#### **1. Grundgleichungen von L. Euler.**

Neben den Bezeichnungen a. S. 265 seien noch  $u, v, w$  die Geschwindigkeits-Komponenten des Flüssigkeitselementes in  $P$  zur Zeit  $t$  nach der  $x$ -,  $y$ - und  $z$ -Achse;

dann ist

$$1. \quad \frac{g}{\gamma} \frac{\partial p}{\partial x} = X - \frac{\partial u}{\partial t} - u \frac{\partial u}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial y} - w \frac{\partial u}{\partial z}$$

$$2. \quad \frac{g}{\gamma} \frac{\partial p}{\partial y} = Y - \frac{\partial v}{\partial t} - u \frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{\partial v}{\partial y} - w \frac{\partial v}{\partial z}$$

$$3. \quad \frac{g}{\gamma} \frac{\partial p}{\partial z} = Z - \frac{\partial w}{\partial t} - u \frac{\partial w}{\partial x} - v \frac{\partial w}{\partial y} - w \frac{\partial w}{\partial z}$$

4. Die physikalische Beschaffenheit der Flüssigkeit liefert eine Beziehung zwischen  $p$  und  $\gamma$ . Für nicht zusammendrückbare Flüssigkeiten ist  $\gamma$  unveränderlich. — Ferner ist allgemein:

$$5. \quad \frac{d\gamma}{dt} + \gamma \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0. \quad (\text{Kontinuitätsgleichung.})$$

Für nicht zusammendrückbare Flüssigkeiten geht die Kontinuitätsgleichung über in

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

## 2. Aenderung der Oberfläche.

Durch einen nach Gröfse oder Richtung wechselnden Druck auf einen Teil der Oberfläche geraten alle Teile der Flüssigkeit in schwingende Bewegung (Wellen mit Interferenz und Reflexion). Die kreisförmige Bahn der Teile an der Oberfläche geht in größerer Tiefe in eine Ellipse über.

Mittels Gefäßes geradlinig und parallel zur ruhenden Oberfläche bewegte Flüssigkeit behält bei gleichbleibender Geschwindigkeit wagerechte Oberfläche. Bei wagerechter, gleichmäfsig beschleunigter Bewegung neigt sich die Oberfläche um den Winkel  $\alpha$  gegen die Bewegungsrichtung

$$\text{entsprechend } \operatorname{tg} \alpha = \frac{p}{g}, \text{ wobei bedeutet}$$

$p$  die Beschleunigung der Flüssigkeit und

$g$  die Beschleunigung durch die Schwere ( $= 9,81 \text{ m/sk}^2$ ).

Dreht sich eine Flüssigkeit in einem zylindrischen Gefäße vom Halbmesser  $r$  (in m) um dessen lotrechte Achse mit gleichbleibender Winkelgeschwindigkeit  $\omega$ , so bildet die Oberfläche eine Höhlung (Umdrehungsparaboloid), deren tiefster Punkt um  $0,0255 r^2 \omega^2$  (in m) unter der dem Ruhezustande entsprechenden Oberfläche liegt.

Dreht sich die Flüssigkeit in beliebig gestaltetem Gefäße um eine wagerechte Achse (Wasserräder) mit gleichbleibender Winkelgeschwindigkeit  $\omega$ , so krümmt sich die Oberfläche nach einem liegenden Zylinder, dessen Achse um  $9,81 : \omega^2$  (in m) lotrecht über der Umdrehungsachse liegt.

## B. Ausfluß durch Oeffnungen in Gefäßen oder Stauanlagen.

### 1. Eigenschaften des ausfließenden Strahles.

Die Richtung des Strahles ist bei dem Durchfluß durch Oeffnungen

1. ohne Ansätze (Mundstücke, Gerinne) in besonders dünner oder mit zugeschärften Durchflußkanten versehener Wandung:
  - a) winkelmäßig zu der durch die Durchflußkanten gelegten Ebene, wenn sich die Oeffnung gänzlich unter dem Flüssigkeitsspiegel befindet,
  - b) angenähert wagrecht an der Oberfläche, mit Uebergang zum Zustande wie bei a) für die Unterkante der Oeffnung, wenn die Oeffnung in den Flüssigkeitsspiegel hineinragt (Ueberfall mit lotrechtlem oder geneigtem Wehr);
2. ohne Ansätze, aber in so dicker Wandung, daß der Strahl die Seitenflächen der Oeffnung bestreicht: parallel oder achsial zu diesen Seitenflächen;
3. mit Ansätzen (inneren oder äußeren Einfassungen, Gerinnen, Mundstücken): soweit sie vom Strahl benetzt werden, parallel oder achsial zu ihnen.

**Einschnürung (Kontraktion) des Strahles:** Bei dem Ausfluß durch Oeffnungen streben alle Flüssigkeitsfäden der Strahlachse zu; die seitlich zuströmenden Fäden erstreben dabei eine Einschnürung (Kontraktion) des Strahles mit nachfolgender Wiederausdehnung desselben. Die Kontraktion wird eine vollständige bei plötzlicher Ablenkung der seitlichen Fäden, also bei scharfen Durchflußkanten; selbst die Adhäsion an nachfolgender benetzter Wandung von Mundstücken reicht dann nicht mehr aus, um die Loslösung des Strahles von der Wandung dicht hinter der Ablenkung zu verhindern. Bei kreisrunden Oeffnungen vom Durchmesser  $d$  ist die Kontraktion am größten in der Entfernung  $\frac{1}{2}d$  von der Oeffnung. In dieser Entfernung beträgt der Durchmesser nur noch  $0,8d$  und demnach der Querschnitt  $0,64d^2\pi:4$ . Bei nicht kreisrunden Oeffnungen fließen die einzelnen Flüssigkeitsfäden wellenförmig zur Strahlachse aus; dabei wechselt die Oberfläche und die Querschnittsform des Strahles entsprechend wellenförmigen Durchdringungen.

Bei Oeffnungen in so dicker Wand oder mit so langen Ansätzen (inneren oder äußeren), daß der eingeschürte Strahl bei seiner Wiederausbreitung die Wandflächen noch vor dem Mündungsquerschnitt benetzt, verläuft die Oberfläche des ausfließenden Strahles parallel zu den Seiten des Mündungsquerschnittes.

**Gleichmäßige Querschnittsänderung des Strahles:** Der Querschnitt des frei ausfließenden Strahles verkleinert sich allmählich bei fallender Strahlrichtung entsprechend der zunehmenden Fallgeschwindigkeit; er vergrößert sich allmählich bei ansteigender Richtung infolge abnehmender Geschwindigkeit der Flüssigkeitsteilchen. Die Strahlachse folgt den Gesetzen für die Wurfbewegung.

Die Geschwindigkeit der einzelnen Fäden ist fast gleich am Querschnitt der Strahleinschnürung nach dem Durchfluß scharfer Kanten, und sie wird wesentlich verschieden nach der Wiederausbreitung des Strahles, namentlich nach erfolgter Anlegung an die Seitenwände von Ansätzen; diese verzögern die Geschwindigkeit der einzelnen Fäden, umso mehr, je näher letztere der Wandung liegen.

Der Zufluß zur Oeffnung ist allseitig radial auf den Schwerpunkt der Oeffnung gerichtet; die Zuflußgeschwindigkeit der Flüssigkeitselemente nimmt mit ihrem Abstände von der Oeffnung schnell ab und beträgt z. B. bei kreisrunder Oeffnung im Abstand gleich ihrem doppelten Durchmesser nur noch  $6\sqrt{h}$  der Geschwindigkeit an der Oeffnung selbst.

Wirbelförmiger Zufluß (Strudel) entsteht über Oeffnungen in wagrechtem Boden, sobald die Flüssigkeitshöhe weniger als 3 bis 4 fache des Durchmessers der Oeffnung beträgt.

### 2. Ausfluß bei unveränderlicher Druckhöhe.

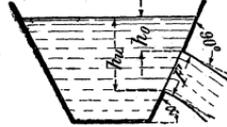
(Ausflußmenge, Ausflußgeschwindigkeit.)

Es bedeute (s. Abb. 118)

$F$  die maßgebende Ausflußöffnung in qm, d. i. der kleinste Durchflußquerschnitt der Wandöffnung bzw. des angesetzten Mundstückes rechtwinklig zur Richtung des Ausflußstrahles,

$\alpha$  den Winkel zwischen  $F$  und der Wagerechten,  
 $v_0$  die theoretische mittlere Ausflußgeschwindigkeit aller Flüssigkeitsfäden in der Oeffnung  $F$  in m/sk; die Geschwindigkeit der einzelnen Fäden ist, ohne Rücksicht auf Reibung an den Wandflächen etwa vorhandener Mundstücke oder Gerinne, proportional der Wurzel ihres Abstandes vom Flüssigkeitsspiegel,  
 $v_z$  die Komponente der Zufußgeschwindigkeit zum Gefäß in der Stromrichtung des Ausflußstrahles, in m/sk; dabei ist vorausgesetzt, daß der Zufußstrahl auf die Ausflußöffnung gerichtet ist, andernfalls ist  $v_z = 0$ ,

Abb. 118.



$\mu$  die Ausflußzahl (Wirkungsgrad) für die Ausflußöffnung mit oder ohne Ansatz, d. i. das Verhältnis der tatsächlichen Ausflußmenge zur theoretischen Ausflußmenge. Somit enthält  $\mu$  den Einfluss verminderter Ausflußgeschwindigkeit und den Einfluss des gegen  $F$  etwa durch Einschnürung verminderten Strahlquerschnittes,

Werte  $\mu$  s. S. 277 u. f.,

$Q$  die tatsächliche Ausflußmenge in cbm/sk  $= \mu v_0 F$ ,  
 $h_0$  der lotrechte Abstand der Oberkante von  $F$  vom ideellen Flüssigkeitsspiegel in m (in einiger Entfernung von der Oeffnung  $F$  gemessen). Die ideelle Höhe des Flüssigkeitsspiegels bestimmt sich aus der Höhe des tatsächlichen Spiegels  $\pm (v_z^2 : 2g) \pm$  Luftdruckunterschied am oberen Spiegel und am frei austretenden Ausflußstrahl, in m Flüssigkeitssäule (der ausfließenden Flüssigkeit) gemessen,  
 $h_u$  der lotrechte Abstand der Unterkante von  $F$ , wie  $h_0$  gemessen,  
 $H$  bei Ausfluß unter Flüssigkeit (untergetauchte Oeffnung) den Abstand des unteren Flüssigkeitsspiegels vom ideellen oberen Spiegel in m, wie  $h_0$  gemessen,

$g$  die Beschleunigung durch die Schwere ( $= 9,81$  m/sk<sup>2</sup>);  $\sqrt{2g} = 4,4294$ .

1. Lage der Ausflußöffnung beliebig.

Bedeutet noch

$h$  den Abstand eines beliebigen, durch wagerechte Teilung von  $F$  erhaltenen Flächenteilchens, dessen Projektion auf eine lotrechte Ebene die Höhe  $d h$  besitzt, wie  $h_0$  gemessen,

$y$  die Breite dieses Flächenteilchens in m, so ist

$$Q = \frac{\mu \sqrt{2g}}{\sin \alpha} \int_{h_0}^{h_u} y V \bar{h} d h; \quad v_0 = \frac{Q}{\mu F} = \sqrt{2g} \frac{\int_{h_0}^{h_u} y V \bar{h} d h}{\int_{h_0}^{h_u} y d h}$$

Wenn  $y$  unveränderlich  $= b$ , wird:

$$Q = \frac{2}{3} \frac{\mu b}{\sin \alpha} \sqrt{2g} (V \bar{h}_u^3 - V \bar{h}_0^3).$$

$$v_0 = \frac{2}{3} \frac{b}{F \sin \alpha} \sqrt{2g} (V \bar{h}_u^3 - V \bar{h}_0^3).$$

Wird die Druckhöhe nicht in  $m$  Flüssigkeitssäule, sondern mittels des Druckes  $q$  in  $kg/qm$  der Ausflußöffnung gemessen und bedeutet  $\gamma$  das Gewicht der Flüssigkeit in  $kg/cbm$ , so ist in vorstehenden Formeln allgemein  $h = q : \gamma$  zu setzen.

Für jedes in die abgeflossene, wieder gesammelte Flüssigkeit untertauchende Flächenteilchen von  $F$  ist dessen Abstand vom unteren Flüssigkeitsspiegel als Gegendruck in Abzug zu bringen; somit ist **für den eingetauchten Teil** der Oeffnung (**Rückstau**)

$$v_0 = \sqrt{2gH}, \quad Q = \mu F \sqrt{2gH}.$$

**Bei gleichförmiger Bewegung des Ausflußgefäßes** bleibt der Ausfluß unverändert wie bei ruhendem Gefäß.

**Bei lotrecht beschleunigter Bewegung** nach aufwärts oder abwärts um  $p$  in  $m/sk^2$  ist in den Formeln statt  $g$  bei Aufwärtsbewegung ( $g+p$ ), bei Abwärtsbewegung ( $g-p$ ) zu setzen. Fällt das Gefäß durch sein Eigengewicht, so wird  $v_0 = 0$ .

**Bei lotrecht verzögerter Bewegung** wechselt  $p$  in vorstehenden Fällen das Vorzeichen.

**Bei Umdrehung des Gefäßes** mit der Umlaufgeschwindigkeit  $w$  an der Ausflußöffnung (in  $m/sk$ ) vermehrt sich die dort vorhandene nutzbare Druckhöhe um die Geschwindigkeitshöhe  $\frac{w^2}{2g}$ .

2. Wagerechte Bodenöffnung.  $h_0 = h_u$ ,  $\alpha = 0$ .

Ist an die Bodenöffnung ein Mundstück angesetzt, so ist dessen lotrechte Höhe nur dann in  $h_u$  mit eingeschlossen, wenn der fallende Strahl die Ausflußmündung ganz ausfüllt. Dies trifft nur für unten an der Mündung ausreichend verengte Rohrstücke zu.

Ausfluß ins Freie:  $v_0 = \sqrt{2gh_u}$

Ausfluß unter Flüssigkeit:  $v_0 = \sqrt{2gH}$ .

3. Seitenöffnung ohne Rückstau, Ausfluß ins Freie. **Durchlaß und Ueberfall ohne Rückstau:**  $F$  sei eine der folgenden Flächen:

**Rechteck** oder **Parallelogramm**, Oberkante parallel dem Flüssigkeitsspiegel, Breite  $= b$ , Abstand der wagerechten Kanten  $= a = (h_u - h_0) \sin \alpha$ .

$\alpha$  Durchlaß, Oberkante der Oeffnung unterhalb des Flüssigkeitsspiegels:

$$F = ab = \frac{(h_u - h_0) b}{\sin \alpha}; \quad v_0 = \frac{2}{3} \sqrt{2g} \frac{h_u^{3/2} - h_0^{3/2}}{h_u - h_0}; \quad Q = \mu F v_0;$$

oder angenähert, wenn  $h_u - h_0 = a \sin \alpha$  gesetzt wird und  $h_s$  die Tiefe des Schwerpunktes von  $F$  unter dem ideellen Oberspiegel in  $m$  bedeutet, [ $h_s = \frac{1}{2} (h_u + h_0)$ ]:

$$v_0 = \left[ 1 - \frac{1}{96} \left( \frac{a \sin \alpha}{h_s} \right)^2 \right] \sqrt{2gh_s}.$$

$\beta$ ) Wand einschnitt mit Ueberfall des Strahles, die Oeffnung erreicht den Flüssigkeitsspiegel:

Strahlrichtung an der ideellen Oberkante von  $F$  wagerecht; diese Oberkante deckt sich mit dem oberen Flüssigkeitsspiegel in einiger Entfernung von  $F$ . Lotrecht über der Unterkante von  $F$  senkt sich der Spiegel bereits zur Erzeugung einer Oberflächengeschwindigkeit, die etwa  $0,5 h_u$  entspricht. Strahlrichtung an der Unterkante von  $F$  dagegen angenähert normal zur Wandfläche, soweit anschließendes Gerinne nicht eine andere Richtung vorschreibt.

Bei geneigtem Wehr und bei schief zur Stromrichtung eingebautem Wehr, von vollständiger oder unvollständiger Kanalbreite, mit seitlicher oder ohne seitliche Lüftung der Unterflache des Ueberfallstrahles, ist weder die Festsetzung der zu jedem Teilchen  $dF$  zugehörigen Höhe  $h$ , noch die wirkliche Gröfse  $F$ , noch eine zureichende Schätzung des mittleren  $\mu$  für die verschiedenen gerichteten Strahlelemente möglich. Daher wird für solche Fälle die Formel für das lotrechte Wehr mit  $v_z^2 : 2g = 0$  zugrunde gelegt; vgl. S. 277.

Ohne Lüftung der Unterflache des Strahles entsteht unter demselben Luftverdünnung, welche Strahlverbreiterung und Hochsaugung des unteren Flüssigkeitsspiegels verursacht; also tritt Vergrößerung von  $h_u$ ,  $v$  und  $Q$  ein.

Bei nicht zu vernachlässigender Zuflufsgeschwindigkeit  $v_z$  liegt der ideelle Wasserspiegel um  $v_z^2 : 2g$  über der Oberkante des Ausflufsquerschnittes  $F$ , weshalb dann in die Formel für  $v_0$  des Durchlasses  $h_u = a \sin \alpha + v_z^2 / 2g$  und  $h_o = v_z^2 : 2g$  zu setzen ist.

Kann aber  $v_z^2 : 2g$  vernachlässigt werden, so wird  $h_o = 0$ , und hiermit bei lotrechtem Wehr

$$v_0 = \frac{2}{3} \sqrt{2g h_u}, \quad F = b h_u = ab, \quad Q = \mu F v_0.$$

**Dreieck**, die Grundlinie von der Länge  $b$  und in der Tiefe  $h_o$  parallel zum Flüssigkeitsspiegel, die Spitze in der Tiefe  $h_u$ , in m:

$$Q = \frac{2}{15} \frac{\mu b \sqrt{2g}}{\sin \alpha} \frac{2 h_u^{5/2} - 5 h_u h_o^{3/2} + h_o^{5/2}}{h_u - h_o};$$

oder für  $h_o = 0$  und  $\alpha = 90^\circ$  wird

$$Q = \frac{4}{15} \mu b h_u \sqrt{2g h_u}; \quad v_0 = \frac{8}{15} \sqrt{2g h_u}.$$

Liegt die Spitze des Dreiecks oben in der Tiefe  $h_o$ , die Grundlinie in der Tiefe  $h_u$ , so sind in der Gleichung für  $Q$  die Zeichen  $h_u$  und  $h_o$  miteinander zu vertauschen.

**Trapez**, mit wagerechten parallelen Seiten: zerlege dasselbe in Parallelogramm und Dreieck und summiere die für diese angegebenen Werte von  $Q$ ; dann ist  $v_0 = Q : \mu F$ .

Für  $h_o = 0$  und  $\alpha = 90^\circ$  wird mit der Länge  $b_o$  für die obere und  $b_u$  für die untere der parallelen Seiten:

$$Q = \frac{2}{15} \mu h_u \sqrt{2g h_u} (2 b_o + 3 b_u)$$

$$v_0 = \frac{4}{15} \sqrt{2g h_u} \frac{2 b_o + 3 b_u}{b_o + b_u}.$$

**Kreis**, vom Halbmesser  $r$  und der Mittelpunkt in der Tiefe  $h_s$  in m:

$$Q = \mu r^2 \pi \sqrt{2g h_s} \left[ 1 - \frac{1}{32} \left( \frac{r \sin \alpha}{h_s} \right)^2 - \frac{5}{1024} \left( \frac{r \sin \alpha}{h_s} \right)^4 - \dots \right]$$

$$v_0 = \frac{Q}{\mu \pi r^2}.$$

Reicht die Kreisöffnung bis zum Wasserspiegel und ist  $\alpha = 90^\circ$ , so ist

$$Q = 0,964 \mu F \sqrt{2 g h_s}, \quad v_0 = 0,964 \sqrt{2 g h_s}.$$

4. Seitenöffnung ( $F$  lotrecht) mit Rückstau. Grundwehr und Grunddurchlaß. Oeffnung von gleichmäfsiger Breite  $b$ ; für  $c^2/2 g$  wird die Höhe  $h_c$  gesetzt,  $H$  enthält bereits den Wert  $h_c$ .  $\mu_1$  bezieht sich auf den oberen Teil der Oeffnung ohne Rückstau,  $\mu_2$  auf den unteren, dem Rückstau ausgesetzten Teil.

Abb. 119:

$$Q = b \sqrt{2 g} \left[ \frac{2}{3} \mu_1 (H^{3/2} - h_c^{3/2}) + \mu_2 (h_u - H) \sqrt{H} \right];$$

Abb. 120, Durchlaß mit teilweisem Rückstau:

$$Q = b \sqrt{2 g} \left[ \frac{2}{3} \mu_1 (H^{3/2} - h_o^{3/2}) + \mu_2 (h_u - H) \sqrt{H} \right];$$

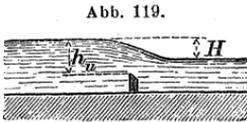


Abb. 119.

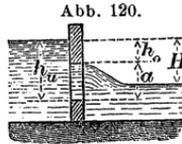


Abb. 120.

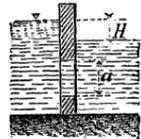


Abb. 121.

Abb. 121, Durchlaß mit vollständigem Rückstau, Grundablaß:

$$Q = \mu b a \sqrt{2 g H}.$$

### 3. Ausfluß bei veränderlicher Druckhöhe (Ausflußdauer).

Es bedeutet

$O_0$  die Oberfläche der Flüssigkeit bei Beginn des Ausflusses in  $qm$ ,

$O_t$  die Oberfläche nach  $t$  sk in  $qm$ ,

$F$  die Projektion der Ausflußöffnung auf eine zur Stromrichtung an der Mündung winkelrechte Ebene in  $qm$ ,

$H_0$  die Druckhöhe in m bei Beginn des Ausflusses,

$H_t$  die Druckhöhe in m nach der Ausflußzeit  $t$ ,

$t$  die Dauer des Ausflusses in sk,

$Q$  die tatsächliche Ausflußmenge in  $cbm/sk$ ,

$v_0$  die theoretische mittlere Ausflußgeschwindigkeit während der Ausflußdauer in  $m/sk$ , also  $Q = F v_0$ ;

$\mu$  und  $g$  s. S. 271.

1. Bodenöffnung wagerecht, Gefäß prismatisch.

a) Es findet kein Zutluß statt, also  $\mu F v_0 t = \mu O_0 (H_0 - H_t) = Q t$ .

$$v_0 = \sqrt{2 g} \left( \frac{\sqrt{H_0} + \sqrt{H_t}}{2} \right), \text{ gleichbleibende Verzögerung } p = g \left( \frac{\mu F}{O_0} \right)^2;$$

ohne Rücksicht auf die Zufußgeschwindigkeit zur Bodenöffnung wird

$$t = \frac{2 O_0}{\mu F \sqrt{2 g}} (\sqrt{H_0} - \sqrt{H_t}) = 0,452 \frac{O_0}{\mu F} (\sqrt{H_0} - \sqrt{H_t}),$$

mit Rücksicht hierauf setze statt  $O_0$  den Wert  $\sqrt{O_0^2 - \mu^2 F^2}$ .

b) Das Gefäß erhält gleichzeitig Zufluß durch die unveränderliche Flüssigkeitsmenge  $Q_1$  in cbm/sk.

Wenn  $Q_1 > \mu F \sqrt{2g H_0}$ , so steigt die Oberfläche; sie fällt, wenn  $Q_1 < \mu F \sqrt{2g H_0}$ . Sobald ein Höhenunterschied  $H_x = \frac{1}{2g} \left( \frac{Q_1}{\mu F} \right)^2$  erreicht ist, bleiben  $H_x$  und die Ausflußgeschwindigkeit unverändert. Die Zeit bis zur Erreichung dieses Beharrungszustandes ist unendlich groß. Die Zeit bis zur Erreichung der Druckhöhe  $H_t$  beträgt

$$t = \frac{2 O_0}{\mu F \sqrt{2g}} \left[ \sqrt{H_0} - \sqrt{H_t} + \frac{Q_1}{\mu F \sqrt{2g}} \ln \frac{\mu F \sqrt{2g H_0} - Q_1}{\mu F \sqrt{2g H_t} - Q_1} \right].$$

2. Bodenöffnung wagerecht, Gefäß nicht prismatisch, kein Zufluß,  $t$  bedeute die Dauer bis zur Entleerung des Gefäßes, also  $H_t = 0$ :

Keilförmiges Gefäß,  $O_0$  rechteckig:

$$t = \frac{2 O_0 H_0}{3 \mu F \sqrt{2g H_0}} \quad Q = \frac{O_0 H_0}{2t}$$

Pyramidenförmiges Gefäß:

$$t = \frac{2 O_0 H_0}{5 \mu F \sqrt{2g H_0}} \quad Q = \frac{O_0 H_0}{3t}$$

Obeliskenförmiges Gefäß (Ponton),  $O_0$  rechteckig:

Länge und Breite von  $O_0$  seien  $l$  und  $b$ ,  
Länge und Breite des Bodens  $O_1$  seien  $l_1$  und  $b_1$ :

$$t = [3 O_0 + 8 O_1 + 2 (b l_1 + b_1 l)] \frac{2 H_0}{15 \mu F \sqrt{2g H_0}}$$

Paraboloidisches Gefäß (Teich)  $O_0 = r^2 \pi$ :

$$t = \frac{2 O_0 H_0}{3 \mu F \sqrt{2g H_0}} \quad Q = \frac{O_0 H_0}{2t}$$

Kugelabschnittförmiges Gefäß vom Halbmesser  $r$  in m:

$$t = \frac{2 \pi (10 r - 3 H_0) H_0^{3/2}}{15 \mu F \sqrt{2g}}$$

für die Halbkugel mit  $H_0 = r$  wird  $t = \frac{14 \pi r^2 \sqrt{r}}{15 \mu F \sqrt{2g}}$ .

Unregelmäßiges gebildetes Gefäß (**Talsperre**):

Nach der Simpsonschen Regel lege man in gleichen Abständen voneinander  $n$  wagerechte Schnitte durch den Flüssigkeitskörper, wodurch die Oberflächen  $O_1, O_2 \dots O_n$  und die entsprechenden Druckhöhen  $H_1, H_2 \dots H_n$  gebildet werden.  $n$  muß eine gerade Zahl sein.

Dann ist

$$t = \frac{H_1 - H_n}{3 n \mu F \sqrt{2g}} \left[ \frac{O_1}{\sqrt{H_1}} + \frac{4 O_2}{\sqrt{H_2}} + \frac{2 O_3}{\sqrt{H_3}} + \frac{4 O_4}{\sqrt{H_4}} + \dots + \frac{O_n}{\sqrt{H_n}} \right],$$

$$Q = \frac{H_1 - H_n}{3 n t} (O_1 + 4 O_2 + 2 O_3 + 4 O_4 + \dots + O_n).$$

3. Seitenöffnung lotrecht ohne Rückstau. Öffnung recht- eckig von der Breite  $b$  in m, Gefäßs prismatisch, kein Zufuß.

Die Seitenöffnung reicht bis zum anfänglichen Flüssigkeitsspiegel (**Ueberfall**),  $H_0$  und  $H_t$  bis zur Unterkante des Ueberfalles gemessen, Ausflufs ins Freie:

$$t = \frac{3 O_0}{\mu b \sqrt{2g}} \left( \frac{1}{\sqrt{H_t}} - \frac{1}{\sqrt{H_0}} \right); \quad t = \infty \text{ für } H_t = 0.$$

Die Seitenöffnung verbleibt während des Ausflusses unter dem Flüssigkeitsspiegel, kein Rückstau (**Durchlaß ohne Rückstau**).  $H_0$  und  $H_t$  bis zum Schwerpunkte von  $F$  gemessen, also  $H_t$  mindestens gleich halber Höhe der Öffnung. Angenähert ist

$$t = \frac{2 O_0}{\mu F \sqrt{2g}} \left[ \sqrt{H_0} - \sqrt{H_t} - \frac{1}{288} \left( \frac{F}{b} \right)^3 \left( \frac{1}{\sqrt{H_0^3}} - \frac{1}{\sqrt{H_t^3}} \right) \right]$$

und praktisch genau genug

$$t = \frac{2 O_0}{\mu F \sqrt{2g}} (\sqrt{H_0} - \sqrt{H_t}) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Ausdruck wie unter 1. für den Ausflufs aus} \\ \text{einer wagerechten Bodenöffnung, s. S. 274.} \end{array} \right.$$

4. Ausgleich der Flüssigkeitsspiegel zwischen zwei miteinander verbundenen prismatischen Gefäßen mit den wagerechten Querschnitten  $O_1$  und  $O_2$  und mit den Spiegelabständen  $H_0$  und  $H_t$ .

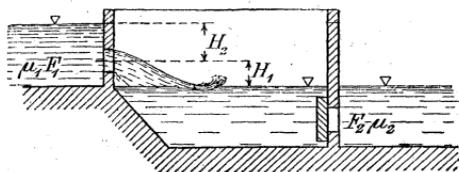
Durchlaßöffnung ständig unter Wasser (**Durchlaß mit Rückstau**):

$$t = \frac{2 O_1 O_2 (\sqrt{H_0} - \sqrt{H_t})}{\mu F (O_1 + O_2) \sqrt{2g}}.$$

Ist  $O_1$  sehr groß gegen  $O_2$ , so ergibt sich der Wert unter 3.,  $O_2$  statt  $O_0$  gesetzt.

5. Zusammengesetzter Ausflufs (**Durchlaß mit zeitweisem Rückstau**, einfache Schleusenammer, Abb. 122). Das Gefäß ist prismatisch und vom Querschnitt  $O_0$  innerhalb der wechselnden Wasser- spiegelhöhen.  $H_2$  reicht bis zum Schwerpunkte von  $F_1$ .

Abb. 122.



Zeit zum Anfüllen:

$$t = \frac{O_0 (H_1 + 2 H_2)}{\mu_1 F_1 \sqrt{2g} H_2},$$

Zeit zum Entleeren:

$$t = \frac{2 O_0 \sqrt{H_1 + H_2}}{\mu_2 F_2 \sqrt{2g}}.$$

#### 4. Ausfluszzahlen $\mu$ für Wasser beim Ausfluss durch Öffnungen.

Der Wert  $\mu$  für die Ausflussmenge liegt im allgemeinen zwischen 0,5 und 1,0 und wird hauptsächlich durch die Einschnürung des Ausflusstrahles kurz nach dem Verlassen scharfkantiger Einlaufkanten beeinflusst. In geringerem Maße vermindert sich  $\mu$  durch Herabsetzung der theoretischen Ausflussgeschwindigkeit infolge Reibung an den Einlaufkanten und an den Wandungen etwa vorhandener Mundstücke oder Gerinne.

Wird die Einschnürung durch den Koeffizienten  $\alpha$ , und die Verminderung der theoretischen Geschwindigkeit  $v_0$  durch den Koeffizienten  $\varphi$  gemessen, so verbleibt nutzbar nur ein Strahlquerschnitt  $\alpha F$  und eine Geschwindigkeit  $\varphi v_0$ , so dafs zu setzen ist:  $\mu = \alpha \varphi$ .

Im allgemeinen wird die Einschnürung verringert, also  $\alpha$  vergrößert, durch Abrundung der Einlaufkanten, Verdickung der Wandung, Abweichung von der kreisrunden Form für die Öffnung, durch Behinderung eines allseitig gleichmäßigen Zuflusses zur Öffnung (Nähe von Boden- oder Seitenwand), Auftreten von wesentlicher Zuflussströmung, durch Ansatzgerinne oder Mundstücke.

$\alpha$  ist angenähert 1,0 für kreisförmige Öffnung mit stark abgerundeter Einlaufkante bei entweder dicker Wandung oder sehr kurzem zylindrischem Ansatzrohr (vgl. Abb. 126).

Die Geschwindigkeitszahl  $\varphi$  ist am größten beim Ausfluss aus dünner Wandung mit zugespitzten Durchflussskanten ( $\varphi \sim 0,97$ ), oder beim Ausfluss aus ganz kurzer, geglätteter Düse mit stark abgerundeter Einlaufkante ( $\varphi \sim 0,99$ ), so dafs der Energieverlust bei solchem Ausfluss nur  $1 - \varphi^2 = 6$  bzw. 2 vH beträgt. Bei nicht zu kurzen zylindrischen Mundstücken mit scharfer Einlaufkante dagegen, also bei  $\alpha = 0$  an der Mündung und  $\mu = \varphi$ , wird  $\varphi \sim 0,82$ ; somit entsteht hier ein Energieverlust  $\sim 33$  vH. (Bei langen Ansatzrohren berechnet sich  $\varphi$  und  $\mu$  nach den Angaben für den Durchfluss gefüllter Leitungen.)

Bei den Angaben von  $\mu v_0$  für Seitenöffnungen wird bisweilen der theoretische Beiwert von  $\sqrt{2 g h_u}$  (vgl. S. 272 u. f.) in den Wert  $\mu$  miteingeschlossen, was aber leicht zu unrichtigen Vorstellungen von  $\alpha$  und  $\varphi$  und zu Irrtümern bei der Ausrechnung von  $Q$  führen kann.

##### $\alpha$ . Die Öffnung erreicht den Flüssigkeitsspiegel; Ueberfallwehr.

Die hier angegebenen Werte  $\mu$  für Wasser enthalten zugleich den Einfluss der Zufußgeschwindigkeit  $v_z$ , so dafs trotz Berücksichtigung derselben zu setzen ist

$$Q = \mu F \frac{2}{3} \sqrt{2 g h_u} \quad (\text{vgl. S. 273}).$$

Es bedeute

- $B$  die Breite des Zufußkanals in m,
- $b$  die Wehrbreite in m,
- $h_k$  die Kanaltiefe vor dem Wehr in m,
- $h_u$  die Tiefe der Wehrkante unter dem Flüssigkeitsspiegel in m, dieselbe mindestens im Abstände  $3 h_u$  vor der Ueberfallkante gemessen.

1.  $b = B = \text{konstant}$ , keine seitliche Einschnürung des Strahles, Zufußgeschwindigkeit durch den Wert  $\mu$  mitberücksichtigt.

Bei lotrechttem Wehr, Wehrkrone dünn und scharfkantig, Strahlunterfläche gut gelüftet.

Nach Freese,\*) soweit  $b > h_u$  und  $h_u > 0,1 \text{ m}$ ,

$$\mu = \left( 0,6150 + \frac{0,0021}{h_u} \right) \left[ 1 + 0,55 \left( \frac{h_u}{h_k} \right)^2 \right],$$

$$\text{Mittelwerte: } \mu = 0,63, \quad Q = 0,42 \sqrt{2 g h_u}.$$

(Nach Aichel\*\*) setze statt des ersten Klammerausdrucks

$$\left( 0,616 + \frac{0,00049}{h_u - 0,0083} \right).$$

Nach Bazin beträgt

die Strahlgeschwindigkeit an der Unterfläche  $= 0,946 \sqrt{2 g h_u}$ ,

„ „ an der Oberfläche  $= 0,495 \sqrt{2 g h_u}$ ,

die mittlere Strahlgeschwindigkeit

$$\text{etwa } 0,98 \cdot \frac{2}{3} \sqrt{2 g h_u} = 0,65 \sqrt{2 g h_u},$$

die Strahldicke an der Stelle größter Einschnürung  $0,648 h_u$ ; die Absenkung des Spiegels ist im Abstände  $3 h_u$  von der Wehrkrone nicht mehr meßbar.

Bei geneigtem Wehr, Wehrkrone dünn und scharfkantig, Strahlunterfläche gut gelüftet:

Wenn  $\varphi$  den Winkel zwischen Wehrebene und der Wagerechten auf der Zufußseite bedeutet, vervielfältige die Werte  $\mu$  für lotrechtes Wehr (nach Bazin)\*\*\*)

$$\begin{array}{l} \text{bei } \varphi = 45^\circ \quad 70^\circ \quad 90^\circ \quad 135^\circ \quad 153^\circ \\ \text{mit} \quad \quad \quad 0,93 \quad 0,96 \quad 1,00 \quad 1,10 \quad 1,11. \end{array}$$

Wenn  $\varphi > 153^\circ$ , nimmt  $\mu$  wieder ab bis zum Werte 1,0.

Ohne Luftzutritt unterhalb des Ueberfallstrahles wächst  $\mu$  (nach Bazin)

bei $h_u < 0,23 \text{ m}$	bis zum 1,08-fachen	} des Wertes von $\mu$ für den Fall mit Lüftung.
„ $h_u \sim 0,23 \text{ m}$	„ „ 1,29 „	
„ $h_u > 0,29 \text{ m}$	„ „ 1,15 bis 1,19-fachen	

Bei lotrechttem Wehr mit breiter, stromaufwärts scharfkantiger Wehrkrone von der Stärke  $\delta$  in m, vervielfältige den Wert für dünne, scharfe Wehrkrone (nach Bazin)

$$\begin{array}{l} \text{bei } h_u : \delta = 0,25 \quad 0,50 \quad 0,75 \quad 1,00 \quad 1,25 \quad 1,50, \\ \text{mit} \quad \quad \quad 0,75 \quad 0,78 \quad 0,82 \quad 0,86 \quad 0,90 \quad 0,93. \end{array}$$

Bei  $h_u < 1,5 \delta$  wird die Wehrkrone stets benetzt, bei  $h_u \sim 1,5$  bis  $2,0 \delta$  ist die Benetzung nicht sicher zu erhalten, und bei  $h_u > 2 \delta$

\*) S. Z. d. V. d. I. 1890 S. 1285.

\*\*) S. Z. d. V. d. I. 1908 S. 1752.

\*\*\*) S. Z. d. V. d. I. 1890 S. 880 und 1889 S. 513.

springt der Strahl frei über die Wehrkrone, so daß  $\mu$  den Wert wie bei scharfer Ueberfallkante erhält.

Wird noch die stromaufwärts liegende Wehrkante stark abgerundet, so vergrößert sich  $\mu$  um 0,1 bis 0,15.

Bei schief zur Stromrichtung eingebautem lotrechttem Wehr mit dem Winkel  $\beta$  zwischen Wehrkante und Ufer vervielfältige (nach Aichel) den Wert  $\mu$  für das normal eingebaute Wehr mit dem Beiwert (gültig für  $h_u < 0,4 h_k$ )

$$1 - 250 \frac{h_u}{h_b - h_u} \cdot \frac{1}{q},$$

worin für  $\beta = 15^\circ \quad 30^\circ \quad 45^\circ \quad 60^\circ \quad 75^\circ$   
 $q = 305 \quad 532 \quad 893 \quad 1923 \quad 6579.$

2.  $b < B$  (seitliche Einschnürung des Strahles), Wehr lotrecht und normal zum Strom gerichtet, Durchflussskanten scharfkantig. Nach Freese, soweit  $h_u > 0,1$  m und  $< 0,6$  m:

$$\mu = m \left\{ 1 + \left[ 0,25 \left( \frac{b}{B} \right)^2 + 0,025 + \frac{0,0375}{(h_u : h_k)^2 + 0,02} \right] \left( \frac{h_u}{h_k} \right)^2 \right\}, \text{ worin}$$

$$m = 0,5755 + \frac{0,017}{h_u + 0,18} - \frac{0,075}{b + 1,2} \text{ zu setzen ist.}$$

Für die unter 1 bezeichneten besonderen Fälle vervielfältige  $\mu$  mit den dort angegebenen Beiwerten.

**$\beta$ . Die Oeffnung liegt unter dem Flüssigkeitsspiegel; Bodenöffnung oder seitlicher Durchlaß.**

1. Oeffnung ohne Ansatz, in ebener, sehr dünner Wandung oder mit zugeschärften Durchflussskanten bei dickerer Wandung. (Angaben nach Weisbach.)

a) Zufußquerschnitt vor der Oeffnung  $\leq 10 F$ , so daß die Zufußgeschwindigkeit vernachlässigt werden kann. (Bedeutung von  $F$  s. S. 270.)

Bei kreisförmiger Oeffnung (vollkommene Kontraktion):

Bei größerer Tiefe und größerer Oeffnung:  $\mu = 0,61$ .

Bei kleineren Mafsen für Tiefe und Oeffnung, nach Weisbach:

Durchmesser der Oeffnung	0,44	1	2	3	4 m
Wassertiefe 0,25 m . . .	$\mu = 0,68$	0,64	0,63	0,62	0,614
„ 0,60 m . . .	$\mu = 0,66$	0,63	0,62	0,61	0,607.

Beim Ausfluß unter Wasser ist  $\mu$  etwa 0,01 kleiner als vorstehend.

Bei geradlinig begrenzter Oeffnung (unvollkommene Kontraktion):

Der Wert  $\mu$  ist am kleinsten für das Quadrat und beinahe gleich dem für die Kreisöffnung;  $\mu$  wird aber größer für langgestreckte Oeffnungen und wächst bis etwa 0,9 für ganz schmale Schlitze. (Einfluß der Größe von  $F$  und der Wassertiefe wie bei kreisförmigen Oeffnungen.)

b) Der vor  $F$  befindliche Zufußquerschnitt  $F_z \leq 10 F$ , Zufußgeschwindigkeit wesentlich, unvollkommene Kontraktion. Vervielfältigte (nach Weisbach) vorstehende Werte  $\mu$  mit folgenden Zahlen:

wenn  $F:F_z = 0,1 \quad 0,2 \quad 0,3 \quad 0,4 \quad 0,5 \quad 0,6 \quad 0,7 \quad 0,8 \quad 0,9 \quad 1,0$   
 $F$  kreisrund: 1,014 1,034 1,06 1,09 1,13 1,19 1,26 1,35 1,47 1,63  
 $F$  rechteckig: 1,019 1,042 1,07 1,11 1,15 1,21 1,28 1,36 1,47 1,61

2. Oeffnung in nicht sehr dünner Wandung, oder Oeffnung mit kurzem Ansatz (Mundstück, Gerinne).  
 (Angaben nach Weisbach.)

Ist die Einlaufkante scharfkantig und der Flächenwinkel an ihr  $< 150^\circ$ , so bleibt Kontraktion wie bei der Oeffnung in sehr dünner Wandung bestehen, und bei der folgenden Wiederausbreitung des Strahles legt sich derselbe nur dann an die Wandung des Ansatzes an, wenn die Entfernung bis zur Ausflusmündung größer ist als die Weite der Oeffnung; bei geringerer Länge gelten die Werte  $\mu$  wie unter 1 angegeben.

Der Mündungsquerschnitt wird vom Strahl nicht ausgefüllt bei lotrechten zylindrischen Ansätzen an Bodenöffnungen und bei beliebig angeetzten divergenten Mundstücken an Boden- oder Seitenwänden. Bei solchen Mundstücken entsteht am engeren Querschnitt Verminderung des Seitendrucks neben Geschwindigkeitsvergrößerung, und der Strahl tritt an der Mündung besenförmig aus. Dabei kann der Wert  $\mu$  in bezug auf den engeren Querschnitt wesentlich höhere Werte als 1 annehmen (vgl. die Angaben zu Abb. 127 u. 141).

Für den Widerstand in längeren oder zusammengesetzten Ansätzen vgl. folgenden Abschn. C.

a) **Rechtwinklig zur Wandung angesetzte runde Mundstücke.**

Abb. 123,  $\delta = 0^\circ \quad 53/4^\circ \quad 111/4^\circ \quad 221/2^\circ \quad 45^\circ \quad 671/2^\circ \quad 90^\circ$   
 Kante  $a$  stark abgerundet:  $\mu = 0,97 \quad 0,95 \quad 0,92 \quad 0,88 \quad 0,75 \quad 0,68 \quad 0,63$  ( $l = 3d$ )  
 Kante  $a$  scharf:  $\mu = 0,83 \quad 0,94 \quad 0,92 \quad 0,85 \quad 0,75 \quad 0,68 \quad 0,63$  ( $l = 2,6d$ )

Bei scharfer Kante wird  $\mu$  Höchstwert = 0,946 für  $\delta = 63/4^\circ$ .  
 Abb. 124,  $l = 3$  bis  $5d$ ;

Kante  $a$  scharf:  $\mu$  etwa 0,82,  
 Kante  $a$  schwach abgerundet:  $\mu$  etwa 0,90,  
 Kante  $a$  stark abgerundet:  $\mu$  etwa 0,97.

Abb. 125, Dicke der gegen den Strom gerichteten Ringfläche wenigstens  $5 \text{ mm}$ :

$\delta = 0^\circ \quad 221/2^\circ \quad 45^\circ \quad 671/2^\circ \quad 90^\circ$   
 $\mu = 0,54 \quad 0,55 \quad 0,58 \quad 0,60 \quad 0,63$  ( $l = d$ ).

Ist die Oeffnung mit  $\delta = 0^\circ$  der Zufußrichtung entgegen schneidenartig zugeshärft, so nimmt  $\mu$  den kleinsten durch Kontraktion erreichbaren Wert 0,50 an.

Abb. 126, für  $l = 0,6 d$ , mit der Glätte der Wandung und der Durchfluggeschwindigkeit wachsend, wird  $\mu = 0,96$  bis  $0,99$ .

Abb. 123.

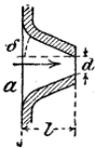


Abb. 124.

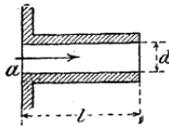


Abb. 125.

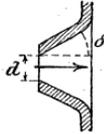


Abb. 126.



Abb. 127.

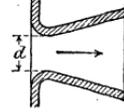
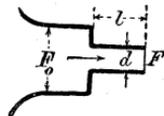


Abb. 127. Je nach Winkel, Stutzenlänge und Durchfluggeschwindigkeit ist  $\mu = 0,96$  bis  $1,5$  (bezogen auf den engeren Querschnitt); Austritt besenförmig, hohler Strahl (vergl. S. 304).

Abb. 128,  $l = 3 d$ ,  $F$  und  $F_0$  bedeuten Querschnitte. Vervielfältige den Wert  $\mu$  für Abb. 128

Abb. 128.



bei $\frac{F}{F_0} = 0,1$	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,00	
mit	1,013	1,027	1,043	1,06	1,08	1,10	1,13	1,15	1,18	1,23.

b) **Schiefwinklig angesetzte Rohrstützen** mit scharfer Einlaufkante und  $l = 3 d$ , wenn  $\gamma$  den Winkel zwischen Wandfläche und Strahlachse bedeutet:

$\gamma = 90^\circ$	$80^\circ$	$70^\circ$	$60^\circ$	$50^\circ$	$40^\circ$	$30^\circ$
$\mu = 0,82$	0,80	0,78	0,76	0,75	0,73	0,72.

c) **Teilweise umkränzte Öffnungen** in dünner Wand, aufsen oder innen zur Stromrichtung parallel angesetzte Leitflächen oder Gerinne, welche auch durch den Boden oder die Seitenwand des Gefäßes gebildet sein können, indem der zur Öffnung gerichtete Strahl an ihnen entlang fließen muß.

Bedeutet  $\frac{1}{n}$  den umkränzten Teil des benetzten Umfanges der Öffnung, so vergrößert sich (nach Bidone und Weisbach) der auf S. 279 unter 1 angegebene Wert  $\mu$  für allseitig scharfe Durchfluskanten (infolge aufgehobener Kontraktion an den umkränzten Teilen, teilweise Kontraktion genannt) um den Wert

- 0,128 :  $n$  bei kleinen kreisförmigen Öffnungen,
- 0,134 :  $n$  bei kleinen rechteckigen Öffnungen,
- 0,157 :  $n$  bei größeren rechteckigen Öffnungen.

## C. Durchfluß durch gefüllte Rohrleitungen.

### 1. Allgemeines über die Widerstände und Fließzustände.

Jeder Geschwindigkeit  $v$  der Flüssigkeit in m/sk entspricht ohne Rücksicht auf die Widerstände bereits ein Aufwand an

Fallhöhe (**Geschwindigkeitshöhe**) =  $\frac{v^2}{2g}$  (in m), worin  $g = 9,81 \text{ m/sk}^2$ .

Hierzu tritt der Aufwand für Ueberwindung der Widerstände beim Durchfluß der Leitung, die sich fast sämtlich der Geschwindigkeitshöhe proportional zeigen, weshalb zweckmäÙig alle Widerstände ohne Ausnahme als Vielfaches von  $v^2 : 2g$  mittels Widerstandszahlen  $\zeta$  bewertet werden.

Die Widerstände sind unabhängig von dem Material der benetzten Wandung und von der Seitenpressung der Flüssigkeit, also auch unabhängig von dem auf der Oberfläche lastenden Drucke und unabhängig von der Tiefe unter der Oberfläche.

Die Widerstände sind abhängig von der Form und dem Rauigkeitsgrade der benetzten Wandung, ferner von dem Flüssigkeitsgrade (Zähflüssigkeit) und von dem Einheitsgewicht (Dichte) der Flüssigkeit und daher auch abhängig vom Wärmegrad.

Der Durchfluß einer Leitung hört auf, wenn an ihrer Scheitelstrecke infolge Verminderung der Seitenpressung oder durch Erwärmung der Flüssigkeit sich so viele Gase oder Dämpfe angesammelt haben, daß der Scheitelquerschnitt von ihnen ausgefüllt wird. Je nach der Seitenpressung und dem gleichzeitigen Wärmegrad entwickelt jede Flüssigkeit Dämpfe und nimmt mechanisch gebundene Gase auf oder gibt solche ab. Z. B. absorbiert Wasser bei 1 at Druck abs. und  $15^0$  an R.-T. 0,02 Luft, 1,0 Kohlensäure, 3,2 Schwefelwasserstoff, 450 Chlorwasserstoff, 727 Ammoniakgas (s. Abschn. Wärme).

Man unterscheidet zwei verschiedene Fließzustände. Bei sehr engen und zugleich glatten, geraden Röhren fließen die Flüssigkeitsfäden bei den kleineren Geschwindigkeiten parallel zueinander; bei den meist betrachteten Rohrweiten und Geschwindigkeiten dagegen fließen sie durcheinanderwirbelnd oder schraubenförmig im Rohr entlang. Beide Zustände trennen sich an der sogen. kritischen oder Grenz-Geschwindigkeit (s. S. 294) die sich (nach Versuchen von Lang) durch einen unruhigen Wasserstand im Standrohr zu erkennen gibt. Durch allmähliche Vermehrung der Geschwindigkeit kann die Erreichung der Grenzgeschwindigkeit etwas hinausgeschoben werden.

Bei beiden Fließzuständen besitzt der mittlere Flüssigkeitsfaden die größte Durchflußgeschwindigkeit. Die Geschwindigkeiten der anderen Fäden nehmen nach der Wand zu parabolisch ab. Die Geschwindigkeit an der Wand ist unterhalb der kritischen Geschwindigkeit null, oberhalb dagegen etwa das 0,57fache von der in der Achse oder das 0,64fache von der mittleren Geschwindigkeit des ganzen Durchflußquerschnittes. Diese mittlere Geschwindigkeit beträgt unterhalb der kritischen Geschwindigkeit das 0,5fache, oberhalb etwa das 0,84fache der Höchstgeschwindigkeit in der Achse.

## 2. Allgemeine Beziehungen für Leitungen mit wechselnden Höhenlagen, Querschnitten und Widerständen.

Abb. 129 zeigt die Druckverhältnisse in einer Heberleitung, Abb. 130 die in einer Saugleitung.

Es bedeutet

$F_e$  und  $F_a$  den Einlauf- bzw. Ausflußquerschnitt der Leitung in  $qm$ ,  
 $F_s$  den Querschnitt am Scheitel der Leitung in  $qm$ ,

$F_1, F_2$  usw. Querschnitte der Leitung zwischen  $F_e$  und  $F_a$ , winkelrecht zur Stromrichtung gemessen, in  $qm$ ,

$Q$  die durch die Leitung abzuführende Flüssigkeitsmenge in  $cbm/sk$  unter Berücksichtigung aller Widerstände und Masseneinflüsse,

$Q_0$  die theoretisch, ohne Widerstände und Masseneinfluß abführbare Flüssigkeitsmenge in  $cbm/sk$ ,

$v_e, v_1, v_a$  usw. die mittlere Durchflußgeschwindigkeit in  $m/sk$  in den Querschnitten  $F_e, F_1, F_a$  usw.,

$v_0$  die  $Q_0$  entsprechende, theoretische mittlere Ausflußgeschwindigkeit im Ausflußquerschnitt  $F_a$ , in  $m/sk$ ,

$v_z$  die Komponente der Zulaufgeschwindigkeit zu  $F_e$  in der Richtung der Einlaufgeschwindigkeit in  $m/sk$ . Vorausgesetzt ist dabei, daß der Zulaufstrom auf den Einlaufquerschnitt  $F_e$  gerichtet ist, andernfalls ist  $v_z = 0$ ,

$\frac{v_e^2}{2g}, \frac{v_a^2}{2g}$  usw. die zur Erzeugung von  $v_e, v_a$  usw. theoretisch erforderliche Fallhöhe, **Geschwindigkeitshöhe** genannt,

$H_e$  und  $H_a$  die Höhen der Flüssigkeitsspiegel bei  $F_e$  bzw.  $F_a$  über dem Schwerpunkte von  $F_a$ , in  $m$ ,

$H_0$  die treibende Druckhöhe in  $m$  der Flüssigkeit, theoretischer Stau, theoretische **Fallhöhe**,

$h_e, h_a, h_1$  usw. den absoluten Druck bei  $F_e, F_a, F_1$  usw. der in Ruhe gedachten Flüssigkeit auf die Wandung der Leitung, gemessen in  $m$  der Flüssigkeitssäule; **hydrostatischer Seitendruck**; der dynamische Einfluß von  $v_z$  ist durch die Höhe  $v_z^2 : 2g$ ) mit einbegriffen,

$p_e, p_a, p_1$  usw. den absoluten Druck bei  $F_e, F_a, F_1$  usw. der in Bewegung gedachten Flüssigkeit auf die Wandung der Leitung, gemessen in  $m$  der Flüssigkeitssäule; **hydraulischer** oder **hydrodynamischer Seitendruck**,

$q_e, q_a, q_s, q_1$  usw. den am Querschnitt  $F_e, F_a$  usw. wirkenden äußeren Luftdruck in  $m$  der Flüssigkeitssäule,

$s$  die der Temperatur der Flüssigkeit entsprechende Dampfspannung in  $m$  der Flüssigkeitssäule (vgl. 3. Abschn. Wärme),

$w_e, w_a, w_1$  usw. den bei  $F_e, F_a, F_1$  usw. auftretenden Widerstand, wie  $p$  gemessen; **Widerstandshöhe**,

$\sum_e^1 w, \sum_e^a w$  usw. die Summe der Widerstände auf den Strecken zwischen  $F_e$  und  $F_1$  bzw.  $F_e$  und  $F_a$  usw., wie  $p$  gemessen,

$\zeta_e, \zeta_a, \zeta_1$  usw. die **Widerstandszahl**, die den in  $F_e, F_a, F_1$  usw. stattfindenden hydraulischen Widerstand als Teil der Geschwindig-

keitshöhe  $\frac{v_e^2}{2g}, \frac{v_a^2}{2g}, \frac{v_1^2}{2g}$  usw. angibt; also allgemein  $\zeta \frac{v^2}{2g} = w$ ;  
 Werte  $\zeta$  s. S. 288 u. f.,

$\sum_e^1 \zeta_a$  die Widerstandszahl für die Summe der Widerstände auf der Strecke  $F_e$  bis  $F_1$ , die als Teile von  $v_a^2 : 2g$  gemessen werden; andere Zeiger geben entsprechende Strecken und Geschwindigkeitshöhen an, z. B.  $\sum_1^a \zeta_1$  ist die Widerstandszahl zu  $v_1^2 : 2g$  für die Strecke  $F_1$  bis  $F_a$ ,

$\mu_a$  die **Ausflussszahl** (Wirkungsgrad) der ganzen Leitung, d. i. das Verhältnis  $Q : Q_0$  oder  $v_a : v_0$ ,

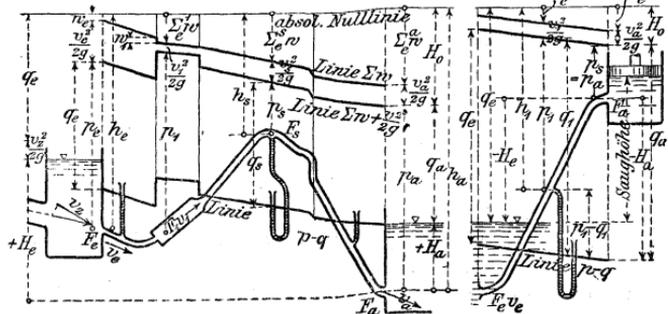
$\gamma$  das Gewicht der Flüssigkeit in kg/cbm. Die in  $m$  Flüssigkeitshöhe gemessenen Höhen ergeben mit  $\gamma$  vervielfältigt den entsprechenden Druck in kg/qm oder mit  $\gamma : 10\,000$  vervielfältigt den Druck in kg/qcm = Druck in at.

Für Süßwasser ist bei

	0°	4°	10°	20°	40°	60°	80°	100°
$\gamma =$	0,9998	1,000	0,9997	0,998	0,992	0,983	0,972	0,958,
	für Seewasser bei 15°: $\gamma = 1,02$ bis 1,03,							
	,, Quecksilber ,, 15°: $\gamma = 13,595$ .							

Abb. 129. **Heberleitung.**

Abb. 130. **Saugleitung.**



Grundgleichungen:

$$H_0 = H_e - H_a + v_a^2 : 2g + q_e - q_a;$$

$$H_0 = h_a - p_a = v_a^2 : 2g + \sum_e^a w = (1 + \sum_e^a \zeta_a) v_a^2 : 2g;$$

$$v_a = \sqrt{\frac{2g H_0}{1 + \sum_e^a \zeta_a}}. \quad \text{Hierin ist}$$

$$h_a = H_e + v_a^2 : 2g + q_e; \quad p_a = H_a + q_a;$$

$$\sum_e^a \zeta_a = \zeta_e \left(\frac{F_a}{F_e}\right)^2 + \zeta_1 \left(\frac{F_a}{F_1}\right)^2 + \dots + \zeta_a.$$

$$Q = F_a v_a = \mu_a F_a v_0 = \mu_a Q_0;$$

$$\mu_a = \frac{1}{\sqrt{1 + \Sigma_e^a \zeta_a}} \quad \text{oder} \quad \Sigma_e^a \zeta_a = \frac{1}{\mu_a^2} - 1.$$

Werte  $\Sigma_e^a \zeta_a$ 

$\mu_a =$	1,00	0,95	0,90	0,85	0,80	0,75	0,70	0,65	0,60	0,55	0,50
$\Sigma_e^a \zeta_a =$	0,00	0,10	0,23	0,38	0,56	0,78	1,04	1,37	1,78	2,31	3,00
$\mu_a =$	0,45	0,40	0,35	0,30	0,25	0,20	0,15	0,10	0,05	0,025	0,00
$\Sigma_e^a \zeta_a =$	3,94	5,25	7,16	10,1	15,0	24,0	43,4	99,0	399	1599	$\infty$

Erst nach der Feststellung von  $v_a$  lassen sich die Zustände in den übrigen Querschnitten der Leitung ermitteln.

Beispielsweise gilt für  $F_2$ , während für andere Querschnitte nur die zugehörigen Zahlenzeiger sinngemäß einzusetzen sind:

$$v_2 = v_a F_a : F_2$$

$$h_2 - p_2 = \frac{v_2^2}{2g} + \Sigma_e^2 w = (1 + \Sigma_e^2 \zeta_2) \frac{v_2^2}{2g}$$

$$= (1 + \Sigma_e^2 \zeta_2) \left( \frac{F_a}{F_2} \right)^2 \frac{v_a^2}{2g} = H_0 \left( \frac{F_a}{F_2} \right)^2 \frac{1 + \Sigma_e^2 \zeta_2}{1 + \Sigma_e^a \zeta_a};$$

Steighöhe im offenen Standrohr bei  $F_2 = p_2 - q_2$ ,

Widerstandshöhe

$$\Sigma_e^2 w = w_e + w_1 + w_2 = (\zeta_e v_e^2 + \zeta_1 v_1^2 + \zeta_2 v_2^2) : 2g$$

$$= \Sigma_e^2 \zeta_2 \frac{v_2^2}{2g} = \Sigma_e^2 \zeta_a \frac{v_a^2}{2g};$$

Widerstandszahl:

$$\Sigma_e^2 \zeta_2 = \zeta_e \left( \frac{v_e}{v_2} \right)^2 + \zeta_1 \left( \frac{v_1}{v_2} \right)^2 + \zeta_2 = \zeta_e \left( \frac{F_2}{F_e} \right)^2 + \zeta_1 \left( \frac{F_2}{F_1} \right)^2 + \zeta_2$$

$$\Sigma_e^2 \zeta_a = \zeta_e \left( \frac{v_e}{v_a} \right)^2 + \zeta_1 \left( \frac{v_1}{v_a} \right)^2 + \zeta_2 \left( \frac{v_2}{v_a} \right)^2 = \zeta_e \left( \frac{F_a}{F_e} \right)^2 + \zeta_1 \left( \frac{F_a}{F_1} \right)^2 + \zeta_2 \left( \frac{F_a}{F_2} \right)^2.$$

Einzelwerte  $\zeta$  s. S. 288 u. 293.

Weisbach hat für die einzelnen Widerstände die Angabe von Widerstandszahlen  $\zeta$  (Teilzahlen der Geschwindigkeitshöhen) statt der vordem üblichen Angabe von Ausflußzahlen  $\mu$  (Teilzahlen der theoretischen Ausflußmenge) eingeführt (s. Vorrede von Weisbach zu seiner Schrift über „Versuche“, Leipzig 1842), weil dadurch die rechnerische Zusammenfassung aller Widerstände einer Leitung sehr erleichtert wird, zumal die Widerstände, mit Ausnahme für den geraden Rohrstrang, sich als proportional  $v^2$  erweisen.

### 3. Besondere Fälle, Erklärung besonderer Erscheinungen.

Bei kurzen Leitungen mit gleichen Feuchtigkeitsverhältnissen der Luft über  $F_e$  und  $F_a$  kann  $q_e = q_a$  gesetzt werden; ist außerdem

$v = 0$ , so wird  $H_0 = H_e - H_a$ . Bei langen Leitungen dagegen ist stets die Verschiedenheit von  $q_e$  und  $q_a$  zu berücksichtigen, die infolge Witterungswechsels fortwährend kleinen Aenderungen ausgesetzt sind.

Für einen Querschnitt  $F_n$  nahe dem Ausflufs setze zur bequemeren Berechnung

$$\Sigma_e^n w = \Sigma_e^a w - \Sigma_n^a w = H_0 - v a^2 : 2g - \Sigma_n^a w;$$

$$\text{dann wird } h_n - p_n = H_0 - \left[ \left( \frac{F_a}{F_n} \right)^2 - 1 - \Sigma_n^a \zeta_a \right] \frac{v a^2}{2g};$$

bei wagerechter Endigung der Leitung ist hierin

$$h_n = h_a \quad \text{und} \quad h - H_0 = H_a + q_a, \quad \text{somit}$$

$$\begin{aligned} H_a + q_a - p_n &= \left[ \left( \frac{F_a}{F_n} \right)^2 - 1 - \Sigma_n^a \zeta_a \right] \frac{v a^2}{2g} \quad \text{oder} \\ &= \frac{\left( \frac{F_a}{F_n} \right)^2 - 1 - \Sigma_n^a \zeta_a}{1 + \Sigma_e^a \zeta_a} H_0. \quad (\text{vgl. 4. } \gamma.) \end{aligned}$$

Bei freiem Ausflufs ist noch  $H_a = 0$ , und  $q_a - p_n$  stellt dann den Unterdruck im Querschnitt  $F_n$  dar.

Nachgiebiges Rohrmaterial (Gummi, Hanf, Blei) erstrebt unter Formänderung den Zustand  $p = q$ . Dies bedingt bei sonst innerem Ueberdruck eine Vergrößerung von  $v^2 : 2g$  mittels Verkleinerung von  $F$ , und umgekehrt eine Vergrößerung von  $F$  bei sonst äußerem Ueberdruck, der durch streckenweise Einlegung eines dünnen Schlauches in Wasser erzeugt werden kann (vgl. Z. d. V. d. I. 1909 S. 1496). Der äußere Ueberdruck muß aber  $< H_0$  bleiben, sonst hört der Durchflufs auf.

Bei Undichtigkeit der Leitung in einem Querschnitte  $F_x$  tritt an demselben Flüssigkeit aus, wenn  $p_x > q_x$ ; dagegen tritt ein Ansaugen ein, falls  $p_x < q_x$ , also auch falls  $\frac{h_x - q_x}{v a^2 : 2g} < \left( \frac{F_a}{F_x} \right)^2 + \Sigma_e^x \zeta_a$  wird; vgl. in Abb. 129 u. 130 den Rohrstrang oberhalb der Linie für  $p - q$ .

Der Ausflufs hört bei Heber- und Saugleitungen auf (unter Trennung des Flüssigkeitsfadens an der Scheitelstelle  $F_s$ ) entweder infolge Ansaugens von Luft durch undichte Stellen mit  $p_x < q_x$  —, oder durch Eintritt von Luft bei  $F_a$ , falls  $H_a = 0$  und die Strecke zwischen Mündung und Heberscheitel mit gleichem Querschnitt stetig ansteigt —, oder infolge Erwärmung der Scheitelstrecke (etwa durch Sonnenstrahlen bei freiliegendem Scheitel), wobei sich absorbiert gewesene Gase bei  $F_s$  ausscheiden —, oder sobald bei  $F_s$  der der Temperatur der Flüssigkeit entsprechende Dampfdruck  $s$  erreicht wird, also wenn

$$p_s = h_s - \frac{v s^2}{2g} - \Sigma_e^s w \leq s \quad \text{oder} \quad \frac{h_s - s}{v a^2 : 2g} \leq \left( \frac{F_a}{F_s} \right)^2 + \Sigma_e^s \zeta_a.$$

Die nach  $F_a$  zu mit gleichem Querschnitt stetig abfallende Strecke einer Druckleitung bleibt ungefüllt, wenn  $H_a = 0$  und diese Strecke sich über die Linie für  $p - q$  erhebt; alsdann steigt Luft durch  $F_a$  bis zur nächsten Strecke mit geringerem Gefälle, deren Ende nunmehr den Ausflußquerschnitt bildet und die Nutzhöhe  $H_0$  bestimmt. Dies tritt hiernach immer dann ein, wenn die fallende Leitung gleiche Weite bis zur Mündung besitzt, und wenn zugleich ihre Neigung größer ist als das Reibungsgefälle (vgl. Wert  $i$  im folgenden Abschnitt).

Bei Ausfluß unter Flüssigkeit tritt zwar keine Luft mehr bei  $F_a$  ein, es treten dann aber Wasserschläge in der Leitung auf, die durch Einlaß von etwas Luft oberhalb der  $p - q$ -Linie gemildert werden können.

Durch Verkleinerung von  $F_a$  wird die Linie für  $p - q$  vor  $F_a$  gehoben; sobald die Strecke keinen Unterdruck mehr enthält, wird sie ganz von Flüssigkeit erfüllt.

Ausschließlich lotrecht fallende Leitung bleibt gänzlich ungefüllt, zumal wenn der Einlaufstrahl bei  $F_e$  eine wesentliche Einschnürung (etwa durch Kontraktion) erfährt; dieser Einfluß wird ebenfalls durch Verkleinerung von  $F_a$  beseitigt. Andererseits wird dieser Vorgang im Wassertrommelgebläse (Strahl-Luftverdichter) und in der Strahl-Luftpumpe ausgenutzt.\*)

Kurze, nur teilweise gefüllte Strecken entstehen entweder an Scheitelstellen infolge dortiger Ansammlung aufsteigender Gase, die durch Erwärmung der Flüssigkeit oder durch Verminderung der Seitenpressung an anderer Stelle der Leitung frei werden, oder an Stellen mit Strahlzusammenziehung infolge scharfer Durchflußkanten oder wesentlicher Ablenkung der Stromrichtung.

Zur Beseitigung angesammelter Gase an Scheitelstrecken dienen bei Ueberdruck ( $p_x > q_x$ ) Standrohre oder selbsttätige Schwimmerventile. Befindet sich Unterdruck an Scheitel (Heber- oder Saugleitung), so müssen die Gase an diesem abgepumpt werden.\*\*)

Bei einer Heberleitung für Grundwasser sind im allgemeinen  $0,02 Q_a$  ( $1 - 0,1 p_k$ ) cbm Luft/sk abzupumpen, wenn  $p_k$  das kleinste auftretende  $p$  bedeutet.

#### 4. Beziehungen für einen geraden Rohrstrang von gleichem Querschnitt und von gleicher Form (Widerstand gleichförmig).

Es bedeute neben den Zeichen unter 1,

$l$  die Länge des Rohrstranges mit unveränderlichem Querschnitt in m der gerade gestreckt gedachten Achse,

$F$  den Querschnitt in  $qm$ ,

$d$  den Durchmesser, falls der Querschnitt kreisförmig ist, in m,

$u$  den benetzten Umfang des Querschnittes  $F$  in m,

$v$  die mittlere Geschwindigkeit aller Flüssigkeitsfäden im Rohrstrange in m/sk,

\*) Z. d. V. d. I. 1892 S. 1288, 1907 S. 915, 1908 S. 895, 1909 S. 1153.

\*\*) Z. d. B. 1907 S. 345: Selbsttätige Entlüftung von Hebersielen für Deiche. — El. Z. 1906, Heft 22 bis 25: Rotopscher Schleusenheber an Stelle von Torschützen.

$w$  die Widerstandshöhe (Reibungshöhe) für die gerade Strecke  $l$ ,  
in  $m$  Flüssigkeitssäule,

$W$  den Widerstand auf der Strecke  $l$  in  $kg$ ,

$i = w : l$  das relative Reibungsgefälle der Rohrachse, s. Abb. 133,

$\zeta$  die zu  $v^2 : 2g$  gehörige, der Länge  $l$  entsprechende Widerstandszahl,

$\rho$  und  $\lambda$  Reibungszahlen,  $\rho$  für die benetzte Flächeneinheit und für beliebigen,  $\lambda$  für kreisförmigen Querschnitt geltend;  $\lambda = 4\rho$ .

Der Widerstand im geraden Rohrstrang ist proportional der benetzten Wandfläche des Rohres, also proportional  $l$  und  $u$  bzw.  $d$ , ferner je nach der Rauigkeit proportional  $v^{1,75}$  bis  $v^{2,0}$ . Es ist aber für eine erleichterte Zusammenfassung der verschiedenartigen Widerstände einer Leitung zweckmäßig und daher üblich, auch den Widerstand des geraden Rohrstranges genau proportional  $v^2$  anzusetzen und den dadurch entstehenden Unterschied durch entsprechende Bewertung der Reibungszahl auszugleichen.

Der Widerstand ist unabhängig von der Seitenpressung, also auch unabhängig von der Neigung der Rohrachse (vgl. S. 282, Einleitung zu C).

Dann gilt für beliebigen Querschnitt:

$W$  in  $kg = F\gamma w = ul\gamma\rho v^2 : 2g$ ;  $ul =$  benetzte Oberfläche.

(Der Widerstand in  $kg$  ist hiernach gleich dem Gewicht eines prismatischen Körpers, dessen Grundfläche die benetzte Oberfläche, dessen Höhe die Geschwindigkeitshöhe  $v^2 : 2g$  ist und dessen Einheitsgewicht  $\rho\gamma$  in  $kg$  beträgt.)

In manchen Schriften wird der Wert  $\rho\gamma : 2g$  oder  $\rho : 2g$  als Reibungszahl bezeichnet.

Der Wert für  $\rho$  ist im allgemeinen für glatte Flächen  $\sim 0,003$  bis  $0,006$ ; er verkleinert sich etwas mit zunehmendem  $F : u$  und wachsender Geschwindigkeit (vgl. S. 296). Der kleinste Wert von  $\rho$  für polierte Flächen ist zu  $0,00225$  zu schätzen. (Ueber Wasserbremsung vgl. Z. d. V. d. I. 1907 S. 607.)

Somit ist

$$w = \rho l \frac{u}{F} \frac{v^2}{2g}, \quad \text{also} \quad \zeta = \rho l \frac{u}{F};$$

$$i = \frac{w}{l} = \rho \frac{u}{F} \frac{v^2}{2g}, \quad v = \sqrt{\frac{2g}{\rho}} \sqrt{\frac{iF}{u}}, \quad Q = Fv.$$

Der Wert  $\frac{F}{u}$  wird allgemein „hydraulischer Radius“ genannt und mit  $R$  bezeichnet (vgl. S. 310 u. 312). Für den rechteckigen Querschnitt mit der breiten Seite  $a$  und der schmalen Seite  $b$  wird  $R = 0,5b(1 + b/a)$ , oder  $= 0,5b$ , wenn  $b$  sehr klein gegen  $a$ ; für den Kreisquerschnitt ist  $R = 0,25d$ ; für den Ringquerschnitt von der Stärke  $\delta$  wird  $R = 0,5\delta$ .

Für den **Kreisquerschnitt** ist

$$\frac{F}{u} = \frac{d}{4}, \quad Q = \frac{d^2 \pi}{4} v, \quad 4\rho = \lambda,$$

somit

$$w = \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g}, \quad \zeta = \lambda \frac{l}{d}, \quad i = \frac{w}{l} = \frac{\lambda}{d} \frac{v^2}{2g}, \quad v = 4,43 \sqrt{\frac{id}{\lambda}};$$

$$Q = 3,47 \sqrt{\frac{d^5 w}{\lambda l}} \quad \text{oder} \quad d^5 = \frac{0,083 \lambda Q^2 l}{w}, \quad \text{wenn } Q \text{ in cbm/sk,}$$

bzw.  $1000^2 d^5 = \frac{0,083 \lambda Q^2 l}{w}$ , wenn  $Q$  in l/sk in Rechnung gestellt wird (s. Tab. S. 290 u. 291).

**Für eine andere Flüssigkeit als Wasser**, dessen Reibungszahl hier zum Unterschied mit  $\lambda_{\text{W}}$  bezeichnet sei, ermittelt sich die entsprechende Zahl  $\lambda_{\text{F}}$  der anderen Flüssigkeit in einfacher Weise mittels Vergleichs der Ausfluszeiten beim Durchflus durch ein und dasselbe gerade Versuchrohr bei gleichen Ausflusverhältnissen; dieselben erfordern gleiches  $F$  bzw.  $d$ , gleiches  $l$ ,  $Q$ ,  $H_0$  und  $H_t$  (s. S. 274).

Die Ausfluszeiten verhalten sich dann umgekehrt wie die Ausflusgeschwindigkeiten, also ist nach S. 284, wenn als Widerstand im Durchflusrohr nur Wandreibung in Frage kommt, und wenn

$Z_{\text{W}}$  die Ausfluszeit für Wasser,

$Z_{\text{F}}$  die Ausfluszeit für die andere Flüssigkeit, mit gleichem Zeitmaßstabe gemessen, bedeutet:

$$\frac{Z_{\text{F}}}{Z_{\text{W}}} = \sqrt{\frac{1 + \lambda_{\text{F}} \frac{l}{d}}{1 + \lambda_{\text{W}} \frac{l}{d}}} \quad \text{oder} \quad \lambda_{\text{F}} = \left( \lambda_{\text{W}} + \frac{d}{l} \right) \left( \frac{Z_{\text{F}}}{Z_{\text{W}}} \right)^2 - \frac{d}{l}.$$

Werte  $\lambda_{\text{W}}$  s. S. 296; sie sind bei kleinem  $d$  und  $v$  sehr verschieden mit  $v$  und  $d$ .

Das Verhältnis  $Z_{\text{F}}:Z_{\text{W}}$  ist bei manchen Flüssigkeiten (Oelen) sehr abhängig von ihrem Wärmegrad. Bei 20° C finden sich bei folgenden Flüssigkeiten die Werte für  $Z_{\text{F}}:Z_{\text{W}}$ : Quecksilber 1,01; Benzin 0,92; Alkohol 1,1; Terpentin 1,1; dickflüssiges Mineral-Schmieröl, Erstarrung bei -20° C, 30 bis 45, Erstarrung bei -5° C, 45 bis 60; dünnflüssiges Mineral-Schmieröl, Erstarrung bei -15° C, 18 bis 20; Mineral-Lampenöl 1,1 bis 1,2; Rüböl 15 bis 22; Leinöl 9 bis 11; Rizinusöl 203 bis 377.

[Die Ausflusvorrichtung für den Vergleich der Ausfluszeiten erhält zweckmäßig wagerechtes Ausflusrohr mit  $d \geq 0,006$  und  $l \geq 10d$  und abgerundete Einlaufkante, anstatt wie bei dem Englischen Zähflüssigkeitsmesser lotrechtes Rohr mit scharfer Einlaufkante von  $d = 0,003$  und  $l = 6,6d$ . Bei scharfer Einlaufkante enthält der Wert  $\Sigma_e^a \zeta_a$  (S. 285) neben dem Einflus der Rohrreibung noch den von der Kontraktion herrührenden Anteil ( $\sim 0,5$  s. S. 299, Abb. 132 u. 133), wogegen für die abgerundete Kante ohne Kontraktion die Widerstandszahl im allgemeinen vernachlässigt werden kann, da sie nur etwa 0,01 von  $\Sigma_e^a \zeta_a$  beträgt.]

**Werte  $1000^2 d^5$  und**  
**Widerstandshöhen  $w$  in m für  $l = 100$  m u.  $\lambda = 0,02 + 0,0018 : \sqrt{v d}$ .**

$d$ in m	$1000^2 d^5$ in m	Geschwindigkeit des Wassers $v$ in m/sk							
		0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,40	0,50	
0,020	0,003	0,1535	0,3031	0,4940	0,7240	0,9917	1,6360	2,4210	
0,040	0,101	0,0618	0,1240	0,2045	0,3026	0,4178	0,6879	1,0425	
0,060	0,777	0,0367	0,0745	0,1238	0,1842	0,2555	0,4298	0,6454	
0,080	3,276	0,0256	0,0522	0,0872	0,1303	0,1813	0,3064	0,4619	
0,100	10,000	0,0194	0,0398	0,0667	0,1000	0,1394	0,2365	0,3574	
0,125	30	0,0147	0,0304	0,0512	0,0769	0,1075	0,1830	0,2773	
0,150	76	0,0118	0,0245	0,0413	0,0622	0,0871	0,1487	0,2257	
0,175	163	0,0098	0,0204	0,0345	0,0521	0,0730	0,1249	0,1899	
0,200	320	0,0083	0,0174	0,0296	0,0447	0,0627	0,1075	0,1637	
0,250	975	0,0064	0,0134	0,0229	0,0347	0,0488	0,0838	0,1279	
0,300	2 430	0,0052	0,0109	0,0186	0,0282	0,0398	0,0685	0,1047	
0,350	4 410	0,0043	0,0091	0,0156	0,0237	0,0335	0,0578	0,0885	
0,400	10 240	0,0037	0,0078	0,0134	0,0205	0,0289	0,0500	0,0765	
0,450	18 450	0,0032	0,0069	0,0118	0,0180	0,0254	0,0439	0,0674	
0,500	31 250	0,0029	0,0061	0,0105	0,0160	0,0226	0,0392	0,0601	
0,600	77 760	0,0023	0,0050	0,0086	0,0131	0,0185	0,0322	0,0495	
0,700	168 070	0,0020	0,0042	0,0072	0,0111	0,0157	0,0273	0,0416	
0,800	327 680	0,0017	0,0036	0,0062	0,0096	0,0136	0,0236	0,0364	
0,900	590 490	0,0015	0,0032	0,0055	0,0084	0,0119	0,0208	0,0321	
1,000	1 000 000	0,0013	0,0028	0,0049	0,0075	0,0107	0,0186	0,0287	
	$v=0,60$	0,70	0,80	0,90	1,00	1,25	1,50	1,75	2,00
0,020	3,3423	4,3971	5,5829	6,8978	8,3404	12,497	17,426	23,118	29,562
0,040	1,4504	1,9212	2,4516	3,0434	3,6952	5,5846	7,8406	10,459	13,437
0,060	0,9017	1,1898	1,5340	1,9092	2,3232	3,5270	4,9695	6,6481	8,5613
0,080	0,6471	0,8618	1,1056	1,3783	1,6797	2,5576	3,6118	4,8408	6,2437
0,100	0,5018	0,6694	0,8600	1,0734	1,3095	1,9982	2,8266	3,7935	4,8981
0,125	0,3901	0,5211	0,6704	0,8378	1,0231	1,5643	2,1962	2,9781	3,8491
0,150	0,3181	0,4255	0,5479	0,6853	0,8375	1,2826	1,8192	2,4468	3,1651
0,175	0,2680	0,3587	0,4625	0,5788	0,7078	1,0854	1,5409	2,0740	2,6844
0,200	0,2312	0,3098	0,3996	0,5004	0,6123	0,9397	1,3352	1,7984	2,3289
0,250	0,1809	0,2428	0,3135	0,3929	0,4811	0,7397	1,0522	1,4186	1,8386
0,300	0,1483	0,1992	0,2574	0,3229	0,3956	0,6089	0,8671	1,1699	1,5171
0,350	0,1226	0,1690	0,2177	0,2737	0,3356	0,5170	0,7367	0,9934	1,2903
0,400	0,1086	0,1461	0,1890	0,2374	0,2911	0,4489	0,6400	0,8644	1,1219
0,450	0,0957	0,1288	0,1667	0,2094	0,2569	0,3964	0,5655	0,7641	0,9921
0,500	0,0855	0,1151	0,1490	0,1873	0,2298	0,3548	0,5064	0,6859	0,8889
0,600	0,0703	0,0948	0,1229	0,1545	0,1896	0,2930	0,4185	0,5704	0,7354
0,700	0,0597	0,0805	0,1044	0,1313	0,1613	0,2494	0,3564	0,4851	0,6268
0,800	0,0518	0,0700	0,0907	0,1142	0,1402	0,2170	0,3102	0,4199	0,5460
0,900	0,0458	0,0618	0,0802	0,1009	0,1240	0,1920	0,2746	0,3717	0,4835
1,000	0,0410	0,0553	0,0718	0,0904	0,1111	0,1721	0,2462	0,3334	0,4337

Wassermengen  $Q = 1000 \frac{\pi d^2}{4} v$  in l/sk. (Für  $d < 0,1$  m teile die Werte  $d$  durch 10 und die zugehörigen Werte  $Q$  durch 100.)

Dmr. $d$ in m	Geschwindigkeit des Wassers $v$ in m/sk								
	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,40	0,50	
0,100	0,393	0,785	1,178	1,571	1,963	2,356	3,142	3,927	
0,125	0,614	1,227	1,841	2,454	3,068	3,682	4,909	6,136	
0,150	0,884	1,767	2,651	3,534	4,418	5,301	7,069	8,836	
0,200	1,571	3,142	4,712	6,283	7,854	9,425	12,566	15,708	
0,250	2,454	4,909	7,363	9,818	12,272	14,726	19,635	24,544	
0,300	3,534	7,069	10,603	14,137	17,671	21,206	28,274	35,343	
0,350	4,811	9,621	14,432	19,242	24,053	28,863	38,485	48,106	
0,400	6,283	12,566	18,850	25,133	31,416	37,699	50,266	62,832	
0,450	7,952	15,904	23,856	31,809	39,761	47,713	63,617	79,522	
0,500	9,818	19,635	29,453	39,270	49,088	58,905	78,540	98,175	
0,550	11,879	23,758	35,637	47,517	59,396	71,275	95,033	118,79	
0,600	14,137	28,274	42,411	56,549	70,686	84,823	113,10	141,37	
0,650	16,592	33,183	49,775	66,366	82,958	99,549	132,73	165,92	
0,700	19,242	38,485	57,727	76,969	96,211	115,45	153,94	192,42	
0,750	22,089	44,179	66,268	88,357	110,45	132,54	176,72	220,89	
0,800	25,133	50,266	75,398	100,53	125,66	150,80	201,06	251,33	
0,850	28,373	56,745	85,118	113,49	141,86	170,24	226,98	283,73	
0,900	31,809	63,617	95,426	127,23	159,04	190,85	254,47	318,09	
0,950	35,441	70,882	106,32	141,76	177,21	212,65	283,53	354,41	
1,000	39,270	78,540	117,81	157,08	196,35	235,62	314,16	392,70	
	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00	1,25	1,50	1,75	2,00
0,100	4,712	5,498	6,283	7,069	7,854	9,817	11,781	13,744	15,708
0,125	7,363	8,590	9,817	11,045	12,272	15,340	18,408	21,476	24,544
0,150	10,603	12,370	14,137	15,904	17,672	22,089	26,507	30,925	35,343
0,200	18,850	21,991	25,133	28,274	31,416	39,270	47,124	54,978	62,832
0,250	29,452	34,361	39,270	44,179	49,087	61,359	73,631	85,903	98,175
0,300	42,411	49,448	56,549	63,617	70,686	88,357	106,03	123,70	141,37
0,350	57,727	67,348	76,969	86,590	96,211	120,26	144,32	168,37	192,42
0,400	75,398	87,965	100,53	113,10	125,66	157,08	188,50	219,91	251,33
0,450	95,426	111,33	127,23	143,14	159,04	198,80	238,57	278,33	318,09
0,500	117,81	137,45	157,08	176,72	196,35	245,44	294,53	343,61	392,70
0,550	142,55	166,31	190,07	213,82	237,58	296,98	356,37	415,77	475,17
0,600	169,65	197,92	226,19	254,47	282,74	353,43	424,11	494,80	565,49
0,650	199,10	232,28	265,46	298,65	331,83	414,79	497,75	580,70	663,66
0,700	230,91	269,39	307,88	346,36	384,85	481,06	577,27	673,48	769,69
0,750	265,07	309,25	353,43	397,61	441,79	552,23	662,68	773,13	883,58
0,800	301,59	351,86	402,12	452,39	502,66	628,32	753,98	879,65	1005,3
0,850	340,47	397,22	453,96	510,71	567,45	709,31	851,18	993,04	1134,9
0,900	381,70	445,32	508,94	572,56	636,17	795,22	954,26	1113,3	1272,3
0,950	425,29	496,18	567,06	637,94	708,82	886,03	1063,2	1240,4	1417,6
1,000	471,24	549,78	628,32	706,86	785,40	981,75	1178,1	1374,4	1570,8

Werte  $\lambda$  für Wasser: Für vorläufige Berechnung setze  $\lambda = 0,03$ ; genaue Werte s. S. 296 u. f. Da  $\lambda$  teilweise von  $v$  und  $d$  abhängt, so ist bei allen genaueren Berechnungen das Näherungsverfahren anzuwenden.

Tafel von Werten für  $w$  für Wasser, für  $Q$  und  $d^5$  allgemein gültig, s. S. 290 u. 291.

Übliche Werte von  $v$  für städtische Wasserversorgung sind  $v = 0,6$  bis  $0,7$  m.

Durch allmähliche Veränderung der inneren Rohrwandung nimmt  $Q$  im allgemeinen mit der Zeit ab, so daß dem berechneten  $d$  in den meisten Fällen zweckmäßig 20 mm (oder mehr, s. S. 297 unter d.) für die Ausführung zuzugeben sind.

Bei vorhandener Leitung von nicht genau ermitteltem Durchmesser berechnet sich aus beobachtetem  $Q$  und einem vorläufig angenommenen  $d$  (Solldurchmesser oder ursprünglicher Durchmesser) ein Wert  $\lambda$ , der zu dem  $\lambda_1$  für den tatsächlichen Durchmesser  $d_1$  in dem Verhältnis steht  $\lambda : \lambda_1 = (d : d_1)^5$ .

Beispiele:

1. Gegeben  $Q, l, d$ ; gesucht  $H_0$  (s. S. 284).

Suche mit Tafel S. 291 für  $Q$  und  $d$  die Geschwindigkeit  $v$ , mit Tafel S. 290 für  $v$  und  $d$  die Widerstandshöhe für 100 m, vervielfältige diese mit  $l : 100$  und berechne mit den übrigen Widerstandshöhen der Leitung, ermittelt aus den Widerstandszahlen  $\zeta$  (S. 299 bis 306) und den zugehörigen Geschwindigkeiten, die erforderliche Druckhöhe  $H_0 = v \alpha^2 : 2g + \sum \zeta \alpha^2 w$  (s. S. 288).

2. Gegeben  $H_0, l, d$ ; gesucht  $Q$ .

Setze vorläufig  $H_0 = w$ , vervielfältige  $w$  mit  $100 : l$ , suche hierfür mit Tafel S. 290 für  $d$  und  $w$  die angenäherte Geschwindigkeit  $v$ . Bezeichnet  $\sum \zeta \alpha^2$  die Summe der von dem geraden Rohrstrang unabhängigen Widerstandszahlen der Leitung, bezogen auf  $v \alpha^2 : 2g$ , so bleibt für den geraden Rohrstrang zur Verfügung  $w = H_0 - v \alpha^2 : 2g (1 + \sum \zeta \alpha^2)$ .

Für dieses  $w$  suche mit  $d$  aus Tafel S. 290 ein verbessertes  $v$  und damit aus Tafel S. 291 das angenäherte  $Q$ .

Zur genaueren Ermittlung von  $Q$  ist aus letzterem  $v$  und dem gegebenen  $d$  der Wert  $\lambda$  nach den Angaben auf S. 296 festzulegen, dann  $v = 4,43 \sqrt{w d : \lambda l}$  zu berechnen, wonach sich  $Q$  aus  $d^2 \pi v : 4$  oder aus Tabelle S. 291 bestimmt.

3. Gegeben  $Q$  in  $l/sk, l, w$ ; gesucht  $d$ .

Setze vorläufig  $\lambda \sim 0,03$ , berechne damit  $1000^2 d^5 = Q^2 l : 400 w$ , bestimme aus zweiter Spalte der Tafel S. 290 ein vorläufiges  $d$  und aus  $d$  und  $Q$  mit Tafel S. 291 das zugehörige  $v$ .

Nunmehr ist  $\lambda$  nach den Angaben auf S. 296 zu verbessern, und durch neue Berechnung von  $1000^2 d^5$  ist ein genaueres  $d$  zu ermitteln; oder man rundet den für  $d$  vorläufig gefundenen Wert nach oben zu ab, um dadurch dem mit der Zeit zunehmenden Widerstand Rechnung zu tragen (vgl. S. 298).

## 5. Widerstandszahlen für die einzelnen Rohrstrecken verschiedener Formen einer mit Wasser gefüllten Rohrleitung.

### $\alpha$ . Gerader kreisförmiger Rohrstrang ohne Querschnitts- und Richtungsänderung.

Bedeutung der Zeichen, wie S. 288 angegeben.

Die Widerstandszahl ist unabhängig vom Material der Rohrwandung, dagegen besonders abhängig von dem Rauigkeitsgrad der benetzten Wandung und ist ein wenig veränderlich mit der Wärme und der Durchfließgeschwindigkeit der Flüssigkeit.

Nach Weisbach:  $4\rho = \lambda = 0,01439 + \frac{0,0094711}{\sqrt{v}}$ .

Die Formel gilt nur für ganz glatte Rohrwandung und liefert im allgemeinen bei  $d > 0,04$  m zu große Werte, bei engeren Röhren zu kleine Werte.

Nach Darcy: Bei Röhren ohne innere Ablagerungen:

$$4\rho = \lambda = 0,01989 + \frac{0,0005078}{d}.$$

Diese Formel liefert brauchbare Werte für alle  $d < 0,5$  m, wenn gleichzeitig  $v$  etwa 0,25 m/sk bei ganz glatter Wandung oder  $v$  etwa 1,0 m/sk bei neuer gusseiserner Wandung beträgt.

Bei den vielfachen Einflüssen, die den Wert  $\lambda$  bedeutend beeinflussen, und neben der Unsicherheit richtiger Einschätzung dieser Einflüsse ist es nicht gerechtfertigt, den Wert  $\lambda$  mit so vielen Dezimalen anzugeben, wie es von Weisbach und Darcy geschehen ist.

Viele andere in Vorschlag gebrachte Annäherungsformeln für  $\lambda$  sind sich gleichwertig für  $v \sim 1$  m und für ein beschränktes Gebiet von Rohrweiten. Eine Sammlung von Formeln gibt Frank, Gl. A. 1893 S. 125 an.

Nach H. Lang: (Unbegrenzt gültige Formel; Berücksichtigung aller bis 1910 veröffentlichten Versuche und etwa 300 eigener Versuche mit  $v = 0,004$  bis 53 m/sk. \*)

Die Werte  $\rho$  bzw.  $\lambda$  ändern sich mit  $v$ , ( $F:u$ ) bzw.  $d$ , mit dem Rauigkeitsgrad der benetzten Fläche und mit dem Zähigkeitsmodul der Flüssigkeit. Die zeichnerische Darstellung von  $w$  oder  $\rho$  bzw.  $\lambda$  führt zu parabelähnlichen Linien, die diese verschiedenen Einflüsse schwer einzeln erkennen lassen; dies wird aber

erleichtert durch die Darstellung der Werte ( $w:v$ ) oder  $\rho v$  und wird besonders gut erreicht durch die Darstellung von ( $w:v^{3/2}$ ) oder  $\rho\sqrt{v}$

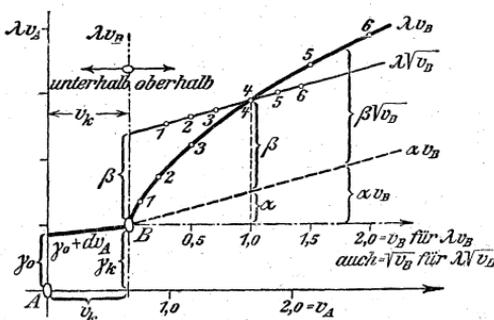
Ermittelt man zunächst aus der allgemeinen Beziehung  $w$

$$= \rho \frac{lu}{F} \frac{v^2}{2g} \quad (\text{s. S. 288})$$

für verschiedene  $v$  die Werte  $\rho v = \frac{w}{l} \frac{F}{u} \frac{2g}{v}$

für beliebigen, bzw.  $\lambda v = \frac{w}{l} \frac{d}{v} \frac{2g}{v}$  für kreisförmigen Querschnitt und trägt dieselben, wie in Abb. 131 geschehen, in ein Koordinatensystem

Abb. 131.



\*) Vrgl. Biel, Z. d. V. d. I. 1908 S. 1035 u. Forschungsarbeit, Heft 44 d. V. d. I.

mit dem Anfangspunkt  $A$  ein, so erhält man die in der Abb. 131 kräftig ausgezogene, bei  $B$  gebrochene Linie.

Der gerade, nur wenig geneigte Teil der Linie entspricht bis zum Punkt  $B$  dem Fließzustande mit parallelen Flüssigkeitsfäden, also demjenigen unterhalb der kritischen Geschwindigkeit  $v_k$ . Für diesen Fließzustand gilt

$$\varrho v_A \text{ bzw. } \lambda v_A = \gamma_0 + d v_A,$$

dennach für den Grenzzustand bei  $v_k$

$$\varrho v_k \text{ bzw. } \lambda v_k = \gamma_0 + d v_k = \gamma_k$$

Der weitere, gekrümmte Teil der Linie gehört dem Fließzustande mit wirbelnden oder gedrehten Flüssigkeitsfäden, also dem Zustande oberhalb  $v_k$  an. Diese hyperbelartige Linie entspricht mit den Angaben in der Abb. 131, wenn  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma_0$  und  $\gamma_k$  von  $v$  unabhängige Werte bedeuten, zunächst der Beziehung

$$\varrho v_A \text{ oder } \lambda v_A = \alpha v_B + \beta \sqrt{v_B} + \gamma_k, \text{ worin } v_B = v_A - v_k,$$

$$\text{oder } = \alpha + \beta + \gamma_k, \text{ wenn } v_B = 1 \text{ m, also } v_A = 1 - v_k.$$

Hieraus entwickeln sich für das durch  $B$  gelegte Koordinatensystem, also  $\gamma_k = 0$  gesetzt, die Beziehungen

$$\varrho v_B \text{ bzw. } \lambda v_B = \alpha v_B + \beta \sqrt{v_B},$$

und dies durch  $\sqrt{v_B}$  geteilt

$$\varrho \sqrt{v_B} \text{ bzw. } \lambda \sqrt{v_B} = \alpha \sqrt{v_B} + \beta;$$

dies ist die Gleichung einer geraden Linie, wenn die Abszissenachse gleichmäßig nach  $\sqrt{v_B}$  geteilt wird. Diese Gerade ist parallel zur Geraden für  $\alpha v_B$ , befindet sich im Abstände  $\beta$  von derselben und schneidet die Linie für  $\lambda v_B$  im Abstände  $v_B = 1$  m.

Mit Hilfe dieser Geraden ist es möglich, mittels gegebener Werte für nur zwei verschiedene  $v$  einer Leitung die verschiedenen  $\varrho$  bzw.  $\lambda$  für alle übrigen  $v$  dieser Leitung zu bestimmen. Nimmt z. B. die Ordinate für  $v_B = 1,0$  die Größe  $O_1$  und diejenige für  $v_B = 4,0$  die Größe  $O_4$  an, so ist  $\alpha = 0,5 O_4 - O_1$  und  $\beta = O_1 - \alpha$ ; somit ist dann die Lage der Geraden für  $\lambda \sqrt{v_B}$  bestimmt.

Der Punkt  $B$  liegt dem Punkte  $A$  um so näher, je größer der Leitungsquerschnitt und je kleiner der Zähigkeitsmodul  $c$  der Flüssigkeit ist;  $B$  fällt sogar mit  $A$  zusammen, wenn die Rauigkeit der benetzten Wand oder die Krümmung der Leitungsachse das Fliesen in parallelen Fäden nicht aufkommen läßt. Bei gewöhnlicher Wasserrwärme kann  $B$  mit  $A$  als zusammenfallend angesehen werden, sobald  $d \geq 0,05$  m. Durch glatte und gerade Rohrstrecke sowie durch allmähliche Steigerung von  $v$  wird das Auftreten der kritischen Geschwindigkeit verzögert und damit der Fließzustand mit parallelen Fäden verlängert (Wirbelverzug), ohne dadurch für weiteres  $v$  das Gesetz für wirbelndes Fliesen zu ändern; dagegen wird durch allmähliche Verzögerung von  $v$  oder bei Erschütterung des Stromes die

kritische Geschwindigkeit  $v_k$  (von einigen Autoren „untere Grenzgeschwindigkeit“ genannt) genau innegehalten.

(Eine obere Grenzgeschwindigkeit wird von Biel an demjenigen Punkte der  $\lambda v_B$ -Linie angenommen, von dem ab die Kurve für  $\lambda v_B$  zur Geraden zu werden scheint; Reynolds nennt obere Grenz- oder kritische Geschwindigkeit diejenige Geschwindigkeit, bei der nach vorangegangener Verzögerung der unteren Grenzgeschwindigkeit die  $\lambda v_B$ -Linie wieder erreicht wird.)

Bedeutet noch

$a$  einen den Rauheitsgrad der inneren Wandung bezeichnenden Wert,

$b$  eine vom Wärmegrad der Flüssigkeit abhängige Zahl,

$c$  den Zähigkeitsmodul der Flüssigkeit,

so ist zu setzen:

$$\alpha = a \text{ (Werte } a \text{ s. S. 297),}$$

$$\beta = \frac{b}{\sqrt{F} \cdot u}, \text{ bzw. } \frac{2b}{\sqrt{d}} \text{ für den Kreisquerschnitt (Werte } 2b \text{ s. S. 296),}$$

$$\gamma_k = \gamma_0 + d v_k, \text{ worin } \gamma_0 = \frac{0,0064 c}{d} \text{ und } d v_k = 0,204 c; \text{ letztere}$$

Beziehung gilt für alle Flüssigkeiten, in der aber  $d$  nicht dem Wert ( $4F:u$ ) entspricht, sondern nach Becker, Z. d. V. d. I. 1907 S. 1136, den größten Abstand gegenüberliegender Flächen zu bedeuten scheint. Werte  $c$  und  $d v_k$  sind:

für $t =$	$0^0$	$5^0$	$10^0$	$20^0$	$40^0$	$60^0$	$80^0$	$100^0$
1000 $c =$	18	15	13	10	6,7	4,7	3,6	3,1
1000 $d v_k =$	3,7	3,1	2,7	2,06	1,40	0,97	0,73	0,63

Hiernach schreibt sich für den Kreisquerschnitt,

wenn  $d < 0,05 \text{ m}$  und

$v$  unterhalb der kritischen Geschwindigkeit  $v_k$ ,  
wofür  $\lambda$  und  $w$  den Index  $u$  erhalten:

$$\lambda_u = \frac{0,0064 c}{d v_A} + d;$$

$$w_u = \lambda_u \frac{l v_A^2}{d 2g} = \left( \frac{0,0064 c}{d} + d v_A \right) \frac{l v_A}{d 2g};$$

$v$  oberhalb der kritischen Geschwindigkeit  $v_k$ ,  
wenn  $\lambda$  und  $w$  den Index  $o$  erhalten:

$$\lambda_o = a \frac{v_B}{v_A} + \frac{2b}{\sqrt{d}} \frac{\sqrt{v_B}}{v_A} + \frac{\gamma_k}{v_A},$$

$$w_o = \lambda_o \frac{l v_A^2}{d 2g} = \left( a + \frac{2b}{\sqrt{d v_B}} + \frac{\gamma_k}{v_B} \right) \frac{l v_A v_B}{d 2g};$$

wenn  $d \geq 0,05 \text{ m}$ , wobei der Fließzustand unterhalb der kritischen Geschwindigkeit selbst bei glattem geradem Rohr ausbleibt, so daß  $\gamma_k = 0$ ,  $v_k = 0$  und  $v_B = v_A$  zu setzen ist:

$$\lambda = a + \frac{2b}{\sqrt{d}v_A}; \quad w = \left( a + \frac{2b}{\sqrt{d}v_A} \right) \frac{l}{d} \frac{v_A^2}{2g}$$

In die Abb. 131 sind einige zu gleichem  $v_A$  gehörige Werte der beiden Linien  $\lambda v_B$  und  $\lambda \sqrt{v_B}$  mit gleichen Ziffern bezeichnet, aus deren Lagen zu ersehen ist, dafs bei  $v_B < 1$  m die Werte  $\lambda \sqrt{v_B}$  nahe der Ordinatenachse auf besonders langgestrecktem Mafsstabe erscheinen und daher mittels dieser Geraden die Werte nahe  $v_k$  sehr genau bestimmt werden können. (Die Versuche Lang's mit gleichem Leitungsdurchmesser von  $v_k$  bis  $v_A = 53$  m bestätigen die Gerade für  $\lambda \sqrt{v_B}$ .) Vorstehende Formeln passen sich den Ergebnissen bei  $v = 0,004$  bis 53 m und bei  $d = 0,0004$  bis 4,0 m recht gut an.

### 1. Werte der Zahl $b$ .

Die Zahl  $b$  ist von dem Flüssigkeitsgrade und vom Einheitsgewicht, ferner auch von dem Wärmegrad abhängig.

Setze bei Wasser und kreisförmigem Querschnitt

$$\begin{array}{cccc} \text{für } t = & 0^\circ & 10^\circ & 20^\circ & 100^\circ \\ 2b = & 0,0023 & 0,0020 & 0,0018 & 0,0004. \end{array}$$

Wenn auch nach diesen neueren Ermittlungen der Mittelwert von  $2b$  in der Praxis im allgemeinen der Zahl 0,0020 näher liegt, als der für die Tabellen S. 290 u. 291 zugrunde gelegten Zahl 0,0018 — die älteren Forschungen entspricht —, so bleiben doch diese Tabellen wegen des geringen Einflusses von  $2b$  auf den Wert  $\lambda$  — gegenüber der unsicheren Schätzung des gröfseren Wertes  $a$  — im allgemeinen für die Wärmegrade  $0^\circ$  bis  $20^\circ$  brauchbar.

Werte  $\frac{2b}{\sqrt{d}v}$ , wenn  $2b = 0,0018$ :

	$v = 0,10$	0,25	0,50	1,0	4,0 m/sk
$d = 0,05$	0,026	0,016	0,011	0,008	0,004
0,10	0,018	0,011	0,008	0,006	0,003
0,20	0,013	0,008	0,006	0,004	0,002
0,30	0,010	0,007	0,005	0,003	0,002
0,40	0,009	0,006	0,004	0,003	0,001
0,50	0,008	0,005	0,004	0,002	0,001
1,00	0,006	0,004	0,003	0,002	0,001
2,00	0,004	0,003	0,002	0,001	0,000

### 2. Werte der Zahl $a$ :\*)

a) Für neue Rohre mit ganz glatter Innenfläche (warm geprefstes Blei oder Zinnrohr, nahtloses, gezogenes Metall mit nachgeschliffener

\*) Biel setzt  $a = 0,009 + 2f\sqrt{d}$ , worin  $f$  einen Rauigkeitsfaktor bezeichnet. Da bei Biel die Art der Ermittlung von  $a$  nicht einwandfrei ist, so bedarf der beachtenswerten Vorschlag zu solcher Zerlegung des Wertes  $a$  noch umfangreicher Nachprüfung.

Innenfläche, Glas, lackartig überzogene Innenfläche), ohne erkennbare Verschiebung der Querschnitte an den Verbindungsstellen:

$$a = 0,009 \text{ bis } 0,010.$$

Glasrohre und gezogene Rohre weisen oft einen verjüngt verlaufenden Durchflußquerschnitt auf.

b) Für neue, natlos gezogene Kupfer- und Messingrohre, sauber gelötete Zinkrohre, ausnahmsweise glatte schmiedeiserne Rohre:

$$a = 0,014.$$

c) Für neue oder sehr gut gereinigte Rohre mit ganz geringen Unebenheiten an der Innenfläche und an den Verbindungsstellen (gute gußeiserne Rohre von größerer Baulänge, an den Muffen sorgfältig zentrisch verlegt, außerdem filtriertes Wasser, andernfalls nur für die erste Betriebszeit gültig):

$$a = 0,020.$$

Mit diesem Wert von  $a$  und dem von  $2b$  für  $10^0$  Wasserwärme ( $= 0,002$ ) erhält man den für Berechnungen bequemen Ausdruck für die Widerstandshöhe

$$w = \left( 0,1 + \frac{0,1}{\sqrt{v d}} \right) \frac{l}{d} v^2,$$

wenn hierin  $d$  in cm,  $l$  und  $v$  in m eingesetzt wird.

d) Für Rohre nach einigem Betriebe oder neue Rohre mit ersichtlichen Unebenheiten:

Bedeutet  $d$  den Soll Durchmesser des von Ablagerungen und Unebenheiten befreiten Rohres mit entsprechendem  $\lambda$  und  $v$ ,

$d_1$  den Durchmesser des von den Wirbeln an Ablagerungen oder Unebenheiten noch freibleibenden Nutzquerschnittes, für den  $\lambda_1$ , wie unter c) angegeben, gesetzt werden kann,

so ist 
$$\lambda = \left( \frac{d}{d_1} \right)^5 \left( 0,02 + \frac{0,0018}{\sqrt{v d}} \right).$$

Werte $(d : d_1)^5$							
$d_1 : d$	$\left( \frac{d}{d_1} \right)^5$	$d_1 : d$	$\left( \frac{d}{d_1} \right)^5$	$d_1 : d$	$\left( \frac{d}{d_1} \right)^5$	$d_1 : d$	$\left( \frac{d}{d_1} \right)^5$
0,10	100 000	0,35	226	0,60	12,9	0,85	2,27
0,15	13 150	0,40	97,6	0,65	8,62	0,90	1,69
0,20	3 125	0,45	54,2	0,70	5,95	0,93	1,78
0,25	1 024	0,50	32,0	0,75	4,21	0,95	1,29
0,30	411	0,55	19,9	0,80	3,06	0,98	1,18

(Für die Durchflussmengen gilt die Beziehung  $Q^2 : Q_1^2 = d^5 : d_1^5$ .)

Für die Annahme von  $d_1$  ist zu beachten:

Bei neuen Rohren:

Gußeiserne Rohre von kleinerem Durchmesser besitzen kleine Baulänge und vergrößern damit den Widerstand an den Verbindungs-

stellen für die Längeneinheit. Schmiedeiserne Rohre sind in Ansehung des sehr empfindlichen Wertes  $\lambda$  als nicht von gleichem Durchmesser anzusehen, sie zeigen oft nach innen zu aufgedrückte Schweifsnähte; verzinkte Rohre sind häufig im Inneren besonders rauh. Bei hölzernen Rohren quillt die Wandfläche im Betriebe auf, wird auch stark schwammig.

#### Bei Rohren im Betriebe:

Nach wenigen Betriebstagen hat das Wasser eine Schleimschicht an die Wandung abgesetzt, die den Nutzdurchmesser um 2 bis 3 mm verringert. Anrostungen (Korrosionen) der inneren Wandung eiserner Rohre treten bei Luftmangel, also bei dauernd gefüllten Druckrohren nicht auf, soweit nicht saure oder salzige Beschaffenheit des Wassers das Eisen löst. Dagegen kommen bei unfiltriertem Wasser oft bis 60 mm starke Krustenbildungen vor, die auf Ablagerungen aus dem Wasser zurückzuführen sind. Die Ablagerungsmengen entsprechen der durchgeflossenen Wassermenge; Sackrohre bleiben rein; vergrößerte Durchflußgeschwindigkeit und Asphaltieren der Rohrwandung hindert die Ablagerung nicht. Oeftere Entleerungen der Leitung vermehren die Rostbildung und färben das Wasser stark bei erneuter Füllung.

Die Ablagerungen bestehen bei gußeisernen Leitungen zuerst aus unregelmäßig auftretenden Knollen, die sich schliesslich zu höckeriger Auskleidung der Wandung vereinigen und stellenweise faltenartige Gebilde zeigen. Die Masse besteht aus Brauneisenstein, — je nach Herkunft des Wassers vermischt mit Kalk und Muscheln. Das einzige Mittel gegen diese Ablagerungen besteht in der Enteisung des Wassers mit nachfolgender Filtrierung vor dem Einlassen in die Leitung. Grundwasser mit freier Kohlensäure greift Gußeisen und Zement an, wobei schwammiger Graphit bzw. Kieselsäure zurückbleibt; solche freie Kohlensäure kann mittels Durchlaufens eines Kalksteinfilters beseitigt werden (vgl. D. B. 1908 S. 153). Bisweilen zeigt unfiltriertes Grundwasser starke Algenbildung, und unfiltriertes Flufswasser Ansammlungen von Tieren, die namentlich die Wassermesser stören. Bei schmiedeisernen Rohren wachsen auch dünne Aestchen nach der Rohrmitte zu. Blei nimmt selbst nach vielen Jahren nur einen ganz dünnen, gleichmäßigen Ueberzug an.

Vorgefundene Ablagerungsmengen bei gußeisernen Rohren, in vH des Sollquerschnittes:

$d$ in m . . . .	0,076	0,076	0,102	0,152	0,152	0,204	0,381
Betriebsjahre . .	20	32	22	10	20	24	40
Ablagerung . .	35	75	54	20	33	36	28 vH

Zur Erhaltung der Leistungsfähigkeit einer Leitung sind Reinigungs- oder Streifkästen in 50 bis 60 m Abstand erforderlich. Erste Reinigung nach fertiger Verlegung, wiederholte Reinigung nach je 2 bis 3 Jahren notwendig. Ueber Ablagerungen und Reinigungsweisen vgl. Iben, Journal f. Gasbel. 1887.

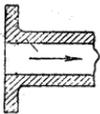
Die zeitweise Feststellung von Veränderungen des Rohrinnen einer Leitung ist bequem durch zwei in geringer Entfernung  $l$

dauernd angebrachte Standrohre (Piezometer) zu erreichen. (Verbinde die Standrohre über ihren Spiegeln und regle im Verbindungsrohr mittels Schlauchhahns die Luftverdünnung bzw. Verdichtung derart, daß beide Standrohrspiegel in eine zur Ablesung bequeme Höhe gelangen.) Der Unterschied beider Spiegel ist die Widerstandshöhe  $w$  für die Strecke  $l$ . Ist bei allen Beobachtungen die Durchflußmenge  $Q$  gleich, so ist aus dem Anwachsen von  $w$  die Wirtschaftlichkeit für eine vorzunehmende Reinigung oder für die Auswechslung der Leitung zu ermesen.

**β. Rohrstücke mit Kreisquerschnitt zur Einleitung oder Aenderung der Stromrichtung.**

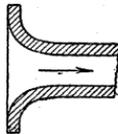
**1. Einlaufstücke (Abb. 132 bis 135).**

Abb. 132.



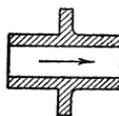
Einlaufkante  
scharf  
 $\zeta = 0,50$ ,  
Kante  
gebrochen  
 $\zeta = 0,25$ .

Abb. 133.



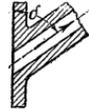
Je nach  
Glätte der  
Wandung  
 $\zeta = 0,06$   
bis  $0,01$ .

Abb. 134.



Einlaufkante  
stumpf  
 $\zeta = 0,56$ ,  
messerscharf  
 $\zeta = 1,30$ .

Abb. 135.



Einlaufkante  
scharf  
 $\zeta = 0,5 + 0,3 \sin \vartheta$   
 $+ 0,2 \sin^2 \vartheta$ .

**2. Knie und Bogenstücke (Abb. 136 u. 137. Angaben nach Weisbach).** Diese Formstücke verhindern den Fließzustand unterhalb der kritischen Geschwindigkeit (vgl. Eustice, The Engineer 1910 S. 23).

Knie: Querschnitt kreisförmig,  $d=30$  mm;  $\zeta = \sin^2 \frac{1}{2} \vartheta + 2 \sin^4 \frac{1}{2} \vartheta$  oder für

$\vartheta =$	$20^\circ$	$40^\circ$	$60^\circ$	$80^\circ$	$90^\circ$	$100^\circ$	$120^\circ$	$140^\circ$	$160^\circ$	$(180^\circ)$
$\zeta =$	$0,03$	$0,14$	$0,37$	$0,75$	$1,00$	$1,27$	$1,87$	$2,43$	$2,85$	$(3,00)$

( $\vartheta = 180^\circ$  ist nicht mehr ausführbar. Wenn  $d$  kleiner, wird  $\zeta$  größer.)

Bogenstück: Querschnitt kreisförmig;

$$\zeta = 0,13 + 0,16 \left( \frac{d}{r} \right)^{3,5};$$

Abb. 136.

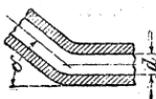
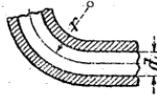


Abb. 137.



Dieser Wert entspricht allein der einseitigen Zusammenziehung des Strahles, die durch die Richtungsänderung am Beginn der Krümmung hervorgerufen wird;  $\zeta$  ist unabhängig von der Länge des Bogenstückes, solange  $r$  unverändert bleibt.

Es folgt für

$$d : r = \begin{vmatrix} 0,4 & 0,6 & 0,8 & 1,0 & 1,2 & 1,4 & 1,6 & 1,8 & 2,0 \\ \zeta = & 0,14 & 0,16 & 0,20 & 0,30 & 0,44 & 0,66 & 1,0 & 1,4 & 2,0 \end{vmatrix}$$

Querschnitt rechteckig:  $\zeta = 0,124 + 0,274 \left(\frac{d}{r}\right)^{3,5}$ .

Es folgt für

$$d : r = \begin{vmatrix} 0,4 & 0,6 & 0,8 & 1,0 & 1,2 & 1,4 & 1,6 & 1,8 & 2,0 \\ \zeta = & 0,13 & 0,18 & 0,25 & 0,40 & 0,64 & 1,01 & 1,55 & 2,27 & 3,23 \end{vmatrix}$$

Rohrwindungen ohne Aenderung des Krümmungshalbmessers und der Krümmungsrichtung ergeben ein  $\zeta$  wie gerade Leitungen; Wechsel in der Krümmungsrichtung verdoppelt  $\zeta$ .

**γ. Rohrstücke mit zentraler Querschnittsänderung.**

**1. Plötzliche zentrale Erweiterung (Abb. 138 u. 139).**

Wenn das weitere Rohr ausreichend lang ist im Verhältnis zur Wassergeschwindigkeit im engeren Rohrstrange, so tritt der in Abb. 138 dargestellte Fall der teilweisen Umsetzung von Geschwindigkeitshöhe in Druckhöhe ein. Mit dieser Umsetzung ist ein Verlust an Energie verbunden. Ist das weitere Rohr sehr kurz im Verhältnis zu seiner Weite, so füllt der Strahl, wie in Abb. 139, das weitere Rohr nicht aus.

Da die Umsetzung unabhängig von den Längen der anschließenden Flüssigkeitsfäden, also unabhängig von den bewegten Massen erfolgt, so kommt für die Umsetzung die Stoßtheorie der Massen nicht in Frage.

Abb. 138.

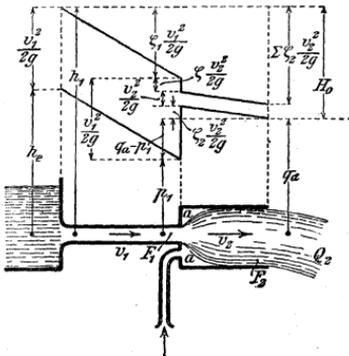
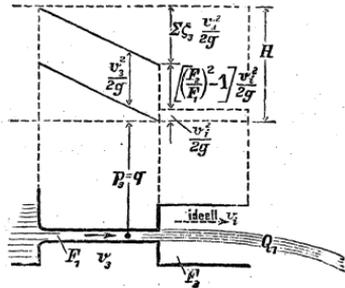


Abb. 139.



Es bedeutet

- $F_1$  und  $F_2$  den Querschnitt in  $qm$  im engeren bzw. im weiteren Rohr,
- $n$  die Verhältniszahl  $F_2 : F_1$ ,
- $H_0$  die treibende Druckhöhe in  $m$  W.-S.,
- $Q_2$  die Ausflussmenge in  $cbm/sk$  bei gefülltem  $F_2$ ,
- $Q_1$  die Ausflussmenge in  $cbm/sk$  bei nicht gefülltem  $F_2$ ,
- $w$  die bei gefülltem  $F_2$  entstehende Widerstandshöhe in  $m$  W.-S.,

$v_1$  und  $v_2$  die Geschwindigkeit in m/sk im engeren bzw. im weiteren Rohr für den Fall in Abb. 138,

$v_3$  die Geschwindigkeit in m/sk im engeren Rohr

$v_i$  die ideelle mittlere Geschwindigkeit im weiteren Rohr,  $\left. \begin{array}{l} \text{für den Fall} \\ \text{wenn } F_2 \text{ mittels } Q_1 \text{ ausgefüllt gedacht und } v_i = Q_1 : F_2 \end{array} \right\} \text{ in Abb. 139,}$   
gesetzt wird

$p_1$  und  $p_3$  den absoluten hydraulischen Druck an der Uebergangsstelle zum weiteren Rohr, ersteren bei gefülltem, letzteren bei ungefülltem  $F_2$  in m W.-S.,

$q_a$  den absoluten Gegendruck auf den ausfließenden Strahl in m W.-S.,

$\zeta$  die allein der Erweiterung entsprechende Widerstandszahl der Geschwindigkeitshöhe  $v_2^2 : 2g$ ,

$\zeta_1$  die allen Widerständen vor der Erweiterung entsprechende Widerstandszahl von  $v_1^2 : 2g$ ,

$\zeta_2$  die allen Widerständen nach der Erweiterung entsprechende Widerstandszahl von  $v_2^2 : 2g$ .

Wird vorläufig von der Reibung im weiteren Rohr abgesehen, also  $\zeta_2 = 0$  gesetzt, so ist nach Abb. 138

$$\frac{v_1^2}{2g} = \zeta \frac{v_2^2}{2g} + \frac{v_2^2}{2g} + (q_a - p_1).$$

Hierin ist  $(q_a - p_1)$  der von  $v_1^2 : 2g$  als Druckhöhe wiedergewonnene Teil infolge des Druckes des schneller fließenden Stromes in  $F_1$  auf den langsamer fließenden in  $F_2$ . Diese Druckhöhe ermittelt sich nach Abschn. G, S. 320, aus der Leistung  $L$  für das Flüssigkeitsgewicht  $Q\gamma$  und für den Ablenkwinkel  $\alpha = 90^\circ$  zu

$$(q_a - p_1) = \frac{L}{Q\gamma} = 2 \frac{(v_1 - v_2)v_2}{2g} = 2(n-1) \frac{v_2^2}{2g}.$$

Dies, in vorstehende Gleichung eingesetzt, wird

$$w = \zeta \frac{v_2^2}{2g} = \frac{(v_1 - v_2)^2}{2g}, \quad \zeta = (n-1)^2 \quad \text{oder}$$

$$= \frac{\zeta}{n^2} \frac{v_1^2}{2g}, \quad \text{worin } \frac{\zeta}{n^2} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2.$$

Die Versuche Weisbachs und Fliegners (Civiling. 1875 S. 98) bestätigen diese von Borda aufgestellte Beziehung. Nach den Versuchen ist  $p$  an der Stelle  $a$  eher noch etwas kleiner als am Endquerschnitt des engeren Rohres.

Ist der Widerstand der an  $F_2$  anschließenden Leitung klein, ist also  $\zeta_2$  gering gegen  $\zeta$ , so tritt bei  $a$  ein Unterdruck (Vakuum) auf, der nach der Formel im zweiten Absatz unter 3. S. 286 sich schreibt:

$$\text{Unterdruck } (q_a - p_1) = [n^2 - (1 + \zeta + \zeta_2)] v_2^2 : 2g$$

$$\text{oder} = \frac{[n^2 - (1 + \zeta + \zeta_2)] H_0}{\zeta_1 n^2 + (1 + \zeta + \zeta_2)}.$$

Der Unterdruck wird für gegebenes  $n$  am größten, wenn die Verengung möglichst kurz gehalten wird; immerhin ist der Wert 0,02 für  $\zeta_1$  als Mindestwert zu erachten, für  $\zeta_2$  ist etwa 0,20 der Mindestwert. Werden  $\zeta_1$  und  $\zeta_2$  ganz vernachlässigt, so wird, ohne Rücksicht

auf Reibung, der Unterdruck  $(q_a - p_1) = \frac{2\sqrt{\zeta}}{1 + \zeta} H_0$ , mit dem Höchstwert  $= 1,0 H_0$  für  $F_2 : F_1 = 2$ . (Andere Werte s. folg. Tabelle.) Praktisch ist für  $F_2 : F_1 = 2$  der Wert 0,7 bis 0,8  $H_0$  erreichbar, der nur durch Einleitung drehenden Zuflusses zu  $F_2$  etwas erhöht werden kann.

Sobald  $v_2$  bzw.  $H_0$  so groß wird, daß  $p_1 \leq$  Dampfdruck des Wassers, so tritt der Fall in Abb. 142 ein, der Unterdruck verschwindet plötzlich, und  $p_1$  wächst an auf  $p_3 (= q$  bei ungefülltem  $F_2$ ; bei lotrecht steigendem Strahl bleibt zwar  $F_2$  von zurückfallendem Wasser gefüllt, jedoch kennzeichnet sich der Zustand der Abb. 142 durch Sprudelberge am Ausfluß).

Wenn im Fall der Abb. 139  $W_i$  die ideelle Widerstandshöhe für den dennoch ausgefüllt gedachten und mit mittlerem  $v_i$  durchflossenen Querschnitt  $F_2$  bedeutet, und wenn  $\zeta_i$  die zugehörige Widerstandszahl von  $v_i^2 : 2g$  darstellt, so ist

$$w_i = \frac{v_3^2 - v_i^2}{2g} = \zeta_i \frac{v_i^2}{2g}, \quad \zeta_i = n^2 - 1, \quad \frac{\zeta}{\zeta_i} = \frac{n-1}{n+1}.$$

Das Verhältnis der Ausflussmengen in den beiden Fließzuständen ist:

$$\frac{Q_2}{Q_1} = n \sqrt{\frac{1 + \zeta_1}{1 + \zeta_1 n^2 + \zeta + \zeta_2}}.$$

Bezeichnet  $L_2$  und  $L_1$  die Leistungen  $Q_2 \gamma v_2^3 : 2g$  bzw.  $Q_1 \gamma v_3^3 : 2g$  in den verschiedenen Fließzuständen, so wird

$$\frac{L_2}{L_1} = n \left( \frac{1 + \zeta_1}{1 + \zeta_1 n^2 + \zeta + \zeta_2} \right)^{3/2}.$$

Als Wirkungsgrad  $\eta$  sei das Verhältnis der in  $F_2$  durch Umwandlung der Geschwindigkeitshöhe  $v_1^2 : 2g$  wieder erhaltenen Druckhöhe zur theoretisch verfügbaren Geschwindigkeitshöhe  $(v_1^2 - v_2^2) : 2g$  bezeichnet. Dann ist

$$\eta = 1 - \frac{\zeta v_2^2}{v_1^2 - v_2^2} = 1 - \frac{\zeta}{\zeta_i} = \frac{2}{n+1}.$$

Ohne Rücksicht auf die Reibung an den Rohrwänden ( $\zeta_1$  und  $\zeta_2 = 0$ ) ergibt sich folgende Gegenüberstellung:

Für $F_2 : F_1 =$	1,3	1,5	2,0	3	4	5	10	50
$\zeta =$	0,09	0,25	1,0	4	9	16	81	2401
$\zeta_i =$	0,69	1,25	3,0	8	15	24	99	2499
$(q_a - p_1) : H_0 \sim$	0,55	0,80	1,0	0,8	0,6	0,47	0,22	0,04
$Q_2 : Q_1 \sim$	1,25	1,34	1,41	1,34	1,26	1,20	1,04	1,02
$L_2 : L_1 \sim$	1,14	1,07	0,71	0,27	0,13	0,07	0,01	0,00
$\eta \sim$	0,87	0,80	0,66	0,50	0,40	0,33	0,18	0,04

Die Versuche Fliegners stehen mit den Angaben für den Unterdruck in gutem Einklange. Der Unterdruck  $q_a - p_1$  läßt sich ohne Reibung auch noch setzen  $= H_0 (\zeta_i - \zeta) : (1 + \zeta)$ .

Auch bei Absperrschiebern in Rohrleitungen, bei denen die Erweiterung nicht zentral zum Drosselquerschnitt  $F_1$  gelegen ist, erfolgt ein Unterdruck mit dem max. bei  $F_1 = 0,5 F_2$ .

**2. Allmähliche zentrale Erweiterung (Abb. 140 u. 141).**

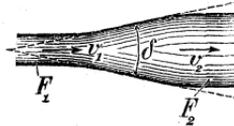
Bedeutung der Zeichen wie unter 1.; außerdem sei

- $\zeta_k$  die Widerstandszahl von  $v_2^2 : 2g$  für den konischen Teil,
- $\lambda$  die Reibungszahl (s. S. 296) für einen Querschnitt dieses Teiles, der  $F_1$  ganz nahe liegt, da nur dieser Teil für die Reibungshöhe von Bedeutung ist,
- $\delta$  der Winkel des konischen Zwischenstückes.

Abb. 140.



Abb. 141.



Aus Versuchen von Fliegner\*) findet sich angenähert:

$$w = \left( \frac{v_1 - v_2}{2g} \right)^2 \sin \delta = \zeta \frac{v_2^2}{2g}; \quad \zeta = (n - 1)^2 \sin \delta.$$

Wenn  $\delta \leq 90^\circ$ , treten die Verhältnisse wie bei plötzlicher Erweiterung ein.

Auch hier tritt unter gleichen Leitungsverhältnissen, wie unter 1. angegeben, Unterdruck ein, dessen Wert

$$q_a - p_1 = [n^2 - (1 + \zeta + \zeta_k + \zeta_2)] \frac{v_2^2}{2g}$$

oder  $= [(n^2 - 1)(1 - \sin \delta) + 2(n - 1) \sin \delta - \zeta_k - \zeta_2] \frac{v_2^2}{2g},$

auch  $= \frac{n^2 - (1 + \zeta + \zeta_k + \zeta_2)}{\zeta_1 n^2 + (1 + \zeta + \zeta_k + \zeta_2)} H_0,$  worin

$\zeta_k = \frac{\lambda}{8 \sin \delta / 2} (n^2 - 1)$  mit einem Mindestwert  $\lambda \sim 0,01$  bei polierter Wandung zu setzen ist.

Bei langem, konischem Zwischenstück mit  $F_2 \leq 10 F_1$  überwiegt der Einfluß der mit  $n^2$  verknüpften Glieder, so daß dann einfacher zu schreiben ist:

$$q_a - p_1 = n^2 (1 - \sin \delta - k) \frac{v_2^2}{2g}$$

oder  $= \frac{1 - \sin \delta - k}{\zeta_1 + \sin \delta + k} H_0,$  worin  $k = \frac{\lambda}{8 \sin \delta / 2}.$

\*) Civiling. 1875 S. 98.

Bei kleinem Winkel  $\delta$  wird mit der allmählichen Erweiterung bereits bei viel kleinerem  $v_2$  bzw.  $H_0$  ein wesentlicher Unterdruck erreicht als bei plötzlicher Erweiterung, weshalb sich für Strahlpumpen besonders die allmähliche Erweiterung eignet (Dampfinjektor, Wasserstrahl- und Quecksilberstrahl-Luftpumpe, Wassertrommelgebläse).

Die hiernach berechneten Werte für den Unterdruck stimmen mit den meisten Versuchsergebnissen von Fliegner gut überein.

Gegenüber dem Verlauf bei plötzlicher Erweiterung nimmt der Unterdruck mit wachsendem  $H_0$  schneller zu, bis das minim.  $p_1 = s$  erreicht ist (vgl. S. 283); dann tritt aber nicht plötzlicher Abfall des Unterdruckes wie bei Abb. 139 ein, sondern der Unterdruck erhält sich, während  $\zeta$  allmählich bis zum Werte  $\zeta_i$  ansteigt und diesen selbst noch überschreitet; schliesslich vermindert sich auch der Unterdruck allmählich.

Nach Versuchen von Andres\*) mit 22 verschiedenen Erweiterungen wird der Vorgang der Umwandlung von Geschwindigkeitshöhe  $v_1^2:2g$  in Druckhöhe im Querschnitt  $F_2$  begünstigt durch runden Querschnitt, durch rein konische Erweiterung, durch Einleitung von schraubenförmiger oder wirbelnder Bewegung in der Erweiterung, durch glatten und abgerundeten Uebergang zur Erweiterung, wie in Abb. 141, sowie durch besondere Glätte der benetzten Wandung. (Letztere läßt sich bei eiserner Wandung auf die Dauer nicht erhalten.)

Auch hier ist  $\zeta_i = n^2 - 1$ , und ähnlich den Werten für plötzliche Erweiterung:

$$\frac{Q_2}{Q_1} = n \sqrt{\frac{1 + \zeta_1}{1 + \zeta_1 n^2 + \zeta + \zeta_k + \zeta_2}}$$

$$\frac{L_2}{L_1} = n \left( \frac{1 + \zeta_1}{1 + \zeta_1 n^2 + \zeta + \zeta_k + \zeta_2} \right)^{\frac{3}{2}}$$

$$\eta = 1 - \frac{\zeta + \zeta_k}{v_1^2 - v_2^2} v_2^2 = 1 - \frac{\zeta + \zeta_k}{\zeta_i}$$

$$= 1 - \sin \delta + \frac{2 \sin \delta}{n + 1} - \frac{\lambda}{8 \sin \delta / 2}$$

Der Wert  $\eta$  ändert sich demnach bei kleinem  $\delta$  nur unbedeutend mit der Verlängerung der allmählichen Erweiterung (s. Z. d. V. d. I. 1910 S. 1640).

Für  $\sin \delta = 0,1$  entspr.  $\delta \sim 5^\circ 45'$  stellen sich, ohne Rücksicht auf Reibung an den Wandungen der Anschlussrohre (also  $\zeta_1 = \zeta_2 = 0$ ), die Werte gegenüber: ( $\lambda = 0,02$  in den Wert von  $\zeta_k$  gesetzt.)

Für $F_2 : F_1 = 1,5$		2	5	10	50
	$\zeta = 0,025$	0,10	1,6	8,1	240
	$\zeta_i = 1,25$	3,0	24	99	2499
$(q_a - p_1) : H_0 = 0,97$		1,86	4,0	4,3	4,1
$Q_2 : Q_1 = 1,4$		1,7	2,2	2,3	2,3
$L_2 : L_1 = 1,2$		1,2	0,4	0,1	0,04
	$\eta = 0,88$	0,87	0,85	0,82	0,81

Die Werte  $(q_a - p_1) : H_0$  sind mit dem Werte  $\lambda$  sehr veränderlich.

\*) Forschungsarbeit Nr. 76 des V. d. I. 1909, auch Z. d. V. d. I. 1910 S. 1585.

Für den Venturi-Wassermesser\*) ist in der Regel  $F_2:F_1=9$ ,  $\delta=4^{\circ}40'$ ; nach Versuchen:  $\zeta+\zeta_k=5,1+5,2=10,3$ ,  $Q_2=2,7 Q_1$ ,  $v_{2\max}$  etwa 1,7 m bei  $p_1 \sim 0$ , wenn  $\zeta_2=0$  (Erweiterung am Ende der Leitung).

Der geringe Widerstand der allmählichen Erweiterung gestattet bei sehr weiten Leitungen, Absperrvorrichtungen von kleinerem Durchmesser, also billigere und handlichere Verschlüsse einzubauen.

### 3. Plötzliche zentrale Verengung.

Hierbei entsteht ein Geschwindigkeitsverlust an der Durchflussskante von 3,5 vH, dessen  $\zeta=(1:0,965)^2-1=0,076=0,276^2$  ist, — und ein Stofsverlust infolge Wiederausbreitung des eingeschnürten Strahles gemäß Angabe unter 1 für plötzliche zentrale Erweiterung.

$\alpha$  sei das Verhältnis des Querschnittes des eingeschnürten Strahles zu dem der Durchlaufsöffnung (Kontraktionszahl).

Werte  $\alpha$ :

Wenn die Durchflußöffnung  $\geq 0,1 F_1$ ,

- $\alpha=0,62$  bis  $0,64$  bei scharfer Durchflussskante,
- $=0,7$  bis  $0,8$  bei ganz schwacher Kantenbrechung,
- $=0,9$  bei wenig abgerundeter Kante.

Wenn die Durchflußöffnung  $> 0,1 F_1$ , so vergrößert sich  $\alpha$  infolge der wesentlichen Zufußgeschwindigkeit zur Verengung; Änderung von  $\alpha$  ist durch Versuche nur für scharfe Durchflussskante bisher ausreichend ermittelt (Weisbach 1843).

Abb. 142.

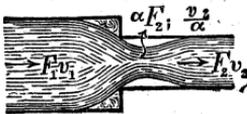
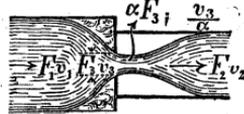


Abb. 143.



Es gilt

für Abb. 142:  $w = \zeta_2 \frac{v_2^3}{2g}$ , worin  $\zeta_2 = \left(\frac{0,276}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)^2$ ;

bei scharfer Durchflussskante wird

für $F_2:F_1$	0,01	0,1	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
$\zeta_2$	0,50	0,47	0,42	0,33	0,25	0,15	0,00
$\alpha$	0,64	0,65	0,66	0,70	0,75	0,84	1,00

(Bei  $F_2:F_1=1,0$  fällt der erste Summand von  $\zeta_2$  fort, weil alsdann keine Geschwindigkeitsänderung mehr, somit kein Geschwindigkeitsverlust vorhanden ist.)

für Abb. 143:  $w = \frac{\left(\frac{0,276 v_3}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{v_3}{\alpha} - v_2\right)^2}{2g} = \zeta_2 \frac{v_2^3}{2g} = \zeta_3 \frac{v_3^3}{2g}$ ;

$\zeta_2 = \frac{0,076}{\alpha^2} \left(\frac{F_2}{F_3}\right)^2 + \left(\frac{F_2}{\alpha F_3} - 1\right)^2$ ,  $\zeta_3 = \frac{0,076}{\alpha^2} + \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{F_3}{F_2}\right)^2$ ,  $\zeta_2 = \zeta_3 \left(\frac{F_2}{F_3}\right)^2$ .

\*) Z. d. B. 1898 S. 138.

Wenn  $F_3 < 0,1 F_1$ ,  $\alpha$  unveränderlich 0,64 gesetzt, wird für

$F_3 : F_2$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$\zeta_3$	2,3	2,0	1,8	1,5	1,3	1,1	0,9	0,7	0,6	0,5
oder $\zeta_2$	2,32	5,1	2,0	9,6	5,2	3,1	1,9	1,2	0,8	0,5.

Wenn  $F_3 \geq 0,1 F_1$ , setze folgende Werte für  $\alpha$ :

$F_3 : F_1$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$\alpha$	0,65	0,66	0,67	0,69	0,70	0,72	0,76	0,82	0,90	1,00;

dies ergibt für  $F_1 = F_2$  bei

$F_3 : F_2$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$\zeta_3$	2,26	1,91	1,60	1,24	0,94	0,65	0,39	0,19	0,05	0,00
oder $\zeta_2$	226	47,8	17,8	7,80	3,75	1,79	0,80	0,29	0,06	0,00.

**4. Allmähliche zentrale Verengung.** (Abb. 140 u. 141, aber mit entgegengesetzter Stromrichtung.)

Gilt  $v_1$  als Nutzgeschwindigkeit, so wird

$w = \zeta \frac{v_1^2}{2g}$ , und  $\zeta$  entspricht dann allein der Reibung in dem konvergierenden Teile. Angenähert ist

$$\zeta = \frac{\lambda}{8 \sin \frac{\delta}{2}} \left[ 1 - \left( \frac{F_1}{F_2} \right)^2 \right], \text{ wenn die Widerstandszahl } \lambda \text{ einem}$$

Querschnitt nahe dem engeren  $F_1$  entspricht. Da für Verengungen mit den Enddurchmessern  $d_1$  und  $d_2$  für  $d_1 : d_2 \leq 0,5$  der Wert  $(F_1 : F_2)^2 \leq 0,06$  wird, so ist der weitere Teil mit  $d_2 > 2 d_1$  ohne Bedeutung für  $\zeta$ . Dann wird bei mittlerem Werte  $\lambda = 0,02$  für glattes Rohr, wenn  $\delta \geq 30^\circ$ ,  $\zeta$  bereits  $\leq 0,1$ .

Bei Uebergängen zu engeren Rohrweiten in der Stromrichtung ist daher die allmähliche Verengung ohne Bedeutung für die Ersparnis an Reibungswiderständen, wenn nur die Einlaufkante am engen Rohr nach Abb. 133 abgerundet wird. Dasselbe gilt für das Mundstück beim Ausflus freier Wasserstrahlen.

#### $\delta$ . Absperrvorrichtungen und Abdichtungen.

##### 1. Absperrvorrichtungen (Ventile, Hähne, Klappen, Schieber.)

(Nach Versuchen von Weisbach, C. Bach und H. Lang.)

Im folgenden bedeutet

$F$  den freien Querschnitt des Ventilsitzes, Schieber-Kanales oder Rohres, der durch die Vorrichtung verengt wird, in qm,

$F_1$  den mittels der Vorrichtung jeweilig eingestellten kleinsten Durchflußquerschnitt normal zur Stromrichtung in qm,

$v$  die Geschwindigkeit im Querschnitt  $F$  in m/sk,

$v_1$  die Geschwindigkeit im Querschnitt  $F_1$  in m/sk,

$\zeta$  die zu  $v^2 : 2g$  gehörige Widerstandszahl,

$\zeta_1$  die zu  $v_1^2 : 2g$  gehörige Widerstandszahl;

dann ist 
$$\zeta \frac{v^2}{2g} = \zeta_1 \frac{v_1^2}{2g}; \quad \zeta = \zeta_1 \left( \frac{F}{F_1} \right)^2.$$

a) Einschliesslich des Einflusses der Gehäuseform üblicher Bauart, bei vollständiger Öffnung.

1) Kugelförmiges Ventilgehäuse, schlänke Form, 25 mm Dmr.	}	Strom gegen die Unterfläche des Kegels:	$\xi =$	5,3
		Strom gegen die Oberfläche des Kegels:	$\xi =$	4,4
2) Dsgl., aber sehr kurz, Teller-ventil, 34 mm Dmr.	}	Strom gegen die Unterfläche des Tellers:	$\xi =$	16,6
		Strom gegen die Oberfläche des Tellers:	$\xi =$	12,5
3) Eckventilgehäuse, Stromablenkung = 90°, 32 und 22 mm Dmr.	}	Strom gegen die Unterfläche des Kegels:	$\xi =$	2,1
		Strom gegen die Oberfläche des Kegels:	$\xi =$	2,6
4) Schieber winkelrecht zur Rohrachse verschoben, den vollen Rohrdurchschnitt freigebend, 34 mm Dmr.			$\xi =$	0,3

Anmerkung: Im Falle 1) und 3) waren die Dichtungsfächen des Ventils mit kugelförmiger Unterfläche nur 1 mm breit, im Falle 3) konnte der Kegele nur um das 0,25-fache des Sitzdurchmessers vom Sitze abgehoben werden.

b) Ohne Rücksicht auf den Einfluss des Gehäuses.

Absperrvorrichtung	$F_1 : F =$				
	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
	Mittlere Werte von $\zeta_1$				
Tellerventil mit oberer Führung und beliebigger Unterfläche . . . . .	1,2	1,6	2,0	2,5	3,0
Tellerventil mit Rippenführung im Sitze . . . . .	2,3	2,8	3,5	4,3	5,2
Kegelventil mit oberer Führung, Unterfläche oben . . . . .	0,00	-0,14	0,20	0,65	1,16
Dsgl., kugelig . . . . .	0,00	-0,04	0,18	0,48	0,82
Dsgl., kegelförmig . . . . .	-0,04	0,29	0,52	0,56	0,73
Kugellventil, Dichtungskante nur 1 mm breit . . . . .	1,9	2,2	2,5	3,0	5,0
Kugellventil, Strom gegen die Oberfläche gerichtet . . . . .	1,6	1,8	2,2	3,2	4,4
Sehr schlankes Kegelventil, sogen. Nadelventil, Strom gegen die Unterfläche gerichtet . . . . .	0,2	0,4	.	.	.
Dünnere Schieber in rechteckigem Rohre . . . . .	0,69	0,45	0,6	-0,10	0,00
„ „ „ „ „ „ rundem . . . . .	1,00	0,60	0,17	-0,05	0,00
Gewöhnliche Wasserschieber in rundem Rohre. 0,61 m Dmr. Versuch Knichling, $\zeta_1 \text{ max} = 1,1$ bei $F_1 : F = 0,8$ . . . . .	0,80	1,04	0,52	0,0	0,0
Hahn, gerade und rechteckige Durchgangsöffnung . . . . .	2,35	1,65	0,70	-0,02	0,00
Drosselklappe, rechteckig, Schluß nach Drehung um 90° . . . . .	0,50	0,32	0,05	-0,04	0,00
„ „ „ „ „ „ „ „ rund, Schluß nach Drehung um 90° . . . . .		0,45	0,06	-0,03	0,00
Einfache Klappe, rechteckig, Schluß nach Drehung um 90° mit dem Strom . . . . .	0,88	0,78	0,06	-0,04	0,00
Dsgl., gegen den Strom . . . . .	0,41	0,60	0,23	0,08	0,00
Muschelschieber mit scharfen Durchfluskkanten und eckiger Muschel (Einlaufsöffnung: . . . . .	1,0	1,6	1,8	2,0	2,2
„ „ „ „ „ „ „ „ (Auslaufsöffnung: . . . . .	3,0	2,9	2,8	2,7	2,6
Muschelschieber mit etwas gebrochenen Durchfluskkanten (eckige Muschel; Einlaufsöffnung: . . . . .	0,11	0,18	0,21	0,23	0,24
„ „ „ „ „ „ „ „ (Auslaufsöffnung: . . . . .	0,04	0,13	0,35	0,64	1,04
„ „ „ „ „ „ „ „ (runde „ „ „ „ . . . . .	0,04	0,11	0,23	0,35	0,49

**Drucksteigerung** in der Leitung bei schnellem Schliessen einer Absperrvorrichtung:

(Nach Versuchen von Michaud; vgl. Z. d. V. d. I. 1909 S. 1233.)

Vgl. auch III. Bd. Abschn. Wasserversorgung.

Es bedeute

$H$  den statischen Druck an der Absperrvorrichtung in  $m$  WS,

$H_s$  die dort im Augenblick vollständigen Abschlusses erreichte Drucksteigerung in  $m$  WS,

$T$  die Dauer der absperrenden Bewegung der Vorrichtung in  $sk$ ,

$v$  die Durchflusgeschwindigkeit des Beharrungszustandes auf einer Strecke der Leitung, die gleiche Weite besitzt — vor Bewegung der Absperrvorrichtung — in  $m/sk$ ,

$l$  die Länge dieser Strecke mit der Geschwindigkeit  $v$  in m,  
 $\Sigma(lv)$  die Summe der Produkte  $lv$  für die einzelnen Strecken der  
 Leitung von verschiedener Weite,

$k$  die zulässige Beanspruchung des Leitungsmaterials in kg/qmm,  
 $m$  einen Beiwert von  $k$ ,  $m = 1$  für Schmiedeisen,  $m = 2$  für Guf-  
 eisen,

$$g = 9,808 \text{ m/sk}^2.$$

Dann ist

$$H_s = \frac{2 \Sigma(lv)}{gT}, \text{ wenn } T > 0,01 \sqrt{\frac{l^2(mk + 0,025 H)}{H}}$$

$$\text{und } H_{s \text{ max}} = 38 v \sqrt{\frac{H}{mk + 0,025 H}}, \text{ wenn } T \sim 0.$$

Während des Schließens tritt auf der Abflusseite und an der Fläche der Absperrvorrichtung, die parallel zum Abflusstrom gerichtet ist, ein Druckabfall ein, der bei kurzem Abflusrohr zum Unterdruck wird; derselbe ist dem für plötzliche zentrale Erweiterung fast gleich, wird also zum Höchstwert bei  $F_1 = 0,5 F_2$  und erschwert durch die einseitige Druckwirkung die Bewegung der Absperrvorrichtung (vgl. Z. d. B. 1909 S. 671).

Bei der üblichen Bauart kreisförmiger Wasserschieber ist der Querschnitt der sichelförmigen Öffnung proportional dem Hub vom Beginn der Nettoöffnung an bis zum 0,65-fachen des Rohrquerschnitts; bei weiterer Öffnung bleibt die Zunahme des Durchflusquerschnitts dem Hub gegenüber in wachsendem Maße zurück. Der Durchflusquerschnitt wird gleich dem halben Rohrquerschnitt nach einem Nettohub  $= 0,42 d$ , bei welchem der oben erwähnte Druckabfall ein max. wird.

## 2. Abdichtungen.

**Vollkommene Abdichtung** gegen Durchflus wird mittels dicht aneinander liegender Flächen erreicht, wenn zwischen Zulauf- und Ablaufseite wenigstens eine geschlossene Linie vorhanden ist, auf welcher die Spannung zwischen den dichtenden Flächenteilen größer ist als der hydrostatische Druck auf die Flächeneinheit an der Zulaufseite. Eine solche Linie wird z. B. an Dampfkesseln durch das Verstemmen der Blechkanten erzeugt.

Bei Ventilen und anderen Absperrvorrichtungen mit breiter Dichtungsfläche ist es mit kleinem Handrad oft nicht möglich, die für vollkommene Abdichtung nötige Pressung auf einer geschlossenen Ringlinie zu erreichen; es hilft dann nur Verkleinerung der Dichtungsfläche oder Vergrößerung der Uebersetzung für die Schließkraft (größerer Handrad), oder Einsetzen eines weniger festen Materials für Ventilkegel oder Sitz.

Bei Absperrvorrichtungen darf die Dichtungsfläche so schmal hergestellt werden, dafs nur noch die Elastizitätsgrenze der abdichtenden Materialien gewahrt bleibt; dagegen darf bei nur einmalig verlangter Abdichtung, wie sie z. B. beim Verlegen von Rohrleitungen verlangt wird, die Elastizitätsgrenze der abdichtenden Materialien überschritten und daher die Dichtungsfläche scharfkantig ausgebildet werden.

**Unvollkommene Abdichtung.** Wird eine geschlossene Linie mit größerer Flächenpressung zwischen den Dichtungsflächen als derjenigen auf der Zulaufseite nicht erreicht, so tritt geringer Durchfluß unter Ueberwindung hydraulischer Widerstände ein, die trotz der sehr kleinen Durchflußquerschnitte nach dem allgemeinen Gesetz für die Durchflußwiderstände (S. 288) zu berechnen sind. Auch bei diesem Durchfluß treten Fließzustände unterhalb und oberhalb der kritischen Geschwindigkeit auf.

Die Durchflußmenge ist somit proportional der Zeit und proportional den Werten  $\sqrt{2gH_0}$  und  $\sqrt{l:l}$ , worin  $l$  die Weglänge zwischen ungehindertem Zu- und Ablauf bedeutet. Daher ist bei Kesseldruckproben die Dichtigkeit der Kessel ebenso gut bei dem Betriebsdruck wie bei dem höheren Probedruck zu beurteilen, wenn die Dauer des Druckes im Verhältnis  $\sqrt{H_1:H_2}$  steht; bei älteren Kesseln kann aber längerer Probedruck schädlich wirken, weshalb bei diesen die Beurteilung etwaiger Undichtigkeit besser bei geringerem, aber länger wirkendem Druck vorgenommen wird.

Metallische Kolben- oder Stopfbuchsichtung erzeugt sehr enge, ringförmige Durchflußkanäle mit polierten Gleitflächen. Der Querschnitt wird aber bei liegenden Kolben oder Stangen selten an allen Stellen der Strecke gleich groß und von gleicher Form sein. Immerhin werden Annäherungsrechnungen für die Durchflußmenge mit Hilfe der Angaben auf S. 288 u. 295 auch hierfür brauchbare Ergebnisse liefern (vgl. Becker, Z. d. V. d. I. 1907 S. 1133).

Faserpackung wirkt nur so lange brauchbar, wie bei ihr noch Ausdehnungs- und Quelfähigkeit (Elastizität) erhalten ist. Je mehr Fasern übereinander liegen, um so länger sind die feinen Durchflußkanäle und demgemäß die hydraulischen Widerstände, so daß anderseits bei gleicher Durchflußmenge, aber höherer Packung an gegenseitiger Pressung der Fasern gespart werden kann. Also wird durch hohe Stopfbüchse das Packungsmaterial geschont und die Reibung an den hindurchgleitenden Teilen verringert. Hohe Packung fordert aber lange Grundbuchse, da diese bei höherer Spannung im Zylinder als in der Stopfbuchse kolbenartig in die Buchse eintritt und dort die Packung selbsttätig zusammenpreßt.

Ledermanschette besitzt keine Poren, die als feine Durchflußkanäle zu erachten wären. Die Manschette ist eine selbsttätige, außerordentlich gute und wirtschaftliche Abdichtung für Flüssigkeiten unter 40° Wärme, wenn die an ihr vorbeigleitenden Flächen ganz glatt sind und die Elastizitätsgrenze des Leders (bei der Herstellung oder beim Einsetzen des Kolbens) nicht überschritten worden ist. Denn oft wird das Manschettenmaterial dicker gewählt, als es der Spielraum an der Manschettenkammer freiwillig zuläßt, so daß das Material beim Einsetzen des Kolbens mit Gewalt zusammengepreßt wird. Ob dies geschehen ist, läßt sich mittels des Manometers feststellen, denn bei gut erhaltenem Material ist die Reibung (halbe Differenz der Pressung bei Hin- und Hergang des Kolbens bei gleichbleibender Belastung) bei allen Pressungen im Zylinder denselben proportional; bei zusammengepreßtem Material dagegen tritt diese Proportionalität erst bei höherem Flüssigkeitsdruck auf, und die Reibung bleibt unterhalb dieses Druckes

konstant. Eine gut eingesetzte Manschette macht den Preßzylinder bei sehr glattem Kolben zu einer sehr guten Wägevorrichtung. Rauhe oder gar riefige Reibfläche, wie sie hartes oder eisenhaltiges Wasser leicht erzeugt, zerstört die Ledermanschette. Manschetten von Gutta-percha leiden noch stärker bei rauher Reibfläche und bieten nicht die schlüpfrige Oberfläche wie nasses oder fettiges Leder.

Labyrinthdichtung mit plötzlichen Erweiterungen (Nuten) an den Dichtungsflächen kann nach den Angaben S. 301 höchstens die Widerstandszahl  $\zeta (F_1 : F_2)^2 = 1$  für je eine Nute erreichen, allenfalls noch einen Zuschlag 0,5 bei scharfkantiger Abgrenzung an der nächsten Verengung; dagegen entsteht bei Fortfall der Nute an ihrer Stelle ein sehr enger ringförmiger Durchflußquerschnitt, der nach den Angaben auf S. 288 in den meisten Fällen eine höhere Widerstandszahl ergibt. Auch bei häufigem Richtungswechsel für den Durchfluß (kammartiges Ineinandergreifen der Dichtungsflächen) wird für jeden Wechsel von 90° höchstens ein  $\zeta = 1$  erreicht. Selbst für  $\Sigma \zeta = 8$  würde noch  $1/3$  der theoretischen Durchflußgeschwindigkeit  $\sqrt{2gH_0}$  verbleiben. Vgl. Becker, Z. d. V. d. I. 1907 S. 1133.

## D. Fließen in nicht gefüllten Rohrleitungen, in Flüssen und Kanälen.

1. Gleichförmige Bewegung (Querprofil unveränderlich, Gefälle des Grundes = Reibungsgefälle  $w : l$ ).

Es bedeutet für eine Strecke von gleichbleibender Beschaffenheit:

$F$  den Durchflußquerschnitt (Querprofil) des Wasserkörpers in qm,

$Q$  die durch  $F$  abfließende Wassermenge in cbm/sk,

$v$  die mittlere Profilgeschwindigkeit, d. h. die mittlere Geschwindigkeit in  $F$ , in m/sk (Werte anderer Profilgeschwindigkeiten vgl. S. 314),

$u$  den benetzten Teil des Umfanges des Leitungsquerschnittes in m,  $l$  die Länge der in Betracht gezogenen Strecke der Leitung mit gleichem Querprofil, in m,

$w$  die Senkung des Wasserspiegels für die Länge  $l$ , in m,

$i = w : l$  das Gefälle des Wasserspiegels (Reibungsgefälle),

$\rho$  die Widerstandszahl für die benetzte Flächeneinheit,

$g = 9,81$  m/sk<sup>2</sup>.

Wie bei dem Durchfließen von gefüllten Rohrleitungen (s. S. 288) ist

$$w = \rho l \frac{u}{F} \frac{v^2}{2g}; \quad v = \sqrt{\frac{2g}{\rho}} \sqrt{\frac{iF}{u}}; \quad Q = Fv.$$

Der Wert  $F : u$  wird vielfach hydraulischer Radius genannt und mit  $R$  bezeichnet. Vorteilhafte Querschnitte mit großem  $F : u$  s. S. 313.

$\alpha$ ) Nach Weisbach setze für Flüsse und Kanäle mit rauhem Flußbett:

$$\rho = 0,0074 + \frac{0,000433}{v}.$$

(Dies entspricht für gefüllte Rohrleitungen einem  $\lambda = 4\rho = 0,029 + 0,0017 \cdot v$ ; vrgl. S. 297).

Im Mittel wird für rauhes Flufsbett  $\rho = 0,0075$ , oder  $\sqrt{\frac{2g}{\rho}} = 51$ .

$\beta$ ) Nach Bazin:

$$\text{ältere Formel (1865)} \quad \sqrt{\frac{2g}{\rho}} = \sqrt{\frac{1}{a + bu : T}}$$

$$\text{neuere Formel (1897)} \quad \sqrt{\frac{2g}{\rho}} = \frac{87}{1 + c\sqrt{u : T}}$$

worin bedeutet:

Fall I.	für gehobeltes Holz oder Zement . .	$a = 0,00015$ ,	$b = 0,0000045$ ,	$c = 0,06$
" II.	Quader und nicht gehobeltes Holz	$a = 0,00019$ ,	$b = 0,0000133$ ,	$c = 0,16$
" III.	Mauerwerk aus Bruchsteinen . .	$a = 0,00024$ ,	$b = 0,00006$ ,	$c = 0,47$
" IV.	Erde, Querschnitt regelmäsig u. rein	$a = 0,00028$ ,	$b = 0,00035$ ,	$c = 1,30$
" V.	Gerölle (nach Kutter) . . . . .	$a = 0,00040$ ,	$b = 0,00070$ ,	$c = 1,75$

Werte  $\sqrt{\frac{2g}{\rho}}$  aus der älteren Formel:

$F:u =$	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,80	1,00	2,00	3,00	6,00 m
Fall I.	71,6	76,1	77,9	78,8	79,3	79,7	80,2	80,4	81,0	81,2	81,4
" II.	55,6	62,4	65,3	66,9	67,9	68,7	69,6	70,1	71,3	71,7	72,1
" III.	34,5	43,0	47,7	50,6	52,7	54,2	56,3	57,7	60,9	62,0	63,2
" IV.	16,3	22,2	26,3	29,4	31,9	34,0	37,3	39,8	46,9	50,2	54,4
" V.	11,6	16,0	19,1	21,6	23,6	25,3	28,0	30,2	36,5	39,7	44,0

(Beide Formeln würden bei Anwendung der Reibungswerte auf gefüllte Rohrleitung von Durchmesser = 1 m und Fall I die Werte  $\lambda = 0,012$  bzw.  $0,013$  ergeben; vrgl. S. 297.)

Bei Flüssen nimmt im allgemeinen die Rauheitszahl  $n$  vom Quellgebiete nach der Mündung hin ab.

Nach Messungen in der preussischen Elbe fand sich, daß  $v$  von der Wassertiefe  $t$  nach folgender Beziehung abhängt:

$$v = 46,91 \sqrt[3]{\frac{v}{t}}$$

wobei Wassermengen  $Q$  von 90 bis 430 cbm/sk, Gefälle  $i$  von 0,00007 bis 0,00023 und mittlere Tiefen  $t$  von 1 bis 3 m vorausgesetzt sind.\*)

**2. Ungleichförmige Bewegung** (Querprofil veränderlich, Gefälle des Grundes vom Reibungsgefälle  $w:l$  verschieden).

Ungleichförmige Bewegung entsteht infolge wechselnder Breite oder Tiefe des Wasserlaufes, auch infolge von Aufstau durch Hochwasser, durch Wehre, Schützen oder eingebaute Pfeiler.

Teile die ganze Strecke in einzelne Abschnitte, für welche die Zunahme der Querschnitte und damit auch die Abnahme der Geschwindigkeit als proportional ihrem Abstände angesehen werden kann.

Bedeutet nach Abb. 144 in einem dieser Abschnitte:

$F_0$  den oberhalb gelegenen Querschnitt in qm,

$F_u$  „ unterhalb „ „ „ „ „

\*) Vrgl.: Siedek, Z. d. ö. I. u. A. V. 1901 S. 597, Plenkner, Oesterr. Wochenschr. f. d. öf. Baudienst 1906, Heft 40 und Biel, s. Fußnote S. 293.

- $l$  den Abstand beider in m,  
 $v_o$  und  $v_u$  die durchschnittlichen Geschwindigkeiten in  $F_o$  und  $F_u$  in m/sk,  
 $t_o$  und  $t_u$  die Wassertiefen bei  $F_o$  und  $F_u$  in m,  
 $s$  die Fallhöhe des Wasserspiegels auf der Strecke  $l$ , in m,  
 $u_m$  den mittleren benetzten Umfang des Durchflusquerschnittes auf der Strecke  $l$ , in m,  
 $Q$  die abfließende Wassermenge in cbm/sk,  
 $\delta$  den Neigungswinkel des Flußbettes,  
 $\rho$  die Widerstandszahl für die benetzte Flächeneinheit, die der mittleren Geschwindigkeit auf der Strecke  $l$  entspricht,  
 $v_m^2 : 2g$  die mittlere Geschwindigkeitshöhe von  $v_o^2 : 2g$  und  $v_u^2 : 2g$  in einem Querschnitt  $F_m$ ,

Abb. 144.



so ist

$$\frac{v_o^2}{2g} + s = \frac{v_u^2}{2g} + \frac{\rho v_m^2 u_m l}{2g F_m},$$

worin

$$v_m = \frac{v_o + v_u}{2} \quad \text{und} \quad F_m = \frac{F_o + F_u}{2};$$

da außerdem  $Q = F_o v_o = F_u v_u$ , so wird

$$s = \frac{Q^2}{2g} \left( \frac{1}{F_u^2} - \frac{1}{F_o^2} + \rho l u_m \frac{F_o + F_u}{2 F_o F_u} \right) = l \sin \delta + t_o - t_u.$$

Ist die Staukurve eine stetige Linie, so ist  $t_u - t_o$  erst null für  $l = \infty$ .

Die Staukurve ist nicht stetig, und es entsteht ein **Wassersprung** (Wasserschwelle) von der Höhe  $t_u - t_o = \frac{v_o^2}{2g} - \frac{v_u^2}{2g}$  (also  $\frac{v_o^2}{2g} = \frac{t_u}{1 + (t_o : t_u)}$ ) an der Stelle, wo bei parallel bleibenden Ufern das Gefälle des Grundes plötzlich größer als das Reibungsgefälle ist.

Ueber Wanderwellen in steilen Gerinnen vgl. Forchheimer, Sitzungsbericht der Akad. d. Wissenschaften in Wien, Dez. 1903.

### 3. Vorteilhafteste Querschnitte von Kanälen.

Von den Querprofilen verschiedener Form, aber gleicher Größe  $F$  in qm, ergibt dasjenige mit größerem  $F : u$  den kleineren Reibungsverlust (vgl. S. 288).

Weisbach vergleicht die Formen unter sich nach dem Werte von  $m = u : \sqrt{F}$ , der mit zunehmender Güte der Querschnittsform abnimmt.

\*) Weitere Angaben vgl. Tolkmitt, Grundlagen der Wasserbaukunst 1898 S. 108.

Frank\*) vergleicht die Formen mittels eines Wertes  $f = 4F : u^2$  (also  $f = 4 : m^2$ ), der mit der Güte der Querschnittsform wächst.

a) **Geradlinig begrenzte Querschnitte (Rechteck und Trapez).**

Bedeutet  $t$  die Wassertiefe in m,  
 $b$  die Sohlenbreite in m,  
 $\delta$  den Böschungswinkel, so wird

$$f \text{ am größten, wenn } t = \sqrt{\frac{F \sin \delta}{2 - \cos \delta}}; \text{ daraus folgt}$$

$$\frac{b}{t} = 2 \frac{1 - \cos \delta}{\sin \delta}, \quad \frac{u}{F} = \frac{2}{t}, \quad f_{\max} = \frac{4 \sin \delta (2 - \cos \delta)}{\left(2 + \frac{b}{t} \sin \delta\right)^2}.$$

Hiermit entsteht folgende Tafel:

$\delta$	$\text{tg } \delta$	$b : t$	$f_{\max}$	Uebliches Material der Böschung
90°	1 : 0,0	2,0	0,50	Holz
63° 20'	1 : 0,5	1,23	0,58	Mauerwerk
45°	1 : 1	0,83	0,55	feste Erde mit Uferbefestigung
33° 40'	1 : 1,5	0,61	0,48	„ „ ohne „
26° 30'	1 : 2	0,47	0,40	} lockere Erde, Sand u. dgl.
18° 20'	1 : 3	0,32	0,30	

b) **Krummlinig begrenzte Querschnitte.**

**Kreisform** (Vollkreis, Halbkreis, Kreissohle): Bei der Anfüllung des Querschnittes nimmt  $f$  rasch zu bis  $f_{\max} = 0,637$  bei Erreichung des Kreismittelpunktes. Bei weiterer Füllung nimmt  $f$  wieder ab bis zu  $f = 0,318$  bei Erreichung des Scheitels.

**Eiform mit spitzem Ende unten** (Abb. 145): Günstigste Form für stark wechselnde Füllung.

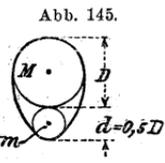
$f$  wird in Höhe des Mittelpunktes des kleinen Kreises = 0,613, bei Füllung bis zu dem des großen Kreises = 0,528, bei Erreichung des Scheitels = 0,292.

**Eiform mit spitzem Ende oben:** Ungünstiger als Kreis und Eiform mit Spitze unten; verwendet für Wassersammelleitungen ohne stärkere Schwankung in der Füllung.

**Ellipsenform, stehend:** (Zwei eingeschriebene, sich berührende Kreise von gleichem Durchmesser  $d$ , der kleinere Durchmesser der Ellipse =  $\frac{4}{3} d$ ).

Bei halber Füllung  $f_{\max} = 0,627$ , bei Erreichung des Scheitels  $f = 0,298$ .

**Ellipsenform, liegend:** Maßverhältnisse wie oben; bei mangelnder Höhe anzuwenden. Bei halber Füllung  $f_{\max} = 0,615$ , bei Erreichung des Scheitels  $f = 0,298$ .



\*) Vgl. A. Frank, Ber. d. Kanäle und Rohrl. nach einem neuen einheitl. System 1886. München, R. Oldenbourg.

**4. Uebliche Geschwindigkeiten und Gefälle bei Kanälen.**

Soll die Kanalsohle durch das Wasser nicht angegriffen werden, so sind folgende Geschwindigkeiten (in m/sk) nicht zu überschreiten, wenn  $v_0$  die mittlere Geschwindigkeit an der Oberfläche,

$v_u$  „ „ „ „ „ „ Sohle,  
 $v_m$  „ „ „ „ „ „ Profilgeschwindigkeit bedeutet:

Beschaffenheit des Bettes	$v_0$	$v_u$	$v_m$	Beschaffenheit des Bettes	$v_0$	$v_u$	$v_m$
Schlammige Erde und brauner Töpferton . . . . .	0,15	0,08	0,12	Kiesiger Boden . . . . .	1,22	0,70	1,00
Feiner Sand . . . . .	0,20	0,10	0,16	Grobsteiniger Boden . . . . .	1,52	0,94	1,25
Lehm und fetter Ton (abgelagert) . . . . .	0,30	0,16	0,25	Gemisch v. Schieferstücken . . . . .	2,22	1,49	1,80
Fetter Flußsand . . . . .	0,60	0,31	0,50	Lagerhafte Gebirgsarten . . . . .	2,75	1,82	2,30
				Harte, ungeschichtete Felsenarten . . . . .	4,27	3,14	3,50

Sollen sich in einem Kanale keine Sinkstoffe niederschlagen, so muß die mittlere Geschwindigkeit mindestens betragen:

wenn das Wasser leichten Schlamm mit sich führt,  $v = 0,25$  m/sk,  
 wenn das Absetzen von Sand zu befürchten ist,  $v = 0,50$  m/sk.

Für **Fabrikkanäle** wähle man  $v = 0,4$  bis  $0,8$  m/sk; dabei erhalten die Zuleitungskanäle ein Gefälle  $= 0,0005$  bis  $0,0004$ , die Unterkanäle  $= 0,002$  bis  $0,001$ .

Sollen **Schiffahrtskanäle** zu Reinigungszwecken abgelassen werden können, als Entwässerungskanäle dienen, Wasser zur Bewässerung oder zur Speisung tiefer gelegener Haltungen abgeben, so erhalten sie ein Gefälle  $= 0,000005$  bis  $0,000040$ . Sonst ist bei (1,5 bis 75 km langen) Kanalhaltungen das Gefälle  $= 0$ . Die stärksten, für Schifffahrt möglichen Gefälle sind 1:600 bis 1:500; schon Gefälle über 1:5000 werden zu vermeiden gesucht.

**E. Fließen des Wassers durch Erdreich.****a) Querschnitt von Zu- oder Abfluß klein gegen den Durchflußquerschnitt.**

Fließen nach einer Richtung hin wird eingeleitet durch Spannungsabfall (Druckhöhenunterschied) des Grundwassers in dieser Richtung. An beiden Endpunkten der Bahn befinden sich Zu- bzw. Ablauf. Alle Wasserschichten mit gleichem Abstände von denselben besitzen gleiche Spannung, die mit der Entfernung vom Zulauf abnimmt.

Die Strömung beginnt in der Richtung nach dem Ablauf zu, radial auseinander gehend, auf einem Bogen von  $180^\circ$ ; die Stromfäden werden stetig in der Richtung des Spannungsabfalles abgelenkt, bis sie sich am Ablauf wieder radial vereinigt haben. Die Stromlinien ähneln daher den auf die Ebene projizierten Meridianlinien einer Kugel, deren Pole durch Zu- bzw. Ablauf gebildet werden. Die Flächen gleicher Spannung sind Kugelflächen, wenn Zu- und Ablauf Punkte im Erdreich darstellen; sie sind Zylinderflächen, wenn Zu-

und Ablauf Stollen oder Kanäle darstellen. Die Spannungsflächen werden nach oben zu durch den Grundwasserstand begrenzt; nach unten zu werden Verdrückungen der Linien durch wasserdichte Erdschichten herbeigeführt.

Hiernach findet auch unterhalb der Gefällelinie zwischen den Sohlen von Zu- und Ablauf eine Strömung zum Ablauf hin statt, wenn die Sohlen beider nicht bis zur wasserdichten Erdschicht reichen; die Wasserspannungen unter der Sohle des Zulaufs nehmen mit der Tiefe ab; umgekehrt ist es unter der Sohle des Ablaufs. Vgl. Versuche von Pennink, J. f. Gasbel. u. Wasserw. 1907 S. 68.)\*

### b) Querschnitt von Zu- und Abfluß gleich dem Durchflußquerschnitt, dieser unveränderlich; Filter.\*\*)

Unter der Voraussetzung, daß das Korn der Bodenart genaue Kugelform vom Durchmesser  $d$  besitzt, folgt, wenn  $l$  die Dicke und  $F$  den Querschnitt der durchflossenen Bodenschicht bedeutet:

Anzahl der Kugeln im Querschnitte  $F$ :  $1,15 F : d^3$ ,

kleinster, für den Durchfluß freibleibender Flächenanteil:  $0,1 F$ ,

Anzahl der Kugeln im Raume  $F l$ :  $1,41 F l : d^3$ ,

Anzahl der Kugellagen auf der Strecke  $l$ :  $l \sqrt{3} : d \sqrt{2}$ ,

Oberfläche aller Kugeln im Raume  $F l$ :  $4,44 F l : d$ ,

Summe der Hohlräume im Raume  $F l$  je nach Lagerung 0,26 bis 0,47  $F l$ .

(Die Hohlräume zwischen den Körnern sorgfältig sortierten und gereinigten Sandes von  $d = 0,54$  bis  $3,8$  mm fand Kröber zu 0,39 bis 0,41  $F l$ ; bei gewöhnlichem Sande mit Körnern von  $d = 0,1$  bis  $0,8$  mm fand H. Lang 0,36  $F l$ .)

Es bedeute

$Q$  die durchfließende Wassermenge für 1 qm Bodenfläche, je nach näherer Angabe in l oder cbm in der Stunde,

$d$  den mittleren Korndurchmesser in mm,

$l$  die Dicke der Bodenschicht, im Sinne der Wasserbewegung gemessen, in m,

$H$  die für den Durchfluß beanspruchte Druckhöhe in m; bei lotrechttem Durchfluß und gleichartigem Boden ist  $l$  ein Teil von  $H$ ;

$m$  den Anteil von der Bodenmasse, den die Hohlräume einnehmen,  $k$  oder  $k_1$  den Wert der Durchlässigkeit.

Nach Slichter gilt für ganz reinen Sand von gleichmäßigem Korn, bei  $10^0 C$ :

$$Q = k d^2 H : l \text{ in cbm/st, worin}$$

für  $m = 0,26 \ 0,28 \ 0,30 \ 0,32 \ 0,34 \ 0,36 \ 0,38 \ 0,40 \ 0,42 \ 0,44 \ 0,46 \ 0,47$

„  $k = 3,32 \ 4,25 \ 5,33 \ 6,60 \ 8,07 \ 9,73 \ 11,6 \ 13,8 \ 15,2 \ 18,9 \ 21,8 \ 23,7$ .

Bei Grobsanden, Kies und Schotter gilt dieses einfache Gesetz nicht mehr, sondern ein ähnliches Gesetz wie für den Durchfluß durch

\*) Vgl. P. Forchheimer, Grundwasserspiegel bei Brunnenanlagen, Z. d. V. d. I. 1899 S. 202 u. Z. ö. I. u. A. V. 1898 S. 629.

\*\*\*) Vgl. P. Forchheimer, Z. d. V. d. I. 1901 S. 1736 u. Encyclopädie der mathem. Wissenschaften, Abschnitt Hydraulik S. 449.

enge Röhren (vgl. S. 295); hierbei nimmt also  $k$  mit wachsendem  $H:l$  ab.

Nach Versuchen der Königl. Kanal-Kommission in Münster 1892:

Flußsand, weder gesiebt noch gewaschen, Filteroberfläche = 1 qm,

$H$  bis 5 m,  $l_{\max} = 1$  m.

$Q$  in  $l/st = k_1 H:l$ , worin für

Sand, 0,1 bis 0,8 mm Korn . . .	$k_1 = 32$ ,
Sand, 0,1 „ 0,3 „ „ . . .	„ = 9,
Sand mit Spuren von Lehm . . .	„ = 3,
Mergel, feucht eingestampft . . .	„ = 0,0035,
Lehm „ „ . . .	„ = 0,0020.

Gewaschener Filtersand des Wasserwerks in Hamburg:

$Q$  wie oben mit  $k_1 = 28$ .

Nach Versuchen von Welitschkowsky:

Kies und Sand gesiebt und gewaschen; Filteroberfläche = 20 qcm,

$H$  bis 2,0 m,  $l$  bis 1,0 m.

$Q$  in  $cbm/st$ , worin für

Mittelkies, 4,0 bis 7,0 mm Korn . . .	$k_1 = 126$ ,
Feinkies, 2,0 „ 4,0 „ „ . . .	„ = 108,
Grobsand, 1,0 „ 2,0 „ „ . . .	„ = 19,
Mittelsand, 0,3 „ 1,0 „ „ . . .	„ = 1,8.

Bei übereinander liegenden Schichten von verschiedenem Korn ist die mit kleinstem Korn für  $Q$  maßgebend, selbst wenn diese Schicht nur wenige cm hoch ist.

Bei Mischungen von verschiedenem Korn wird die größte Dichtigkeit erreicht, wenn sich das kleinere Korn in die Zwischenräume des größeren einzulegen vermag; dann ist für  $Q$  angenähert das kleinere Korn maßgebend.

Die Durchlässigkeit von Bodenarten wird besonders durch quellende Zwischenschichten, z. B. Lehm, Eisenoxyd, Humus usw., wirkungsvoll vermindert; diese Zwischenschichten erreichen ihre größte Wirkung schon bei wenigen mm Stärke; doch ist gewöhnlich in Rücksicht auf Ausspülungen, ungleichmäßige Bodensenkungen oder Erdgänge von Tieren an Stärke zuzugeben.

Ausgetrockneter Ton quillt im Wasser um etwa das 2,5-fache seines Rauminhaltes auf. Daher ist es bedenklich, Ton zur Hinterfüllung von Futtermauern zu verwenden (Schotter empfehlenswerter); zum Abdichten von durchlässigem Boden ist Lehm wasserarm aufzustampfen und gegen späteres Abschwemmen mit Sandschüttung zu belasten. Die Durchlässigkeit von aufgeschlämmtem Lehm ist etwa 1000 mal größer als die von feucht aufgestampftem Lehm.

## F. Steighöhe und Sprungweite freier Wasserstrahlen.

Es bedeutet

$H$  die nutzbare Druckhöhe an der Mündung in m (praktisch an einer Stelle vor der Mündung von wesentlich größerem Querschnitte zu ermitteln, als ihn die Mündung besitzt),

$S$  die lotrechte Steighöhe des Strahles in m,

$W$  die Sprungweite des geneigten Strahles in m,

$d$  den Durchmesser der Ausflusmündung in mm.

Infolge des Luftwiderstandes wird die theoretische Steighöhe  $H$  nicht erreicht. Das Verhältnis  $S:H$  vermindert sich mit der Windstärke und ist vom Winkel zwischen Wind- und Strahlrichtung abhängig. Einem größeren  $d$  entspricht auch ein größerer  $S$  und  $W$ .

Freemans\*) Versuche mit Feuerschlauch-Mundstücken von  $d=19$  bis 35 mm Durchmesser ergeben auszugsweise folgende Werte  $S$  und  $W$  (letztere bei  $32^\circ$  Neigung des Mundstückes):

Steighöhen und Sprungweiten in m		Druckhöhe (dicht vor dem Mundstücke) $H$ in m =							$d$ in mm		
		5	10	15	20	30	40	50		60	70
$S$	des noch gut zusammenhaltenden Strahles bei frischem Winde	3,7 4,0	7,3 7,9	11,0 11,6	14,4 15,2	16,2 18,3	21,6 24,6	23,6 27,7	24,4 29,6	25,4 31,0	19 35
	der äußersten Tropfen bei Windstille	4,3 4,6	8,8 9,5	13,1 14,0	17,7 18,3	25,3 27,8	31,0 36,0	36,0 43,0	39,0 48,0	41,0 50,0	19 35
$W$	des noch gut zusammenhaltenden Strahles bei frischem Winde	4,3 5,5	7,0 9,5	9,5 13,1	11,0 15,8	14,0 20,4	15,8 23,0	17,7 25,0	19,5 27,0	20,8 28,7	19 35
	der äußersten Tropfen bei Windstille	7,8 8,8	15,5 17,4	23,2 26,6	28,6 34,2	35,8 47,0	41,0 55,0	45,0 62,0	48,5 67,0	51,0 72,0	19 35

Ein gutes Mundstück muß im engsten Teile sehr glatte Wandung und eine besonders glatte Ausflusskante ohne die kleinste Gratbildung oder allmähliche Erweiterung (Abrundung) besitzen, da sonst ein Versprühen des Strahlumfanges eintritt. Eine Düsenlänge von 0,5 bis 1,0  $d$  wie bei Abb. 126 ist ausreichend. Durch schwache Verjüngung der Mündung von nur  $5^\circ$  bis höchstens  $13^\circ$  wird der Strahl besser zusammengehalten, als durch genau zylindrische Form oder durch Ausfluß aus scharfkantiger, dünnwandiger Öffnung.

Die Güte einer Düse wird nach der Strahlänge beurteilt, auf welcher der Strahl ohne seitlich absprühende Tropfen verbleibt und als blanker Strahl zusammenhält.

Ueber Reibung im kegelförmigen Rohr vgl. S. 306, über Reibung in der Zuleitung vgl. S. 289 u. f.

Zum Feuerlöschten verwendet man besser einen größeren Strahlquerschnitt als zwei kleinere, da ersterer eine größere Sprungweite besitzt und ein rascheres Löschen des Feuers durch „Auspeitschen“ ermöglicht.

\*) S. Freeman, Verhandlungen der American Society of Civil Engineers, New York, Nov. 1890; auch J. G. W. 1890 Nr. 32 bis 34.

## G. Hydraulischer Druck und Arbeitsvermögen frei ausfließender Strahlen.

### a. Druck gegen Flächen und Flüssigkeiten (Aktion).

#### 1. Erklärungen und Bezeichnungen.

Gut zusammengehaltene Strahlen aller Flüssigkeiten (auch von Quecksilber) breiten sich auf der vom Strahl getroffenen Fläche ohne Bildung einer wesentlichen Hohlkehle tellerförmig aus (entgegen bisheriger allgemeiner Darstellungsweise), unabhängig von der Neigung des Strahles, des Auffallwinkels oder der Entfernung der Ausflusmündung von der Fläche. (Dabei ist vorausgesetzt, daß rückfallende Flüssigkeit die Ausbreitung nicht hindert.) Die strahlenförmige Ausbreitung wächst mit der Ausflusgeschwindigkeit und mit der Glätte der getroffenen Fläche.

Das radiale Abfließen auf der Fläche beginnt an der Auffallstelle mit scheinbar unverminderter relativer Strahlgeschwindigkeit und vermindert sich nur allmählich unter dem Einfluß von Schwere und Reibung.

(Die Abflusgeschwindigkeit ist unabhängig von der Masse des getroffenen Körpers, also auch unabhängig von der Stofftheorie fester Körper.)\*

Bei ungehinderter Ausbreitung auf der Fläche wird die Dicke der Flüssigkeitsschicht schließlich äußerst gering. Gewölbte Flächen vermögen mittels Adhäsion die Strahlausbreitung um etwa  $30^{\circ}$  von der Tangentialebene an der Auffallstelle abzulenken; bei Hohlflächen folgt die Ausbreitung der Fläche ganz, soweit es Schwere und Reibung der Flüssigkeit zulassen; Flüssigkeiten in Gefäßen nehmen den hydraulischen Druck hineinspritzender Strahlen wie normal getroffene Ebenen auf und übertragen ihn auf die Gefäßwand mit einer Mittelkraft; die Richtung des Strahles annimmt.

Es bezeichne

$P$  den hydraulischen Druck eines Flüssigkeitsstrahles in seiner Strahlrichtung gegen eine Fläche in kg,

$\alpha$  den Winkel, um den der Strahl an der Ablaufstelle abgelenkt wird,

$N$  den Normaldruck auf die Fläche in kg ( $N$  ist Mittelkraft von  $P$  und der zu  $P$  normalen Seitenkraft),

$F$  den Querschnitt des Strahles in  $qm$ ,

$v$  die absolute Ausflusgeschwindigkeit des Strahles in  $m/sk$ ,

$v_1$  die relative Abflusgeschwindigkeit von der Fläche in  $m/sk$ ,

$h = v^2 : 2g$  die dem  $v$  entsprechende Geschwindigkeitshöhe in  $m$ ,

$\pm c$  die Geschwindigkeitskomponente, mit der sich die getroffene Fläche in der Strahlrichtung fortbewegt,  $+c$  bei gleichgerichteter,  $-c$  bei entgegengesetzter Bewegungsrichtung zu der des Strahles in  $m/sk$ ,

\*) Bánki, Z. d. V. d. I. 1909 S. 1490.

- $z$  die absolute Abfluggeschwindigkeit, mit der die Flüssigkeit die getroffene Fläche verläßt, in m/sk,  
 $L$  die vom Strahl auf die Fläche übertragene Leistung (Arbeitsvermögen, Energie) von  $P$ ;  $L = Pc$  in m/sk,  
 $\zeta$  die Widerstandszahl für die Reibung der Flüssigkeit an der Fläche, bezogen auf die Geschwindigkeitshöhe  $v_1^2:2g$ ,  
 $\rho$  die Reibung in kg für 1 qm getroffene Fläche und für  $v^2:2g = 1$  ( $\rho = \lambda/4$ ; s. S. 293).  
 $\gamma$  das Gewicht eines cbm Flüssigkeit in kg,  $g = 9,81$  m/sk<sup>2</sup>,  
 $Q$  die Wassermenge, die die Fläche trifft, in cbm/sk; es ist  $Q = (v - c)F$ , wenn immer dieselbe Fläche vom nachfolgenden Strahl getroffen wird (also die Fläche mit der Mündung fest verbunden ist), dagegen  $Q = vF$ , wenn (wie bei Wasserrädern) die Ausflusmündung stillsteht und je eine neue Fläche, d. i. eine unterbrochene Reihe gleicher Flächen, sich dem Strahle entgegenstellt.

## 2. Allgemeiner Fall, Strahlelement, beliebige Fläche.

Jedes Element des Strahles  $F$  bildet ein Strahlsegment. Abb. 146 stelle ein solches dar, und seine Größe werde hier ebenfalls mit  $F$  bezeichnet. Dann gilt mit Rücksicht auf die Reibung an der getroffenen Fläche

$$L = Pc = \frac{Q\gamma}{2g} (v^2 - z^2 - \zeta v_1^2),$$

worin

$$z^2 = v_1^2 + c^2 + 2v_1c \cos \alpha.$$

Für die Auffallstelle gilt

$$(v - c)^2:2g = (1 + \zeta)v_1^2:2g.$$

also ist am Rande der Fläche  $v_1 = (v - c):\sqrt{1 + \zeta}$ .

$$\text{Es folgt } L = \frac{Q\gamma}{g} (v - c) c \left(1 - \frac{\cos \alpha}{\sqrt{1 + \zeta}}\right),$$

$$P = L : c = \frac{Q\gamma}{g} (v - c) \left(1 - \frac{\cos \alpha}{\sqrt{1 + \zeta}}\right),$$

$$N = P : \sin \alpha.$$

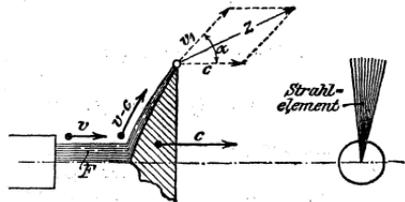
Bei kreisförmiger Ebene mit dem Radius  $r$  ist mit der Grundzahl  $e$

$$v_1 = (v - c) : e^{\rho r^2 \pi/2}, \text{ also } \sqrt{1 + \zeta} = e^{\rho r^2 \pi/2}.$$

Ist die Scheibe so groß und  $v$  so klein, daß die Strahlausbreitung den Rand der Fläche nicht erreicht, sondern auf einer Kreislinie der Fläche eine Brandungswelle bildet, so ist  $v_1 = 0$ ,  $\zeta = \infty$ , der Einfluss von  $\alpha = 0$ ,  $L$  und  $P$  so groß wie für  $\alpha = 90^\circ$ .

Im allgemeinen vermehrt die Reibung  $L$  und  $P$  bei positivem  $\alpha$ , umgekehrt bei negativem  $\alpha$ .

Abb. 146.



Ohne Berücksichtigung der Reibung wird die Höchstleistung durch den Flüssigkeitsdruck,

wenn  $Q = Fv$  (Wasserräder):  $L = \max$  für  $c = 0,5 v$ , also

$$L_{\max} = 0,5 Q h \gamma (1 - \cos \alpha) = 0,5 F h \gamma v (1 - \cos \alpha);$$

wenn  $Q = F(v - c)$  (Fläche mit Mündung fest verbunden):

$$L = \max \text{ für } c = \frac{v}{3}, \text{ also}$$

$$L_{\max} = 0,296 F h \gamma v (1 - \cos \alpha).$$

### 3. Besondere Flächen.

#### 1. Achsial getroffene Umdrehungsfläche.

Für die ganze Fläche gelten dieselben Formeln, wie unter 1. für das Strahlelement angegeben, wenn unter  $F$  der volle Strahlquerschnitt verstanden wird. Die Kräfte  $\delta P$  der einzelnen Elemente vereinigen sich zur Resultante  $P$ .

a) Normal getroffene Tellerscheibe (Ebene),  $\alpha = 90^\circ$ :

$$\text{Scheibengröße} \geq 9 F: P = \frac{Q \gamma}{g} (v - c); \quad L = \frac{Q \gamma}{g} (v - c) c.$$

$$\text{Wenn } Q = Fv: P = \frac{F \gamma}{g} (v - c) v; \quad L_{\max} = 0,5 F h \gamma v;$$

$$\text{wenn } Q = F(v - c): P = \frac{F \gamma}{g} (v - c)^2; \quad L_{\max} = 0,296 F h \gamma v;$$

$$\text{wenn } c = 0, Q \text{ beliebig: } P = \frac{F \gamma}{g} v^2 = 0,5 F h \gamma; \quad L = 0;$$

Scheibengröße =  $F$ : Der Strahl wird nur um  $\alpha = 60^\circ$  abgelenkt, daher  $\cos \alpha = 0,5$  einzusetzen.

Scheibengröße =  $2 F$ :  $\alpha \sim 75^\circ$ ,  $\cos \alpha \sim 0,75$ .

b) Halbkugelige Hohlfläche,  $\alpha = 180^\circ$ ,  $\cos \alpha = -1$ :

$$P = \frac{Q \gamma}{g} 2(v - c); \quad L = \frac{Q \gamma}{g} 2(v - c) c, \text{ wenn } \zeta = 0.$$

Für die bei der Tellerscheibe angegebenen besonderen Fälle werden  $P$  und  $L_{\max}$  für die Hohlfläche doppelt so groß wie dort. Derselbe Effekt wie bei der Hohlfläche wird durch leistenartige Umrahmung einer Tellerscheibe erreicht.

2. Unbegrenzte, schief getroffene Ebene. Trotzdem ein Teil des Strahles die Ebene in spitzem Winkel trifft, findet dennoch eine strahlenförmige Ausbreitung des Strahles nach allen Richtungen hin statt; nur ist die Länge der Strahlen an der Seite des spitzen Winkels geringer.

Weisbach findet mittels gedachter Zerlegung des Strahles in vier Segmente, von denen im Mittel für zwei  $\alpha = 90^\circ$ , für das dritte  $\alpha =$  kleinster Spitzwinkel  $\alpha_{\min}$ , für das vierte  $\alpha = 180 - \alpha_{\min}$  gesetzt werden kann ( $\zeta = 0$  gesetzt).

$$P \sim \frac{Q \gamma}{g} (v - c) \frac{2 \sin^2 \alpha_{\min}}{1 + \sin^2 \alpha_{\min}}; \quad L = P c.$$

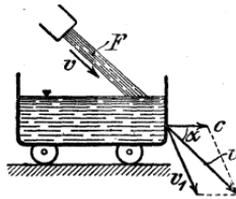
3. Kanalartig begrenzte Ebene (benetzter Kanalquerschnitt  $F$ ):  
Abflufs nach einer Richtung (Abb. 147):

$P$ ,  $N$  und  $L$  wie unter 1. angegeben.

Abb. 147.



Abb. 149.



Abflufs nach zwei  
entgegengesetzten  
Richtungen (Abb. 148):

$$P = \frac{Q\gamma}{g}(v-c)\sin^2\alpha;$$

$$L = Pc, (\zeta = 0 \text{ gesetzt});$$

$$N = P \sin \alpha.$$

4. Vom Strahl ge-  
troffene Flüssigkeit  
im Gefäfs.

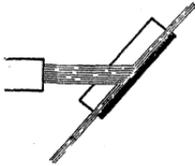


Abb. 148.

Die Flüssigkeit befindet sich in einem Gefäfs,  
das sich durch den Druck des Strahles mit der  
gleichmäfsigen Geschwindigkeit  $c$  fortbewegt,  
Abb. 149.

Hier gelten nicht mehr die unter 1. angegebenen  
Beziehungen für das Strahlelement.

$$L = \frac{Q\gamma}{2g}(v^2 - v_1^2 - c^2) = \frac{Q\gamma}{g}c(v \cos \alpha - c)$$

$$L = \max \text{ für } c = 0,5 v \cos \alpha,$$

somit

$$L_{\max} = 0,5 Qh\gamma \cos^2 \alpha;$$

$$P = \frac{L}{c} = \frac{Q\gamma}{g}(v \cos \alpha - c).$$

Wenn  $Q = Fv$  (stillstehende Mündung, ununterbrochene Folge von  
gefüllten Gefäfsen):

$$P = \frac{F\gamma}{g}v(v \cos \alpha - c); \quad L = Pc; \quad L_{\max} = 0,5 Fh\gamma v \cos^2 \alpha.$$

Ist zugleich  $\alpha = 0$  (der Strahl fließt unter Wasser parallel zu  $c$  aus),

$$\text{so wird} \quad P = \frac{F\gamma}{g}v(v - c); \quad L_{\max} = 0,5 Fh\gamma v;$$

ist außerdem  $c = 0$ , so wird  $P = 2 Fh\gamma$ ;  $L = 0$ ; dies sind dieselben  
Werte wie bei der tellerförmigen Scheibe für  $\alpha = 90^\circ$ .

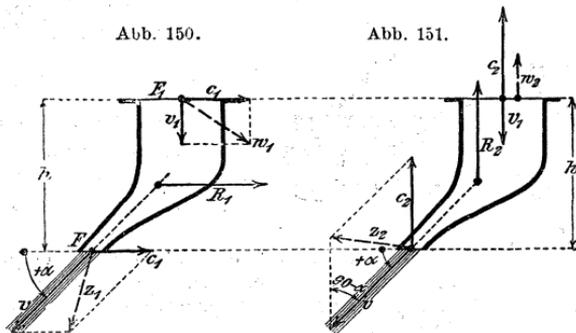
Hiernach drückt der über oder unter Wasser ausfließende, auf  
Wasser aufschlagende Strahl in seiner Ausflufsrichtung mit derselben  
Kraft wie auf eine normal zu ihm stehende Tellerscheibe.

### b) Rückdruck gegen das Ausflufsgefäfs (Reaktion).

Vor Beginn des Ausflusses wird der Rückdruck durch den Druck  
auf die verschlossene Ausflufsöffnung im Gleichgewicht gehalten.  
Während des Ausflusses tritt der Rückdruck als frei gewordene Kraft

auf. Die Achse des ausfließenden Strahles gibt rückwärts gerichtet Lage und Richtung des Rückdruckes an.

Die Größe des Rückdruckes ermittelt sich am einfachsten als Mittelkraft aus seiner wagerechten und seiner lotrechten Komponente.



Es bedeute (vgl. Abb. 150 u. 151)

$R$  die Größe des Rückdruckes in kg,

$R_1$  dessen wagerechte Komponente,

$R_2$  dessen lotrechte Komponente,

$F$  den Querschnitt des ausfließenden Strahles in  $qm$ ,

$v$  die relative Ausfließgeschwindigkeit desselben in  $m/sk$ ,

$\alpha$  den Winkel des Strahles mit der Wagerechten,

$F_1$  den Einlaufquerschnitt des Gefäßes in  $qm$ ,

$w_1$  die relative Einlaufgeschwindigkeit daselbst in  $m/sk$ ,

$Q$  die Ausflufsmenge in  $cbm/sk$ ,

$\gamma$  das Einheitsgewicht der Flüssigkeit in  $kg/cbm$ ,

$h$  den lotrechten Abstand der Querschnitte  $F_1$  und  $F_2$  in  $m$ ,

$g$  die Beschleunigung durch die Schwere ( $= 9,81 m/sk^2$ ),

$c_1$  bzw.  $c_2$  die Komponenten der zugelassenen rückläufigen Geschwindigkeit des Gefäßes in  $m/sk$ ,

$w_1$  bzw.  $w_2$  die Komponenten der absoluten Einlaufgeschwindigkeit bei  $F_1$  in  $m/sk$ ,

$z_1$  bzw.  $z_2$  die Komponenten der absoluten Auslaufgeschwindigkeit bei  $F$  in  $m/sk$ ,

$L_1$  bzw.  $L_2$  die von  $R_1$  bzw.  $R_2$  geleisteten Arbeitsstärken in  $mkg/sk$ ,

wobei

Index „1“ für wagerechte Rückwärtsbewegung des Gefäßes infolge Wirkung von  $R_1$ , Abb. 150,

Index „2“ für lotrechte Aufwärtsbewegung infolge Wirkung von  $R_2$ , Abb. 151 gültig ist.

Für Abb. 150 gilt

$$L_1 = Q \gamma \left( \frac{w_1^2}{2g} + h - \frac{z_1^2}{2g} \right) = Q \gamma \left( \frac{v_1^2 - v^2 - 2cv \cos \alpha}{2g} + h \right);$$

da  $w_1^2 = v_1^2 + c_1^2$ ,  $z_1^2 = v^2 + c_1^2 - 2cv \cos \alpha$ ,

$$Q = Fv, \quad Fv = F_1 v_1, \quad \frac{v^2}{2g} = h + \frac{r_1^2}{2g} = \frac{h}{1 - (F:F_1)^2},$$

so ist

$$L_1 = \frac{Q\gamma}{g} c_1 v \cos \alpha; \quad R_1 = \frac{L_1}{c_1} = \frac{Q\gamma}{g} \cdot v \cos \alpha = 2F\gamma \cdot \frac{v^2}{2g} \cos \alpha.$$

Für Abb. 151 gilt

$$L_2 = Q\gamma \left( \frac{w_2^2}{2g} + h - \frac{z_2^2}{2g} \right) = Q\gamma \left( \frac{r_1^2 - 2v_1 c_2 - v^2 - 2c_2 v \sin \alpha}{2g} + h \right);$$

da  $w_2 = c_2 - v_1, \quad z_2^2 = v^2 + c_2^2 - 2c_2 v \sin \alpha,$

$$Q = Fv, \quad Fv = F_1 v_1, \quad \frac{v^2}{2g} = \frac{h}{1 - (F:F_1)^2},$$

so ist

$$L_2 = \frac{Q\gamma}{g} c_2 (v \sin \alpha - v_1);$$

$$R_2 = \frac{L_2}{c_2} = \frac{Q\gamma}{g} (v \sin \alpha - v_1) = 2F\gamma \frac{v^2}{2g} \left( \sin \alpha - \frac{F}{F_1} \right).$$

Schließlich

$$R = \sqrt{R_1^2 + R_2^2} = 2F\gamma \frac{v^2}{2g} \sqrt{\cos^2 \alpha + \left( \sin \alpha - \frac{F}{F_1} \right)^2}.$$

Besondere Fälle:

$F$  klein gegen  $F_1$ , also  $v^2 : 2g = h$ :

$$R_1 = 2F\gamma h \cos \alpha; \quad R_2 = 2F\gamma h \sin \alpha; \quad R = 2F\gamma h.$$

$\alpha = +90^\circ$ , Ausfluß lotrecht abwärts:

$$R_1 = 0; \quad R_2 = 2F\gamma \frac{v^2}{2g} \left( 1 - \frac{F}{F_1} \right); \quad R = R_2.$$

$\alpha = 0^\circ$ , Ausfluß wagerecht:

$$R_1 = 2F\gamma \frac{v^2}{2g} = 2Fh\gamma; \quad R_2 = 0; \quad R = R_1.$$

$\alpha = -90^\circ$ , Ausfluß lotrecht aufwärts:

$$R_1 = 0; \quad R_2 = -2F\gamma \frac{v^2}{2g} \left( 1 + \frac{F}{F_1} \right); \quad R = R_2,$$

und ist zugleich  $F = F_1$ , so wird  $R_2$  ein Maximum  $= 4Fh\gamma$ .

## H. Widerstand von Flüssigkeiten gegen bewegte Flächen und Körper.

Es bezeichnet

$f$  die Projektion der benetzten Flächen des Körpers auf eine Ebene normal zur Fahrtrichtung, in qm,

$O$  die gesamte benetzte Fläche des Körpers in qm,

$l$  die Länge dieser Fläche am Wasserspiegel in m,

$b$  die Breite derselben am Wasserspiegel in m,

- $t$  die größte Tauchtiefe des Körpers in m,  
 $l_i$  die ideale Länge, aus  $O$ :  $(b + t)$  errechnet, in m,  
 $F$  den Querschnitt des Fahrwassers in qm, normal zur Fahrtrichtung gemessen,  
 $U$  den benetzten Umfang von  $F$  in m,  
 $K$  die Fläche des Fahrwasserbettes in qm, die von der vorn vom Schiff verdrängten und nach dem Hinterschiff rückströmenden Flüssigkeit bestrichen wird,  $K = Ul_i$ ,  
 $B$  die Breite des Fahrwassers in m,  
 $T$  die Tiefe " " "  
 $n$  das Verhältnis  $F : f$ , " "  
 $v$  die relative Fahrgeschwindigkeit des Körpers in m/sk gegenüber der Stromgeschwindigkeit des Fahrwassers vor Eintritt des Körpers in dasselbe (Schlepper erzeugen im allgemeinen Stromgeschwindigkeit für das geschleppte Schiff),  
 $v_k$  eine kritische Geschwindigkeit in m/sk, bei der ein Wellenwiderstand seinen Höchstwert erreicht,  
 $\alpha_1$  den Winkel am Vorderteil des Körpers zwischen Fahrtrichtung und Vorderfläche (halber Keilwinkel),  
 $\alpha_2$  den dem Winkel  $\alpha_1$  entsprechenden Winkel an der Rückenfläche des Körpers,  
 $W$  den Gesamtwiderstand in kg, den die Flüssigkeit der Bewegung des eingetauchten oder untergetauchten Körpers in der Fahrtrichtung entgegensetzt,  
 $W_1, W_2, W_3, W_4$  Einzelwiderstände;  $W_1, W_2$  und  $W_3$  s. nachstehende Angabe zu  $q_1, q_2$  und  $q_3$ ;  $W_4$  bedeutet den Wellenwiderstand,  
 $q_1$  die Widerstandszahl der Geschwindigkeitshöhe  $v_1^2 : 2g$ , die dem Verdrängungswiderstand  $W_1$  entspricht,  
 $q_2$  die Reibungszahl der Geschwindigkeitshöhe  $v_2^2 : 2g$ , die dem Reibungswiderstand  $W_2$  an den benetzten Flächen des Körpers entspricht,  
 $q_3$  die Reibungszahl der Geschwindigkeitshöhe  $v_3^2 : 2g$ , die dem Reibungswiderstand  $W_3$  am Bett des Fahrwassers entspricht,  
 $\gamma$  und  $g$  das Einheitsgewicht der Flüssigkeit in kg/cbm bzw. die Beschleunigung durch die Schwere ( $= 9,18 \text{ m/sk}^2$ ).

### 1. Einzelwiderstände.

Der Gesamtwiderstand  $W$ , den der bewegte Körper erfährt, setzt sich aus folgenden Einzelwiderständen  $W_1, W_2, W_3$  und  $W_4$  zusammen:

a) **Widerstand  $W_1$  gegen die Verdrängung** der Flüssigkeit vor dem Körper und die Ableitung derselben nach dem am Körperende frei werdenden Raume. Hier wird die Geschwindigkeitshöhe der Flüssigkeit teils in Druckhöhe umgesetzt, die die Hinterfläche des Körpers nach vorn drückt, teils wird sie in Wirbeln vernichtet;

$$W_1 = q_1 \gamma f \frac{v_1^2}{2g} = \sim 51 q_1 f v_1^2;$$

im unbegrenzten Fahrwasser ist  $v_1 = v$ ,

„ begrenzten „ „ „  $v_1 = \frac{n}{n-1} v$ .

(Es zeigt sich aus Versuchen von de Mas mit kastenförmigem Kahn, dafs schon am Kopf dieses Körpers die relative Geschwindigkeit wie an der Seitenwand auftreten mufs.)

b) **Reibungswiderstand  $W_2$  an der benezten Körperfläche  $O$ ,** an welcher die Flüssigkeit mit der relativen Geschwindigkeit  $v_2$  entlang gleitet;

$$W_2 = \rho_2 \gamma O \frac{v_2^2}{2g} = \sim 51 \rho_2 O v_2^2 \\ = 51 \rho_2 l_i (b + 2t);$$

im unbegrenzten Fahrwasser ist  $v_2 = v$ ,

„ begrenzten „ „  $v_2 = \frac{n}{n-1} v$ .

c) **Reibungswiderstand  $W_3$  an den Begrenzungsflächen des Fahrwassers,** an denen die Flüssigkeit vom Vorderteil zum Körperende mit der absoluten Geschwindigkeit  $v_3$  entlang gleitet;

$$W_3 = \rho_3 \gamma K \frac{v_3^2}{2g} = \sim 51 \rho_3 K v_3^2;$$

im unbegrenzten Fahrwasser ist  $v_3 = 0$ ,

„ begrenzten „ „  $v_3 = \frac{1}{n-1} v$ .

d) **Wellenwiderstand  $W_4$ ,** der von der gegenseitigen Einwirkung (Durchdringung) von zwei Wellen herrührt, von denen die eine am Bug bei der Verdrängung des Vorderwassers, die andere durch irgendwelche Erregung des Fahrwassers entsteht.

Die Geschwindigkeit der Bugwelle gegenüber der Stromgeschwindigkeit im Fahrwasser ist gleich der relativen Fahrgeschwindigkeit  $v$ .

Die Geschwindigkeit  $v_k$  der dem Fahrwasser eigenen Welle — gegenüber der Stromgeschwindigkeit — ist

bei sonst ruhigem, erst durch die Bugwelle bewegtem Fahrwasser:

$$v_k = \sqrt{gT} = 3,12 \sqrt{T}, \text{ und}$$

bei bewegtem Fahrwasser, dessen bereits vorhandene Wellen die Länge  $\lambda$  besitzen:

$$v_k = \sqrt{g\lambda : 2\pi} = 1,25 \sqrt{\lambda}.$$

Der Wellenwiderstand  $W_4$  wird am grössten, wenn die relative Fahrgeschwindigkeit  $v = v_k$  wird, also

bei  $T$  in m = 0,3 0,6 1 2 2,5 3 5 10 15 25 40,  
wenn  $v$  in m  $\sim$  1,7 2,4 3,1 4,4 4,95 5,4 7,0 9,8 12 15 20.

(Geschwindigkeit in Seemeilen = 1,852  $v$  in m.)

Die Versuche\*) ergeben etwas kleinere Werte von  $v$ .

\*) Vrgl. Paulus, Z. d. V. d. I. 1904, S. 1872.

Die Größe des Höchstwertes ist noch nicht ausreichend erforscht; sie erhöht in der untenstehenden Formel  $W = v^m W_{v=1}$  den Exponenten  $m$  etwa bis auf folgende Werte:

Wenn $l : T =$	10	8	6	4	2	1
$m_{\max} \sim$	4,0	3,7	3,3	2,9	2,6	2,2.

Die Praxis erstrebt zur Ausschaltung des Wellenwiderstandes bei Probefahrten  $T \geq l$ .

Die gegenseitige Einwirkung der beiden oben erwähnten Wellen läßt  $W_4$  negativ werden mit einem größten Einfluß bei  $v \sim 1,5 v_k$ ; sonach kann bei gleicher Geschwindigkeit der Gesamt-widerstand kleiner auf der kleineren Wassertiefe ausfallen, sobald für diese  $v_k$  überschritten ist.

Der Einfluß des Wellenwiderstandes bleibt unmerklich, also ist  $W_4 \sim 0$  zu setzen, wenn die folgenden relativen Fahrgeschwindigkeiten nicht überschritten werden:

bei $T$ in m $\equiv$	0,5	1,0	2	3	4	5	7	10	15	20	25	30
$v$ in m $\equiv$	1,0	2,0	3,3	4,3	5,0	6,0	6,5	7,5	8,5	9,2	10,5	12
$v$ in Seem. $\equiv$	1,9	3,9	6,3	8,3	9,7	11,7	12,6	14,6	16,5	17,9	20,4	23,3

Ueber anderweitige Berechnung des Wellenwiderstandes s. Lorenz, Z. d. V. d. I. 1907 S. 1824.

## 2. Gesamtwiderstand.

Der Gesamtwiderstand des bewegten Körpers ist somit

$$W = W_1 + W_2 + W_3 + W_4$$

$$= \left[ (\rho_1 f + \rho_2 O) \left( \frac{n}{n-1} \right)^2 + \rho_3 K \left( \frac{1}{n-1} \right)^2 \right] \frac{\gamma}{2g} v^2 + W_4.$$

Setzt man noch mit der ideellen Länge  $l_i$

- $O = (b + 2t) l_i$  für unbegrenztes Fahrwasser,
- $\rho_2 O = (\rho_2' b + 2 \rho_2'' t) l_i$  für begrenztes Fahrwasser, worin
- $\rho_2'$  die Reibungszahl für den Schiffsboden,
- $\rho_2''$  „ die Schiffseitenflächen bedeutet,
- $K = [b + (U - b)] l_i$ , also für begrenztes Fahrwasser,
- $\rho_3 K = [\rho_3' b + \rho_3'' (U - b)] l_i$ , worin
- $\rho_3'$  die Reibungszahl des Fahrwassergrundes unter dem Schiffsboden,
- $\rho_3''$  die Reibungszahl der übrigen vom Rückstrom bestrichenen Fläche des Fahrwasserbettes darstellt, so ist

**für begrenztes Fahrwasser:**

$$W = \left\{ \rho_1 f + (\rho_2' b + 2 \rho_2'' t) l_i + [\rho_3' b + \rho_3'' (U - b)] \frac{l_i}{n^2} \right\} \left( \frac{nv}{n-1} \right)^2 \frac{\gamma}{2g} + W_4,$$

**für unbegrenztes Fahrwasser, für welches**

$$1 : (n-1)^2 \sim 0, \quad n^2 : (n-1)^2 \sim 1, \quad \rho_2' \sim \rho_2'' :$$

$$W = [\rho_1 f + \rho_2 (b + 2t) l_i] \frac{\gamma}{2g} v^2 + W_4,$$

oder mit dem Völligkeitsgrad  $\beta$  für den größten Schiffsquerschnitt,  $\beta = \frac{f}{bt}$  gesetzt,

$$W = \left[ \varphi_1 \beta t + \varphi_2 \left( 1 + 2 \frac{t}{b} \right) l_i \right] b \frac{\gamma}{2g} v^2 + W_4.$$

Werte  $\beta$  und  $\frac{t}{b}$  vgl. II. Bd. Abschn. Schiffbau I. A u. C.

Werte  $l_i$ ,  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$ ,  $\varphi_3$  und  $n$  vgl. folg. Abschnitt 4.

Wenn  $v$ ,  $T$  und  $l$  derart bemessen sind, dafs nach den Angaben für die Einzelwiderstände für alle in Betracht zu ziehenden Geschwindigkeiten  $W_4 = 0$  gesetzt werden kann, so ist **nach häufiger Schreibweise**

$$W = kf \left( \frac{nv}{n-1} \right)^2,$$

worin  $k$  oft irrtümlich als Konstante vorausgesetzt wird.

Denn  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  und  $\varphi_3$  ändern sich mit den relativen Geschwindigkeiten  $nv:(n-1)$  bzw.  $v:(n-1)$  und mit dem Abstände der sich gegenüberliegenden Reibflächen, z. B. für den Schiffsboden mit dem Abstände  $T-t$ , für die Seitenflächen mit der Entfernung vom Ufer bzw. der Abweichung der Schiffsachse von der Achse des Fahrwassers, weshalb der Wert  $k$  weder für ein beliebiges  $v$ , noch für  $v=1$  m oder für  $nv:(n-1)=1$  m konstant wird.

Nur für unbegrenztes Fahrwasser, bei dem sich  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  in fast gleicher Weise von  $v$  abhängig zeigen, kann — soweit  $W_4=0$  — der Wert  $k$  für  $v=1$  m konstant gesetzt werden. Es ist dann

$$W = v^m W_{v=1},$$

worin  $m$  im allgemeinen einen mit  $v$  zunehmenden, der Zahl 2 zustrebenden Exponenten bedeutet. Wird  $m$  durch Versuch etwa größer als 2 festgestellt, so weist dies bei unbegrenztem Fahrwasser auf vorhandenem Wellenwiderstand hin, durch den  $m$  nach den Angaben für  $W_4$  bis etwa zur Zahl 5 anwachsen kann. (Vgl. Angaben über den Exponenten  $m$  im folg. Abschn.)

Setzt man auch für begrenztes Fahrwasser  $W = v^m W_{v=1}$ , so nimmt  $m$  mit wachsendem  $v$  unbegrenzt zu. (Für neuere Kanäle wird für  $v=0,5, 1,0, 2,0$  der Exponent  $m$  etwa 1,6, 2 bis 2,25, 2,7 bis 3,0.)

Für die Widerstandsarbeit  $Wv$  unter Zuschlag der Widerstände für Maschine und Treibapparat eines Schiffes schreibt sich für die aufzuwendenden Pferdestärken  $N$ , und mit dem Exponenten  $m_1$ :

$$N = v^{m_1} N_{v=1},$$

womit ein Vergleich ähnlicher Schiffe im allgemeinen einfacher wird und oft allein möglich ist.

### 3. Newtons Aehnlichkeitsgesetz (Modellregel).

Für zwei geometrisch ähnliche Körper mit dem Längenverhältnis  $\alpha$ , deren Zeichen je den Index  $x$  bzw.  $y$  führen, und deren verdrängte Flüssigkeitsräume in cbm mit  $D_x$  bzw.  $D_y$  bezeichnet werden, gilt, wenn für beide Körper  $W_4=0$ , wenn gleiche  $\gamma$ ,  $\varphi$ ,  $\varphi_2$ ,  $\varphi_3$  bei

gleichen Exponenten  $m$  bzw.  $m_1$ , und wenn ähnliche Fahrwasserverhältnisse vorausgesetzt werden können:

$$\frac{W_x}{W_y} = \alpha^3 \left( \frac{v_x}{v_y} \right)^2;$$

wenn außerdem  $v_x : v_y = \sqrt{\alpha}$ , so wird

$$\frac{W_x}{W_y} = \alpha^3 = \left( \frac{l_x}{l_y} \right)^3.$$

Bezeichnen in letztem Falle  $N_x$  und  $N_y$  die Arbeitsleistungen für beide Körper, so ist noch

$$\frac{N_x}{N_y} = \alpha^3 \frac{v_x}{v_y} = \alpha^{3,5} = \frac{D_x}{D_y} \sqrt{\frac{l_x}{l_y}}.$$

Da aber weder  $\varphi$ ,  $\varrho_2$  und  $\varrho_3$ , noch  $m$  für alle Geschwindigkeiten und absoluten Größen konstant bleibt, so ergeben obige Beziehungen im allgemeinen nur brauchbare Werte für  $\alpha \sim 1$ . Engels findet bei Beachtung der Verschiedenheit für  $\varrho_2$ , und bei Erhaltung der Aehnlichkeit auch für das Fahrwasser, noch gut übereinstimmende Werte für  $\alpha = 16$ ; vrgl. Z. f. B. 1898 S. 655; bei der größeren Geschwindigkeit des von Engels verwendeten Modells beginnt bereits der Einfluss von  $W_4$ . Auch bei lotrecht zur Stromrichtung stehenden Tafeln findet Engels und Gebers das Gesetz bestätigt, wenn die Aehnlichkeit auch auf die Tauchungsverhältnisse ausgedehnt wird; vrgl. Zeitschr. Schiffbau 1908 S. 201.

#### 4. Einzelwerte in den Gleichungen für die Widerstände.

##### Werte $l_i$ .

$$\text{Ideelle Schiffslänge } l_i = \frac{O}{b + 2t}.$$

Für eingetauchte Schiffskörper (nicht auch für untergetauchte Körper oder Tafeln geltend) ist nach Denny (vrgl. Abschn. Schiffbau II. Bd., Abschn. 1. P. d.)  $O = lb \frac{D}{lf} + 1,7lt$ . Wird hierin der Völligkeitsgrad  $\frac{D}{lf}$  (nach I. A. dieses Abschn.)  $= \varphi$  gesetzt, so wird

$$l_i = \frac{\varphi + 1,7 \frac{t}{b}}{1 + 2 \frac{t}{b}} l;$$

Werte  $\varphi$  und  $\frac{t}{b}$  s. Tabelle zu I. C. des Abschn. Schiffbau. (Dieses  $\varphi$  werde nicht verwechselt mit dem Beiwert  $\varphi_1$  des Verdrängungswiderstandes  $W_1$ .)

Werte  $l_i : l$ :

$$\text{Kastenprahm mit vollen Enden} \dots \dots \dots 1 + \frac{2}{\left(1 + \frac{t}{b}\right) \frac{l}{t}}$$

Kastenprahm mit vorn eingezogenen Seitenwänden . . .	~ 1,0
Kanalkahn mit löffelfartigen Enden . . . . .	~ 0,85
Gewöhnlicher Passagier- oder Fracht-Seedampfer, Segel- schiff für Frachten, seetüchtiger Kanalkahn . . . .	~ 0,80
Schnell- und Postdampfer, Linienschiff, Lotsendampfer, Kanalraddampfer . . . . .	~ 0,75
Kreuzer, Kanonenboot, Barkassen, kleine Dampfjachten, Flusdampfer für Passagiere, Kanal-Schraubendampfer	~ 0,70
Torpedoboot, große Dampfjacht . . . . .	~ 0,68.

**Werte  $\varphi_1$ .**

a) **Winkel  $\alpha_1 = \alpha_2 = 90^\circ$ .** Ueber ältere Versuche vrgl. Weisbachs Mechanik, über neuere Versuche von Engels und Gebers vrgl. Zeitschr. Schiffbau 1908 S. 201.

Versuche mit Tafeln.

Die Versuchsergebnisse von Engels und Gebers trennen zwar nicht den Reibungswiderstand  $W_2$  vom Verdrängungswiderstand  $W_1$ . Da aber bei Tafeln  $W_2 \ll \varrho_2 2 f \frac{\gamma}{2g} v^2$ , (die relative Geschwindigkeit ist auf der Rückenfläche voraussichtlich  $< v$ ) und darin  $\varrho_2 \ll 0,006$ , wogegen  $\varphi \gg 1$ , so ist  $W_2 \ll 0,01 W_1$  und daher im allgemeinen  $W_2$  gegen  $W_1$  zu vernachlässigen.

Für die Versuche war  $f = 0,01$  bis  $0,09$  qm,  $v = 0,5$  bis  $5$  m,  $W_3 = W_4 = 0$ .

$\varphi_1$  und  $W_1$  werden Mindestwerte, wenn die Tauchtiefe  $t_1$  der untergetauchten Tafeloberkante  $= \sqrt{f}$ ; bei kleinerer und bei größerer Tauchtiefe  $t$  nehmen  $\varphi$  und  $W_1$  allmählich zu.

Mindestwerte bei  $t_1 = \sqrt{f}$  sind:

$$\varphi_1 = 1 + \frac{0,291}{v_1} = k_1 : \frac{\gamma}{2g};$$

$$k_1 = 51 + \frac{14,84}{v_1}; \text{ für } v_1 = 1 \text{ wird } k_1 = 65,84.$$

Wird  $W_1 = v m W_{v=1} = k_1 f v_1^3$  gesetzt, so ist  $W_1 = 65,84 f v m$ ; dies ergibt für

$v = 0,5$	1	2	3	4	5	10	20 m
$\varphi_1 = 1,58$	1,29	1,147	1,10	1,07	1,06	1,03	1,014
$m = 1,70$	1,78	1,83	1,85	1,87	1,88	1,90	1,915
$v m = 0,306$	1,00	3,56	7,68	13,36	20,6	79,7	315
$W_1 : f = 20,1$	65,8	235	506	880	1356	5248	20 696

Versuchsergebnisse mit nur teilweise eingetauchten Tafeln, also ohne Ueberströmung der Tafeloberkante, liegen noch nicht vor.

Es ist anzunehmen, daß  $\varphi$  sich mit der Annäherung der unteren Tafelkanten an das Bett des Fahrwassers wesentlich vergrößert.

### Versuche mit parallelepipedischen, scharfkantigen Körpern.

Der von der Vorderfläche (mit  $\alpha_1 = 90^\circ$ ) abgleitende Strom wird bogenförmig zum Boden und zur Seitenwand (mit  $\alpha = 0^\circ$ ) abgelenkt und erreicht dieselben erst in einem Abstände von der Stirnfläche  $= 2$  bis  $3 b$ . Ist die Schiffslänge  $l$  mit diesem Abstände gleich, so wird der Druck des Umlaufstromes auf die Hinterfläche ein Höchstwert und die Relativgeschwindigkeit  $v$  an der Seitenwand und am Boden so gering, daß bei dieser Länge  $\varphi_1$  um etwa 0,27 kleiner ausfällt als bei  $l=0$ ; erst bei  $l=5 b$  bis  $15 b$ , je nach der Geschwindigkeit, wird — nach den Versuchen von Engels und Gebers (mit ganz untergetauchten Körpern), durch Vermehrung der Reibung an der größeren Oberfläche — der Widerstand der Tafel mit  $l=0$  wieder erreicht.

Das Fehlen paralleler Strömung an den Seitenwänden bei kurzen Körpern von  $l \geq 2\frac{1}{2} b$  beeinträchtigt die Steuerfähigkeit; geringfügige Abrundung der Kanten dürfte nach den Versuchen mit abgerundeten Einlaufkanten an Rohrleitungen den Wert  $\varphi_1$  verringern und die Steuerfähigkeit wesentlich verbessern.

Für den kastenförmigen französischen Kahn (péniche) von  $l \sim 34$  m,  $b = 5$  m,  $t = 1,6$  m, mit vorn abgerundeter Bodenkante, findet sich aus Versuchen von de Mas; in unbegrenztem Fahrwasser, wenn  $\varrho_2 = 0,16$  gesetzt wird, der Wert  $\varphi_1 \sim 0,62$ , wenn  $\varrho_2 = 0,20$ , der Wert  $\varphi_1 \sim 0,60$ .

Wie oben bei den Angaben für Tafeln erwähnt, scheint sich  $\varphi_1$  nach Versuchen Haacks wesentlich mit der Tauchtiefe des Körpers zu vergrößern, wenn sich zugleich der Boden des Körpers dem Bett des Fahrwassers wesentlich nähert.

b) **Winkel  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$ , von  $90^\circ$  verschieden**, Flächen eben und scharfkantig. Vrgl. Versuche von Fink mit kleinen Tafeln und scharfkantigen Körpern aus Zinkblech oder Holz bei  $v \sim 0,3$  bis  $1,0$  m; Civiling. 1892, 1893, 1894. Reibungswiderstand  $W_2$  ist in Abzug gebracht. Es ist nur das Verhältnis des Widerstandswertes  $\varphi_1$  bei beliebigem Winkel zu dem bei  $\alpha_1$  bzw.  $\alpha_2 = 90^\circ$  ermittelt; letzterer ist im folgenden mit  $\varphi_{90}$  bezeichnet.

1. Untergetauchte rechteckige Tafel, lotrecht und isoliert stehend, Projektion auf die Fahrrichtung  $= f$ , also Größe der Tafel  $f$ :  $\sin \alpha_1$ ;  $\alpha_1 = \alpha_2$ :

$\alpha_1 = 0^\circ$  bis  $30^\circ$ ,  $\varphi_1 = 1,8 \sin \alpha_1 \varphi_{90}^*$ ; der Strom legt sich an die Rückwand in parallelen Schichten zur Tafelfläche an;

$\alpha_1 = 50^\circ$  bis  $90^\circ$ ,  $\varphi_1 = \sqrt{\sin \alpha_1} \varphi_{90}$ ; an der Rückenfläche treten Wirbel auf;

$\alpha_1 = 30^\circ$  bis  $50^\circ$ ,  $\varphi_1$  zeigt bei Aufzeichnung seiner Werte  $\sim$  förmige Uebergangslinie zwischen  $30^\circ$  und  $50^\circ$ .

2. Untergetauchte Keilfläche, aus nur zwei lotrechten, gleich großen und rechteckigen Tafeln bestehend:

$\alpha_1 = 0^\circ$  bis  $90^\circ$ ,  $\varphi_1 = \sin \alpha_1 \varphi_{90}$ ; zwischen den beiden Rückenflächen verbleibt ein ruhender Wasserkörper;

\*) Versuche Eiffel's mit in der Luft fallenden Tafeln ergab  $\varphi_1 = 2,0 \sin \alpha_1 \varphi_{90}$ .

$\alpha_1 = 150^\circ$  bis  $180^\circ$ ,  $\varphi_1 \sim \varphi_{90^\circ}$ ; der Wasserkörper zwischen den Vorderflächen wirkt wie eine Ebene mit  $\alpha_1 = 90^\circ$ ;

$\alpha_1 = 90^\circ$  bis  $150^\circ$ ,  $\varphi_1$  zeigt bei Aufzeichnung seiner Werte eine höckerförmige Uebergangslinie mit dem Höchstwert  $\sim 1,2 \varphi_{90^\circ}$  bei  $120$  bis  $130^\circ$ ; hierbei wirksamste Ausnutzung der Breite von Wasserschaukeln zu erwarten.

3. Untergetauchter Keilkörper, Boden und Decke wagerecht, Schneide und Rückenebene lotrecht, letztere normal zur Fahrriichtung:

$$\alpha_1 = 0^\circ \text{ bis } 90^\circ, \varphi_1 = \sin \alpha_1 \varphi_{90^\circ}$$

4. Eingetauchter Keilkörper, mit Parallelepipeton als Hinterkörper, dessen Länge = vierfacher Breite, Keilschneide lotrecht:

$$\alpha_1 = 0^\circ \text{ bis } 53^\circ, \varphi_1 \sim 0,8 \sin \alpha_1 \varphi_{90^\circ}$$

$$\alpha_1 = 53^\circ \text{ bis } 90^\circ, \varphi_1 \sim \sin^2 \alpha_1 \varphi_{90^\circ}$$

5. Eingetauchter Keilkörper mit schlankem, keilförmigem Hinterkörper mit  $\alpha_2 = 6^\circ$ , beide Schneiden lotrecht:

$$\alpha_1 = 0^\circ \text{ bis } 60^\circ, \varphi_1 = \sin \alpha_1 \varphi_{90^\circ}$$

$$\alpha_1 = 75^\circ \text{ bis } 90^\circ, \varphi_1 = \sin^2 \alpha_1 \varphi_{90^\circ}$$

$$\alpha_1 = 60^\circ \text{ bis } 75^\circ, \varphi_1 \text{ ergibt bei Aufzeichnung eine wenig geschwungene Uebergangslinie zwischen } 60^\circ \text{ und } 75^\circ.$$

Der schlanke Hinterkörper vergrößert hiernach unerwartet den Verdrängungswiderstand bei  $\alpha_1 = 0^\circ$  bis  $60^\circ$  gegenüber dem unter 4. bezeichneten stumpfen Hinterkörper; bei diesem ist somit ein Rückstofs gegen die Rückenfläche anzunehmen.

6. Eingetauchter Keilkörper, Schneide wagerecht über dem Wasserspiegel, mit Parallelepipeton als Hinterkörper:

$$\alpha_1 = 0^\circ \text{ bis } 90^\circ, \varphi_1 = (1 - \cos \alpha) \varphi_{90^\circ};$$

dies ist derselbe Wert wie für den hydraulischen Druck von frei ausfließenden Strahlen. (Vgl. S. 319,  $\zeta = 0$  gesetzt.)

7. Eingetauchtes Parallelepipeton als Vorderkörper ( $l = 4b$ ) mit keilförmigem Hinterkörper, dessen lotrechte Schneide den Winkel  $\alpha_2$  besitzt: (Der Wert  $\varphi_1$  schließt den Wert  $W_2$  mit ein.)

$$\alpha_2 = 6^\circ \quad 12^\circ \quad 18^\circ \quad 24^\circ \quad 30^\circ \quad 36^\circ \quad 42^\circ \quad 54^\circ \quad 90^\circ$$

$$\varphi_1 \sim 0,83 \quad 0,83 \quad 0,85 \quad 0,88 \quad 0,92 \quad 1,00 \quad 1,02 \quad 1,04 \quad 1,0 \varphi_{90^\circ}$$

Ist auch der Vorderkörper zugespitzt, so ist vorstehendes  $\varphi_1$  mit dem des Vorderkörpers unter 5. zu vervielfältigen.

8. Eingetauchtes Parallelepipeton als Vorderkörper mit keilförmigem Hinterkörper, dessen wagerechte Schneide über dem Wasserspiegel liegt und den Winkel  $\alpha_2$  besitzt: (Der Wert  $\varphi_1$  schließt  $W_2$  mit ein.)

$$\alpha_2 = 12^\circ \quad 18^\circ \quad 30^\circ \quad 42^\circ \quad 54 \text{ bis } 90^\circ$$

$$\varphi_1 \sim 0,84 \quad 0,86 \quad 0,91 \quad 0,98 \quad 1,0 \varphi_{90^\circ}$$

c) Winkel  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  längs der Wandung wechselnd, Flächen gekrümmt, ohne scharfkantige Trennung derselben (bessere Schiffskörper).

Uebliche Winkel bei Fahrzeugen als mittlere Eintritts- und Austrittswinkel sind:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &\sim 6^\circ \text{ bis } 9^\circ \text{ bei Schnelldampfern,} \\ &\sim 9^\circ \text{ ,, } 11^\circ \text{ ,, gewöhnlichen Passagierdampfern,} \\ &\sim 11^\circ \text{ ,, } 15^\circ \text{ ,, Frachtdampfern,} \\ &\sim 12^\circ \text{ ,, } 15^\circ \text{ ,, scharfgebauten Kanalkähnen,} \\ \alpha_2 &\sim 6^\circ \text{ ,, } 15^\circ \text{ im gleichen Verhältnis wie } \alpha_1. \end{aligned}$$

Da die Winkel bei den besseren Schiffskörpern auf großem Teile der Länge wechseln, um einen allmählichen Uebergang zwischen verschiedenen Flächenwinkeln zu erhalten, so ist bei solchen Körpern der Wert  $\varphi_1$  mit den oben unter b) stehenden Angaben nur angenähert zu schätzen möglich.

Der Verdrängungswiderstand  $W_1$  und der Wert  $\varphi_1$  solcher Körper wird nach Froude mit Hilfe von Modellen bestimmt, deren  $W_2$  genau ermittelt werden kann (vgl. Abschn. Schiffbau I. P. 4.). Von dem Gesamtwiderstand  $W$  des Modells in einem für dasselbe unbegrenzten Fahrwasser ( $W_3$  und  $W_4 = 0$ ) wird das durch Rechnung ermittelte  $W_2$  in Abzug gebracht. Der Rest, durch  $f\gamma : 2g$  des Modells geteilt, soll das gesuchte  $\varphi_1$  für das Modell und für das zugehörige Schiff darstellen.

Nach den unter a) und b) angegebenen Versuchsergebnissen verhalten sich aber die Werte  $\varphi_1$  bei gleichen Winkeln wie  $1 + \frac{0,29}{v_1} : 1 + \frac{0,29}{v_2}$ , worin nach der Newtonschen Modellregel für das größere Schiff  $v_1 = \sqrt{\alpha} v_2$  zu setzen ist ( $\alpha = l_1 : l_2$ ). Somit ist für den größeren Schiffskörper mit der Geschwindigkeit  $v_1$  und bei der Modellgeschwindigkeit  $v_2$

$$\varphi_1 = \left[ \left( 1 + \frac{0,29}{\sqrt{\alpha} v_2} \right) : \left( 1 + \frac{0,29}{v_2} \right) \right] \times (\varphi_1 \text{ des Modells}).$$

Bei löffelförmigen Kähnen wächst  $\varphi_1$  mit der Tauchung  $t$ , weil  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  mit  $t$  zunehmen. Aus Versuchen errechnet sich für diese Kähne bei kleinster Tauchung  $\varphi_1 \sim 0,15$ , bei größter  $\varphi_1 \sim 0,20$ .

### Werte $\varrho_2$ und $\varrho_3$ .

Nach heutigem Stande der Ermittlungen von  $\varrho$  für gefüllte Rohrleitungen und offene Wasserläufe, unter besonderer Berücksichtigung der Formeln von Froude, Weisbach, Bazin, Biel, Lang, läßt sich mit großer Wahrscheinlichkeit als angemessen setzen:

$$\varrho \frac{\gamma}{2g} = a_1 + \frac{0,013}{\sqrt{v_n R}},$$

worin bedeutet

$a_1$  eine von der Rauigkeit der benetzten Wandung abhängige Zahl,  
 $R$  den hydraulischen Radius desjenigen Wasserquerschnitts, an dem sich die benetzte Fläche befindet. ( $R =$  Durchflußquerschnitt: Gesamtumfang der festen Reibungsflächen dieses Querschnitts vgl. S. 288 u. f.)  $R$  ist bei begrenztem Fahrwasser verschieden für die Fahrwasserteile neben dem Schiff und für die unter dem Schiffsboden,

$v_n$  die relative Geschwindigkeit des Wassers an der Reibfläche.

Werte  $a_1$ :

Neue glatte, mit Lackfarbe gestrichene Blech- oder Holz- wand, noch ohne Schlammansatz . . . . .	~0,12
Mit gewöhnlicher Oelfarbe gestrichene Blechwand ohne vorstehende Nietung, gehobelte und gestrichene Holzwand, beide erst wenige Tage unter Wasser . . . . .	~0,15
Benetzte Wand, wie vorstehend, seit längerer Zeit unter Wasser, mit Schlamm- und Algenansatz bedeckt . . . . .	~0,18
Rauhe Eisenwand, ungehobelte Bretter, nicht geglätteter Beton . . . . .	~0,20
Neue Kanäle, kanalisierte Flüsse, ohne Wasserpflanzen und ohne Uferbepflanzung, mit Uferbefestigung . . . . .	~0,24
Kanäle und regelmäßige Flußläufe mit Sandbett, ohne Wasserpflanzen . . . . .	~0,28
Wasserläufe mit Wasserpflanzen, mit Uferbepflanzung, am Bett grobes Geschiebe . . . . .	~0,4

(Noch größere Werte dürften das Donau- und Rheinbett mit  
Felsprengung am Eisernen Tor bzw. bei Bingen, auch die  
mit Muscheln bewachsene Aufsenhaut der Ozeanschiffe er-  
geben.)

Werte  $R$ .

Für begrenztes Fahrwasser:

Für wagerechten Schiffsboden und für den unter ihm liegenden Teil  
des Fahrwasserbettes, somit für  $\varrho_2'$  und  $\varrho_3'$  geltend, wird unabhängig  
von der Tiefe  $R = 0,5 (T - t)$ ; für die übrigen benetzten Flächen am  
Schiff und am Bett des Fahrwassers, wenn noch  $c$  in m die Ab-  
weichung der Schiffsachse von der Mittelachse des Fahrwassers  
bedeutet, somit für  $\varrho_2''$  und  $\varrho_3''$  geltend, ist bei rechteckigem Quer-  
schnitt des Kanals und des Schiffes  $R = \frac{F - T(b \pm 2c)}{U + 2t - (b \pm 2c)}$ .

Mit zunehmender Geschwindigkeit ändert sich meist die Trimlage  
des Schiffes derart, dafs das Vorderschiff gehoben wird; alsdann ist  
für  $R$  der Mittelwert einzusetzen.

Da  $W$  und  $\varrho$  sich mit wachsendem  $R$  verkleinern, so nehmen sie  
auch mit größerem  $F:U$  ab; über günstigste Fahrwasserprofile vgl.  
S. 313.

Für unbegrenztes Fahrwasser (vgl. S. 326):

Soll die Verschiedenheit des Fahrwassers keinen erkennbaren Einfluß  
auf den Widerstand ausüben, so muß  $\varrho_2$  für alle Tiefen angenähert  
gleich groß, und der Wert  $0,013 : \sqrt{v_n R}$  verschwindend klein gegen  
 $a_1$  werden; dies geschieht im allgemeinen bei größerer Geschwindig-  
keit, je nach dem Werte  $a_1$ , wenn  $\sqrt{R} \sim 8$  bis 16 m, oder wenn  
 $T - t \sim 120$  bis 500 m (letzterer Wert für das größere  $a_1$  geltend),  
wobei der Wellenwiderstand  $W_4$  im allgemeinen unberücksichtigt bleiben  
kann. Bei kleineren Tiefen sind die Angaben für begrenztes Fahr-  
wasser zu berücksichtigen.

Werte  $v_n$ :

$$\text{Für } \varrho_2' \text{ und } \varrho_2'' \text{ ist } v_n = \frac{n}{n-1} v,$$

$$\text{für } \varrho_3' \text{ und } \varrho_3'' \text{ ist } v_n = \frac{1}{n-1} v,$$

für  $\varrho_2$  des unbegrenzten Fahrwassers ist  $v_n = v$ .

Wenn  $v_n$  für  $\varrho_3'$  größer wird als die S. 314 angegebenen Werte  $v_n$  für verschiedene Bodenarten, bei denen ein Angriff des Bettes vermieden bleibt, so wird das Bett unter dem Schiffsboden aufgewühlt, voraussichtlich unter wesentlicher Vergrößerung von  $\varrho_3'$  und  $\varrho_2'$ . Daher sollte bei Kanälen mit Sandbettung eine Geschwindigkeit

$\frac{v}{n-1} \sim 0,25$  m nicht überschritten werden. Dies fordert für

$$F: f = n \begin{matrix} v = 1,0, & 1,5, & 2,0 \text{ m} \\ \geq 3 & 5 & 7. \end{matrix}$$

Die Werte  $v_n$  vergrößern sich bei wesentlich begrenztem Fahrwasser noch etwas durch die Absenkung des Wasserspiegels im Rücklaufstrom (vgl. folgende Angaben zu den Werten  $n$ ).

Bei Seitenraddampfern vergrößert sich  $v_n$  für das Hinterschiff infolge des vom Rade ausgehenden Rücklaufstromes.

(Froude setzt für unbegrenztes Fahrwasser und für das qm reiner, glatter Fläche

$$W_2 \text{ in kg} = 0,115 v^2 + 0,04 v \text{ oder } \varrho \frac{\gamma}{2g} = 0,115 + \frac{0,04}{v}, \text{ oder}$$

angenähert  $W_2 = 0,158 v^{1,83}$ , gültig für  $v = 1$  bis  $5$  m.

$W_2$  ändert sich nach Froude auch etwas mit der Länge der vom Rückstrom bestrichenen Fläche; (vgl. Abschn. Schiffbau II. Bd. Abschn. I. P. 4.)

### Werte $n$ , $[1 : (n-1)]^2$ , $[n : (n-1)]^2$ .

Neuere Kanäle für Kähne zeigen bei kleinstem Tiefgang der Schiffe  $n \sim 5,0$ , bei größtem Tiefgang  $n \sim 3,3$ . In älteren Kanälen kommt ausnahmsweise  $n \sim 2$  vor.

Noch kleinere Werte  $n$  finden sich in den Schleusen, an den Schleusentoren, zwischen Brückenpfeilern.

Der am Schiff rückwärts laufende Strom senkt seine Oberfläche; vgl. Versuche von Haack mit Kähnen am Dortmund-Ems-Kanal, Z. d. V. d. I. 1903 S. 694. Nach diesen Versuchen im Kanal von gleicher Breite  $B$  vermindert sich  $F$  um den Querschnitt  $F_s = B s_v$ , wenn  $s_v$  die Senkung der Oberfläche in m bei der Geschwindigkeit  $v$  bedeutet.

$F_s$ , also auch  $s_v$ , zeigt sich proportional  $W$  und  $v^m$ , wenn  $W = v^m W_v = 1$ . (Nicht unwahrscheinlich erscheint nach einem Ausgleich der Versuchszahlen die weitere Beziehung  $b s_v \gamma \sim v^m W_v = 1$ .)

In Berücksichtigung dieser Spiegelsenkung setzt Sonne (H. d. I. W. III. Teil) für mittlere Tauchtiefe und für  $v = 1$  m anstatt  $n : (n-1)$

und 1:  $(n - 1)$  die Werte  $n : (n - 1,15)$  bzw.  $1,15 : (n - 1,15)$ , gültig für die Verhältnisse am Dortmund-Ems-Kanal.

Beim Kreuzen von Kähnen fährt je ein Kahn vorwärts mit dem Rücklaufstrom des anderen Kähnes, so daß die relative Wassergeschwindigkeit und damit der Widerstand vermindert wird.

Bei gegenseitiger Ueberholung von Dampfern beschleunigt der eine den Rückstrom des anderen oft derart, daß bedeutender Wellenwiderstand  $W_4$  an dem zurückbleibenden Dampfer auftritt.

Beim Ziehen von Kähnen mittels Schleppers, der einen rücklaufenden Strom erzeugt, wird die relative Wassergeschwindigkeit an dem im Kielwasser geschleppten Kahn vergrößert. Bei der Schleppung mehrerer Kähne in breitem Wasser fahren daher der erste und zweite Kahn zweckmäßig seitlich vom Rückstrom des Schleppers, u. zw. auf gegenüberliegenden Seiten.

Auch ändert sich  $n$ , sobald die Schiffsachse die Achse des Fahrwassers verläßt. Alsdann wird die Spiegelsenkung auf der Seite größerer Ufernähe größer; dabei wird das Schiff vom Ueberdruck der anderen Seite dem schon näher liegenden Ufer noch näher gedrückt („Sog“ der schmälern Fahrwasserseite); notwendiges Absteuern vom Ufer vermehrt den Widerstand. Größere Geschwindigkeit vermehrt die Schwierigkeit bei der Einhaltung der Achse des Fahrwassers, erzeugt fast dauernden Steuerwiderstand und läßt ermittelte Versuchswerte zweifelhaft erscheinen.

Durch Verschiebung der Schiffsachse um  $d$  in  $m$  aus der Achse des Fahrwassers wird auf der schmälern Seite die Verhältniszahl  $n$  der Halbquerschnitte auf den Wert  $n_1$  verkleinert, entsprechend der Beziehung

$$n_1 = n - \frac{2dT}{f}$$

Werte  $\frac{2dT}{f}$  für  $d = 1 m$ :

wenn $T$ in $m = 1,5$	2,0	2,5	3,0,
für $f = 10$ qm:	0,3	0,4	0,5
„ $f = 15$ qm:	0,2	0,27	0,33

Mit einer solchen Ablenkung von 1 m von der Achse des Fahrwassers und mit einem entsprechenden Steuerwiderstand, der den Vorteil des größeren  $n$  auf der breiteren Fahrwasserseite aufhebt, ist im allgemeinen stets zu rechnen.

Die Vergrößerung des Widerstandes  $W_{v=1}$  für verschiedene Fahrwasserweiten  $n$  findet etwa nach folgenden Verhältniszahlen statt, wobei für  $n_1$  die Werte  $d = 1,0$ ,  $T = 2,5 m$ ,  $f = 15$  qm vorausgesetzt worden sind:

$n =$	2	3	4	5	6	10	100
$n^2 : (n - 1)^2 =$	4,00	2,25	1,78	1,56	1,42	1,23	1,02
$n^2 : (n - 1,15) =$	5,55	2,64	1,98	1,70	1,53	1,28	1,02
$n_1^2 : (n_1 - 1)^2 =$	6,35	2,57	1,90	1,63	1,47	1,25	1,03
$n_1 : (n_1 - 1,15)^2 =$	10,6	3,1	2,13	1,77	1,57	1,29	1,02
Modell (Engels) $\sim$	—	3,4	2,1	1,5	—	—	1,00
Kahn (de Mas) $\sim$	—	3,8	3,3	2,7	2,4	—	1,00

**Werte der Exponenten  $m$  und  $m_1$**  (vgl. S. 327).

Der Gesamtwiderstand  $W$  setzt sich ohne Rücksicht auf  $W_4$  nunmehr aus folgenden, nach Potenzen von  $v$  geordneten Gliedern zusammen, wenn  $q_1 = (\alpha) q_{900}$  gesetzt wird:

Für begrenztes Fahrwasser:

$$W \frac{2g}{\gamma} = \left( \frac{v}{n-1} \right)^2 [n^2 (\alpha) f + n^2 a_1' O + a_1'' K] \\ + \left( \frac{v}{n-1} \right)^{3/2} \frac{0,013}{\sqrt{R}} (n^{3/2} O + K) + \frac{v}{n-1} 0,29 n (\alpha) f.$$

Für unbegrenztes Fahrwasser:

$$W \frac{2g}{\gamma} = v^2 [(\alpha) f + a O] + 0,29 v (\alpha) f.$$

Hieraus folgt für unbegrenztes Wasser, daß sich der Widerstand  $W$  mit wachsendem  $v$  immer mehr proportional  $v^2$ , die Widerstandsleistung  $N$  (ohne Widerstände des Treibapparates gedacht) sich immer mehr proportional  $v^3$  ändert, — und daß diese Proportionalität um so schneller erreicht wird, je größer  $O$  gegenüber  $f$  ist.

Im begrenzten Fahrwasser mit sehr kleinem  $R$  wird der Einfluß des Gliedes mit  $v^{3/2}$  wesentlich, und bei  $v < 1$  wird der Einfluß des Gliedes mit der ersten Potenz am größten. Wächst der Exponent  $m$  über 2 hinaus, so ist Wellenwiderstand vorauszusetzen.

Dies bestätigen die folgenden Versuchsergebnisse.

Die Berechnung von  $m$  und  $m_1$  aus Versuchsergebnissen wird unsicher, wenn nicht auch der Wert  $W_{v=1}$  bzw.  $N_{v=1}$  durch Versuch ermittelt worden ist. Für diese Berechnung sind mittels Schaulinie für die Ergebnisse zwei benachbarte Versuchswerte auszuwählen, die an gleichmäÙiger Linienführung liegen und voraussichtlich einen sehr wenig verschiedenen Exponenten ergeben werden, so daß dann für beide Werte gesetzt werden kann

$$\log (W_1 : W_2) = m \log (v_1 : v_2) \text{ bzw.} \\ \log (N_1 : N_2) = m_1 \log (v_1 : v_2).$$

Hiernach ergeben sich aus einigen veröffentlichten Versuchsreihen folgende Werte:

Fast unbegrenztes Fahrwasser:

Torpedoboot,  $l = 62$  m,  $T = 60$  m; Z. d. V. d. I. 1904 S. 1870.

$$v = 12 \quad 15 \quad 18 \quad 21 \quad 24 \quad 27 \text{ Kn/st.} \\ m_1 \sim 2,68 \quad 2,73 \quad 2,81 \quad 2,90 \quad 2,92 \quad 2,92$$

Torpedoboot,  $l = 30$  m; Gl. A. 1884 S. 99.

$$v = 8 \quad 10 \quad 12 \quad 16 \quad 20 \text{ Kn/st.} \\ m_1 \sim 3,07 \quad 3,01 \quad 3,08 \quad 3,15 \quad 3,15$$

Paraffin-Modell,  $l = 3,66$  m; Z. d. V. d. I. 1886 S. 1169.

$$v = 0,8 \quad 1,6 \quad 2,4 \quad 3,2 \quad 4,0 \quad 4,8 \text{ m/sk} \\ m \sim 2,07 \quad 2,19 \quad 2,14 \quad 2,15 \quad 2,19 \quad 2,05;$$

von  $v = 1,6$  bis 4,0 m tritt schwacher Wellenwiderstand auf.

Paraffin-Modell,  $l = 3,486$  m; Z. d. V. d. I. 1907 S. 1828;  
bei unberücksichtigtem Wellenwiderstand:

$$\begin{array}{cccc} v = & 1 & 2 & 3 & 4 \text{ m/sk} \\ m \sim & 2,0 & 2,14 & 2,2 & 2,2. \end{array}$$

Handelsdampfer,  $D = 3980$  t; Verhdlg. d. V. z. B. d. Gewfl. 1876  
S. 333.

$$\begin{array}{cccccc} v = & 8 & 12 & 14 & 16 & 18 & 20 \text{ Kn/st} \\ m_1 \sim & 2,33 & 2,38 & 2,70 & 3,57 & 5,3 & 6,2; \end{array}$$

grofser Wellenwiderstand, beginnend bei  $v = 14$  Kn.

Kahn mit etwas zusammengezogenen Seitenwänden am Vorderschiff,  
Hinterschiff vollständig kastenförmig,  $T = 16$  m,  $l \sim 35$  m; Z. d. B.  
1898 S. 655.

$$\begin{array}{cccccc} v = & 0,0 & 0,5 & 1,0 & 1,5 & 2,0 & 2,5 \text{ m/sk} \\ m = & (1,35) & 1,58 & 1,78 & 1,93 & 2,03 & 2,18. \end{array}$$

Begrenztes Fahrwasser:

Kähne auf dem Teltowkanal; Gl. A. 1904 S. 642:

$$\begin{array}{l} l = 40 \text{ bis } 54 \text{ m, } \quad b = 4,6 \text{ bis } 8,1, \quad t = 1,35 \text{ bis } 1,61, \\ D = 154 \text{ bis } 440 \text{ t, } \quad v = 0,5 \text{ bis } 1,39 \text{ m/sk,} \\ v = 0 \quad 0,5 \quad 1,0 \quad 1,5 \\ m \sim (1,2) \quad 1,54 \quad 1,98 \quad 2,22. \end{array}$$

Kähne auf dem Dortmund-Ems-Kanal; H. d. I. W. Teil III 1906  
S. 102; seetüchtiger Kahn mit scharfen Enden bzw. Kanalkahn mit  
löffelartigen Enden:

$$\begin{array}{l} l = 55 \text{ bzw. } 67 \text{ m, } \quad b = 8,0 \text{ bzw. } 8,1 \text{ m;} \\ v = 0,0 \quad 0,5 \quad 1,0 \quad 1,5 \quad 2,0 \\ m \sim (1,3) \quad 1,75 \quad 2,2 \quad 2,68 \quad 3,0. \end{array}$$

Kähne auf der Donau:

$$\begin{array}{l} B = 80, \quad T = 3,0, \quad l = 63, \quad b = 8,2, \quad D = 670 \text{ t;} \\ \text{Stromgeschwindigkeit } 1,06, \quad v \sim 3 \text{ bis } 4 \text{ m/sk, } \quad m = 2,25. \end{array}$$

Kähne am Donaukanal des Eisernen Tores (Felsgrund):

$$\begin{array}{l} B = 72, \quad T = 3,0, \quad \text{Stromgeschwindigkeit } 3,3 \text{ bis } 5,0 \text{ m,} \\ \text{zusätzliche Schiffsgeschwindigkeit nur } 0,3 \text{ m/sk, } \quad m = 4,0. \end{array}$$

## J. Flüssigkeitsmessung.\*)

### a. Ermittlung von Druckhöhen in Rohrleitungen.

Bei kleinem Drucke ist am bequemsten und sichersten das lot-  
rechte **Piezometer** (gläsernes Standrohr), bei besonders kleinem Drucke  
liegendes Rohr nach Krell sen. zu verwenden.\*\*)

Bei größerem Drucke werden **Differential-Flüssigkeitssäulen** aus  
Wasser oder Quecksilber benutzt, welche aber viele Korrekturen der  
Ablesungen erfordern; oft genügen bei guter Ausführung die be-  
quemeren **Federmanometer**, welche aber nur unter so starker Drosselung

\*) S. Weisbach, Lehrb. d. theor. Mechanik.

\*\*) O. Krell sen., Hydr. Messinstrumente, Verlag Oldenbourg.

(Nadelventil in sehr enger Bohrung) verwendet werden sollten, das ein Zittern oder plötzliches Ausschlagen des Zeigers vermieden bleibt.

Anschluss der Standrohre an die Leitung mittels Bohrung von 1 bis 2 mm Durchmesser in der Rohrwand, u. zw. genau winkelrecht zur Stromrichtung. Entfernung des etwa vorhandenen Grates am Bohrloch und selbsttätige Entfernung der Luft in allen Teilen der Standrohranlage sind Vorbedingungen für eine gute Messung. — Die Widerstandshöhe einer Rohrleitung sollte stets durch den Unterschied der hydraulischen Druckhöhen in mindestens zwei Standrohren bestimmt werden; sie müssen an Stellen mit gleichem Durchflussquerschnitt angebracht sein, an denen keine Verengung vorhanden ist. Durch Verbindung des Luftraumes der Standrohre und Herstellung einer Luftverdünnung in diesem Raume werden die Wasserspiegel in bequeme Beobachtungshöhe gebracht, wobei der Unterschied der Spiegelhöhen unverändert bleibt.

### b. Ermittlung von Durchflussgeschwindigkeiten.

1. Bei größeren Wasserläufen dienen zur Bestimmung der Oberflächengeschwindigkeit **Oberflächenschwimmer**, deren Tauchtiefen nicht über 0,3 m betragen sollen. Für beliebige Tiefen benutzt man **Stabschwimmer**, meist ein Blechrohr ( $d \geq 2$  cm) mit Boden und Deckel, das mit Schrot bis zum geeigneten Eintauchen gefüllt wird. Stabschwimmer, in möglichst lotrechter Lage bis nahe an die Sohle reichend, setzen ein gleichbleibendes Wasserprofil voraus. Bei Oberflächen- und Stabschwimmern ist die Wassergeschwindigkeit gleich dem Schwimmwege (in m) geteilt durch die Schwimmzeit (in Sekunden).

Bezeichnet man für eine Lotrechte des Durchflussquerschnittes die Oberflächengeschwindigkeit mit  $v_0$ , so ist die mittlere Geschwindigkeit in dieser Lotrechten etwa  $= 0,85 v_0$ , und sie befindet sich um 0,55 bis 0,65 der ganzen Tiefe unterhalb der Oberfläche. Die Geschwindigkeit an der Sohle der Lotrechten wechselt dagegen stark zwischen 0,25 bis 0,75  $v_0$ . Die größte Geschwindigkeit auf der Lotrechten befindet sich (je nach dem Windeinflusse) 0,1 bis 0,3 m unter der Oberfläche.

Zur Bestimmung der mittleren Profilgeschwindigkeit  $v$  teile den Querschnitt  $F$  in  $n$  lotrechte und gleich breite Teile  $f_1, f_2 \dots f_n$  und bestimme mittels Woltmannschen Flügels\*) für jeden Teil die zugehörigen mittleren Geschwindigkeiten  $v_1, v_2 \dots v_n$ ; dann ist

$$v = \frac{f_1 v_1 + f_2 v_2 + \dots + f_n v_n}{F}$$

2. Bei kleinen Wasserläufen und bei freien Wasserstrahlen benutzt man mit Vorteil die verbesserte **Pitotsche Röhre**. Sie besteht aus zwei parallel angeordneten, eingetauchten Röhren, von denen die eine einen gegen die Stromrichtung abgelenkten Schenkel besitzt, der düsenförmig endigt. Der Spiegel in diesem Rohr entspricht der Summe von Seitendruck und Geschwindigkeitshöhe.

Die zweite Röhre mit feiner Bohrung lotrecht zur Achse der Düse — die erste am abgelenkten Schenkel umschließend — gibt nur den Seitendruck an. Der lotrechte Abstand beider Flüssigkeitsspiegel stellt dann die Geschwindigkeitshöhe dar, wobei eine Ablenkung der Düsenrichtung aus der Stromrichtung um  $10^0$  ohne Belang für die Ablesung ist. Durch gleiche Luftleere über beiden Röhren werden die Beobachtungsspiegel in bequem abzulesende Höhe gebracht.)

\*) Lieferanten verbesserter Woltmannscher Flügel: Falter & Sohn, München; Amaler-Laffon, Schaffhausen; Ott, Kempten in Bayern.

Ueber Versuche mit verschiedenen ausgebildeten Pitotschen Röhren bei verschiedenen Neigungen des Schenkels gegen die Stromrichtung vrgl. Schuster, Forschungsheft Nr. 82 d. V. d. I. 1910, Otto Krell jr., Messung von dynamischem und statischem Druck, S. 44, Verlag Oldenbourg, Ellon, Z. d. V. d. I. 1909 S. 989 und Blasius, Z. d. B. 1909 S. 549.

Der **Schirmschwimmer** von Andersson ist eine sehr leichte, vom Strom mitgeführte Querwand im **Mefskanal**, der auf etwa 20 m Länge ganz regelmäßigen Querschnitt besitzt. Ergebnisse sehr genau. Beschr. s. Z. d. V. d. I. 1907 S. 627, 1908 S. 1840, 1909 S. 740.

**3. Bei Rohrleitungen** werden die sogenannten Wassermesser als Geschwindigkeitsmesser angewendet.

Am gebräuchlichsten sind eingebaute **Turbinenräder** mit vorliegendem Schutzsieb; dieses beeinträchtigt aber den freien Durchfluß und die Ausnutzung der sonst vorhandenen Druckhöhe.

Die Siebplatten geben bei unfiltriertem Flußwasser zu Verstopfungen durch Tiere und Schwimmkörper Anlaß. Bei Luftsäcken hinter dem Wassermesser wird das Rad durch Wasserstoß an beliebiger Stelle der Leitung vorwärts gedreht, ohne bei folgendem Druckausgleich entsprechenden Rücklauf zu gewährleisten. Mittels Zählwerks für die Radrehungen entsteht ein bequemer Wassermesser, dessen Skala aber erst durch Versuche am Eichgefäß festzusetzen ist.

Der **Venturi-Wassermesser** nach Herschel ist eine wagerecht in die Leitung eingebaute allmähliche Verengung mit sehr allmählicher Erweiterung bis zum Leitungsmesser.

Vrgl. S. 305; Baulänge  $\sim 11 d$ , bewährt bis  $d \sim 2$  m; s. Z. d. V. d. I. 1898 S. 38 und Z. d. Gesundh.-Ing. 1896 S. 262. Durch Piezometeranschlüsse an der engsten Stelle und gleich nach der Erweiterung wird der Druckhöhenunterschied  $s$  an beiden Querschnitten gemessen, deren Verhältnis mit  $n$  bezeichnet sei. Dann ist mit den Angaben S. 286 u. 303:

$$v_2 = \sqrt{\frac{2gs}{n^2 - (1 + \zeta + \zeta_k)}}$$

mit der Bedingung  $p_1 > 0$ , also  $s < q_a + \zeta_2 v_2^2 : 2g$ , somit

$$v_2 \max = \sqrt{\frac{2gq_a}{n^2 - (1 + \zeta + \zeta_k) - \zeta_2}}$$

$v_2 \max$  wächst mit  $q_a$  und  $\zeta_2$ , also wird die Mefsdüse am günstigsten in der Nähe des Anfanges der Leitung eingebaut.

Wird der Piezometeranschluß des weiteren Rohres vor der Verengung angebracht und die Düse nach Abb. 133 ausgebildet, so daß bei polierter Wandung  $\zeta_1$  zu 0,01 zu schätzen ist, so wird  $v_2 = \sqrt{2gs : (1,01n^2 - 1)}$  ohne die durchaus erforderliche Bedingung  $p_1 > 0$ . Ferner wird die nachfolgende allmähliche Erweiterung entbehrlich und damit die Baulänge auf etwa  $2d$  beschränkt, wenn die Zahl  $\zeta$  für plötzliche Erweiterung (s. S. 301) klein genug gegenüber  $\zeta_2$  ausfällt. Soll aber an der plötzlichen Erweiterung ein Abreißen des Flüssigkeitsfadens und die damit verbundene Verminderung von  $Q$  vermieden bleiben, so ist — da nun  $\zeta = (n - 1)^2$  und  $\zeta_k = 0$  —

$$v_2 \max = \sqrt{2gq_a : [2(n - 1) - \zeta_2]}$$

### c. Ermittlung von Wassermengen.

1. Für **größere Wasserläufe** wird die abfließende Wassermenge  $Q$  in cbm/sk entweder mittels Messung der Wassergeschwindigkeiten, wie vorher unter **b. 1** angegeben, oder aus den **Wasserverhältnissen im Niederschlagsgebiete** des Wasserlaufes bestimmt, vrgl. Abschnitt Wasserversorgung III. Bd.

2. Für **kleinere Wasserläufe** werden geeichte Gefäße, Wasserbecken, und bei bekannter Durchfluszahl  $\mu$  der Ueberlauf, Durchlaß, oder der sogen. **Wasserzoll** verwendet, d. i. ein Strahl, der durch eine Kreisöffnung in zugeschärfter lotrechter Wandung von 1 preufs. Zoll (= 26,15 mm) Durchmesser und bei etwa 2 mm Wasserhöhe über Oberkante der Oeffnung abfließt. In der dichten Abschlußwand sind mehrere solcher Oeffnungen (und u. Umst. Oeffnungen von  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{4}$  und  $\frac{1}{8}$  Zoll Dmr.) eingeschnitten, von denen so viele durch Stöpsel unter Verschluss gehalten werden, daß das Wasser gleiche Stauhöhe behält. Nach Hagen liefert 1 preufs. Wasserzoll 0,3612 Kub.-F./min = 11,1683 l/min = 520 Kub.-F./Tag = 16,0784 cbm/Tag. Da die Kantenbildung der Kreisöffnungen und bei kleiner Druckhöhe das Maß der Druckhöhe von großem Einfluß auf  $Q$  ist, so wird die Bestimmung mittels des Wasserzollens unsicher.

Genauer ist das **Meßverfahren von Brauer und Hansen,\***) bei dem durch gut polierte Düsen nach Abb. 126 von verschiedenem Querschnitt im Boden des Sammelgefäßes für das Ablaufwasser eine Teilung von  $Q$  herbeigeführt wird. Die Düsen stehen also sämtlich unter gleichem Wasserdruck und haben die gleiche Ausfluszahl  $\mu \sim 0,99$ ; mithin verhalten sich die durchgeflossenen Wassermengen wie die Querschnitte der Düsen. Eine der kleineren Düsen fördert in ein Gefäß, dessen Wassermenge gemessen oder gewogen wird. Die Wasserhöhe über der Oeffnung muß aber wenigstens das Fünffache des Düsendurchmessers betragen, um den Einfluß des sonst auftretenden Strudels über der Oeffnung zu vermeiden.

3. **Sehr kleine Wassermengen** lassen sich besonders genau durch unmittelbares **Abwägen** (beliebiges Gefäß auf einer Wage stehend) bei gleichzeitiger Zeitablesung bestimmen. Zur letzteren verwende man eine Taschenuhr mit Druckknopf zum Anhalten eines Zeigers nach Fünftel-Sekunden. Vor Beginn der Messung gleiche das Taragewicht mit einem größeren Ueberschuß aus, lasse nun das Wasser zulaufen und setze den Zeiger erst in dem Augenblick des Gewichtsausgleiches in Gang. Darauf füge der Gewichtsschale ein abgerundetes Gewicht hinzu, welches höchstens der im Gefäß noch fehlenden Wassermenge entspricht. Im Augenblick des abermaligen Gewichtsausgleiches halte man den Zeiger der Uhr wieder an und sperre dann erst den weiteren Zufluß ab bzw. lenke ihn ab.

Dieses Verfahren schaltet den Einfluß von Wellenbewegung im Meßgefäß aus und erübrigt die Beschaffung eines geeichten Gefäßes. Die Wägung gestattet in Verbindung mit dem unter 2. bezeichneten Meßverfahren auch die Messung größerer Wassermengen.

\* Z. d. V. d. I. 1892 S. 1492 u. 1060, Gl. A. 1906 S. 153.

# C. MECHANIK LUFTFÖRMIGER KÖRPER.\*)

## I. ALLGEMEINE EIGENSCHAFTEN.

Alle luftförmigen Körper lassen sich durch Abkühlung bzw. Druckerhöhung verflüssigen. In merklicher Nähe des Verflüssigungspunktes nennt man sie Dämpfe, in hochüberhitztem Zustand Gase.

Luftförmige Körper sind im Gegensatz zu den tropfbaren Flüssigkeiten stark zusammendrückbar.

Druck- und Dichtigkeitsänderungen sind im allgemeinen mit Temperatur- und Energieänderungen verbunden. Vorgänge, bei denen Energieänderungen von wesentlicher Bedeutung sind, werden unter „Thermodynamik der Gase und Dämpfe“ im 3. Abschnitt „Wärme“ behandelt.

Der Zustand eines Gases oder eines Gasgemisches wird durch folgende Größen bezeichnet:

$P$  = absoluter Druck oder Spannung in kg/qm,

$t$  = Temperatur nach Celsius

oder  $T = 273 + t$  = absolute Temperatur,

$v$  = Einheitsraum (Rauminhalt der Gewichtseinheit) in cbm/kg,

$\gamma = \frac{1}{v}$  = Einheitsgewicht (Gewicht der Raumeinheit) in kg/cbm.

Der Nullpunkt des absoluten Druckes ist die (im geschlossenen Schenkel eines Quecksilberbarometers vorhandene) vollkommene Leere.

Druckunterschiede gegen den jeweils herrschenden Luftdruck (Barometerstand) werden als Ueberdruck bzw. Minderdruck bezeichnet.

Dem Druck von 1 kg/qm entspricht

1 mm Wassersäule von 4<sup>0</sup> (W-S),

0,07355 mm Quecksilbersäule von 0<sup>0</sup> (Q-S),

(1 mm Q-S = 13,596 kg/qm.)

**10 000 kg/qm = 1 kg/qcm = 1 metrische (neue) Atmosphäre (at),\***

= 735,5 mm Q-S von 0<sup>0</sup> (= 737,4 mm Q-S von 15<sup>0</sup>),

= 10 m W-S,

= 28,958 engl. Zoll Q-S von 0<sup>0</sup>,

= 14,223 engl. Pfd/Qu Z (lbs./sq. inch),

= 0,968 alte Atmosphäre.

**10 333 kg/qm = 1,0333 kg/qcm = 1 alte Atmosphäre**

= 760 mm Q-S von 0<sup>0</sup> (= 762 mm Q-S von 15<sup>0</sup>),

= 10,333 m W-S von 4<sup>0</sup>,

= 29,922 engl. Zoll Q-S von 0<sup>0</sup>,

= 14,696 engl. Pfd/Qu Z.

\*) Abgeschlossen April 1911.

\*\*) Die Bezeichnung **at** bedeutet im folgenden stets metrische Atmosphären.

Ist der Barometerstand  $h$  oder eine andere Quecksilberhöhe in mm bei  $t^0$  abgelesen worden, so beträgt bei  $0^0$  oder  $15^0$

$$h_0 = h(1 - \alpha t) \quad h_{15} = h[1 - \alpha(t - 15)]$$

$\alpha = 0,000162$  für Messingskalen,  
 $\alpha = 0,000175$  für Holz- und Glasskalen.

Einer at (kg/qcm) entsprechen folgende Quecksilberhöhen (gemessen an Holz- oder Glasskala)

bei $t = 0$		$5$		$10$		$15$		$20$		$25$		$30$
$h = 735,5$		$736,1$		$736,9$		$737,4$		$738,0$		$738,7$		$739,3$

### Dehnungsgesetz und Zustandsgleichung.

Bei gleichbleibender Temperatur ist das Einheitsgewicht eines Gases proportional dem absoluten Druck (Gesetz von Mariotte)

$$P \cdot v = \frac{P}{\gamma} = \text{konst.}; \quad v_2 = v_1 \frac{P_1}{P_2}$$

Bei gleichbleibendem Druck ist der Einheitsraum eines Gases proportional der absoluten Temperatur (Gesetz von Gay-Lussac).

Erwärmt man eine Gasmenge bei gleichbleibendem Druck von  $0^0$  auf  $1^0$  C, so dehnt sie sich um  $\alpha = \frac{1}{273} = 0,00367$  ihres Raumes aus. Bei Erwärmung von  $t_1$  ( $T_1$ ) auf  $t_2$  ( $T_2$ ) wächst der Rauminhalt  $V_1$  auf

$$V_2 = V_1 \frac{1 + \alpha t_2}{1 + \alpha t_1} = V_1 \frac{T_2}{T_1}$$

Zustandsgleichung für Gase

$$Pv = \frac{P}{\gamma} = RT$$

Sie faßt die beiden obigen Gesetze zusammen und gilt für beliebige Zustandsänderungen.  $R$  heißt die Gaskonstante (Werte s. S. 416). Berechnung von  $R$  für Gasmischungen s. S. 420. Tafel für feuchte Luft S. 422.

Zur Umrechnung des Einheitsgewichtes eines Gases von einem Zustand ( $P_1 T_1 \gamma_1$ ) auf einen anderen ( $P_2 T_2 \gamma_2$ ) hat man nach der Zustandsgleichung

$$\gamma_2 = \gamma_1 \frac{P_2 T_1}{P_1 T_2}$$

## II. STATIK.

### 1. Luftdruck im offenen Luftraum. Höhenformel.

In Höhe des Meeresspiegels beträgt der Luftdruck (Barometerstand) im Mittel 760 mm Q-S = 10 333 kg/qm. Er schwankt nach meteorologischen Einflüssen zwischen etwa 720 und 800 mm Q-S, also um etwa  $\pm 5\frac{1}{4}$  vH.

Höhenformel. Unter Vernachlässigung der praktisch meist nicht bestimmbaren Unterschiede der Luftfeuchtigkeit in den verschiedenen Höhen gilt für mittlere geographische Breite

$$H_2 - H_1 = (18\,400 + 70 t_m) \log \frac{P_1}{P_2}$$

wenn bedeutet

$H_2 - H_1$  den Höhenunterschied zweier Orte in m,  
 $P_2$  und  $P_1$  die entsprechenden Luftdrücke,  
 $t_m$  die mittlere Temperatur der dazwischen befindlichen  
 Luftsäule.

Lufterwärmung um  $1^\circ$  erhöht demnach den einem beobachteten  
 Druckverhältnis entsprechenden Höhenunterschied um rd. 4 vT.

### Höhenunterschiede $H_2 - H_1$ in m, bei $t_m = 0^\circ$ .

$\frac{P_1}{P_2}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1,0	—	79	158	236	313	390	466	541	615	689	762
1,1	762	834	906	977	1047	1117	1186	1255	1323	1390	1457
1,2	1457	1524	1590	1654	1718	1782	1846	1910	1973	2035	2097
1,3	2097	2158	2219	2279	2338	2397	2456	2515	2573	2631	2688
1,4	2688	2745	2802	2858	2913	2969	3025	3080	3134	3187	3240
1,5	3240	3293	3346	3398	3450	3502	3553	3604	3655	3705	3755
1,6	3755	3805	3854	3903	3952	4001	4049	4098	4146	4193	4239
1,7	4239	4286	4333	4379	4425	4471	4517	4563	4608	4653	4698
1,8	4698	4742	4786	4829	4872	4916	4959	5002	5045	5088	5130
1,9	5130	5172	5213	5255	5296	5337	5378	5419	5459	5499	5539

Die Höhen über dem Meeresspiegel bei mittlerem Atmosphären-  
 zustand und  $t_m = 0^\circ$  gibt folgende Tafel:

Seehöhe m	Luftdruck mm Q-S	Seehöhe m	Luftdruck mm Q-S	Seehöhe m	Luftdruck mm Q-S
0	760	2000	598	10 000	229
100	751	3000	530	15 000	124
200	742	4000	470	20 000	68
300	733	5000	417	30 000	20
400	724	6000	370	40 000	6
500	716	7000	328	50 000	1
1000	674	8000	291		
1500	635	9000	258		

Größte von Menschen erreichte Höhe 10 500 m (A. Berson und R. Süring, 31. Juli 1901,  
 Ballon „Preußen“, 8400 cbm Wasserstoff).

## 2. In umschlossenen Räumen

kann die Aenderung der Dichtigkeit nach der Höhe vernachlässigt  
 werden.

Wandungsdruck in einem Gasbehälter.

Bedeutet

$\gamma'$  das Einheitsgewicht des Füllgases,  
 $\gamma$  " " " " der umgebenden Luft,

$\pm q$  den inneren Ueber-  
 Minder- druck in einer bestimmten Höhe des  
 Behälters in kg/qm,

so wirkt auf ein um  $+h$  oder  $-h$  höher oder tiefer liegendes  
 Wandungsstück der innere Ueberdruck

$$q_1 = \pm q \pm h(\gamma - \gamma').$$

Bei Ballonen mit unten offenem Füllansatz ist an dessen Unterrand  
 $q = 0$ .

### 3. Auftrieb und Gleichgewicht von Gasballonen.

a) Der **Auftrieb**, d. i. die gesamte, der Schwere entgegenwirkende  
 Kraft, ist gleich dem Gewicht der verdrängten Luftmenge, vermindert  
 um das Gewicht des Füllgases. Der Rauminhalt fester Teile ist zu  
 vernachlässigen.

Bedeutet

$V$  den Gasrauminhalt in cbm,  
 $a = \gamma - \gamma'$  den Einheitsauftrieb des Gases in kg/cbm,

$A = V \cdot a$  den Auftrieb in kg,  
 $G$  das Gesamtgewicht des Ballones in kg,

$(A - G$  den Auftriebsüberschufs),

$s = \frac{\gamma'}{\gamma}$  die auf Luft von gleichem Druck und gleicher Tem-  
 peratur bezogene Dichtigkeit des Gases,

$a_0 = \gamma_0 - \gamma'_0 = \gamma_0(1 - s)$  den Grundwert des Einheitsauftriebes  
 bei dem bestimmten, gleichen Gas- und Luftzustand  $P_0$  und  
 $T_0$  in kg/cbm,

so ergibt sich  $a$  für beliebigen Gaszustand ( $\gamma'$ ,  $P'$ ,  $T'$ ) und Luftzustand  
 ( $\gamma$ ,  $P$ ,  $T$ ) mit Hilfe der Zustandsgleichung zu

$$a = \gamma \left( 1 - s \frac{P' T'}{P T} \right) = a_0 \frac{P}{P_0} \frac{T_0}{1 - s} \left( \frac{1}{T} - \frac{s P'}{T' P} \right).$$

Es ist bei  $P_0 = 760$  mm Q-S und  $T_0 = 273^0$  ( $t_0 = 0^0$ ) in trockener  
 Luft ( $\gamma_0 = 1,293$  kg/cbm)

für	$\gamma'_0$ kg/cbm	$s$	$a_0$ kg/cbm
Leuchtgas . . . . .	0,67 bis 0,45	0,52 bis 0,35	0,62 bis 0,84
Wasserstoff, rein . . .	0,0896	0,0692	1,203
desgl. gew. Reinheit.	0,15	0,12	1,1

$P'$  ist praktisch immer gleich  $P$  anzunehmen, weil die Ballonhüllen  
 nur Pressungsunterschiede von wenigen cm W-S, also wenigen  
 Tausendsteln des absoluten Druckes zulassen.

$T'$  ist infolge von Sonnenbestrahlung oft erheblich (50 und mehr Grad) höher als  $T$ .

**b) Gleichgewichtshöhe.** Es ist  $A = V \cdot a = G$ .

Man berechnet die „Normalhöhe“  $H_n$  unter Annahme von  $t' = t = t_0 = 0^0$ . Dann ist

$$\frac{a_n}{a_0} = \frac{P_n}{P_0} = \frac{G}{a_0 V}$$

und nach der Höhenformel (mit  $H_0 = 0$ )

$$H_n = 18\,400 \log \frac{P_n}{P_0} = 18\,400 \log \frac{G}{a_0 V}.$$

Danach ist die Normalhöhe unmittelbar aus obiger Tafel zu entnehmen.

Ist der Gasraum  $V$  unveränderlich, so ergibt eine Gewichtsverminderung um  $g$  kg einen Zuwachs der Normalhöhe um

$$\Delta H = 18\,400 \log \left( 1 - \frac{g}{G} \right)$$

oder angenähert für  $g \leq 0,1 G$

$$\Delta H = 8000 \frac{g}{G}, *$$

also in jeder Höhe gleichmäßig 80 m Steigung auf eine Gewichtsverminderung von 1 vH.

Sind  $T'$  und  $T$  ungleich und von  $0^0$  verschieden, so ist angenähert die Gleichgewichtshöhe

$$H = H_n - 29,3 t + 8000 \frac{s}{1-s} \frac{T' - T}{T'}$$

Eine Aenderung der Lufttemperatur ( $t, T$ ) ändert also die Steighöhe in gleichem Sinne und stets um rund 30 m auf je  $1^0$  bzw. den Auftrieb um 3,67 vT auf  $1^0$ . Ein Temperaturüberschuß des Gases ( $T' - T$ ) ändert die Steighöhe (wenn  $T'$  zu  $300^0$  angenommen wird) bei

Leuchtgas (mit $s = 0,435$ )	um	20,5 m	auf	$1^0$
reinem Wasserstoff . . .	„	2,0 „	„	$1^0$
unreinem „ . . .	„	3,3 „	„	$1^0$

**c) Offener Gasballon** (gewöhnlicher Freiballon mit offenem Füllansatz).

Es ist  $V_{\max} = \text{konst.}$  Steigt der prall gefüllte Ballon, so strömt der Ueberschuß des sich ausdehnenden Gases ins Freie,  $A$  nimmt proportional dem Luftdruck ab, bis die Gleichgewichtshöhe ( $A = G$ ) erreicht ist. Steigt der schlaffe Ballon ( $V < V_{\max}$ ), so wächst  $V$  mit abnehmendem Luftdruck, bis er prall ist; so lange bleibt  $A$  (von Temperaturunterschieden abgesehen) unverändert. Beim Sinken vermindern sich  $V$  und  $A$  proportional dem zunehmenden Luftdruck. Gleichgewicht ist also nach unten nicht erreichbar. Geringes Uebersteigen der Gleichgewichtshöhe (z. B. durch Trägheitswirkung) hat also sogleich dauerndes Sinken zur Folge, falls  $G$  nicht vermindert wird.

\*) Dr. R. Emden, Deutsche Zeitschr. f. Luftschiffahrt 1901 S. 81.

Beim Sinken wird der Ballon schlaff, oder es tritt Luft ein, die sich allmählich mit dem Gase mischt, jedoch längere Zeit ziemlich getrennt unten stehen bleibt und bei nachfolgendem Steigen wieder hinausgedrängt werden kann.

**d) Geschlossene Ballone.** In der Gashülle sind besondere Luftsäcke (Ballonets) abgeteilt, die vor dem Aufstieg mit Luft aufgeblasen werden, sich beim Steigen entleeren und beim Sinken gefüllt werden. Bei nicht starren Luftschiffen geschieht das durch ein Gebläse, das den zum Prallhalten des Ballonkörpers nötigen Ueberdruck erzeugt. Solche Luftschiffe steigen (von dynamischem Auftrieb abgesehen) mit gleichbleibendem Auftrieb, bis die Luftsäcke entleert sind. Zu weiterem Steigen müßte Gas ausgelassen werden (Sicherheitsventile gegen unzulässigen Ueberdruck). Dann kann aber beim Sinken die Form zuletzt nicht mehr prall gehalten werden.

Erforderlicher Luftsackinhalt für eine verlangte Steighöhe  $H$  in m.

Es sei

$V$  der ganze Balloninhalt in cbm,  
 $V' = mV$  der Luftsackinhalt in cbm.

$P_0$  der Luftdruck am Aufstiegsort,

$P$  der Luftdruck in der verlangten Höhe.

Dann gilt bei gleichbleibender Gas- und Lufttemperatur, da die Gasmenge unverändert bleiben soll:

$$\frac{P_0}{P} = \frac{V}{V - V'} = \frac{1}{1 - m}.$$

Daher nach der Höhenformel, mit  $H_0 = 0$

$$\begin{aligned} H &= 18400 \log \left( \frac{1}{1 - m} \right) = -8000 \log \text{nat} (1 - m) \\ &= 8000 \left( m + \frac{m^2}{2} + \frac{m^3}{3} + \dots \right) \end{aligned}$$

und angenähert (Fehler bis  $m = 0,3$  kleiner als 3 vH)

$$H = 4000 (2m + m^2); \quad m = \sqrt{1 + \frac{H}{4000}} - 1.$$

Für  $H = 500 \quad 1000 \quad 1500 \quad 2000 \quad 2500 \quad 3000$  m

mufs demnach sein  $m = \frac{V'}{V} = 0,06 \quad 0,12 \quad 0,17 \quad 0,22 \quad 0,27 \quad 0,31$

**e) Geschlossene Ballone ohne Luftsack** mit leicht dehnbarer Hülle dienen meteorologisch, um Meßinstrumente in große Höhen zu tragen („Ballon-Sonden“). Bei annähernd vollständigem Druck- und Temperaturausgleich mit der Luft wächst  $V$  proportional mit abnehmendem  $P$ . Sie steigen daher mit unverändertem Auftrieb immer weiter, bis die Hülle platzt. (Erreichte Höhe etwa 30 000 m mit Kautschuk-Ballonen von  $V_0 \cong 4$  cbm)

#### 4. Statische Stabilität von Gasballonen.

Stabiles Gleichgewicht ist nur vorhanden, wenn der Körper-schwerpunkt senkrecht unter dem Schwerpunkt der verdrängten Luft-masse (bzw. des Gasinhaltes) liegt. Der Begriff des Metazentrums im

Sinne des Schiffes (vgl. II. Bd. S. 672) entfällt, weil keine äußere Oberfläche vorkommt.

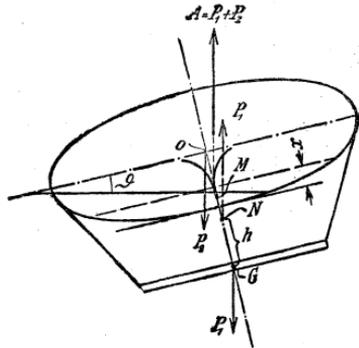
In der Ballonhülle bildet aber das Gas mit der eingedrungenen, oder in (teilweise gefüllten) Luftsäcken enthaltenen Luft eine Art innerer Oberfläche. Die Luft sucht bei Schwankungen die tiefste Lage auf und drängt das Gas nach der höherstehenden Seite, so daß der Auftrieb dem aufrichtenden Moment der Schwerkraft entgegenwirkt. Bei langen Luftschriften mit einfachem Luftsack längs des Bodens kann dadurch die Stabilität gefährdet werden.

Die Richtungslinien des Auftriebes  $A$  umhüllen bei Schwankungen um die wagerechte Querachse (Stampfen) eine aus den besonderen Formverhältnissen bestimmbare (zum Ballon fest gedachte) Kurve, die von einem Punkte  $M$  auf der senkrechten Schwerachse aus nach vorn und hinten ansteigt, also bei  $M$  eine abwärts gerichtete Spitze bildet. Bei kleinen Schwingungen kann man  $A$  immer durch  $M$  gehend annehmen. Es sei  $P_1$  das Gewicht der Gondel mit Zubehör,  $G$  deren Schwerpunkt,  $O$  der Schwerpunkt der Ballonhülle mit daran befestigten Teilen. Ein Punkt  $N$  auf  $\overline{GO}$  sei so bestimmt, daß er den Abstand  $n = \overline{MO} \cdot \frac{A}{P_1}$  von  $O$  habe; seine Höhe über  $G$  sei  $h$ . Dann ist bei einem Winkelausschlag  $\vartheta$  aus der wagerechten Lage (Trimmwinkel) das verbleibende aufrichtende Kräftepaar  $= P_1 \cdot h \cdot \sin \vartheta$ . Solange  $N$  über  $G$  liegt ( $h$  positiv), kehrt der Ballon also in die wagerechte Lage zurück. Deshalb heißt  $N$  das Metazentrum des Ballones (Meusnier).

Für einen Ballon von Ellipsoidform (Abb. 152) mit den Durchmesser  $l$  in der Fahrtrichtung und  $d$  senkrecht ist, wenn die den Luftsack und mithin die innere Oberfläche bildende Scheidewand bei wagerechter Lage des Ballones in der Höhe  $x$  über dem tiefsten Punkte liegt und bei Schwankungen wagerecht bleibt, die Entfernung

$$n = \frac{3}{2} \frac{P}{P_1} \cdot \frac{l^2 - d^2}{d^2} \cdot \frac{(d - x)^2}{3d - 2x}.$$

Abb. 152.



### III. DYNAMIK LUFTFÖRMIGER KÖRPER.

#### A. Allgemeines.

Wegen der Zusammendrückbarkeit luftförmiger Körper sind Bewegungen im allgemeinen auch mit Dichtigkeits- und Wärme- bzw.

Energieänderungen verknüpft (thermodynamische Vorgänge). Erhebliche Bedeutung haben solche jedoch hauptsächlich nur bei Vorgängen, die an geschlossene Räume gebunden sind (Kompression, Expansion, Ausströmung) (s. S. 423 u. f.). Im offenen Luftraum erlangen sie Bedeutung nur bei den thermodynamischen Schwingungen (Schallwellen) und wenn Geschwindigkeiten auftreten, die denen des Schalles nahe kommen (333 m/sk für atmosphärische Luft).

Geschwindigkeiten solcher Größe kommen beim Fluge von Geschossen\*) vor; anderweit mechanisch erzeugte Bewegungen und auch die natürlichen Luftströmungen (Wind) bleiben meist so weit unter dieser Grenze, daß die thermodynamischen Wirkungen vernachlässigt werden können.\*\*) Die Vorgänge können dann wie solche in tropfbaren Flüssigkeiten behandelt werden. In diesem Abschnitt handelt es sich also vorwiegend um die technische Hydrodynamik des offenen Luftraumes. Viele Angaben haben aber allgemeine Bedeutung für alle Flüssigkeiten, weil die Vorgänge grundsätzlich gleichartig sind und auf den gemeinsamen Grundgleichungen beruhen.

**Schallgeschwindigkeit** (Theorie von Newton, 1686, und Laplace, 1818).

Bedeutet  $\alpha$  die Elastizitätszahl des den Schall leitenden Stoffes

$g$  die Beschleunigung der Schwere in m/sk<sup>2</sup>

$v$  den Einheitsraum des Stoffes in cbm/kg

$P$  den Einheitsdruck in kg/qcm,

so ist die Schallgeschwindigkeit

$$w_s = \sqrt{-\alpha g v^2 \frac{\partial P}{\partial v}}.$$

Für luftförmige Körper ist  $Pv = RT$  (vgl. S. 342), also  $v \frac{\partial P}{\partial v} = -P$ ; und für Luft und alle einfachen (2-atomigen) Gase ist  $\alpha = 1,41$  (vgl. S. 424). Damit wird

$$w_s = \sqrt{\alpha g Pv},$$

woraus für Luft bei 0°  $w_s = 332,5$  m/sk.

Für tropfbare Flüssigkeiten ist die Raumverminderung

$$\alpha = v \frac{\partial P}{\partial v} \text{ auf 1 kg/qcm,}$$

z. B. bei Wasser  $\alpha = 10^{-6} \cdot 48$

Aether  $= 10^{-6} \cdot 111$

Quecksilber  $= 10^{-6} \cdot 3$ .

Es wird

$$w_s = \sqrt{\alpha g v \frac{10000}{\alpha}}.$$

$\alpha$  ist wegen der geringen Zusammendrückbarkeit fast genau gleich 1. Daher berechnet sich für Wasser  $w_s = 1430$  m/sk (nach Versuchen 1435 m/sk).

\*) Der Luftwiderstand fliegender Geschosse erreicht bei Ueberschreiten der Schallgeschwindigkeit ein Maximum und nähert sich dann asymptotisch einem Grenzwert (s. C. Crantz „Aeusere Ballistik“. Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften, Bd. IV).

\*\*) Bei Geschwindigkeiten . . . . . bis 45 100 m/sk sind die Dichtigkeitsänderungen in atmosphärischer Luft kleiner als 1 5 vH.

## B. Grundbegriffe und einige Lehrsätze der theoretischen Hydrodynamik.\*)

### 1. Bewegungen der „vollkommenen Flüssigkeit“.

Die ideale Flüssigkeit wird reibungsfrei gedacht, d. h. sie haftet nicht, oder sie hat die Zähigkeit = Null. Der Druck steht deshalb an jeder Stelle immer senkrecht zu jedem beliebig geführten Schnitt; tangential gerichtete Druckkomponenten (Schubspannungen, die bei wirklichen Flüssigkeiten in der Bewegung auftreten) sind ausgeschlossen.

An einem beliebig herausgeschnittenen Teil gehen die Druckkräfte, ebenso wie die äußeren (Massen-) Kräfte (z. B. die Schwerkraft), immer nur durch den Schwerpunkt. Infolgedessen können Drehungen von Flüssigkeitsteilen, also Wirbel, durch solche Kräfte (die sich von einem Potential ableiten lassen) nicht erzeugt oder, wenn sie vorhanden sind, nicht gehemmt werden. Die ideale Flüssigkeit bleibt also immer drehungsfrei, wenn sie es zu Anfang war. Beim Fortfall aller Reibung kann sie ferner keine Arbeit vernichten bzw. in Wärme verwandeln und deshalb einer in ihr vorgehenden Bewegung keinen arbeitverzehrenden Widerstand entgegensetzen. Die leichte Wirbelbildung in wirklichen Flüssigkeiten und ihre Strömungswiderstände sind daher nur eine Folge ihrer Zähigkeit. Durch das gegenseitige Anhaften benachbarter Teilchen werden alle Bewegungen um so stärker gehemmt, je größere Geschwindigkeitsunterschiede zwischen ihnen bestehen. Bei wirbelfreier Strömung sind diese Unterschiede sehr klein; bei Wirbelbewegung dagegen haben benachbarte Teilchen in den Berührungsfächen endliche Geschwindigkeitsunterschiede; daher starke Umsetzung von Arbeitsmengen in Reibungswärme.

### 2. Kennzeichen drehungsfreier Bewegung.

Ist in einem Flüssigkeitsraume Drehbewegung vorhanden, so sind darin Bewegungsbahnen zu finden, die in sich zurücklaufen oder, bei gleichzeitiger Fortschreitung, doch zyklologisch gewunden sind. Bei solchen Bahnen hat das Linienintegral  $\int \mathbf{w} ds$  aus den in der Bahnrichtung genommenen Geschwindigkeitskomponenten  $\mathbf{w}$  und den Bahnelementen  $ds$  einen von Null verschiedenen Wert, weil die Geschwindigkeit mit der Bahn überall gleich gerichtet ist oder doch eine bestimmte Drehrichtung in ihr überwiegt. Die Bedingung drehungs- oder wirbelfreier Bewegung ist daher

$$\int_0^0 \mathbf{w} ds = 0,$$

die über jede beliebige geschlossene Linie erfüllt sein muß.

### 3. Das Geschwindigkeitspotential.

Bei wirbelfreier Bewegung läßt sich zu jedem Punkte des Raumes eine richtungslose Größe („Geschwindigkeitspotential“) angeben, aus

\*) Vgl. u. a. Föppl, Vorlesungen über technische Mechanik, Bd. IV.

der die Geschwindigkeitskomponente nach irgend einer Richtung durch Differentiation in dieser Richtung abgeleitet werden kann. Wo Drehungen vorhanden sind, ist das nicht mehr der Fall.

Das Geschwindigkeitspotential  $\Phi$  ist also definiert durch

$$w_1 = \frac{\partial \Phi}{\partial x}; \quad w_2 = \frac{\partial \Phi}{\partial y}; \quad w_3 = \frac{\partial \Phi}{\partial z};$$

wenn  $x, y, z$  die Raumkoordinaten eines Punktes und  $w_1, w_2, w_3$  die zugehörigen Geschwindigkeitskomponenten nach den Achsrichtungen bedeuten.

Wenn ein Geschwindigkeitspotential bestehen soll, muß sein

$$\frac{\partial w_1}{\partial y} - \frac{\partial w_2}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial w_2}{\partial z} - \frac{\partial w_3}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial w_3}{\partial x} - \frac{\partial w_1}{\partial z} = 0$$

(andere Form der obigen Bedingung für drehungsfreie Bewegung).

#### 4. Eigenschaften der Wirbel.\*

Die geometrische Summe der vorstehenden 3 Ausdrücke gibt, wenn sie von Null verschieden sind, das Maß für die Stärke und Richtung des Wirbels (Wirbelvektor oder „Quirl“ =  $\mathfrak{B}$ ). Die Richtung von  $\mathfrak{B}$  gibt die Richtung der Wirbelachse bzw. der „Wirbellinien“ und „Wirbelfäden“, an (Linien bzw. Elementar-Röhren, die überall senkrecht zu den Schmiegungebenen der Drehbewegung stehen).

Werden in einer reibungslosen Flüssigkeit Wirbel angenommen, so gelten u. a. folgende Sätze (von H. von Helmholtz aus den Eulerschen Grundgleichungen [vgl. S. 268] abgeleitet).

1. Ein Wirbelfaden kann innerhalb der Flüssigkeit nicht aufhören, sondern muß entweder eine in sich zurückkehrende Kurve bilden (Wirbelring) oder sich bis an die Grenzen fortsetzen (weithin verlaufende „Wirbelzöpfe“ in wirklichen Flüssigkeiten).

2. Das Produkt aus Querschnittsgröße  $dF$  eines Wirbelfadens und dem zugehörigen Quirl  $\mathfrak{B}$  heißt die Stärke des Wirbelfadens.  $\mathfrak{B} dF$  ist über die ganze Länge eines Wirbels unveränderlich und ferner auch der Zeit nach unveränderlich (wie auch die Stärke des ganzen Wirbels).

3. Jeder Wirbelfaden besteht immer aus denselben Flüssigkeitsteilchen, die ihn zu Anfang gebildet haben. Die Teilchen kreisen nicht einfach um eine Wirbelachse, sondern vollführen eigene gleichläufige Drehungen (daher bei nicht vollkommener Flüssigkeit starke innere Reibungen). Auch der ganze Wirbel besteht immer aus derselben Flüssigkeitsmasse (daher z. B. das Zusammenhalten von Rauchringen).

#### 5. Kontinuitätsbedingung und Druckgleichung.

Für die vollkommene und nicht zusammendrückbare Flüssigkeit wird die Kontinuitätsbedingung

$$\frac{\partial_2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial_2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial_2 \Phi}{\partial z^2} = 0.$$

\* Vgl. H. v. Helmholtz, *Wissenschaftl. Abhandlungen* Bd. I S. 101 u. f.

Ist die Strömung drehungsfrei und ferner stationär, d. h. der Zeit nach nicht veränderlich, so folgt durch Integration aus den Eulerschen Grundgleichungen die allgemeine Druckgleichung

$$\frac{\gamma}{2g} \cdot w^2 + V + P = \text{konst.} = P_0,$$

die für alle Punkte eines zusammenhängenden Flüssigkeitsraumes erfüllt sein muß. Darin ist  $\gamma \frac{w^2}{2g}$  die kinetische Energie an dem betreffenden Punkte ( $\frac{w^2}{2g}$  heißt die „Geschwindigkeitshöhe“);  $P$  ist der dort herrschende hydrostatische Druck und  $V$  das Potential der äußeren Kräfte oder die potentielle Energie (so daß die auf die Raumeinheit bezogenen Kraftkomponenten, z. B. nach der  $x$ -,  $y$ -,  $z$ -Richtung,  $X = \frac{\partial V}{\partial x}$ ;  $Y = \frac{\partial V}{\partial y}$  usw.). Gewöhnlich kommt als äußere Kraft nur die Schwere in Betracht. Dann ist  $V = H \cdot \gamma$  zu setzen, worin  $H$  die Höhe über einem Niveau bedeutet, in dem man  $V = 0$  setzen will, und in dem bei ruhender Flüssigkeit der unveränderliche Druck  $P_0$  herrscht.

Bedeutet noch

$h$  den Höhenunterschied zweier Punkte,

$\mu = \frac{\gamma}{g}$  die Einheitsmasse der Flüssigkeit,

so ist auch

$$\frac{\mu}{2} (w_2^2 - w_1^2) = P_1 - P_2 + h \gamma$$

(Zeiger 1 für den höher-, 2 für den tiefergelegenen Punkt). Das Glied  $h \gamma$  kann bei luftförmigen Flüssigkeiten für technische Vorgänge aber fast immer vernachlässigt werden.

## 6. Räumliche (dreidimensionale) Strömung.

Nur für besondere Fälle einfacher Körperformen sind Lösungen bekannt.

Beispiel: **Strömung um eine Kugel**, die in unbegrenztem Flüssigkeitsstrom schwimmt. Der Radius sei  $\rho$ . An einem beliebigen Punkte im Abstand  $r$  (nach Größe und Richtung) von der Kugelmitte ist

$$\Phi = a \cdot z \cdot \left( \frac{\rho^3}{2r^3} + 1 \right) \text{ (Dirichlet),}$$

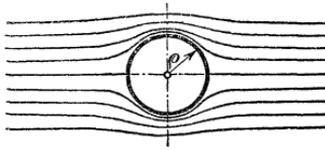
$a$  = Strömungsgeschwindigkeit in unendlicher Entfernung von der Kugel,

$z$  = Abszissenlänge in der Strömungsrichtung, von der Kugelmitte aus gerechnet.

Die Gleichung erfüllt die Kontinuitätsbedingung und die Grenzbedingungen:  $w = a$  für  $r = \infty$  und  $w \perp r$  für  $r = \rho$ . Sie gibt die einzig stabile Strömungsart für die vollkommene Flüssigkeit (s. Abb. 153). Die Druckgleichung gibt dazu die an beliebigen Punkten herrschenden

Drücke. In den Endpunkten des in die Stromrichtung fallenden Kugeldurchmessers, wo sich die Flüssigkeit teilt bzw. wieder vereinigt (**Spaltungspunkte**), ist der Druck am größten

Abb. 153.



$$P_{\max} = P_0 + \mu \frac{a^2}{2} \quad \text{bei } w = 0.$$

Am Äquator herrscht bei größter Geschwindigkeit der kleinste Druck

$$P_{\min} = P_0 - \frac{5}{8} \mu a^2 \quad \text{bei } w_{\max} = \frac{3}{2} a.$$

Da  $P$  nicht negativ werden kann, so muß  $P_0 > \frac{5}{8} \mu a^2$  sein, damit keine Hohlraumbildung („Cavitation“) entsteht. Die Drücke sind an entsprechenden Punkten beiderseits der Äquatorebene, also auf Vorder- und Rückseite der Kugel gleich. Ihre Wirkung hebt sich also auf, und der Strömungswiderstand ist Null.

Schweben zwei Kugeln in einem quer zur Strömung gerichteten Abstand nebeneinander, so wirkt auf sie, gleichfalls ohne Druck in der Stromrichtung, eine quergerichtete Kraft, die sie zueinander hingedrängt. Eine einzelne Kugel nahe einer der Strömung parallelen Begrenzungswand erleidet einen senkrecht zur Wand gerichteten Druck. Ursache ist die erhöhte Strömungsgeschwindigkeit innerhalb der entstandenen Verengung und dementsprechend hier verminderter Druck dem außen bei geringeren Geschwindigkeiten höhere Drücke gegenüberstehen.

An einer freien Oberfläche erzeugen die Druckunterschiede Oberflächenwellen, die Energie verzehren, indem sie sie in das Unendliche zerstreuen. In diesem Falle ergeben sich daher auch in idealer Flüssigkeit einseitig überwiegende Druckkräfte in der Stromrichtung.

Entsprechende Lösungen lassen sich noch für die räumliche Strömung und andere Umdrehungskörper ableiten.

Allgemein gilt dabei, daß, auch bei beliebig geformtem Körper, in drehungsfreier Strömung die Drucksumme in der Stromrichtung  $= 0$  ist (wie schon aus der Definition der vollkommenen Flüssigkeit folgt), und daß in den Spaltungspunkten die Geschwindigkeit  $= 0$ , der Ueberdruck also, wie bei der Kugel, der vollen Geschwindigkeitshöhe entspricht. (Bei wirklichen Flüssigkeiten trifft das nur für den vorderen Spaltungspunkt allgemein zu.)

## 7. Ebene (zweidimensionale) Strömungen

finden statt, wenn Geschwindigkeitskomponenten in der dritten Dimension ausgeschlossen werden. Sie liegen annähernd vor, wenn ein zylindrischer Körper von so großer Länge, daß der Einfluß der Endflächen vernachlässigt werden kann, quer in unbegrenzten Flüssigkeitsstrom gestellt wird (oder wenn seine Endflächen bis an parallele Begrenzungswände des Flüssigkeitsstromes reichen). Dann ist die Strömung in allen Querschnittsebenen gleich und ihre analytische Behandlung erheblich vereinfacht.

Die **Kontinuitätsbedingung** verlangt jetzt bei unelastischer Flüssigkeit, daß in ein von einer geschlossenen Kurve umgrenztes Feld jederzeit die gleiche Flüssigkeitsmenge ein- wie ausströmt oder, was daraus folgt, daß je zwei beliebig gezogene Verbindungslinien zwischen zwei festen Punkten von der gleichen Flüssigkeitsmenge in der Zeiteinheit überströmt werden. Darauf beruht der Begriff der „Stromfunktion“.

Die Stromfunktion  $\Psi$  eines Punktes  $A$  im durchströmten Felde ist die Flüssigkeitsmenge, die in der Zeiteinheit eine beliebige, von  $A$  nach dem Koordinatenursprung  $O$  gezogene Linie überschreitet. Die Wahl der Linie ist nach obigem gleichgültig. Wird statt  $O$  ein anderer Punkt  $O'$  zum Ursprung gewählt, so werden alle  $\Psi$  doch nur um den festen Betrag  $\Psi''$  verändert, der die Stromfunktion von  $O'$  in bezug auf  $O$  darstellt, also die Flüssigkeitsmenge, die eine von  $O$  nach  $O'$  gezogene Linie in der Zeiteinheit überschreitet. Ist kein bestimmter Ursprung angegeben, so ist  $\Psi$  demnach doch bis auf eine Konstante bestimmt.

Stromlinien sind Linien, welche überall die Bewegungsrichtung der Flüssigkeit enthalten, für welche also die übertretende Flüssigkeitsmenge Null und  $\Psi$  demnach für alle Punkte gleich ist. Stromlinien sind überall senkrecht zu den Linien gleichen Potentials.

Das Stromliniensystem gibt die anschaulichste Abbildung einer Strömung, vgl. Abb. 154 u. f. Es wird für gleiche Aenderung von  $\Psi$  von jeder Stromlinie zur nächsten gezeichnet. Man kann es auch als ein Bündel von „Stromröhren“ auffassen, deren jede von der gleichen Flüssigkeitsmenge in der Zeiteinheit durchflossen wird. Der Stromlinienabstand entspricht dem Querschnitt der Stromröhren, ist also umgekehrt proportional der Strömungsgeschwindigkeit an der betreffenden Stelle. Im ungestörten, wirbelfreien Felde sind die Stromlinien parallele Geraden von gleichem Abstand („homogene Strömung“).

Erweiterung des Stromlinienabstandes bedeutet der verminderten Geschwindigkeit entsprechend erhöhten Druck und umgekehrt. An Krümmungen der Stromlinien wirken Zentrifugalkräfte, denen als Zentripetalkräfte Zunahme des Druckes und somit des Stromlinienabstandes in Richtung des Krümmungshalbmessers entgegenstehen mufs. Diese Gesichtspunkte sind bei der Abschätzung von Strömungsvorgängen nützlich.

Rechnungsgang. Man erhält zusammengehörige Ausdrücke für  $\Phi$  und  $\Psi$ , indem man setzt

$$u = \text{Funkt}(z) = \Phi + i\Psi,$$

worin  $u$  eine beliebige Funktion der komplexen Variablen  $z = x + iy$  bedeutet, deren reeller Anteil  $x$  als Abszisse in Richtung der Strömung und deren imaginärer Teil  $y$  als Ordinate senkrecht dazu aufgefaßt wird. Dann wird nämlich:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

und ferner

$$\frac{\partial_2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial_2 \Phi}{\partial y^2} = 0; \quad \frac{\partial_2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial_2 \Psi}{\partial y^2} = 0.$$

Demnach erfüllt sowohl  $\Phi$  als  $\Psi$  die Kontinuitätsbedingung, und man kann für jede beliebige Form der Funktion  $u$  zunächst ihren reellen Anteil als das Geschwindigkeitspotential irgend einer Strömung ansehen. Ist  $\mathbf{w}$  nach Größe und Richtung die daraus abgeleitete Geschwindigkeit, so wird ferner für jedes beliebige Element  $\mathbf{w} dt$  des Flüssigkeitsweges  $d\Psi = 0$ . Der imaginäre Anteil  $\Psi$  von  $u$  stellt somit richtig die Stromfunktion derselben Strömung dar. Auch bei Vertauschung von  $\Phi$  und  $\Psi$ , also Vertauschung von Aequipotential- und Stromlinien, ergibt sich hiernach eine kinematisch mögliche Strömung.

Man kann also, von beliebigen Formen der Funktion  $u$  ausgehend, die entsprechende Strömung berechnen. Jede Stromlinie kann dann auch durch eine feste Wand ersetzt, bzw. ihre Gleichung als Grenzbedingung angesehen werden.

**Beispiel.** Strömung an einem Kreiszyylinder vom Radius  $\rho$  und von unendlicher Länge quer zur Strömung. Die Gleichung

$$w = a \left( z + \frac{\rho^2}{z} \right)$$

führt auf die einzig mögliche stabile Strömung ohne Wirbel. Sie ergibt mit  $r^2 = x^2 + y^2$  (Modul der komplexen Variablen  $z$ )

$$\Phi = ax \left( \frac{\rho^2}{r^2} + 1 \right); \quad \Psi = ay \left( 1 - \frac{\rho^2}{r^2} \right)$$

und erfüllt die Grenzbedingungen  $w = a$  für  $z = \infty$  und  $\mathbf{w} \perp r$  für  $r = \rho$ . Die Geschwindigkeit ist am größten ( $w_{\max} = 2a$ ) an den Endpunkten des Durchmessers quer zur Strömung. Das Strömungsbild ähnelt dem der Kugel (Abb. 153).

Hydrodynamisch möglich sind auch unsymmetrische Strömungen mit Komponenten, die einer um den Zylinder kreisenden Bewegung (s. unten) entsprechen. Sie sind nicht stabil, werden aber durch sehr geringe Ungleichförmigkeiten der Bewegung leicht hervorgerufen. (Flackernde Bewegungen um den symmetrischen Strömungszustand.)

## 8. Zirkulation und dynamischer Auftrieb bei ebenen Strömungen.

In einem Raum, der nicht „einfach zusammenhängend“, sondern von einer inneren Wand (oder von mehreren) durchteilt, also „doppelt (mehrfach) zusammenhängend“ ist, sind Kreisströmungen um innere Wände herum ohne Wirbel möglich („Zirkulation“). Bei wirbelfreier Bewegung muß dann die obige Bedingung für alle nicht um eine innere Wand herumlaufenden Bahnen erfüllt sein. (Im Querschnitt des ebenen Feldes erscheinen die inneren Wände als Inseln, die auch zu einfachen Linien zusammengezogen sein können.)

Wird ein durchteilter Raum von einem Flüssigkeitsstrom derart durchflossen, daß die Strömung angesehen werden kann als eine sich zu der fortschreitenden Bewegung überlagernde Kreisströmung um den inneren Körper herum („Zirkulationsströmung“), so erleidet dieser einen senkrecht zur Bewegungsrichtung gerichteten Druck nach der Seite hin, wo sich die Geschwindigkeit der Kreisbewegung zu der fortschreitenden addiert. (Denn auf dieser Seite herrscht der erhöhte

Geschwindigkeit entsprechend niedriger Druck, wie aus der Druckgleichung folgt; auf der anderen Seite umgekehrt. (Allgemeine Ableitung s. H. Lamb, Hydrodynamics, Cambridge 1895 S. 88; deutsch von Friedel, Leipzig 1908.)

Bei unsymmetrischen Körpern mit geeignetem, flügel förmigen Querschnitt kann solche Strömung stabil und drehungsfrei sein. Dann würden also (bei unendlicher Länge des Körpers) Druckkräfte entstehen, die keine Widerstandskomponente in der Bewegungsrichtung haben. (Ähnliche Wirkung schon im einfach zusammenhängenden Raume bei den unsymmetrisch umströmten Kugeln. (Vgl. zu 6.)

### 9. Flügeltheorie; Kuttasche Strömung.

Das Fliegen der Drachen (Flugdrachen, Aeroplane) vollzieht sich vermöge derartiger Zirkulationsströmungen\*) bei verhältnismäßig geringem Arbeitsaufwand.

Fliegen heißt, im Gegensatz zum Schwimmen, das Schweben eines Körpers im Luftraum vermöge dynamischer Auftriebskraft. Flügel sind zum Fliegen dienende Körperteile, die dynamischen Auftrieb erzeugen.

Dynamischer Auftrieb im allgemeinen entsteht, wenn von dem Körper eine abwärts gerichtete Strömung von Luft- (oder auch anderen) Massen ausgeht, deren Rückdruck den Körper hebt. Ist das eine gleichförmige und gleichgerichtete Abwärtsströmung (Strahlbewegung), so ist der größtmögliche Rückdruck bei gegebenem Arbeitsverbrauch proportional der in der Zeiteinheit beschleunigten Masse und umgekehrt proportional der Strömungsgeschwindigkeit. (Näheres s. unter 10.) Derartige Auftriebserzeugung ist also bei nicht sehr niedrigen Reaktionsgeschwindigkeiten unvorteilhaft.

Dem niedergehenden Luftstrom muß an anderen Stellen des kontinuierlich erfüllten Raumes eine Aufwärtsbewegung entsprechen. Bei einfacher Strahlbewegung (Hubschrauben u. dgl.) vollzieht diese sich außerhalb des Bereiches des Flugkörpers; dann wird das Arbeitsvermögen des niedergehenden Luftstromes durch Reibung und Wirbel zerstreut und muß immer ganz von neuem aufgewendet werden.

Die niedergehende Strömung kann aber so geleitet werden, daß die entsprechende Aufwärtsbewegung (wenigstens teilweise) dem geradlinig fortschreitenden Körper entgegenkommt und zur Hebewirkung beiträgt.

Flügel mit leicht nach oben gewölbtem Profil rufen bei gleichförmig fortschreitender Relativbewegung zur Luft einen solchen Strömungsvorgang hervor. Das ideale Strömungsbild (Abb. 155, schematisch) gleicht einer einzelnen Welle, die den Flügel trägt. Die Strömung ist eine Zirkulationsströmung, und nach obigem Satze ist (wenigstens bei unendlicher Spannweite des Flügels, der dann den unbegrenzten

\*) Bei der Kreisbewegung sind es nicht die Bahnen der einzelnen Flüssigkeitsteilchen, die den Körper umkreisen, sondern die Hüllkurven der Richtungslinien derjenigen Geschwindigkeitskomponenten, die zu der geraden Fortschrittungsgeschwindigkeit hinzugefügt sind. Die Bahnen der Teilchen sind, wenn man den Körper fortschreitend und die umgebende Flüssigkeit ruhend denkt, kleine geschlossene Bahnen, die den Körper nicht umkreisen. Ihre Bewegung ist ähnlich der in den Wasserwellen stattfindenden.

Luftraum zu einem doppelt zusammenhängenden macht) die auf ihn wirkende Kraft senkrecht zur Strömung gerichtet, also der Widerstand in der Bewegungsrichtung Null und keine Arbeitsleistung nötig zum Erhalten der Bewegung („vollkommener Flügel“). Die Einheitsbelastung der Flügelfläche kann dabei eine endliche Größe haben. (Bei Hubschrauben u. dgl. wird dagegen der theoretische Arbeitsbedarf nur bei unendlich kleiner Flächenbelastung gleich Null; s. unten.)

Ebene Flügel, unter einem „Anstellwinkel“ ( $\alpha$ ) schräg gegen die Bewegungsrichtung gestellt, erzeugen unvollkommene Strömungen dieser Art. Das theoretische Strömungsbild (Abb. 154, nach Lamb) zeigt bereits die Aufwärtsbewegung vor der eintretenden Kante. Die Strömung ist so nicht physikalisch möglich, weil die Kanten der

Abb. 154.

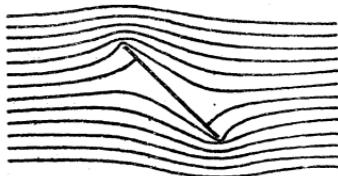
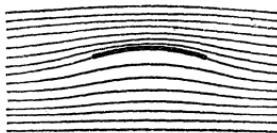


Abb. 155.



Platte von den beiden Zweigen des mittleren Stromfadens, der sich in von den Kanten entfernten Spaltungspunkten teilt bzw. wieder vereinigt, mit unendlicher Geschwindigkeit umflossen werden müßten. (Negativ unendliche Drücke.) Deshalb setzen an diesen Kanten Wirbel an (vgl. das wirkliche Strömungsbild, Abb. 160).

Um die unendlichen Geschwindigkeiten zu vermeiden („stofsfreien Eintritt“ zu erzielen), genügt es nicht, die Eintrittstangente der Platte in die Bewegungsrichtung abzubiegen. Erst wenn die Eintrittstangente in bedingtem Maße abwärts geneigt ist, können die Spaltungspunkte an die Kanten rücken und die Geschwindigkeiten an beiden endlich werden.

Gewölbte Flügel. Den Anstellwinkel  $\alpha$  rechnet man zwischen Wölbungssehne und Bewegungsrichtung. Als Wölbungsmaß dient gewöhnlich das Verhältnis der Sehnenlänge zur größten Pfeilhöhe des Bogens.

Bei  $\alpha = 0$  entsteht bereits eine beträchtliche Auftriebskraft infolge der Geschwindigkeitsunterschiede unten und oben (vgl. Abb. 155).

Zur Berechnung solcher Strömungen hat Kutta (auf Anregungen von Finsterwalder) ein wichtiges Verfahren ausgearbeitet. Aus der allgemeinen Strömung an einem Kreiszyylinder (s. oben) leitete er durch das Verfahren der winkeltreuen (konformen) Abbildung die (zweidimensionale) Strömung an zylindrischen, unendlich breiten Schalen ab, deren Querschnitt ein Kreisbogen vom Zentrwinkel  $2\varphi$  ist, und zwar zunächst (1902) für die Stellung  $\alpha = 0$ ,\*)

\*) Deutsche Zeitschr. f. Luftschiff. 1902 S. 133.

später auch für beliebige  $\alpha$ .) Als Sonderfall mit  $r = \infty$ ,  $\alpha = 0$  kommt darin auch die ebene Schrägplatte vor.

In der allgemeinen Lösung erscheint die Zirkulation als eine willkürliche Konstante. Im beliebigen Falle sind die Geschwindigkeiten an beiden Kanten unendlich. Durch passende Wahl der Konstanten werden aber im Falle  $\alpha = 0$  die Geschwindigkeiten an beiden Kanten endlich. Bei  $\alpha > 0$  können nur an einer Kante unendliche Geschwindigkeiten vermieden werden. Diese wird wegen vermuthlich größerer Stabilität der Strömung als Hinterkante gewählt. Vorn muß sich der Spaltungspunkt von der Kante entfernen ( $\varphi_s < \varphi$ ); die Strömung verläuft nach Abb. 156 (schätzungsweise gezeichnet).

Durch leichte Verdickung und Abrundung der Vorderkante kann man aber unendliche Geschwindigkeiten bzw. negative

Abb. 156.

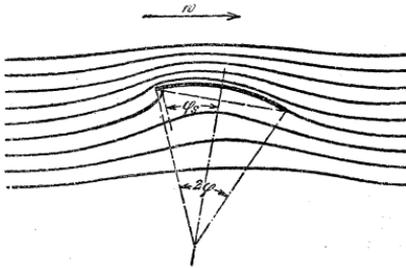


Abb. 157.



Drücke trotzdem vermeiden, ohne die Strömung im ganzen wesentlich zu verändern, falls nur die Hinterkante so dünn bleibt, daß gleichförmiges Ab-

fließen möglich. Scharfe Vorderkanten sind dann nicht nur nutzlos, sondern schädlich.

Die niedrigen Drücke an der Vorderkante bedingen eine vorteilhafte Saugwirkung (Zugkraft) in Richtung der Eintrittstangente, mit der zusammen der Gesamtdruck auf die Schale senkrecht zur Bewegung steht. Um sie zu erhalten, müssen auch zu hohe Beschleunigungen nahe der Kante vermieden werden. Daraus folgert Rutta das zweckmäßige Maß der Verdickung. Sie ist dem Verlauf der Stromlinie in dieser Gegend gemäß parabelförmig abzurunden (Abb. 157).

Die hydrodynamische Theorie führt also auf Flügelprofile, wie sie die Vögel tatsächlich haben. Wegen Ausschaltung des Einflusses der Seitenränder bzw. Flügelspitzen, wo Widerstand erzeugende Wirbel wahrscheinlich unvermeidlich sind, ist sie noch unvollständig.

Das Zahlenbeispiel einer Kreisbogenschale vom Wölbungsverhältnis 1:12 liefert jedoch schon bezüglich der Auftriebskräfte befriedigende und in manchen Punkten ausgezeichnete Uebereinstimmung mit den entsprechenden Versuchen von Lilienthal (s. unten).

\*) W. M. Kutta, „Ueber eine mit den Grundlagen des Flugproblems in Beziehung stehende zweidimensionale Strömung“. Sitzungsbericht d. Bayer. Akad. d. Wiss. München 1910.

**10. Strahlbewegung.**

Bedeutet

$F$  den Strahlquerschnitt am Punkte stärkster Einschnürung in  $q_m$ ,  
 $w$  die (gleichförmig angenommene) Geschwindigkeit in  $F$  in  $m/sk$ ,  
 $Q = F \cdot w$  die sekundlich strömende Flüssigkeitsmenge in  $cbm/sk$ ,

$\mu = \frac{\gamma}{g}$  die Masse eines  $cbm$  der Flüssigkeit,

so ist

der Rückdruck des Strahles gegen seine Ursprungsfläche

$$S = \mu Q w = \mu F \cdot w^2 \text{ in kg,}$$

die Arbeitsleistung des Strahles (die zu seiner Erzeugung verbraucht und bei drehungsfreier Strömung rückgewinnbar ist)

$$L = \mu Q \frac{w^2}{2} = \mu F \cdot \frac{w^3}{2}.$$

Demnach wird der Strahlrdruck

$$S = 2 \frac{L}{w}.$$

Bei gleichem Arbeitsverbrauch steht der Rückdruck in umgekehrtem Verhältnis mit der Geschwindigkeit.

**a) Ausflusstrahl.**

Bedeutet noch

$F_1$  den Querschnitt der Ausflusmündung in  $q_m$ ,

$p$  den hydrostatischen Druckunterschied an der Mündung in  $kg/qm$ ,

so ist, wenn die Reibung sehr klein ist,

$$w = \sqrt{2 \frac{p}{\mu}}.$$

Ist die Zufußgeschwindigkeit an der Wandung des ruhenden Ausflusgefäßes verschwindend klein, so muß der Rückdruck  $S$  gleich dem hydrostatischen Druck  $F_1 \cdot p$  auf die Mündungsfläche im Zustand der Ruhe sein; also

$$S = F_1 p = \mu F w^2 = 2 F p.$$

Daher  $F = \frac{F_1}{2}$  oder die Einschnürungszahl (vgl. S. 279 u. 305).

$$\alpha = \frac{F}{F_1} = 0,5 \text{ („vollständige“ Einschnürung).}$$

Dieser Fall tritt ein, wenn die Mündung gebildet ist durch ein inneres (einspringendes) zylindrisches Ansatzrohr von verschwindend kleiner Wanddicke und solcher Länge, daß die Zufußgeschwindigkeit an der Gefäßwandung verschwindend klein ist (vgl. Abb. 125 S. 281, mit  $\delta = 0^\circ$ )\*.

Ist die Wand des einspringenden Rohransatzes gegen die Richtung von  $w$  geneigt ( $\delta > 0$ ) oder dessen Länge nicht ausreichend, so wird die Einschnürung unvollständig und  $\alpha$  größer. Ist die Wand eine wagerechte Ebene, in der  $F_1$  einen kreisrunden Ausschnitt bildet ( $\delta = 90^\circ$ ), und das Gefäß als unendlich weit anzusehen, so ergibt die

\*) Vgl. Grashof, Theoretische Maschinenlehre, I. Bd. S. 435.

hydrodynamische Berechnung der Strömung mit Berücksichtigung des Wirbels in der Mantelfläche des Strahles

$$\alpha = \frac{\pi}{\pi + 2} = 0,61 \quad (\text{G. Kirchhoff}),$$

übereinstimmend mit der Beobachtung an Wasserstrahlen.

### b) Schraubenstrahl.\*)

Ein im flüssigkeitserfüllten Raume umlaufendes Flügelrad mit schraubenartig gestellten Flügeln erzeugt in seiner Drehungsfläche einen Druckunterschied mit wesentlich gleicher Wirkung, wie der Druckunterschied an einer Ausflußöffnung.

Es bedeute, dem obigen entsprechend,

- |                                                                                                     |   |                                                                        |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------|---|------------------------------------------------------------------------|
| $F$ den Querschnitt des eingeschnürten Strahles in $\text{qm}$ ,                                    | } | bezogen auf die nicht beeinflusste Flüssigkeit in größerer Entfernung, |
| $F_1$ die von den Flügeln bestrichene Kreisfläche in $\text{qm}$ ,                                  |   |                                                                        |
| $w$ die Strömungsgeschwindigkeit in $F$ in $\text{m/sk}$ ,                                          |   |                                                                        |
| $V$ die fortschreitende Geschwindigkeit der Schraube in Richtung ihrer Drehachse in $\text{m/sk}$ , |   |                                                                        |
| $Q$ die sekundlich strömende Flüssigkeitsmenge in $\text{cbm/sk}$ ,                                 |   |                                                                        |
| $p$ den in $F_1$ erzeugten Druckunterschied in $\text{kg/qm}$ ,                                     |   |                                                                        |
| $S$ den Rückdruck des Strahles auf die Schraube (Schrauben-<br>druck) in $\text{kg}$ ,              |   |                                                                        |
| $L$ die Antriebsleistung an der Schraubenachse in $\text{mkg/sk}$ .                                 |   |                                                                        |

Bei einer „idealen“ Schraube sei  $w$  rein achsial gerichtet, was bei einem gleichachsig gegenläufigen Schraubenpaar theoretisch möglich ist, wenn die beiderseitigen Drehmomente gleich sind. Solches Schraubenpaar werde als eine ideale Schraube betrachtet. Dabei sei ferner  $w$  über  $F$  unveränderlich.

[Bei einfachen Schrauben ist die Strahlbewegung schraubenförmig gewunden; die tangentialen Komponenten von  $w_1$ , die als Reaktion gegen das Drehmoment der Schraube entstehen müssen, sind jedoch selbst bei wenig günstiger Form nicht groß genug, um beträchtliche Fliehkraftwirkungen und erhebliche Verminderung der Einschnürung („Abschleudern“ der Flüssigkeit nach außen) hervorzubringen. Die zahlreichen Erfindungen, die die „Fliehkraft ausnutzen“ wollen, haben also, wie bei Wasserschrauben längst erwiesen, auch bei Luftschrauben keinen Zweck.]

1. Schraube am Festpunkt;  $V = 0$ .

Es ist

$$Q = F \cdot w$$

und

$$S' = \mu Q w = \mu F \cdot w^2 = F_1 p,$$

woraus mit

$$p = \mu \frac{w^2}{2}$$

die Einschnürung

$$F = 0,5 F_1,$$

wie bei dem Ausflußstrahl mit vollständiger Einschnürung.

\*) Nach Ansätzen von S. Finsterwalder und L. Prandtl. Vgl. Bendemann, Luftschrauben-Untersuchungen. Zeitschr. f. Flugtechnik u. Motorluftsch. 1910 S. 177.

$$\text{Mit } L = \mu Q \frac{w^2}{2} = \mu F \frac{w^3}{2}$$

wird ferner durch Elimination von  $w$  der größtmögliche Schraubendruck bei gegebener Gröfse und Antriebsleistung

$$S' = \sqrt[3]{4 \mu F L^2} = \sqrt[3]{2 \mu F_1 L^2}$$

und die theoretische Antriebsleistung für gegebenen Schraubendruck

$$L' = S \sqrt{\frac{S}{2 \mu F_1}} = S \sqrt{\frac{p}{2 \mu}} = S \cdot \frac{w}{2}$$

Die benötigte Antriebsleistung wächst quadratisch mit dem Einheitsdruck auf die Schraubenkreisfläche.

Bei Schrauben am Festpunkt ist wegen  $V=0$  der Wirkungsgrad gleich Null. Zum Vergleich kann das Verhältnis  $\zeta = S : S'$  des wirklich erzielten zum theoretisch möglichen Schraubendruck bei gleichem  $F_1$  und  $L$  dienen („Gütegrad“).

Bei einer Schar geometrisch ähnlicher Schrauben verschiedener Gröfse gilt, wenn  $u$  die Umfangsgeschwindigkeit der Flügelspitzen und  $C$  eine Konstante bedeutet

$$S = L \frac{C}{u}$$

Bei gleicher Antriebsleistung ist also der Schraubendruck gleich, wenn sie mit gleicher Umfangsgeschwindigkeit gedreht werden; er sinkt proportional mit wachsendem  $u$ .

$C$  kann für flachgängige Schrauben sehr groß werden, doch wird  $\frac{S}{F_1}$  dann entsprechend kleiner.

2. Treibschraube;  $V > 0$ .

Da auch der Strahl mit  $V$  fortschreitet, ist die sekundliche Flüssigkeitsmenge

$$Q = F(V + w),$$

Der Druckunterschied an der Schraube ergibt sich aus dem Zuwachs an lebendiger Kraft

$$p = \frac{\mu}{2} [(V + w)^2 - V^2].$$

Damit ergibt sich für die Einschnürung aus  $S = \mu Q w = F_1 p$

$$F = F_1 \frac{2V + w}{2(V + w)}.$$

Die Einschnürung wird um so schwächer, je mehr sich  $w$  dem Wert Null nähert, bei dem auch der Schraubendruck aufhört.

Für die ideale Treibschraube ist ferner die theoretische Antriebsleistung

$$L = S \cdot V + \mu Q \frac{w^2}{2}$$

(= Nutzarbeit + lebendige Kraft des Strahles); mit  $S = \mu Q w$  folgt daraus der höchstmögliche Wirkungsgrad

$$\eta' = \frac{SV}{L'} = \frac{2V}{2V + w} = \frac{2}{1 + \sqrt{2}\varphi + 1},$$

wenn zur Abkürzung  $\frac{S}{\mu F_1 V^2} = \varphi$  gesetzt wird.

Ist  $\eta = \frac{SV}{L}$  der wirkliche Wirkungsgrad einer Schraube, so wird der Gütegrad

$$\zeta = \frac{\eta}{\eta'} = \frac{\eta}{2} (1 + \sqrt{2}\varphi + 1).$$

Der Schraubendruck nimmt, wenn die Umlaufzahl gleich bleibt mit zunehmender Fahrgeschwindigkeit  $V$  (annähernd proportional) ab, bis er bei  $V = \frac{H \cdot n}{60}$  verschwindet, worin

$H$  die nutzbare Steigung (Ganghöhe) der Schraube in m und  $n$  die minutliche Drehzahl bedeutet.

$H$  ist jedoch nicht einfach gleich der Steigung der Druckseite, auch wenn diese nach einer reinen Schraubensfläche geformt ist, sondern wesentlich auch von der Wölbung der Rückseite (Saugseite) abhängig. Eine zuverlässige allgemeine Berechnungsvorschrift für die günstigste Formgebung ist bisher nicht bekannt.\*)

## C. Bewegungen der unvollkommenen (wirklichen) Flüssigkeiten.

### 1. Zähigkeit und innere Reibung.

Bei wirklichen Flüssigkeiten haften benachbarte Teilchen aneinander und setzen gegenseitiger Verschiebung einen tangentialen Widerstand (Schubspannung) entgegen. Er ist proportional der „Zähigkeit“.

Einheit der Zähigkeit ist die auf die Flächeneinheit bezogene Schubkraft, die auftritt, wenn sich die parallelen Grenzflächen einer Flüssigkeitsschicht von der Dicke  $l$  mit der Geschwindigkeit  $l$  gleichförmig und parallel zueinander verschieben.

Bedeutet

$s$  die Dicke einer Schicht in cm,

$w$  den Geschwindigkeitsunterschied ihrer Grenzflächen in cm/sk,

$F$  deren Flächeninhalt in qcm,

$\eta$  die Zähigkeitszahl in Dynen .sk/qcm,

so setzt man (nach Maxwell) die in jeder Grenzfläche der Bewegung entgegenwirkende Schubkraft  $R$  der Erfahrung gemäß

$$R = \eta F' \frac{dw}{ds} \text{ in Dynen} = \frac{\eta}{981} F \frac{dw}{ds} \text{ in g.}$$

$R$  ist danach (im Gegensatz zu der Reibung bei festen Körpern) unabhängig vom Druck proportional der Flächengröße und dem Ge-

\*) Vgl. u. a. H. Lorenz, Theorie u. Ber. d. Schiff-propeller, Jahrb. d. Schiffbautechn. Ges. 1906; auch Dr. A. Fröll, ebenda 1910; ferner Eberhardt, Theorie u. Ber. d. Luftschrauben, Berlin 1910 und H. Reifsner, Studien z. Ber. usw. der Luftschrauben f. Flugtechnik u. M. 1910.

schwindigkeitsunterschied benachbarter Teilchen. Praktisch ist meist der „Zähigkeitsmodul“, d. h. das Verhältnis von Zähigkeit zum Einheitsgewicht  $\gamma$  der Flüssigkeit von Bedeutung.

Zähigkeitsmodul  $\frac{\eta}{\gamma}$  für einige Flüssigkeiten

$$\left( \gamma \text{ in g/ccm, also } \frac{\eta}{\gamma} \text{ in cm. sk} \right)$$

bei °C	Rüböl	Wasser	Wasser-	Luft	Wasserstoff
			dampf	bei $p = 1 \text{ kg/qcm}$	
0	27,7	0,01775	—	0,137	1,07
10	4,07	0,0131	—	0,146	—
20	1,98	0,0101	0,135	0,161	1,21
30	1,1	0,0081	—	0,165	—
100	—	0,0031	—	0,23	1,7
1200	—	—	—	2,36	18,8

Der bei Schmierölen oft angegebene „spezifische Zähigkeitsmodul“ ist bezogen auf Wasser von 20°, also fast genau gleich dem 100-fachen des absoluten.

Der Einfluß der Zähigkeit ist klein, soweit in einem Strömungsfelde nur stetige Geschwindigkeitsänderungen (geringe Beschleunigungen, unendlich kleine Geschwindigkeitsunterschiede) zwischen benachbarten Stromfäden vorkommen. Daher die Bedeutung der Theorie der vollkommenen Flüssigkeit.

## 2. Unstetigkeitsflächen (Diskontinuitätsflächen)

sind Trennungsfächen, in denen ein endlicher **Geschwindigkeitssprung** auftritt, z. B. die Mantelflächen von Flüssigkeitsstrahlen im erfüllten Raume und die Oberflächen von Körpern, an denen die Flüssigkeit entlang strömt. Durch beiderseitiges Haften werden in solcher Fläche Teilchen in Drehung versetzt, also kleine Wirbel erzeugt. Nach Helmholtz's Theorie der Diskontinuitätsflächen\*) kann die Wirkung in manchen Fällen berechnet werden.

An ruhenden Körperoberflächen nähert sich die unmittelbar angrenzende Flüssigkeitsschicht der Geschwindigkeit Null, da sie an der Fläche haftet und endlicher Geschwindigkeit unverhältnismäßig großen Widerstand entgegensetzt. Die folgenden Schichten unterliegen meist einer unstetigen, wirbelnden Geschwindigkeitszunahme. Bei sehr geringer Geschwindigkeit in ausgefüllten, engen Leitungen ist die Zunahme stetig und die Strömung theoretisch berechenbar.

## 3. Strömung in Flüssigkeitsleitungen.

a) Wirbelfreie Strömung (Parallelströmung) in engen, kreisrunden, sehr glatten Röhren:

\*) H. v. Helmholtz, Wissenschaftliche Abhandlungen Bd. I S. 146.

Für den Druckhöhenverlust  $h$  (in cm Flüssigkeitssäule) oder den Leitungswiderstand  $p$  (in g/qcm) in einem geraden Stück gilt das von Hagenbach abgeleitete, von Poisseuille vorher durch Versuche gefundene Gesetz

$$h \cdot \gamma = p = 8 \cdot \frac{\eta}{981} \cdot \frac{l w}{r^2},$$

worin

$r$  der gleichbleibende Rohrhalmmesser in cm,

$l$  die Länge des Leitungsstückes in cm,

$w$  die mittlere Durchflusgeschwindigkeit in cm/sk.

Bedeutet ferner

$w_x$  die Geschwindigkeit auf einem beliebigen Halbmesser  $x$  ( $< r$ ),

so gilt für die Geschwindigkeitsverteilung über den Querschnitt

$$w_x = \frac{981}{4} \cdot \frac{p}{l \eta} (r^2 - x^2).$$

Die Geschwindigkeit in der Rohrachse ( $x=0$ ) ist demnach doppelt so groß als die mittlere Geschwindigkeit über den ganzen Querschnitt. Unmittelbar an der Wandung ist  $w=0$ . Die Geschwindigkeitsverteilung wird dargestellt durch ein Umdrehungsparaboloid, dessen Scheitel auf der Achse liegt.

b) **Grenzgeschwindigkeiten.** Bei größerer Geschwindigkeit wird die parallele Strömung labil, daher praktisch unmöglich. Es tritt eine wirbelnde („turbulente“) Strömung ein, die theoretisch nicht näher bekannt ist. (Der aus einem Schornstein quellende Rauch gibt eine Vorstellung.) Die Geschwindigkeitsabnahme ist von der Achse aus zunächst viel geringer als nach der Parabel. Erst nahe der Wandung sinkt  $w$  rasch bis auf Null. Der Leitungswiderstand ist nicht mehr der ersten, sondern wird mit wachsender mittlerer Geschwindigkeit allmählich der zweiten Potenz der Geschwindigkeit proportional. Technisch ist fast nur dieser Fall von Bedeutung.

### Obere Grenzgeschwindigkeit $w_{g2}$ in m/sk

für Wasser und Luft bei 20° im Rohr vom Rauheitsgrad II.

	$\frac{\eta}{\gamma}$	Rohrdurchmesser in mm				
		25	50	100	250	500
Wasser . . . . .	0,0101	0,72	0,51	0,36	0,23	0,16
Luft von $p = 0,2$ kg/qcm	0,805	57	40	29	18	13
1,0 „	0,161	11,4	8,1	5,7	3,6	2,5
10,0 „	0,0161	1,1	0,8	0,6	0,4	0,25

Untere Grenzgeschwindigkeit  $w_{g1}$  heißt diejenige, bis zu welcher das obige lineare Widerstandsgesetz, obere Grenzgeschwindigkeit  $w_{g2}$  diejenige, von welcher ab das quadratische Gesetz gilt. Nach Versuchen ist allgemein für alle Flüssigkeiten und Gase:

$$w_{g2} = \frac{\lambda}{\sqrt{D}} \cdot \frac{\eta}{\gamma}$$

Einige Werte von  $w_{g2}$  zeigt obige Tafel.  $\lambda$  hängt von der Rauigkeit der Rohrwand ab. Werte siehe untenfolgende Tafel (Dimension:  $l_1^{1/2} t_1^{-2}$ ).

$w_{g1}$  ist 50- bis 100-fach kleiner als  $w_{g2}$ .

c) Wirbelnde Strömung in Leitungen im technisch wichtigeren Bereich oberhalb  $w_{g2}$ . Man setzt den Druckhöhenverlust  $H$  in m Flüssigkeitssäule

$$H = K \cdot \frac{L}{R} \cdot w^2,$$

worin  $L$  die Leitungslänge in km

$w$  die mittlere Geschwindigkeit in m/sk

$R$  der „hydraulische Radius“ = Querschnitt/Umfang in m.

$K$  ist nach R. Biel\*) für tropfbare und luftförmige Flüssigkeiten, für gefüllte Leitungen und auch offene Kanäle unter Berücksichtigung aller bisherigen Versuche zu berechnen aus

$$k = a + \frac{f}{\sqrt{R}} + \frac{b}{w\sqrt{R}} \cdot \frac{\eta}{\gamma}.$$

Darin ist der Grundfaktor  $a$  immer = 0,12. Die Größen  $f$  und  $b$  hängen von der Rauigkeit der Wand ab, siehe folgende Tafel.

Rauigkeitsgrad					
	I.	II.	III.	IV.	V.
	Blank gezogenes Rohr; Dmr. genau konstant	Glatte Blechrohr, Glasröhren ohne Fugen u. dgl.	Gufseiserne Rohrleitungen. Glatte Betonwandung u. dgl.	Rauhe Brett r. ausgefugtes Mauerwerk	Gewöhnliches Mauerwerk
$f =$	0,0064	0,018	0,036	0,054	0,072
$b =$	0,95	0,71	0,46	0,27	0,27
$\lambda =$	17	11,2	5,6	sehr klein	

Für kreisrunde Röhren vom Durchmesser  $D$  in m wird

$$H = 4 \cdot K \cdot \frac{L}{D} \cdot w^2 \quad \text{und} \quad K = a + \frac{2f}{\sqrt{D}} + \frac{2b}{w\sqrt{D}} \cdot \frac{\eta}{\gamma}.$$

Formeln für besondere Fälle, insbesondere für Wasserleitungen s. S. 281 u. f.

#### 4. Offene Strömung an eingetauchten Körpern (Strömungswiderstand).

##### a. Reibungs- oder Oberflächenwiderstand $W_r$ .

Unter Bedingungen, die noch nicht näher bekannt sind, bleiben die an der Oberfläche entstehenden Wirbel auf eine dünne „Grenz-

\*) Forschungsarbeiten des V. d. I., Nr. 44 und Nr. 60 (Anhang).

schicht“ beschränkt. In dieser wirken tangentielle Reibungskräfte auf die Fläche. Bei umströmten Körpern bildet die in Richtung der Strömung genommene Summe der tangentialen Kräfte den „Oberflächen-“ oder „Reibungswiderstand“. Seine Größe ist nach Prandtl zu setzen

$$W_r = k \cdot b \cdot l^n \cdot w^n + 1,$$

worin

$b$  die Breite der bestrichenen Fläche,

$l$  deren Länge in der Strömungsrichtung,

$w$  die Strömungsgeschwindigkeit,

$k$  eine von der Zähigkeit der Flüssigkeit und vom Rauheitsgrad der Fläche abhängige Zahl,

$n$  ein Exponent, der auch von der Rauigkeit und von der etwa schon vorhandenen Unruhe in der Strömung abhängt.

$n$  ist für die vollkommen glatte (theoretische) Fläche = 0,5, für sehr raue Flächen bis zu 1, für praktisch glatte Flächen etwa = 0,8 bis 0,85.

Nach Versuchen von Froude mit einer sehr ebenen, gefirnigten Holztafel, 15,2 m lang, 0,5 m breit, 5 mm dick, die mit verschiedenen Geschwindigkeiten ( $w$  in m/sk) durch ruhendes Wasser geschleppt wurde, ist  $W_r$ , bezogen auf 1 qm einseitiger Oberfläche

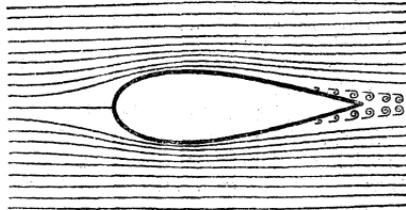
$$W_r = 0,115 w^2 + 0,04 w \simeq 0,158 w^{1,83}.$$

Versuche von Frank u. a. mit Luft s. S. 371.

### b. Formwiderstand $W_f$ .

Meist pflanzen sich die Wirbel aus der Grenzschicht weithin mit der Strömung fort und machen diese „unruhig“ (turbulent). Dann folgen die Stromlinien nicht mehr der Oberfläche, sondern lösen sich ab und umfassen eine „Wirbelschlepe“, die ihren Zusammenschluss nach dem hinteren „Spaltungspunkte“ hindert (vgl. Abb. 153). Hier bestehen erhöhte Geschwindigkeiten, also niedere Drücke; der Druckausgleich, wie bei der drehungsfreien Strömung, kommt nicht zustande; die Ueberdrücke vorn überwiegen. Derentsprechende, wesentlich von der Körperform abhängige „Formwiderstand“ ist die in Richtung der Strömung genommene Summe der senkrecht zur Oberfläche wirkenden Druckkräfte. Er ist nach Erfahrungen immer proportional der Einheitsmasse ( $\mu = \frac{\gamma}{g}$ ) der Flüssigkeit, dem Flächenmaß ( $F$ ) des Körpers und dem Quadrat der (relativen) Strömungsgeschwindigkeit. Man setzt z. B.  $W_f = \psi \mu F w^2$  usw. (vgl. S. 373 u. f.).

Abb. 153.



Ablösung tritt nicht ein, soweit sich die Flüssigkeit längs der Oberfläche beschleunigt, der Druck also abnimmt, wie an der Spitze bzw. vorderen Abrundung umströmter Körper. Hinter dem Punkt größter Geschwindigkeit (die aber im allgemeinen nicht erst, wie bei der Kugel, mit dem größten Körperquerschnitt erreicht wird) tritt Ablösung um so leichter ein, je stärker sich bei drehungsfreier Strömung die Flüssigkeit längs der Fläche unter Druckzunahme verzögern müßte.

Bei Körpern geringsten Formwiderstandes wird die Ablösung durch sehr schlanke und glatte Verjüngung bis zu scharfer hinterer Schneide oder Spitze ganz oder doch nahezu verhindert (Fischform, Form des fallenden Tropfens).

Seitliche Kanten am Körper, besonders hinter dem größten Querschnitt, begünstigen die Ablösung. Bei stumpfer oder quer abgeschnittener Hinterform bildet die Schleppe groÙe Wirbelringe. Innen fließt die Flüssigkeit mit erhöhter Geschwindigkeit der Strömung entgegen („Vorstrom“ oder „Sog“ bei Schiffen), prallt auf die Rückfläche und erzeugt durch erneute Ablenkung eine sekundäre Stauung, wo-

Abb. 159.

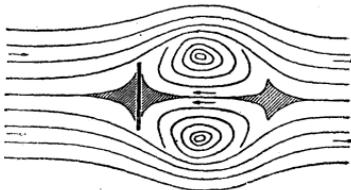
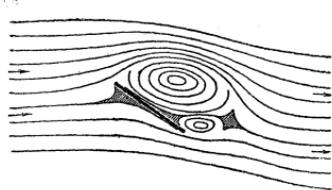


Abb. 160.



durch ein Teil der im Wirbel aufgenommenen Energie wieder abgegeben wird. Die Wirbelsysteme sind meist sehr instabil (flackernde Bewegungen).

Beispiel: Strömung an einer quergestellten Kreisplatte, Abb. 159 (schematisch nach photographischen Aufnahmen von Ahlborn).\*) Der mittlere Wirbelfaden ist ein Kreis.

In den schraffierten Stauungsgebieten ist die Geschwindigkeit nicht Null, wie nach der verbreiteten v. Lösslischen Annahme („Staukegel“), sondern nur so klein, daß man sie vernachlässigen will.

Bei einer quergestellten Rechteckplatte ist der Wirbelring räumlich verbogen.

Wird eine Rechteckplatte schräg unter dem Winkel  $\alpha$  gegen die Stromrichtung gestellt (Abb. 160), so wächst der Querschnitt des Wirbelrings am vorausgehenden (oberen) Rande und wird unten dünner. Bei einem kritischen Anstellwinkel  $\alpha_k$  (etwa 30 bis 40°) bricht er unten auf und verläuft seitlich in „Wirbelzöpfen“, die von den Rändern aus („pflügende Bewegung“) mit der Strömung fortziehen. Der Formwiderstand vermindert sich deshalb nicht stetig von  $\alpha = 90^\circ$  bis  $\alpha = 0^\circ$ , sondern folgt unter- und oberhalb  $\alpha_k$  verschiedenen Gesetzen. Nahe  $\alpha_k$  sind verschiedene Bewegungsformen und Widerstandswerte im Beharrungszustand möglich, je nachdem der Zustand,

\*) F. Ahlborn, Ueber den Mechanismus des hydrodynam. Widerstandes. Hamburg 1902.

von größerem oder kleinerem  $\alpha$  herkommend, eingestellt wurde. Nach Versuchen von Dines, Eiffel, Prandtl u. a. kann in der Nähe von  $\alpha_{\frac{1}{2}}$  der Widerstand senkrecht zur Platte erheblich größer sein als bei  $\alpha = 90^\circ$  (vgl. Abb. 162). Ursache: Fortfall der sekundären Stauung im Rücken nach dem Aufbrechen des Wirbelringes.

Die älteren Widerstandsformeln für schräge Platten, die ein stetiges Gesetz voraussetzen, sind sämtlich unhaltbar bzw. nur für ein begrenztes Gebiet annähernd brauchbar (s. unten). Auch die Kuttaschen Strömungsberechnungen an Zylinderschalen (S. 355) werden wesentlich unzutreffend, sobald sich größere Wirbel ablösen.

### c. Der Strömungswiderstand im ganzen

hängt somit durchaus von der Gesamtform des umströmten Körpers ab, und besonders von der Form der Rückseite. Er kann nicht aus den Widerständen seiner Oberflächenteile zusammengesetzt werden.\*)

Auch benachbarte Körper können die Strömung und den Widerstand erheblich beeinflussen.

Der Formwiderstand überwiegt meist so erheblich, daß die Oberflächenreibung in der Summe nur einen verschwindenden Beitrag liefert. Nur bei „Körpern geringsten Widerstandes“ (Schiffskörper u. dgl.) wird der Reibungswiderstand von erheblicher Bedeutung.

Bei Wasserschiffen kommt noch ein von den Oberflächenwellen herrührender Widerstand hinzu (vgl. S. 325).

### d. Aehnlichkeitsschlüsse.

Um aus Versuchen an verkleinerten Modellen usw. auf die Kraftwirkungen an großen Körpern schließen zu können, muß nicht nur die geometrische Aehnlichkeit der Körper, sondern auch die mechanische Aehnlichkeit der Bewegungen hinreichend gewahrt sein.

Bedeutet  $\lambda$  das Verhältnis entsprechender Längen  $l_1$  und  $l_2$  zweier geometrisch ähnlicher Körper,  $\tau$  das Verhältnis der Zeiten entsprechender Bewegungen, so stehen die Beschleunigungen im Verhältnis  $\frac{\lambda}{\tau^2}$ .

Spielt die Beschleunigung der Schwere eine Rolle, wie bei Schiffsmodellversuchen wegen der Oberflächenwellen, so müssen, da diese Beschleunigung immer gleich ist, zu mechanischer Aehnlichkeit alle

Beschleunigungen entsprechend gleich, ihr Verhältnis  $\frac{\lambda}{\tau^2}$  also  $= 1$  ge-

nommen werden, oder  $\tau = \sqrt{\lambda}$ ; hierzu müssen die Geschwindigkeiten ( $w_1$  und  $w_2$ ), da ihr Verhältnis  $\frac{\lambda}{\tau} = \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda}} = \sqrt{\lambda}$  werden muß, so gewählt

werden, daß  $w_1 : w_2 = \sqrt{l_1} : l_2$ .

\*) Die noch manchmal angewandte Berechnung auf Grund der Newtonschen Theorie durch Summierung der Widerstände der einzelnen Flächenelemente auf der angeströmten Seite ist, da sie die Kontinuität der Raumerfüllung außer acht ließ, unhaltbar geworden und durch viele Versuche widerlegt. Auch das Newtonsche Elementargesetz für den Widerstand schräg angeströmter Flächen (Proportionalität mit dem  $\sin^2$  des Angriffswinkels) ist unzulässig.

Ist ferner

$\alpha$  das Verhältnis entsprechender Kräfte,

$\mu$  das Verhältnis entsprechender Massen,

so ist bei gleichen Beschleunigungen  $\alpha = \mu$  und ferner, wenn beide Versuche mit gleicher Flüssigkeit gemacht werden,  $\mu = \lambda^3$ , da sich die Massen dann wie die Räume verhalten. Für Versuche über den Fahrwiderstand von Schiffen sind diese Gesichtspunkte ausreichend. (Modellregel von Froude.)

Bei Luftwiderstandsmessungen an ruhend aufgehängten Modellen im rings umgebenden Luftstrom ist die Schwere ausgeschaltet. Obige Regel braucht also nicht beachtet zu werden; die Kräfte verhalten sich wie die Flächen;  $\alpha = \lambda^2$ . Bei Versuchen mit fliegenden Modellen sind außer der Schwere noch die Flächendrücke bzw. die Gewichte auf die Flächeneinheit von Wichtigkeit. Es müßte gewählt werden  $\tau = \sqrt{\lambda}$  und  $\mu = \alpha = \lambda^2$ , was nur ausführbar wäre, wenn man die Einheitsgewichte der Baustoffe ( $\gamma_1$  und  $\gamma_2$ ) beider Körper und auch die Dichten der beteiligten Flüssigkeiten im umgekehrten Verhältnis der Längen wählen könnte. Da das praktisch nicht zu verwirklichen, kann man von dem dynamischen Verhalten fliegender Modelle (Stabilität) nicht unmittelbar auf gleiches Verhalten großer Körper schließen.

### e. Vertauschbarkeit der Bewegungen.

Man kann, weil gleiche Relativbewegungen stets gleiche Kräfte erzeugen, bei Bewegung eines Körpers durch ruhende Flüssigkeit stets auch den Körper fest und die Flüssigkeit umgekehrt bewegt denken, was oft die Vorstellung erleichtert (Stromlinienbild). Beim praktischen Vergleich einer solchen Umkehrung (durch ruhendes Wasser geschleppte und in gleich schnellem Strom verankerte Schiffe) haben sich oft scheinbare Widersprüche daraus ergeben, daß der Flüssigkeitsstrom nicht homogen, sondern durchwirbelt war. Dadurch kann der Strömungswiderstand stark vergrößert werden, weil er dem Quadrat der Geschwindigkeit proportional ist, und das mittlere Quadrat ungleicher Geschwindigkeiten größer ist als das Quadrat der mittleren Geschwindigkeit.

## D. Erfahrungsangaben über Luftbewegungen und Luftwiderstand.

### 1. Der Wind.

Der Wind, wie auch die natürlichen Wasserströmungen, ist nicht als homogene Strömung anzusehen, sondern er ist immer von Wirbeln durchsetzt, besonders an der Erdoberfläche. Periodische Schwellungen und unregelmäßige Windstöße, Böen, bilden die **Unruhe des Windes**. Nicht nur die Stärke, sondern auch Höhen- und Seitenrichtung der Bewegung ist erheblich wechselnd.

Nach O. Lilienthals sorgfältigen Versuchen auf sehr verschiedenartigem Gelände wirken die Windwellen auf Windfahnen mit wagrechter Drehachse in Höhen bis 10 m über dem Erdboden immer so,

als wenn die Strömung im Mittel um  $3,5^{\circ}$  aufwärts gerichtet wäre. Daraus ist, da die Kontinuitätsbedingung gewahrt bleiben muß, auf einen unsymmetrischen Schwingungsvorgang zu schließen. Das erklärt auch die von O. Lillenthal gefundene, mehrfach bestätigte Tatsache, daß Drachensflügel u. dgl. im Winde einen erheblich (bis 50 vH) größeren Auftrieb erfahren, als wenn sie mit gleicher Geschwindigkeit durch ruhende Luft bewegt werden.

Die **Geschwindigkeit des Windes** nimmt vom Erdboden aus rasch und unregelmäßig nach oben zu, Messungen sind daher sehr von der Aufstellung des Instrumentes beeinflusst und meist nur von relativem Wert. Man begnügt sich deshalb oft mit Schätzungen nach gewissen Anzeichen.\*)

Winde von mehr als 20 m/sk sind selten. Vereinzelt werden aber im Inlande bis 40 m/sk nahe dem Erdboden und an den Küsten Windstöße bis über 50 m/sk beobachtet. Bei Wirbelstürmen, die Wasserhosen u. dgl. bilden, kommen Geschwindigkeiten von außerordentlicher Größe vor.

**Häufigkeit der Windstärken** nach Höhenstufen usw. s. umseitige Tafel.

Die starke Zunahme in der untersten Stufe (bis 500 m) vollzieht sich vorwiegend schon nahe (bis etwa 100 m) über dem Erdboden.

**Sturmtage**, an denen der Wind ein oder mehrmals die Stärke 8 der Beaufort-Skala ( $\sim 15$  m/sk) übersteigt, wurden gezählt z. B. in Berlin 4, Frankfurt a. M. 8, Aachen 19, Hamburg 37, Borkum 58 Tage im Jahr.

Die **Windrichtungen** verlaufen auf der nördlichen Erdhalbkugel immer so, daß sie barometrische Tiefdruckgebiete linksdrehend („Zyklone“), Hochdruckgebiete rechtsdrehend (Antizyklone) umkreisen. Südliche Halbkugel umgekehrt. (Ursache: Erddrehung.) In der Mitte eines Tiefdruckgebietes steigt die Luft langsam empor, im Hochdruckgebiet abwärts.

Oertlich begrenzte Zyklone entstehen besonders in den mittleren Breiten und in der warmen Jahreszeit, ebenso Wirbel mit wagerechter Achsenrichtung (Gewitterböen, die oft mit senkrechten Strömungen beträchtlicher Stärke, bis mehrere m/sk verbunden sind).

**Windruck auf Bauwerke.** Bei Abschätzung der zu gewärtigenden Höchstdrücke ist auf etwa besonders ungeschützte Lage Rücksicht zu nehmen.

Zuverlässige Berechnung ist unmöglich. Der Druck auf einzelne Wände, Dächer usw. hängt von der Form des Ganzen und auch etwaiger benachbarter Gebäude ab. Er kann bei gleicher Aufsenform und Windrichtung sehr verschieden sein, je nachdem wie das Innere mit der umgebenden Luft in Verbindung steht.

**Ämtliche Bestimmungen** über die anzunehmende Größe des Winddruckes für statische Berechnungen:

Es bedeutet

$p$  den Druck auf senkrechte Wände in kg/qm,

$p_1$  den Druck auf schräge Wände oder Dächer in kg/qm,

$\alpha$  deren Neigungswinkel gegen die Wagerechte.

\*) Beaufortsche Windskala s. II. Bd. S 684.

**Häufigkeit der Windstärken nach Höhenstufen und Jahreszeiten.\*)**

Mittelwerte aus 5-jährigen, fortlaufenden Beobachtungen des Kgl. preufs. Aeronautischen Observatoriums in Lindenberg (bei Beeskow).  
(Die Zahlen geben die Wahrscheinlichkeit in vH.)

Seehöhen m	Windgeschwindigkeiten in m/sk					Mittlere Ge- schwin- digkeit m'sk
	0 bis 2 + C	2 bis 5	5 bis 10	10 bis 15	über 15	
Winter (Dezember bis Februar).						
Erdoberfläche**)	18,8	42,0	35,2	3,7	0,3	4,9
500	6,1	12,5	33,6	24,1	23,7	11,4
1000	7,3	11,4	29,0	28,0	24,3	11,3
1500	8,7	7,6	27,6	30,6	25,5	11,6
2000	4,6	4,7	25,3	40,5	24,9	12,7
Frühjahr (März bis Mai).						
Erdoberfläche	20,1	42,2	32,7	4,5	0,5	4,9
500	13,9	21,5	38,8	17,3	8,5	7,8
1000	13,4	20,5	34,0	20,5	11,6	8,5
1500	15,3	18,9	27,5	26,4	11,9	8,4
2000	14,6	14,6	27,9	28,6	14,3	9,5
Sommer (Juni bis August).						
Erdoberfläche	23,2	46,2	30,1	0,5	—	4,4
500	15,9	25,1	38,8	14,4	6,0	7,0
1000	13,6	23,8	35,5	18,2	8,9	7,7
1500	13,7	23,7	26,8	26,3	9,5	8,4
2000	14,6	14,5	25,1	30,9	14,9	10,2
Herbst (September bis November).						
Erdoberfläche	24,2	45,3	28,1	1,8	0,6	4,5
500	9,7	19,3	36,5	19,7	14,8	9,5
1000	11,7	17,3	34,5	22,5	14,0	9,4
1500	11,5	16,4	31,2	26,5	14,4	9,4
2000	12,0	12,8	27,7	29,5	18,0	10,5
Jahr.						
Erdoberfläche	21,4	44,2	31,6	2,6	0,2	4,7
500	11,7	19,4	37,0	18,7	13,2	8,9
1000	11,0	18,3	33,6	22,5	14,6	9,2
1500	12,6	16,8	28,4	27,4	14,8	9,4
2000	11,8	12,1	26,5	32,0	17,6	10,5
2500	11,2	9,4	20,4	34,3	24,6	12,1
3000	10,4	8,3	18,0	30,9	32,4	13,0
3500	9,6	7,2	14,1	26,8	42,3	15,1

\*) Auszug nach R. Afsmann. „Die Winde in Deutschland“ (Braunschweig 1910).

\*\*) 40 bis 120 m Seehöhe.

1. **Preufs. Akademie des Bauwesens.** Nach dem Gutachten vom 13. Juli 1889 und 17. April 1899\*) genügt es für deutsche Windverhältnisse, bei der Berechnung der Standfestigkeit hoher Bauwerke  $p = 125 \text{ kg/qm}$  und  $p_1 = p \sin^2 \alpha$  zu setzen (entsprechend der Newtonschen Annahme über den Winddruck auf geneigte, ebene Flächen, vgl. Fußnote S. 367). Rücksicht auf besondere örtliche Lage ist indes nicht ausgeschlossen. (Für Leuchttürme ist man bis  $p = 330 \text{ kg/qm}$  gegangen.)

2. **Bauabteilung des Preufs. Ministeriums der öffentl. Arbeiten.** Nach Vorschrift vom 16. Mai 1890 ist  $p \geq 125 \text{ kg/qm}$ , bei freistehenden Gebäuden nötigenfalls  $p$  bis  $250 \text{ kg/qm}$  anzunehmen. Die Windrichtung ist dabei wagemrecht zu wählen und die Formel  $p_1 = p \sin \alpha$  anzuwenden (v. Lösslsche Luftwiderstandsformel).

3. **Preufs. Ministerium der öffentl. Arbeiten;** Vorschrift für Brücken (vom September 1895). Bei belasteter Brücke ist  $p = 150 \text{ kg/qm}$ , bei unbelasteter Brücke, falls dies für die Standsicherheit zu berücksichtigen ist,  $p = 250 \text{ kg/qm}$  anzunehmen.

4. **Erlaß des Preufs. Ministers der öffentl. Arbeiten und des Ministers für Handel und Gewerbe für die Berechnung der Standfestigkeit von Schornsteinen.\*\*)** In der Regel  $p = 125 \text{ kg/qm}$  (einschl. der Saugwirkung auf der Leeseite). Angriffspunkt ist der Schwerpunkt des lotrechten Schnittes der Säule. Ist der Flächeninhalt dieses Schnittes  $F$ , bei eckigen Schornsteinen rechtwinklig zu zwei gegenüberliegenden Flächen gemessen, so ist die Größe des Winddrucks: bei runden Schornsteinen  $0,67 p F$ , bei achteckigen Schornsteinen  $0,71 p F$ , und bei rechteckigen Schornsteinen  $1,0 p F$ .

## 2. Erfahrungszahlen für den Luftwiderstand umströmter Körper.

(Ueber den Widerstand von Schiffskörpern in Wasser  
s. II. Bd. S. 741 u. f.)

Es bedeutet

$\mu = \frac{\gamma}{g}$  die Masse eines cbm Luft in  $\text{kg} \cdot \text{m}^{-4} \text{sk}^2$  (Durchschnittswert  
etwa  $\mu = 1/8$ , entspr.  $\gamma = 1,226$ ),

$w$  die Geschwindigkeit des ungestörten Luftstroms bzw. die Fortschrittggeschwindigkeit des Körpers durch ruhende Luft in  $\text{m/sk}$ .

### a. Reibungswiderstand

(Oberflächenwiderstand oder Hautreibung).

$O$  = gesamte Oberfläche des Körpers in  $\text{qm}$ .

Frank ermittelte\*\*\*) aus Pendelversuchen mit mehreren (16) im Abstand von 12 mm nebeneinander befestigten, glatten, dünnen, Blechplatten (30 cm breit, 50 cm lang,  $\frac{9}{16}$  mm dick).

$$W_r = 0,00244 \mu O w^2.$$

Danach wäre  $\gamma = 0,00244$  die Reibungszahl. Nach neueren Versuchen (s. unter b) ist die Reibung aber erheblich kleiner.

Die quadratische Form in  $w$  ist überhaupt ungenau. bzw.  $\gamma$  mit  $w$  abnehmend (vgl. S. 373).

(Froudes Versuche über Hautreibung in Wasser s. S. 365.)

\*) S. Z. d. B. 1889 S. 279 u. 1899 S. 257.

\*\*) S. Erlaß vom 30. April 1902, Z. d. V. d. I. 1900 S. 842 und 1902 S. 1171.

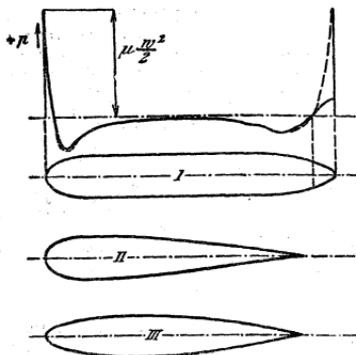
\*\*\*) Z. d. V. d. I. 1908 S. 1522.

**b. Körper geringsten Widerstandes.**

Luftschiffkörper sind bisher meist doppelt symmetrisch. Symmetrieachse in der „geraden“ Fahrtrichtung.

**1. Gerade Bewegung.** Der Widerstand liegt in der Symmetrieachse. Da der Formwiderstand sehr gering ist, hat die Hautreibung beträchtlichen Einfluß. Getrennte Bestimmung des Formwiderstandes ist von Prandtl\*) dadurch ermöglicht worden, daß die senkrecht zur

Abb. 161.



Oberfläche wirkenden Luftdrücke durch feine Bohrungen in das abgeschlossene Innere des Modells und von da zu einem Manometer geleitet wurden. Die Komponentensumme in der Stromrichtung ergab  $W_f$ . Der Gesamtwiderstand  $W$  wurde durch Wägung bestimmt.

Abb. 161 zeigt die beobachtete Druckverteilung an einem Modell (I). Ueberdrücke sind nach oben, Minderdrücke nach unten aufgetragen. Die gestrichelte Vergleichslinie ist berechnet unter Annahme wirbelfreier Strömung. Bis zur Ablösungsstelle, wo die „Schleppe“ ansetzt (vgl. Abb. 158), stimmen Rechnung und Versuch gut überein.

Folgende Tafel gibt die beobachteten Widerstandszahlen:  $\psi$  auf den Hauptspantquerschnitt  $\otimes$ , und zwar  $\psi_f$  für den Anteil der Hautreibung,  $\psi_f$  für den Formwiderstand gültig;  $\gamma$  bezieht die Hautreibung auf die Oberflächengröße  $O$ ;  $\xi$  den Gesamtwiderstand auf den Rauminhalt  $V$ , also auf gleiches Tragvermögen des Ballones, was praktisch besonders wichtig ist. Diese Zahl wird für geometrisch ähnliche Schiffkörper gleichbleibend, wenn man sie auf  $V^{2/3}$  (die Seitenfläche eines Würfels vom Inhalt  $V$ ) bezieht.

Untersucht wurden 3 Modelle (Abb. 161) von folgenden Abmessungen:

	M o d e l l		
	I	II	III
Länge $L$ . . . . . cm	130	112,5	114,5
Größter Durchmesser $D$ . . . . „	20	19,4	18,8
Größter Querschnitt $\otimes$ . . . . qcm	314	296	278
Gesamtoberfläche $O$ . . . . . „	7 450	4 790	4 790
Rauminhalt $V$ . . . . . ccm	33 900	18 200	18 200

\*) Versuche der Göttinger Anstalt, die unter Leitung von Prof. Prandtl steht werden im folgenden mehrfach erwähnt. Veröffentlichungen sämtlich in der „Zeitschr. f. Flugtechn. u. Motorluftschiff.“ (R. Oldenbourg) 1910.

Es ergab sich für  $w = 10$  m/sk, bei 15°:

	in der Formel	M o d e l l		
		I	II	III
für den Reibungswiderstand	$W_r = \chi \mu O w^2$	$\chi = 0,00122$	$0,00084$	$0,00065$
oder	$W_r = \psi_r \mu \otimes w^2$	$\psi_r = 0,0289$	$0,0136$	$0,0112$
für den Formwiderstand . .	$W_f = \psi_f \mu \otimes w^2$	$\psi_f = 0,0308$	$0,0199$	$0,0171$
für den Gesamtwiderstand .	$W = \psi \mu \otimes w^2$	$\psi = 0,0597$	$0,0335$	$0,0283$
oder	$W = \xi \mu V^{2/3} w^2$	$\xi = 0,0179$	$0,0143$	$0,0114$

Bei dem günstigsten Modell III beträgt der Widerstand nur etwa  $\frac{1}{18}$  desjenigen einer kreisförmigen Platte von gleichem Durchmesser.

Die obigen Widerstandszahlen nehmen mit wachsendem  $w$  ab, weil die Hautreibung langsamer als mit der zweiten Potenz von  $w$  zunimmt. Setzt man  $W_r = a w^2$ , so wird

bei Modell	I	II	III
$\beta =$	1,81	1,71	1,55.

Der Gesamtwiderstand nähert sich einem Grenzwert, der bei  $w = 10$  m/sk, besonders für Modell II und III, noch nicht erreicht ist.

Ch. Renard hatte für sein Luftschiff „La France“ (1884) von  $L = 50,4$  m,  $D = 8,4$  m nach Modellversuchen für den Körper allein angenommen:

$$W = 0,00223 D^2 w^2, \text{ entsprechend } \psi = 0,0225.$$

Aus Fahrtversuchen mit Gondel, Takelung usw. fand er später

$$W = 0,01685 D^2 w^2, \text{ entsprechend } \psi = 0,169.$$

Der Widerstand des nackten Schiffskörpers wird durch die Takelung immer derartig um ein Vielfaches erhöht.

**2. Schräge Bewegung.** Die Winkelabweichung zwischen Symmetrieachse und Fahrtrichtung betrage  $\alpha$ . Dann weicht die Widerstandsmittelkraft  $R$  schnell um erheblich gröfsere Winkel nach der entgegengesetzten Seite ab.

Nach den Göttinger Versuchen (mit denselben Modellen, wie oben) erreicht die senkrechte Komponente schon bei etwa  $\alpha = 6^\circ$  die Gröfse des wagerechten  $W$  bei gerader Fahrt, ohne dafs  $W$  selbst bis dahin wesentlich wächst. Durch Schrägstellung erzielt man daher eine wirksame „dynamische“ Höhensteuerung.

**3. Stabilität der Bewegung.**  $R$  schneidet die Symmetrieachse weit vor dem Volumen-Schwerpunkt, sogar vor der Spitze des Körpers. Das Schiff sucht sich deshalb bei kleinen Winkelabweichungen sogleich quer zu stellen. Durch steif abstehende Flossen am Heck ruft man stabilisierende Zusatzkräfte hervor, welche die Gesamtmittelkraft bis hinter den Schwerpunkt rücken, so dafs das Schiff bei Winkelabweichungen von selbst wieder der geraden Stellung zustrebt.

### c. Körper mit Symmetrieachse in der Bewegungsrichtung.

Die Widerstandszahlen gelten, falls nichts anderes bemerkt, für homogene Strömung. In unruhiger Luft (Wind usw.) können sie bis etwa 1,6-fach gröfser werden.

Wegen einiger Widersprüche bei Versuchen verschiedener Art sind die Messungsverfahren mit angegeben. Es bedeutet:

*S* Schlepp- oder Fallversuche; ruhende Luft (Eiffel, Paris: Fallhöhe 95 m, *w* bis 40 m/sk)

*T* Versuche im Windtunnel bei guter Gleichförmigkeit des Luftstromes (insbes. Göttinger Anstalt, Tunnel  $2 \times 2$  m, *w* bis  $\sim 10$  m/sk)

*P* Pendelversuche in geschlossenem Raum (A. Frank, Hannover, Pendellänge 13 m)\*)

*R* Versuche an Rundlaufvorrichtung

*r* = Halbmesser des Dreharmes

*r<sub>i</sub>* und *r<sub>a</sub>* Drehkreishalbmesser des inneren und äusseren Randes des Versuchskörpers

*W* Versuche im freien Winde oder in unruhigem Luftstrom.

Es ist

$$W = \psi \mu F w^2 \text{ in kg,}$$

wenn *F* = Projektion des Körpers in der Stromrichtung in qm

*μ* und *w* wie früher in  $\text{kg} \cdot \text{m}^{-4} \text{sk}^2$  bzw. m/sk

*d* = Durchmesser } in m, falls nicht anders vermerkt.  
*l* = Länge }

Körper	$\psi$	Versuch	Beobachter
<b>I. Dünne Platten, senkrecht zur Fläche angeblasen.</b>			
Quadratplatte. $F = 1$ qm . . . . .	0,63	<i>S</i>	Eiffel.**)
$\frac{1}{2}$ " . . . . .	0,62	"	
$\frac{1}{4}$ " . . . . .	0,60	"	
$\frac{1}{8}$ " . . . . .	0,57	"	
$\frac{1}{16}$ " . . . . .	0,56	"	
$F = 0,0144$ qm . . . . .	0,555	<i>T</i>	Gött. Anst.
dsgl. an Rundlaufvorrichtungen, senkrecht zur Drehungsebene stehend. Zusammenstellung der zahlreichen Versuche ergibt (nach Knoller) $\psi$ um so gröfser, je kleiner der Dreharm im Verhältnis zur Platte			
für $r_i : r_a = 0,9$ ist $\psi =$	0,73	<i>R</i>	Mittel aus ver-
0,8	0,86	"	schiedenen
0,7	0,95	"	Versuchen
0,57 und weniger	1,0	"	
dsgl. verschiedene Versuche im Winde. . .	0,95	<i>W</i>	dsgl.

\*) Z. d. V. d. I. 1906 S. 600.

\*\*\*) Eiffels Versuche gaben durchweg bei kleineren Körpern abnehmende Widerstände, wahrscheinlich infolge der Versuchsanordnung. Die öfter behauptete Abnahme des Widerstandes mit wachsender Körpergröfse ist gleichfalls sehr unwahrscheinlich.

Körper	$\psi$	Ver- such	Beobachter	
<b>Rechteckige Platten*)</b>				
Seitenverhältnis $F = 1/8$ qm	1:1	0,573	S	Eiffel.
	1:2	0,586	"	"
$F = 1/100$ "	1:4	0,595	"	"
	1:1	0,582	P	Frank.
	1:4	0,575	"	"
<b>Durchbrochene Rechteckplatten</b> (35,3 × 70,7 cm), volle Fläche 0,25 qm, davon ausgeschnitten 0,10 qm = 40 vH (4 gleichseitige Dreiecke, so dafs Ränder und Diagonalen von rd. 5 cm Breite stehen bleiben)				
$\psi$ bezogen auf die verbliebenen 0,15 qm	0,70	S	Eiffel.	
Kreisplatte $F = 1/2$ qm . . . . .	0,61	S	Eiffel.	
$1/4$ " . . . . .	0,59	"	"	
$1/8$ " . . . . .	0,56	"	"	
$1/16$ " . . . . .	0,54	"	"	
$F = 0,03$ qm . . . . .	0,55	T	Gött. Anst.	
<b>II. Umdrehungskörper, in Richtung der Achse angeblasen.</b>				
2 gleiche Kreisplatten im Abstand $l$ hintereinander				
$F = 1/8$ qm	$l = 0$	0,57	S	Eiffel.
	0,5 $d$	0,55	"	"
	1,0 $d$	0,47	"	"
	1,5 $d$	0,42	"	"
(F ist die Fläche einer der Platten. Der Gesamtwiderstand beider wird also kleiner als bei einer einzelnen Platte. Ursache: Störung des Wirbelringes, vgl. Abb. 159. Bei größerem $l$ muß $w$ wieder zunehmen.)				
<b>Kreiszyylinder, mit ebenen Endflächen senkrecht zur Achse</b>				
$d = 0,1$ m	$l = d$ bis $2d$	0,56	P	Frank.
$d = 0,4$ "	$l = 0,5 d$	0,57	S	Eiffel.
	1,0 $d$	0,55	"	"
	1,5 $d$	0,405	"	"
$d = 0,2$ m	$l = \sim 0$	0,55	T	Gött. Anst.
	0,5 $d$	0,59	"	" "
	1,0 $d$	0,55	"	" "
	1,5 $d$	0,395	"	" "

\*) Neue Formel von Föppl für Rechteckplatten s. S. 381.

Körper	$\psi$	Ver- such	Beobachter
Kreiszyylinder mit Kegelspitzen auf beiden Endflächen ( $l$ = Länge des zylindrischen Teils)			
$d = 0,115$ Spitzenwinkel $2\alpha = 90^\circ$	0,37	<i>P</i>	Frank.
$l = 0,17$ $60^\circ$	0,35	"	"
(Uebergangskanten abgerundet) $20^\circ$	0,20	"	"
Luftschiffkörper Modell I . . . . .	0,0597	<i>T</i>	Gött. Anst.
Abb. 161 II . . . . .	0,0335	"	" "
III . . . . .	0,0283	"	" "
Kugel $d = 0,2$ m . . . . .	0,17	<i>T</i>	Gött. Anst.
dsgl. $d = 0,25$ m . . . . .	0,09	<i>T</i>	Eiffel.
Kugelballon $W = 0,0256 d^2 w^2$ ; entspr.	0,26	<i>W</i>	Ch. Renard.
Halbkugelschale; Bewegung senkrecht zur Schnittfläche			
konvex angeblasen . . . . .	$\sim 0,3$	<i>R</i>	v. Lössl.
konkav " . . . . .	0,63	<i>S</i>	Eiffel.
Kreiskegelmantel, von der Spitze angeblasen (Grundfläche offen)			
$d = 0,399$ Spitzenwinkel $2\alpha = 60^\circ$	0,12	<i>S</i>	Eiffel.
<b>III. Prismatische Körper, quer angeblasen.</b>			
Kreiszyylinder mit senkrechten Endflächen, senkrecht zur Achse angeblasen.			
$d = 0,1$ $l = d$ bis $2d$	0,37	<i>P</i>	Frank.
$l$ groß im Verhältnis zu $d$	0,57	<i>W</i>	Irminger. (Kopenhagen)
Runde Drähte und Stangen			
für $d \cdot w > 0,015$ . . . . .	0,45	<i>T</i>	Gött. Anst.
für $d w < 0,015$ gilt $\psi = 0,66 - 14 w d$ ( $d$ und $w$ in m bzw m/sk)			
Draht- und Hanfseile			
Drahtseile aus 6 Litzen . . . . .	3,2	0,54	<i>T</i> Gött. Anst.
" " " " . . . . .	7,5	0,55	" " "
Ueberflochtenes Hanfseil . . . . .	7,0	0,60	" " "
" " " " . . . . .	10,1	0,57	" " "
Hanfseil aus 4 Litzen . . . . .	16,0	0,53	" " "
dasselbe, Fasern abgebrannt . . . . .	4,3	0,50	" " "
Polierter Strick . . . . .	4,3	0,45	" " "
Quadratisches Prisma			
senkrecht zur Seitenfläche angeblasen	0,95	<i>W</i>	Irminger.
diagonal angeblasen . . . . .	0,56	"	"
dsgl. $\psi'$ auf Seitenfläche bezogen = 0,79			

**Stauungsdrücke an Kreisscheiben** geringer Dicke. Nach Versuchen von Recknagel u. a. ist der Stauüberdruck  $p_1$  vor und der Minderdruck  $p_2$  hinter einer quer in einen Luftstrom gestellten Scheibe (beides im Mittelpunkt durch feine Bohrungen usw. gemessen)

$$p_1 = \mu \frac{w^2}{2}, \quad p_2 = 0,37 \mu \frac{w^2}{2}.$$

Dasselbe  $p_1$  wirkt (auf wenige vH genau) auf die Mündung eines parallel gegen den Strom gestellten Messrohres (Pitot-Darcysche Röhre). Die Zuschärfung der Kante hat dabei wenig Einfluss.

#### d. Körper mit einfacher Symmetrie. Symmetrieebene in der Bewegungsrichtung.

Die Resultierende der Luftkräfte liegt in der Symmetrieebene.

(Ist keine Symmetrie vorhanden, so gehören zu vollständiger Bestimmung 6 Angaben, nämlich Größe, 2 Richtungswinkel und die 3 Koordinaten eines Punktes der Wirkungslinie.)

Es bezeichne

$F$  die größte Projektion des Körpers,

$\alpha$  den „Anstellwinkel“ zwischen Ebene der größten Projektion und Bewegungsrichtung,

$R = \zeta \mu F w^2$  die Resultierende der Luftkräfte,

$A = \zeta_a \mu F w^2$  deren Komponente senkrecht zur Bewegungsrichtung (Auftriebskomponente),

$W = \zeta_w \mu F w^2$  die Komponente in der Bewegungsrichtung (Widerstandskomponente),

$i$  den Winkel zwischen  $R$  und der Senkrechten zur Bewegungsrichtung, so daß  $A = R \cos i$ ;  $W = R \sin i$ ,

$$\alpha = \frac{A}{W} = \frac{\zeta_a}{\zeta_w} = \cotg i = \text{Auftriebszahl,}$$

$\varphi = i - \alpha$  die Abweichung von  $R$  gegen die Flächennormale.

#### Ebene Platten in Schrägstellung.

(Ueber die Unstetigkeit der Strömungen und des Einflusses von  $\alpha$  und über den „kritischen Anstellwinkel“  $\alpha_k$  vgl. S. 366.)

1. Erfahrungsformeln für quadratische bzw. rechteckige Platten.

a) Größe von  $R$  bzw. Widerstandszahl  $\zeta$ . Sehr gebräuchlich, aber nur für kleine  $\alpha$  einigermaßen richtig, und dafür wenig voneinander verschieden sind folgende:\*)

Formeln von v. Lössl  $\zeta = \psi \sin \alpha$

$$\text{Ch. Renard } \zeta = \psi (2 \sin \alpha - \sin^3 \alpha)$$

$$\text{Duchemin } \zeta = \psi \frac{2 \sin \alpha}{1 + \sin^2 \alpha}$$

$$\text{Eiffel } \left\{ \begin{array}{l} \zeta = \psi \frac{\alpha^0}{30} \text{ für } \alpha < 30^\circ \\ \zeta = \psi \text{ für } \alpha > 30^\circ. \end{array} \right.$$

\*) Graphischer Vergleich dieser Formeln s. Z. d. V. d. I. 1910 S. 12 u. f.

Darin ist  $\psi$  der entsprechende Wert für die gleichen Platten unter  $\alpha = 90^\circ$  (s. S. 374). In v. Lössls Formel ist aber  $\psi$  doppelt so groß zu nehmen.

Formel von R. Soreau\*<sup>)</sup> für Rechteckplatten von verschiedenem Breitenverhältnis  $B : L$  ( $B$  Breite,  $L$  Länge in der Bewegungsrichtung).

$$\zeta = \psi_1 \sin \alpha \left[ 1 + \frac{1 - m \operatorname{tg} \alpha}{\frac{1}{(1+m)^2} + \frac{2m}{1+m} \operatorname{tg} \alpha + 2 \operatorname{tg}^2 \alpha} \right],$$

worin  $m = \frac{B - L}{B + L}$ ,

$\psi_1 =$  Widerstandszahl für die Quadratplatte unter  $90^\circ$ . (Für diese wird  $m = 0$ , und die Formel vereinfacht sich auf die obige von Duchemin.)

Die Formel soll den Versuchen von Langley (an einer großen Rundlaufvorrichtung von 18,2 m Dmr. im Freien bei  $\sim$  Windstille) sehr genau entsprechen.

b) Richtung von  $R$  annähernd senkrecht zur Fläche ( $\delta \approx \alpha$ ). Genaue Versuche darüber sehr schwierig.

c) Lage von  $R$ . Der Schnittpunkt der Wirkungslinie mit der Fläche („Druckpunkt“) wandert mit von  $90^\circ$  an abnehmendem  $\alpha$  aus der Flächenmitte zum vorderen Rande (Avanzinisches Gesetz). Erfahrungformeln hierfür wenig zuverlässig. Oft benutzt ist die Formel von Joëssel  $s = 0,3 L (1 - \sin \alpha)$ \*\*).

$s =$  Abstand des Druckpunktes von Flächenmitte,

2. Da brauchbare Formeln fehlen, sind im folgenden die wichtigsten neueren Versuche graphisch auszugewisse wiedergegeben.

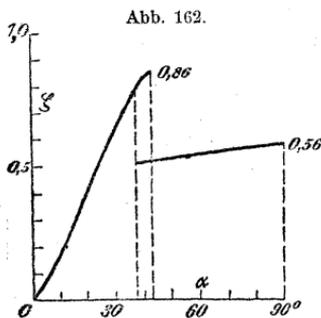
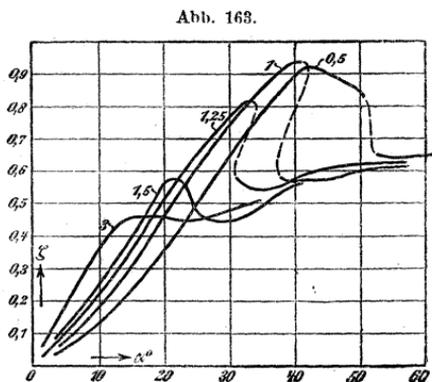


Abb. 162.\*\*\*) Quadratische Platte, Änderung von  $\zeta$  mit  $\alpha$  zwischen  $0^\circ$  und  $90^\circ$  (nach Prandtl). Zwischen  $38$  und  $42^\circ$



\*) Soc. des Ingénieurs Civils de France, Bulletin August 1903.

\*\*\*) Zusammenstellung der bisherigen Veröffentlichungen hierüber von Reifner, Zeitschr. f. Flugtechn. u. Motorluftschiff, 1910 S. 149.

\*\*\*\*) Zeitschr. f. Flugtechn. u. Motorluftschiff, 1910 S. 75.

sind verschiedene Zustände, entsprechend den beiden Kurvenzweigen, möglich.  $R$  kann also hier über 50 vH größer sein als in Querstellung.

Abb. 163.\*) Rechteckige Platten gleicher Länge ( $L = 35$  cm) und verschiedener Breite  $B$  quer zur Bewegungsrichtung. Angeblasene Seite (Druckseite) ganz eben, Rückseite vorn und hinten durch 2,5 cm lange Abschrägungen zugespitzt, also auf 30 cm eben. Dicke 0,4 cm.

$B = 17,5$	35	43,7	52,5	70	105	cm
$\frac{B}{L} = 0,5$	1	1,25	1,5	2	3	„

Diese Zahlen sind den Kurven beige geschrieben. Die gestrichelten Verbindungskurven stellen keine wirklich herstellbaren Zustände dar.  $R$  ist ziemlich genau senkrecht zur Platte, also  $\varphi \cong 0$ .

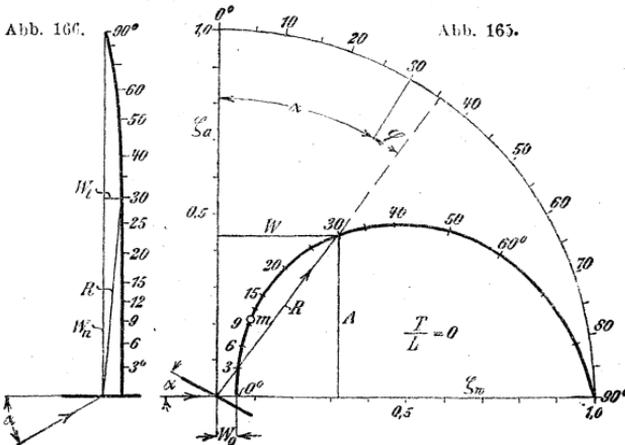
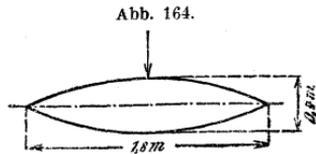
**Ebene und gewölbte Flügel.**

Versuche von O. Lilienthal (1874 bis 1896).\*\*)

Abb. 164. Umrissform und Größe der Versuchsflügel. Der Pfeil zeigt die Windrichtung.  $F' = 1$  qm.

Abb. 165. Ebener Flügel (Rundlaufversuch). Größe und Richtung des Winddruckes  $R$  in der Lilienthalschen Darstellung („Charakteristik“):

$R$  ist als Fahrstrahl vom Ursprung aus nach Richtung ( $i = \alpha + \varphi$ ) und Größe für die verschiedenen, der verbindenden



Kurve beige beschriebenen Werte von  $\alpha$  aufgetragen, so dass  $A$  und  $W$  bzw.  $\zeta_a$  und  $\zeta_w$  als Koordinatenabschnitte erscheinen, da für  $\alpha = 90^\circ$

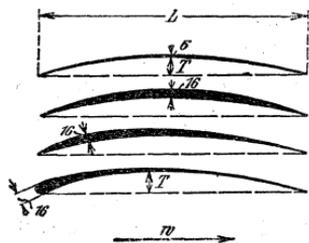
\*) Zeitschr. f. Flugtechn. u. Motorluftschiff. 1910 S. 87.  
 \*\*) Der Vogelflug als Grundlage der Fliegekunst. II. Aufl. Oldenbourg 1910.

der Wert von  $R$  gleich 1 gesetzt ist und Lilienthal dafür nach seinen Versuchen im Winde  $\zeta$  bzw.  $\psi = 1,0$  annimmt. Für ruhige Luft (kleineres  $\psi$ ) sind also alle  $\zeta$ -Größen mit dem berichtigten  $\psi$  zu multiplizieren.

Der Punkt  $m$ , von dem die Kurventangente durch den Ursprung geht, gibt den höchsten Wert der Auftriebszahl  $a$  an. Danach ist  $a_{\max} = 2,4$ , bei  $\alpha_{\text{opt}} = 10^\circ$ .

Abb. 166. Dieselben Versuchswerte in Beziehung zum Flügel dargestellt. Die  $R$  der Abb. 165 sind um  $\alpha$  nach der senkrechten Achse zu verdreht; so daß nur die Winkel  $\eta = i - \alpha$  übrig bleiben und die Drücke senkrecht ( $W_n$ ) und tangential ( $W_t$ ) zu  $L'$  als Koordinatenabschnitte erscheinen. Die  $\alpha$  sind wieder beigeschrieben. Diese Darstellung ist für manche Zwecke vorteilhafter.

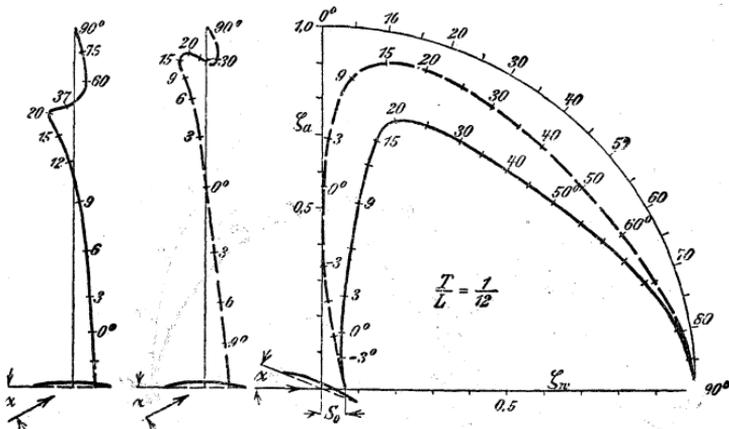
Abb. 167 bis 170.



Gewölbte Flügel. Abb. 167 bis 170. Einige der von Lilienthal untersuchten Querschnittsformen. Umrissform immer nach Abb. 164. Dicken in mm angeschrieben.

Deutliche Ueberlegenheit vor den übrigen konnte Lilienthal bei keinem dieser Querschnitte feststellen. Formen mit doppelter Krümmung (hinten leicht aufgebogen usw.), ferner ganz dünne

Abb. 171 bis 173.



Flügel mit verstärkten Rändern (Drahteinlagen u. dgl. im Bespannungstoff) fand er dagegen wesentlich ungünstiger.

Abb. 171 bis 173. Flügel mit Wölbungspfeil  $T = 1/12$  der Sehnenlänge  $L$ . (Beste Wölbung nach Lilienthals Versuchen.)

**Ausgezogene Kurven:** Versuche an Rundlaufvorrichtung ( $r_i = \frac{1}{2} r_a$ ).  
**Gestrichelte Kurven:** Versuche im freien Winde.  
 Nach den Rundlaufversuchen ist

$$\text{für } \alpha = 0^\circ \quad a = 2,8 \quad \text{für } \alpha_{\text{opt}} = 10^\circ \quad a_{\text{opt}} = 5,6.$$

Im Winde wäre danach nahe  $\alpha = 0^\circ$  die Widerstandskomponente  $W = 0$ , also  $a = \infty$ , was in wagerechtem und gleichförmigem Luftstrom unmöglich. Lilienthal gibt deshalb noch berichtigte Kurven auf Grund seiner Beobachtung, daß der Wind immer um  $3,5^\circ$  aufwärts gerichtet erscheint (vgl. S. 396). Dadurch wird  $a_{\text{max}} = 16$ , bei  $\alpha_{\text{opt}} = 3^\circ$ . Die Tangentialkomponente  $W_t$  ist nach beiden Versuchen in weitem Bereich negativ.

A wird erst bei negativem  $\alpha$  ( $-8$  bzw.  $-12^\circ$ ) zu Null. Die Widerstandskomponente ( $W_o$ ) ist dabei schon wieder etwas gewachsen.

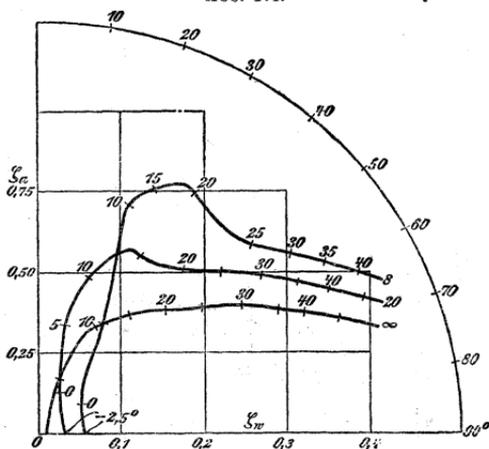
### Versuche der Göttinger Anstalt.

Zylindrische Schalen, nach Kreisbogen gewölbt; Umriss ein Rechteck,  $L = 20$ ,  $B = 80$  cm; Dicke 0,4 cm, Kanten halbkreisförmig abgerundet (vgl. Querschnitt in Abb. 175).

Abb. 174.

Untersucht wurden 8 Schalen mit verschiedenem Wölbungspfeil  $T = 0, 3,3$  bis  $25$  mm. Die höchste Auftriebszahl  $a = 11,0$  ergab  $T = 8,1$  mm ( $\gamma = T : L = 1 : 24,7$ ) bei  $\alpha = 4^\circ$ .

Abb. 174. Als Beispiel sind die Versuche mit den Wölbungen  $l : \gamma = \infty, 20, 8$  (wie beigeschrieben) in Lilienthalsche Darstellung umgezeichnet (wodurch die  $\xi, \varphi$  usw. in einem Bild erscheinen).



Nach diesen und neueren Versuchen der Göttinger Anstalt hat O. Föpppl folgende Formeln aufgestellt:\*)

Es ist  $\lambda = B : L$  das Seitenverhältnis;  $B$  quer zur Bewegungsrichtung;  $L =$  Sehnenlänge,

$D$  die Dicke der Schale,

\*) Aus einer demnächst erscheinenden Dissertation freundlich mitgeteilt.

Für ebene, senkrecht vom Luftstrom getroffene Platten von  $\lambda = 1 : 1$  bis  $1 : 10$  gibt Föpppl noch die Formel

$$\phi = 0,72 - \frac{3}{7 + 5,5 \left( \lambda + \frac{1}{\lambda} \right)}$$

$\gamma = T:L$  das Wölbungsverhältnis,  
 $\alpha$  der Winkel zwischen Sehne und Bewegungsrichtung in  
 Graden.

Für **Kreisbogenschalen** mit  $\gamma = 0,015$  bis  $0,1$  gilt

$$\zeta_a = \left( 0,32 \gamma + \frac{1}{18 + 95 \lambda} \right) \cdot (\alpha + 3^0)$$

$$\zeta_w = 0,3 \frac{D}{B} + 0,4 \gamma + \frac{0,01}{100 \gamma + 1} - 0,006 + 0,0005 \alpha^2.$$

Für **ebene Platten** (Versuche vrgl. Abb. 163) ist

$$\zeta_a = \frac{\alpha}{16 + 54 \lambda}; \quad \zeta_w = 0,004 + 0,3 \frac{D}{B} + \frac{\pi}{180} \alpha \cdot \zeta_a.$$

Die Formeln stimmen für  $\alpha = -3^0$  bis  $+8^0$  und  $\lambda = 0,67$  bis  $0,1$  mit den Versuchen auf mindestens 12 vH überein.

Fasst man die für eine gewählte Flügelform unveränderlichen Glieder zusammen, so hat man die für Rechnungen über die Stabilität von Flugzeugen usw. von Reissner\*) aufgestellten Ausdrücke

$$A = c_1 (\alpha + \varepsilon) F \cdot w^2; \quad W = (c_2 + c_3 \alpha^2) F \cdot w^2.$$

Abb. 175.\*) Lage der Mittelkraft. Die Kurven zeigen den Abstand  $s$  des Druckpunktes  $a$  (Schnitt mit der Wölbungssehne) von der vorderen (angeblasenen) Kante für die verschiedenen Anstellwinkel.

Abb. 175.

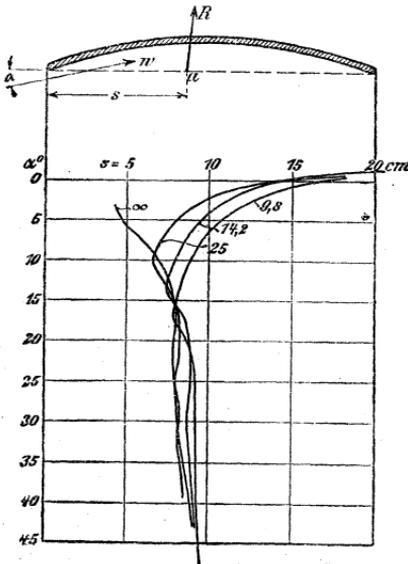
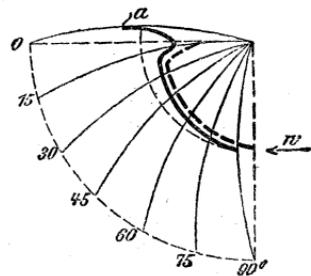


Abb. 176.



Aehnliche Versuche von  
 Eiffel,  
 ebenfalls im Windtunnel bei  
 $w \approx 10$  m/sk.

Zylindrische Kreisbogen-  
 schale; rechteckiger Umriss  
 (15 × 90 cm). Wölbungspfeil  
 1,1 cm; also

$$\frac{L}{T} = 13,5.$$

\*) Zeitschr. f. Flugtechn. u. Motorluftschiff. 1910.

Es ist für

$\alpha =$	$0^0$	$2,5^0$	$5^0$	$10^0$	$15^0$	$20^0$
$\xi =$	0,178	0,310	0,430	0,584	0,628	0,573
$\xi_a =$	0,176	0,310	0,428	0,578	0,613	0,540
$\xi_w =$	0,031	0,030	0,042	0,073	0,136	0,196
$a =$	5,7	10,5	10,0	8,3	4,65	3,3
$\eta =$	$10^0$	$2,9^0$	$0,5^0$	$-2,8^0$	$-2,7^0$	$-0,1^0$

Dicke der Schale: 3 mm, Kanten nicht abgerundet.

Abb. 176. Lage von  $R$ . Die Schnittpunkte  $a$  der Kraft mit dem Kreisbogen sind für die verschiedenen  $\alpha$ , in denen das Profil dargestellt ist, durch eine Kurve verbunden. Die gestrichelte Kurve gibt zum Vergleich die Lage des  $R$  einer ebenen Platte.

## IV. GESCHWINDIGKEITS- UND MENGENMESSUNG LUFTFÖRMIGER KÖRPER.

### A. Statische Raummessung.

#### 1. Kubizierapparat (Ursprungsmaß zum Eichen von Gasuhren usw.).

Glocken von bekanntem Querschnitt verdrängen beim Niedersinken in einen Flüssigkeitsbehälter genau berechenbare Volumina durch ein Rohr, das durch die Flüssigkeit hinaufreicht. Druck und Temperatur in der Glocke werden beobachtet; Umrechnung auf Einheitszustand s. S. 342. Um den Druck beim Niedersinken unverändert zu halten, vermehrt man durch selbsttätige Vorrichtungen das Glockengewicht entsprechend der beim tieferen Eintauchen des Glockenrandes entstehenden Auftriebszunahme.

#### 2. Gasmesser für fortlaufende Raummessung

(Gasuhren, Crosley-Trommel).

Das Gehäuse ist bis über die wagerechte Drehachse der Trommel mit Wasser gefüllt („nasse Gasmesser“).

Bei unverändertem Wasserstand liefert jede Trommeldrehung die gleiche Gasmenge. Kleine Unterschiede der Wasserhöhe machen wenig aus, weil die Kammern beim Abschlufs die schmale Sektorspitze nach unten kehren. Bei wichtigeren „Stationsgasmessern“ hält beständiger Wasser-Zu- und -Abfluß den Spiegel genau gleich (Kingscher Ueberlauf).

Zulässige Drehzahl etwa 100 in der Stunde. Benötigter Ueberdruck zum Betriebe meist unter 2 mm WS.

Die Meßgenauigkeit guter Gasuhren ist nahezu vollkommen. Auch kleinster Zufluß wird vollständig gezählt. Druck- bzw. Geschwindig-

keitsschwankungen verursachen merkliche Fehler erst, wenn die erzeugten Wasserbewegungen die absperrenden Kanten zeitweise freigeben\*) (schlurfendes Geräusch). Bei stoßweisem Gasstrom, wie in der Saugleitung von Gasmaschinen, Kompressoren u. dgl., müssen aber Druckregler eingeschaltet werden (Kautschukbeutel bei Druckgas, an Federn gehängte Tauchglocken oder dgl. bei Sauggas).

### 3. Gasmengenmessung durch Aufpumpen eines Behälters (besonders für Kompressoruntersuchungen).

Ist  $V$  der Rauminhalt des Behälters in cbm,

$P_1$  und  $P_2$  der absolute Druck darin zu Anfang und Ende des Versuchs in kg/qm,

$T_1$  und  $T_2$  die mittlere absolute Temperatur darin zu Anfang und Ende,

$G$  die eingepresste Gasmenge in kg,

$R$  die Konstante des Gases oder

$\gamma_0$  dessen Einheitsgewicht beim Zustand  $P_0 T_0$  in kg/cbm,

so ist 
$$G = \frac{V}{R} \left( \frac{P_2}{T_2} - \frac{P_1}{T_1} \right) = V \gamma_0 \frac{T_0}{P_0} \left( \frac{P_2}{T_2} - \frac{P_1}{T_1} \right).$$

## B. Geschwindigkeitsmessungen.

### 1. Anemometer.

Flügelräder, die ein Zählwerk treiben, werden vom Luftstrom gedreht. Die Geschwindigkeit ist recht genau proportional der Luftgeschwindigkeit (vgl. Woltmannsche Flügel für Wassermessung). Man liest den Windweg für die Beobachtungszeit ab ( $1/2$  bis 1 min).

**Schraubenrad-Anemometer** müssen mit der Drehachse in die Windrichtung gestellt werden. Sie können empfindlich genug schon für Geschwindigkeiten von 0,5 m/sk gemacht werden.

**Schalenkreuz-Anemometer** nach Robinson. 4 oder 6 Halbkugelschalen sind mit der Schnittebene in Richtung der Drehachse am drehbaren Armkreuz befestigt. Die Achse wird senkrecht zur Windrichtung gestellt, kann also für beliebige wagerechte Windrichtung senkrecht stehen bleiben. Die konkaven Schalenseiten erleiden größeren Winddruck als die konvexen (vgl. S. 376); diese werden also gegen den Wind gedreht. Sie bilden dabei eine Luftbremse von sehr gleichförmigem Drehmoment. Diese Geräte sind deshalb weniger empfindlich gegen nicht ganz reibungsfreien Gang des Getriebes, anderseits aber weniger geeignet für geringe Geschwindigkeit.

### 2. Hydrostatische Geschwindigkeitsmessung.

**Pitot-Darcysche Röhre.** Eine mit der Mündung quer gegen die Strömung gestellte Röhre wird mit einem Manometer verbunden. Der angezeigte dynamische Ueberdruck  $p_1$  (in kg/qm) gegen den hydro-

\*) Nach Versuchen im Maschinenlaboratorium der Technischen Hochschule in Berlin auf Veranlassung von Prof. Josse.

statischen Druck  $p_0$  der Flüssigkeit entspricht der „Geschwindigkeitshöhe“.

$$p_1 = \frac{\gamma w^2}{2g}, \text{ also } w = \sqrt{2g \frac{p_1}{\gamma}} = 4,43 \sqrt{\frac{p_1}{\gamma}}$$

(alle Maße in m, kg, sk).

Werte von  $\frac{\gamma w^2}{2g}$  für Luft bei mittlerer Dichtigkeit.

$$\left( \gamma = 1,226; \quad \frac{\gamma}{g} = \frac{1}{8} \right).$$

$w =$	1	2	3	4	5	6	8	m/sk
$w^2 \frac{\gamma}{2g} =$	0,0625	0,250	0,562	1,00	1,56	2,25	4,00	kg/qm oder mm WS
$w =$	10	15	20	25	30	40	50	m/sk
$w^2 \frac{\gamma}{2g} =$	6,25	14,06	25,0	39,1	56,2	100	156	kg/qm oder mm WS

Der hydrostatische Druck  $p_0$  ist oft schwer zu erhalten, da er an einem Ort abgenommen werden müßte, wo gerade die an der Meßstelle vorhandene Bewegungsenergie der Strömung durch Reibung vernichtet ist. Man schließt daher zweckmäßig die Gegenseite des Manometers gleichfalls in bestimmter Weise an die Meßstelle selbst an, z. B. (nach Prandtl) an eine Kammer, die in dem Meßrohr selbst abgeteilt ist. Durch feine Bohrungen in der Rohrwand, an der die Strömung entlangstreicht, gelangt ein niedrigerer (aber nicht ohne weiteres dem hydrostatischen gleicher) Druck zum Manometer. Der gemessene Druckunterschied steht aber in festem Verhältnis zur obigen Geschwindigkeitshöhe, das durch Eichung bestimmt wird.

Recknagel-Krellsche Stauscheiben sind kreiszylindrische, hohle, durch eine Querwand in zwei runde Kammern geteilte Plättchen, die quer in den Strom gestellt werden. Durch Bohrungen in der Mitte der Vorder- und Rückwand wird vorn der „Stauüberdruck“, hinten der Minderdruck in das Innere und durch je ein Verbindungsröhrchen nach den beiden Seiten des Manometers geleitet.

Ist  $p_1 - p_2$  der Druckunterschied in kg/qm, so ist nach Recknagels Versuchen\*)

$$p_1 - p_2 = 1,37 \frac{\gamma}{2g} w^2, \text{ also } w = \sqrt{\frac{2g}{1,37} \frac{p_1 - p_2}{\gamma}} = 3,78 \sqrt{\frac{p_1 - p_2}{\gamma}}$$

### C. Dynamische Raummessungen.

Mengenmessungen in Flüssigkeitsleitungen mittels eines der obigen Geschwindigkeitsmeßverfahren sind unsicher, weil die Strömung meist wirbelnd (vgl. S. 363) und die mittlere Geschwindigkeitsverteilung über den Querschnitt schwer zu bestimmen ist.

\*) Z. d. V. D. I. 1886 S. 489.

Ausflussmessungen lassen sich dagegen oft leicht mit guter Genauigkeit einrichten. Man läßt die ganze Flüssigkeitsmenge durch eine Meßöffnung strömen, die in einer ebenen Wand zwischen 2 Gefäßen angebracht wird, von denen das eine meist der offene Luftraum sein kann. Die in der Zeiteinheit ausfließende Menge wird aus dem beobachteten Druckunterschied vor und hinter der Öffnung berechnet.

Die Ausfluszahl  $\alpha$  ist bei scharfkantigen Öffnungen in dünner Wand, die starke Kontraktion erzeugen, nach Versuchen von Weisbach, Hirn, Rateau, Arno Müller u. a. erheblich mit dem Druckunterschied veränderlich, daher für besondere Fälle schwer festzustellen.

Kontraktionsfreie Mündungen geben bei guter Herstellung auch sehr wenig Reibungswiderstand und liefern nach Versuchen mit Wasserdampf von Rateau, Gutermuth, Bendemann u. a.\*) unter verschiedensten Verhältnissen fast genau die theoretische Ausflusmenge, also  $\alpha = (0,98 \text{ bis } 1,0)$ . Gleichwertige Versuche mit Luft sind nicht bekannt; die Verhältnisse dürften aber dafür dieselben sein.

Die Mündung muß sich auf der Zufußseite glatt an die umgebende Gefäßwand anschließen; die Abrundung soll mindestens mit dem doppelten Querschnitt der engsten Stelle beginnen und stetig in diese übergehen. Zuletzt kann sie auf ein kurzes Stück (etwa  $\frac{1}{10}$  des Durchmessers) genau zylindrisch werden, dann aber sofort abgeschnitten sein. Die Leibung ist fein zu glätten. Die Gefäßwand auf der Zufußseite soll nach allen Richtungen hin auf das 3-fache des Mündungsdurchmessers eben, das Zufußgefäß selbst so weit sein, daß die Geschwindigkeiten darin gegen die Ausflusgeschwindigkeit vernachlässigt werden können.

### Berechnung der Ausflusmenge.

Es seien

$F$  der kleinste Mündungsquerschnitt in  $\text{qm}$

$P_1$  und  $P_2$  die absoluten hydrostatischen Drücke vor und hinter der Mündung in  $\text{kg/qm}$

$\gamma_1$  und  $\gamma_2$  die entsprechenden Einheitsgewichte der Flüssigkeit in  $\text{kg/cbm}$

$G$  das sekundliche Gewicht in  $\text{kg/sk}$

$V$  das sekundliche Volumen der Ausflusmenge in  $\text{cbm/sk}$ .

1.  $P_1 - P_2$  klein gegen den absoluten Druck. Dann ist für luftförmige Körper, da  $\gamma_2$  und  $\gamma_1$  nahezu gleich sind, das einfache Ausflusgesetz (der unelastischen Flüssigkeiten anwendbar

$$G = \alpha F \sqrt{2g(P_1 - P_2)\gamma}; \quad v = \frac{G}{\gamma}$$

Bei  $\frac{P_2}{P_1} \geq 0,99$  bleibt der Fehler  $< 0,5$  vH

„ „  $\geq 0,93$  „ „ „  $< 2,0$  vH.

\*) Zusammenstellung s. Bendemann, „Ueber den Ausflus des Wasserdampfes usw“. Forschungsarbeiten des V. d. I., Heft 37.

2. Für gröfsere Druckunterschiede hat man 2 Fälle zu unterscheiden, je nachdem  $\frac{P_2}{P_1}$  gröfser oder kleiner ist, als das kritische Druckverhältnis  $\beta$  (s. unten), das für Luft usw. = 0,527 ist.

a)  $P_2 > \beta P_1$ . Dann sind die Exponentialgleichungen von De St. Venant und Wantzel maßgebend, die rechnerisch sehr un bequem sind. Sehr genaue Annäherung gibt die Formel von Bendemann:\*)

$$G = \alpha F \cdot \frac{K}{1 - \beta} \sqrt{P_1 \gamma_1 (1 - 2\beta) \left(1 - \frac{P_2}{P_1}\right) - \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^2},$$

worin  $K = \sqrt{g z \left(\frac{2}{z+1}\right)^{\frac{z+1}{z-1}}}$

und  $\beta = \left(\frac{2}{z+1}\right)^{\frac{z}{z-1}}$  (kritisches Druckverhältnis)

$z$  = Verhältnis der spezifischen Wärmen. (Werte s. S. 417 u. f.)

Setzt man das gemessene  $P_1 - P_2 = d$ , so ist

$$G = \alpha F \frac{K}{1 - \beta} \sqrt{2 \gamma_1 d \left(1 - \beta - \frac{d}{2 P_1}\right)}.$$

Für Luft ist  $z = 1,405$ ;  $K = 2,14$ ;  $\beta = 0,527$  und damit

$$G = 4,52 \alpha F \sqrt{\gamma_1 d \left(0,946 - \frac{d}{P_1}\right)}.$$

b) Ist  $P_2 < \beta P_1$ , so wird  $G$  von  $P_2$  nicht mehr beeinflusst.

$$G = K \cdot \alpha F \sqrt{P_1 \gamma_1}; \quad K \text{ wie oben.}$$

\*) A. a. O. S. 42.

## DRITTER ABSCHNITT.

## WÄRME.\*)

(Einschliesslich der Thermodynamik der Gase und Dämpfe.\*\*)

## I. ALLGEMEINE WÄRMEEIGENSCHAFTEN DER KÖRPER.

## A. Temperaturmessung.

Bezeichnen  $C$ ,  $R$  und  $F$  die einer bestimmten Temperatur entsprechenden Grade nach Celsius, Réaumur und Fahrenheit, so ist

$$C = \frac{5}{4} R = \frac{5}{9} (F - 32^0), \quad R = \frac{4}{5} C = \frac{4}{9} (F - 32^0), \\ F = 32^0 + \frac{9}{5} C = 32^0 + \frac{9}{4} R.$$

Hiernach ergibt sich die Tafel a. S. 390.

Als normale Temperaturskala gilt die des **Wasserstoffthermometers**. Gewöhnliche luftfreie **Quecksilberthermometer** sind bis gegen  $300^0$  brauchbar, für höhere Temperaturen wird das Haarröhrchen über dem Quecksilber mit Stickstoff oder Kohlensäure unter hohem Druck gefüllt, wodurch Quecksilberthermometer bis  $550^0$  und bei Anwendung von Quarzglas bis  $800^0$  sehr gut zu verwenden sind. Die untere Grenze der Brauchbarkeit ist  $-39^0$ .

Hat nicht das ganze Quecksilber des Thermometers die zu messende Temperatur, so muß zu der Ablesung  $t$  ein Betrag  $\Delta t$  hinzugefügt werden, welcher sich aus der Länge des herausragenden Fadens  $f$  in Graden und aus dessen Temperatur  $t_f$  bestimmt:

$$\Delta t = \frac{1,6 f (t - t_f)}{10\,000}.$$

Zur Bestimmung von  $t_f$  kann ein kleines Hülftthermometer benutzt werden, das man unmittelbar neben dem anderen aufhängt.

Für **niedrige Temperaturen** unter  $-39^0$  dient **Alkohol, Toluol, Pentan** oder **Petroleumäther** zur Füllung von Thermometern.

Zu **genauen Temperaturmessungen** kommen aufser den Quecksilberthermometern besonders **elektrische Thermometer** in Betracht.

Das **elektrische Widerstandsthermometer** (Platinthermometer) beruht auf der regelmäßigen Zunahme des Leitungswiderstandes eines Platindrahtes mit der Tem-

\* Für das Taschenbuch verfasst von Prof. Dr. Mollier, Dresden.

\*\* Ueber Mechanik luftförmiger Körper s. a. S. 341.

peratur. Gebrauchsgrenze nach oben bei geeigneter Anordnung bis  $1000^{\circ}$ , nach unten beliebig tief. Eichung nach Normalthermometern.

Das **Thermoelement** mißt die Temperatur durch die Spannung eines Thermoströmes. Zwei Drähte von verschiedenen Metallen werden zusammengelötet und die Lötstelle der zu messenden Temperatur ausgesetzt, während die beiden anderen Enden auf unveränderlicher Temperatur gehalten werden. Die Spannung wird durch ein Galvanometer oder durch Kompensation gemessen. Eichung nach Normalthermometer oder mit bekannten Fixpunkten.

Für Temperaturen von  $500^{\circ}$  abwärts sind Thermoelemente aus Kupfer-Konstantan oder Eisen-Konstantan (60 vH Ni, 40 vH Cu) gebräuchlich, von  $500^{\circ}$  bis  $1600^{\circ}$  verwendet man das Le Chateliersche Thermoelement aus Platin und Platin mit 10 vH Rhodium.

Da nur die sehr kleine Lötstelle der zu messenden Temperatur ausgesetzt werden muß, so kann in sehr engen Räumen und an bestimmten eng begrenzten Stellen gemessen werden.

Für verschiedene Metallpaare ergeben sich für  $100^{\circ}$  Temperaturunterschied der Drahtenden folgende elektromotorische Kräfte in Millivolt

Eisen — Konstantan 5,3;	Kupfer — Nickel 2,2;
Kupfer — Konstantan 4,0;	Eisen — Platin 1,7;
Eisen — Nickel 3,2;	Platin — Platin mit 10 vH. Rhodium.

Elektrische Widerstandsthermometer und Thermoelemente eignen sich vorzüglich als **Fernthermometer**, die Thermoelemente in Verbindung mit **registrierenden** Galvanometern zur selbsttätigen Aufzeichnung von Betriebstemperaturen (Siemens u. Halske).

Zur **Eichung und Prüfung** von Thermometern für hohe Temperaturen dienen am besten die genau bekannten Schmelzpunkte von Zinn, Blei, Zink, Antimon, Silber, Gold, Nickel, Platin und die Siedepunkte von Naphthalin, Schwefel, Zink (s. S. 397, 398).

**Optische Pyrometer** (Siemens u. Halske, Wannerypyrometer u. a.) dienen zur Messung der Temperaturen von  $500^{\circ}$  aufwärts. Genauigkeit von  $500^{\circ}$  bis  $1500^{\circ}$  etwa  $\pm 10^{\circ}$ , über  $1500^{\circ}$   $\pm 15^{\circ}$ . Sie beruhen auf Photometrierung der von den zu messenden heißen Körpern ausgehenden Strahlung. Strahlungsgesetze vgl. S. 410.

#### Glühfarben des Eisens.

blendend weiß . . . . .	über $1500^{\circ}$	dunkelorange . . . . .	$1100^{\circ}$
Schweißhitze . . . . .	$1400-1500^{\circ}$	hellkirschrot . . . . .	$1000^{\circ}$
starkes Weißglühen . . . . .	$1350^{\circ}$	kirschrot . . . . .	$900^{\circ}$
weißglühend . . . . .	$1300^{\circ}$	dunkelkirschrot . . . . .	$800^{\circ}$
hellorange . . . . .	$1200^{\circ}$	dunkelrot . . . . .	$700^{\circ}$
helles Glühen . . . . .	$1150^{\circ}$	im Dunkeln rotglühend . . . . .	$500^{\circ}$

**Seegerkegel** (Pyramiden von 6 cm Höhe für die verschiedenen Temperaturen in 59 verschiedenen Nummern hergestellt) aus Silikatgemischen haben sich in der Tonwarenindustrie zur Bestimmung des Garbrandes der Ware und bei sonstigen technischen Feuerungsanlagen zum Messen der Temperaturen von  $600^{\circ}$  bis  $2000^{\circ}$  bewährt.\*) Die Kegel liefern nur eine Endtemperatur. Diese gilt als erreicht, wenn der Kegel mit seiner Spitze die Unterlage berührt.

\*) Lieferant Chemisches Laboratorium für Tonindustrie, Berlin NW 5.

## Vergleichung der Thermometergrade.

(Näheres s. S. 398.)

C	R	F	C	R	F	C	R	F	C	R	F
-20	-16	-4,0	+35	+28,0	+95,0	+90	+72,0	+194,0	+145	+116,0	+293,0
-19	-15,2	-2,2	36	28,8	96,8	91	72,8	195,8	146	116,8	294,8
-18	-14,4	-0,4	37	29,6	98,6	92	73,6	197,6	147	117,6	296,6
-17	-13,6	+1,4	38	30,4	100,4	93	74,4	199,4	148	118,4	298,4
-16	-12,8	3,2	39	31,2	102,2	94	75,2	201,2	149	119,2	300,2
-15	-12,0	5,0	40	32,0	104,0	95	76,0	203,0	150	120,0	302,0
-14	-11,2	6,8	41	32,8	105,8	96	76,8	204,8	151	120,8	303,8
-13	-10,4	8,6	42	33,6	107,6	97	77,6	206,6	152	121,6	305,6
-12	-9,6	10,4	43	34,4	109,4	98	78,4	208,4	153	122,4	307,4
-11	-8,8	12,2	44	35,2	111,2	99	79,2	210,2	154	123,2	309,2
-10	-8,0	14,0	45	36,0	113,0	100	80,0	212,0	155	124,0	311,0
-9	-7,2	15,8	46	36,8	114,8	101	80,8	213,8	156	124,8	312,8
-8	-6,4	17,6	47	37,6	116,6	102	81,6	215,6	157	125,6	314,6
-7	-5,6	19,4	48	38,4	118,4	103	82,4	217,4	158	126,4	316,4
-6	-4,8	21,2	49	39,2	120,2	104	83,2	219,2	159	127,2	318,2
-5	-4,0	23,0	50	40,0	122,0	105	84,0	221,0	160	128,0	320,0
-4	-3,2	24,8	51	40,8	123,8	106	84,8	222,8	161	128,8	321,8
-3	-2,4	26,6	52	41,6	125,6	107	85,6	224,6	162	129,6	323,6
-2	-1,6	28,4	53	42,4	127,4	108	86,4	226,4	163	130,4	325,4
-1	-0,8	30,2	54	43,2	129,2	109	87,2	228,2	164	131,2	327,2
0	0	32,0	55	44,0	131,0	110	88,0	230,0	165	132,0	329,0
+	+0,8	33,8	56	44,8	132,8	111	88,8	231,8	166	132,8	330,8
1	1,6	35,6	57	45,6	134,6	112	89,6	233,6	167	133,6	332,6
2	2,4	37,4	58	46,4	136,4	113	90,4	235,4	168	134,4	334,4
3	3,2	39,2	59	47,2	138,2	114	91,2	237,2	169	135,2	336,2
4	4,0	41,0	60	48,0	140,0	115	92,0	239,0	170	136,0	338,0
5	4,8	42,8	61	48,8	141,8	116	92,8	240,8	171	136,8	339,8
6	5,6	44,6	62	49,6	143,6	117	93,6	242,6	172	137,6	341,6
7	6,4	46,4	63	50,4	145,4	118	94,4	244,4	173	138,4	343,4
8	7,2	48,2	64	51,2	147,2	119	95,2	246,2	174	139,2	345,2
9	8,0	50,0	65	52,0	149,0	120	96,0	248,0	175	140,0	347,0
10	8,8	51,8	66	52,8	150,8	121	96,8	249,8	176	140,8	348,8
11	9,6	53,6	67	53,6	152,6	122	97,6	251,6	177	141,6	350,6
12	10,4	55,4	68	54,4	154,4	123	98,4	253,4	178	142,4	352,4
13	11,2	57,2	69	55,2	156,2	124	99,2	255,2	179	143,2	354,2
14	12,0	59,0	70	56,0	158,0	125	100,0	257,0	180	144,0	356,0
15	12,8	60,8	71	56,8	159,8	126	100,8	258,8	181	144,8	357,8
16	13,6	62,6	72	57,6	161,6	127	101,6	260,6	182	145,6	359,6
17	14,4	64,4	73	58,4	163,4	128	102,4	262,4	183	146,4	361,4
18	15,2	66,2	74	59,2	165,2	129	103,2	264,2	184	147,2	363,2
19	16,0	68,0	75	60,0	167,0	130	104,0	266,0	185	148,0	365,0
20	16,8	69,8	76	60,8	168,8	131	104,8	267,8	186	148,8	366,8
21	17,6	71,6	77	61,6	170,6	132	105,6	269,6	187	149,6	368,6
22	18,4	73,4	78	62,4	172,4	133	106,4	271,4	188	150,4	370,4
23	19,2	75,2	79	63,2	174,2	134	107,2	273,2	189	151,2	372,2
24	20,0	77,0	80	64,0	176,0	135	108,0	275,0	190	152,0	374,0
25	20,8	78,8	81	64,8	177,8	136	108,8	276,8	191	152,8	375,8
26	21,6	80,6	82	65,6	179,6	137	109,6	278,6	192	153,6	377,6
27	22,4	82,4	83	66,4	181,4	138	110,4	280,4	193	154,4	379,4
28	23,2	84,2	84	67,2	183,2	139	111,2	282,2	194	155,2	381,2
29	24,0	86,0	85	68,0	185,0	140	112,0	284,0	195	156,0	383,0
30	24,8	87,8	86	68,8	186,8	141	112,8	285,8	196	156,8	384,8
31	25,6	89,6	87	69,6	188,6	142	113,6	287,6	197	157,6	386,6
32	26,4	91,4	88	70,4	190,4	143	114,4	289,4	198	158,4	388,4
33	27,2	93,2	89	71,2	192,2	144	115,2	291,2	199	159,2	390,2

**Tabelle einiger Schmelzpunkte der Segerkegel.**

Nr.	Temperatur	Nr.	Temperatur	Nr.	Temperatur	Nr.	Temperatur
022 <sup>1)</sup>	600	1A	1100	20	1530	35	1770
016	750	10	1300	26 <sup>2)</sup>	1580	39	1880
01A	1080	15	1435	30	1670	42	etwa 2000

1) Sprich: Null zweiundzwanzig.

2) Keramische Produkte, die über S. K. 26 schmelzen, werden als „feuerfest“ bezeichnet.

### B. Ausdehnung der Körper durch die Wärme.

Unter der **Längenausdehnungszahl**  $\beta = \frac{1}{l} \frac{dl}{dt}$  eines festen Körpers versteht man die Zunahme der Längeneinheit des Körpers bei 10 Temperaturerhöhung.

Unter der **Raumausdehnungszahl**  $\alpha = \frac{1}{V} \frac{dV}{dt}$  eines festen, tropfbar flüssigen oder gasförmigen Körpers versteht man die Vergrößerung der Raumeinheit bei 10 Temperaturerhöhung.

Für homogene feste Körper ist  $\alpha = 3\beta$ , die **Flächenausdehnungszahl** = 2  $\beta$ .

#### Ausdehnungszahlen für feste und flüssige Körper.

##### Längenausdehnung 1000 $\beta$ zwischen 0° und 100°

Aluminium . . . . .	0,024
Blei . . . . .	0,029
Bronze . . . . .	0,018
Eisen und Stahl . . . . .	0,011
Gold . . . . .	0,015
Konstantan . . . . .	0,015
Kupfer . . . . .	0,017
Magnesium . . . . .	0,032
Messing . . . . .	0,019
Nickel . . . . .	0,013
Platin . . . . .	0,009
Silber . . . . .	0,019
Zink . . . . .	0,029
Zinn . . . . .	0,023
Zement (Beton) . . . . .	0,014
Glas . . . . .	0,006 bis 0,009

Hartgummi . . . . .	0,080
Holz, längs . . . . .	0,003 bis 0,009
Kalkstein . . . . .	0,008
Porzellan . . . . .	0,003

##### Raumausdehnung 1000 $\alpha$ bei Zimmertemperatur

Aether . . . . .	1,60
Alkohol . . . . .	1,10
Benzol . . . . .	1,25
Glycerin . . . . .	0,50
Olivenöl . . . . .	0,72
Petroleum . . . . .	1,00 bis 0,92
Quecksilber . . . . .	0,181
Rüböl . . . . .	0,90
Schwefelsäure . . . . .	0,55
Terpentinöl . . . . .	1,00
Wasser . . . . .	0,18

Für Eisen und Stahl kann bei höheren Temperaturen gesetzt werden  
1000  $\beta = 0,011 + 0,000008 t$ .

Die Ausdehnungszahlen sind im allgemeinen von der Temperatur abhängig; wählt man für sie unveränderliche Mittelwerte und als Längen-, Flächen- und Raumeinheit die bei 0° C, so ist

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{1 + \beta t_1}{1 + \beta t_2} \qquad \frac{F_1}{F_2} = \frac{1 + 2\beta t_1}{1 + 2\beta t_2} \qquad \frac{V_1}{V_2} = \frac{1 + \alpha t_1}{1 + \alpha t_2}$$

worin  $l_1, F_1, V_1$  Länge, Fläche und Inhalt eines Körpers bei der Temperatur  $t_1$ ;  $l_2, F_2, V_2$  bei der Temperatur  $t_2$  sind.

Da für feste und flüssige Körper die Ausdehnung stets sehr klein ist, kann für diese gesetzt werden

$$l_2 - l_1 = l_1 \beta (t_2 - t_1) \qquad F_2 - F_1 = F_1 2 \beta (t_2 - t_1)$$

$$V_2 - V_1 = V_1 \alpha (t_2 - t_1).$$

Die **Ausdehnungs-** oder **Zusammenziehungskraft** eines prismatischen Stabes bei einer Temperaturänderung von  $t^0$  ist  $P = \beta E t F$ , wenn  $E$  den Elastizitätsmodul und  $F$  den Querschnitt des Stabes bezeichnet.

### Längen-Schwindmaßs einiger Metalle,

d. i. die Verkleinerung der Längenabmessungen eines Gufsstückes während des Erstarrens und Erkalstens.

Blei . . . . .	I : 92	Puddelstahl . . . . .	I : 72
Bronze . . . . .	I : 63	Stabeisen, gewalzt . . . . .	I : 55
Feinkorneisen . . . . .	I : 72	Stahlguß . . . . .	I : 50
Flußstahl . . . . .	I : 64	Wismut . . . . .	I : 265
Glockenmetall . . . . .	I : 65	Zink, gegossen . . . . .	I : 62
Gufseisen . . . . .	I : 96	Zinn . . . . .	I : 128
Kanonmetall . . . . .	I : 134	100 G.-T. Kupfer )	I : 134
Messing . . . . .	I : 65	12,5 „ Zinn )	

In Stahl-Walzwerken rechnet man das Schwinden zu rd. 12 mm/m.

### Temperatur, Dichte und Volumen des Wassers.

(Nach Thiesen, Scheel, Diesselhorst, Hirn, Ramsay & Young u. a.)

Temp.	Dichte	Volumen	Temp.	Dichte	Volumen	Temp.	Dichte	Volumen
0 <sup>0</sup>	0,99987	1,00013	38	0,99299	1,00706	160	0,9076	1,1018
2	0,99997	1,00003	40	0,9922	1,0078	170	0,8973	1,1145
4	<b>1,00000</b>	<b>1,00000</b>	45	0,9903	1,0099	180	0,8866	1,1279
6	0,99997	1,00003	50	0,9881	1,0121	190	0,8750	1,1429
8	0,99988	1,00012	55	0,9857	1,0145	200	0,8628	1,1590
10	0,99973	1,00027	60	0,9832	1,0171	210	0,850	1,177
12	0,99953	1,00048	65	0,9806	1,0198	220	0,837	1,195
14	0,99927	1,00073	70	0,9778	1,0227	230	0,823	1,215
16	0,99897	1,00103	75	0,9749	1,0258	240	0,809	1,236
18	0,99862	1,00138	80	0,9718	1,0290	250	0,794	1,259
20	0,99823	1,00177	85	0,9687	1,0324	260	0,779	1,283
22	0,99780	1,00221	90	0,9653	1,0359	270	0,765	1,308
24	0,99732	1,00268	95	0,9619	1,0396	280	0,75	1,34
26	0,99681	1,00320	100	0,9584	1,0434	290	0,72	1,38
28	0,99626	1,00375	110	0,9510	1,0515	300	0,70	1,42
30	0,99567	1,00435	120	0,9435	1,0600	310	0,68	1,46
32	0,99505	1,00497	130	0,9351	1,0694	320	0,66	1,51
34	0,99440	1,00563	140	0,9263	1,0795			
36	0,99372	1,00632	150	0,9172	1,0903			

### Ausdehnung gasförmiger Körper.

Für die Ausdehnung unter gleichbleibendem Drucke haben alle Gase dieselbe Ausdehnungszahl  $\alpha = \frac{1}{273}$ , bezogen auf das Volumen bei 0° C, also

$$V_2 - V_1 = V_0 \frac{t_2 - t_1}{273} = V_1 \frac{t_2 - t_1}{273 + t_1} \quad \frac{V_2}{V_1} = \frac{273 + t_2}{273 + t_1}$$

Näheres s. S. 416 u. f.

### C. Spezifische Wärme.

Die **Wärmeeinheit** (1 Kilogramm-Kalorie) = 1 WE ist die Wärmemenge, die erforderlich ist, um die Temperatur von 1 kg Wasser um 1° zu erhöhen.

[1 BTU (British Thermal Unit) ist die Wärmemenge, welche erforderlich ist, um 1 lbs (Pfd.) Wasser um 1° Fahrenheit zu erwärmen. 1 BTU = 0,252 WE.]

Da diese Wärmemenge für verschiedene Wassertemperaturen etwas verschieden ist, so schwankt die Größe der Wärmeeinheit. Gegenwärtig ist man bestrebt, als Normaltemperatur 15° und damit als **Normal-Wärmeeinheit** diejenige Wärmemenge einzuführen, welche 1 kg Wasser von 14,5° auf 15,5° erwärmt.

Neben der 15°-WE ist noch die „mittlere WE“, d. h. der 100. Teil der Wärme, welche 1 kg Wasser von 0° auf 100° bringt, von Wichtigkeit, da sich viele kalorimetrische Untersuchungen (Eiskalorimeter) auf diese beziehen. Sie ist nach den neuesten Bestimmungen (Behn) der 15°-WE nahezu gleich.

#### Spezifische Wärme $c$ des Wassers nach Barnes.

$t$	$c$	$t$	$c$	$t$	$c$
0	1,0091	35	0,9971	70	1,0001
5	1,0050	40	0,9971	75	1,0007
10	1,0020	45	0,9973	80	1,0014
15	1,0000	50	0,9977	85	1,0021
20	0,9987	55	0,9982	90	1,0028
25	0,9978	60	0,9988	95	1,0034
30	0,9973	65	0,9994	100	1,0043

#### Mittlere spez. Wärme $c_m$ des Wassers zwischen 0° und $t^\circ$ nach Dieterici.

$t$	$c_m$	$t$	$c_m$	$t$	$c_m$
20	1,0010	120	1,0020	220	1,0203
40	0,9973	140	1,0046	240	1,0256
60	0,9976	160	1,0077	260	1,0315
80	0,9985	180	1,0113	280	1,0380
100	1,0000	200	1,0155	300	1,0449

$$c_m = 0,9983 - 0,005184 \frac{t}{100} + 0,006912 \left(\frac{t}{100}\right)^2$$

**Spezifische Wärme  $c$**  eines Körpers ist die Wärmemenge in WE, die erforderlich ist, um die Temperatur von 1 kg des Körpers um 1° zu erhöhen. Sie ist im allgemeinen abhängig von der Temperatur des Körpers.

$G$  kg eines Körpers von der spezifischen Wärme  $c$  erfordern demnach zu einer Temperaturerhöhung von  $t_1$  auf  $t_2$  eine Wärmemenge

$$Q = Gc(t_2 - t_1) \text{ in WE,}$$

wenn  $c$  unveränderlich ist, oder

$$Q = G \int_{t_1}^{t_2} c dt \text{ in WE,}$$

wenn  $c$  veränderlich ist.

Ist z. B.  $c = \alpha + \beta t + \gamma t^2 \dots$ ,

so wird  $Q = G [\alpha(t_2 - t_1) + \frac{\beta}{2}(t_2^2 - t_1^2) + \frac{\gamma}{3}(t_2^3 - t_1^3) \dots]$ .

Der Ausdruck

$$c_m = \frac{1}{t} \int_0^t c dt = \alpha + \frac{\beta}{2} t + \frac{\gamma}{3} t^2 \dots$$

heißt die mittlere spezifische Wärme zwischen  $0^\circ$  und  $t^\circ$ .

**Mittlere spezifische Wärme fester und tropfbar flüssiger Körper zwischen  $0^\circ$  und  $100^\circ$ .**

Aluminium . .	0,21	Asche . . . .	0,20	Aether . . . .	0,54
Antimon . . .	0,05	Basalt . . . .	0,20	Alkohol . . .	0,58
Blei . . . . .	0,031	Beton . . . . .	0,27	Ammoniak . .	1,00
Gold . . . . .	0,031	Eis . . . . .	0,50	Anilin . . . .	0,49
Konstantan . .	0,098	Gips . . . . .	0,20	Benzol . . . .	0,40
Kupfer . . . .	0,094	Glas . . . . .	0,20	Chloroform . .	0,23
Magnesium . .	0,25	Granit . . . .	0,20	Essigsäure . .	0,51
Messing . . . .	0,092	Graphit . . . .	0,20	Glycerin . . .	0,58
Nickel . . . .	0,11	Holz (Eiche) . .	0,57	Maschinenöl .	0,40
Platin . . . . .	0,032	„ (Fichte) . . .	0,65	Naphtalin . . .	0,31
Quecksilber . .	0,033	Holzkohle . . .	0,20	Oliveneröl . .	0,40
Eisen u. Stahl	0,115	Koks . . . . .	0,20	Petroleum . .	0,50
Silber . . . . .	0,056	Marmor, Kalk-		Schwefelsäure	0,33
Tantal . . . . .	0,036	stein . . . . .	0,21	Schweflige	
Zink . . . . .	0,094	Sandstein . . .	0,22	Säure . . . . .	0,32
Zinn . . . . .	0,056	Schlacke . . .	0,18	Terpentinöl .	0,42
		Schwefel . . .	0,18		
		Steinkohle . .	0,31		
		Ziegelsteine .	0,22		

**Mittlere spez. Wärme des Eisens  $c_0^t$  zwischen  $0$  und  $t^\circ$  und Wärmemenge  $Q_0^t$  zur Erwärmung von 1 kg Eisen von  $0$  auf  $t^\circ$  nach Oberhoffer.**

$t$	$c_0^t$	$Q_0^t$	$t$	$c_0^t$	$Q_0^t$
300	0,126	37,7	800	0,170	136
400	0,131	52,2	900	0,170	153
500	0,137	68,3	1000	0,168	168
600	0,142	85,0	1200	0,167	200
700	0,159	111,6	1400	0,167	233

## Spezifische Wärme von Kochsalzlösungen.

(Nach Gröber.)

a) Für 1 kg:

Salzgehalt in 100 G.-T. der Lösung	-20°	-10°	0°	+10°	+20°	+30°	+40°	+50°	+60°
0			1,006	1,002	0,999	0,998	0,999	1,001	1,003
2			0,966	0,969	0,973	0,977	0,980	0,983	0,986
4			0,944	0,947	0,951	0,955	0,958	0,961	0,964
6			0,923	0,927	0,930	0,933	0,936	0,939	0,942
8			0,904	0,907	0,910	0,913	0,916	0,919	0,922
10			0,885	0,889	0,892	0,895	0,898	0,901	0,903
12			0,869	0,872	0,875	0,878	0,880	0,883	0,885
14		0,851	0,854	0,857	0,860	0,862	0,864	0,867	0,870
16		0,838	0,840	0,843	0,845	0,848	0,850	0,853	0,855
18		0,825	0,827	0,830	0,832	0,834	0,836	0,839	0,841
20		0,812	0,814	0,816	0,818	0,821	0,823	0,824	0,827
22	0,795	0,798	0,801	0,804	0,806	0,808	0,810	0,812	0,814
24		0,787	0,789	0,791	0,793	0,795	0,797	0,799	0,801
26		0,776	0,778	0,780	0,781	0,783	0,785	0,787	0,788

b) Für 1 l:

Salzgehalt in 100 G.-T. der Lösung	-20°	-10°	0°	+10°	+20°	+30°	+40°	+50°	+60°
0			1,006	1,002	0,997	0,993	0,991	0,989	0,986
2			0,981	0,983	0,985	0,986	0,986	0,985	0,983
4			0,973	0,974	0,976	0,977	0,977	0,976	0,974
6			0,966	0,967	0,968	0,968	0,968	0,967	0,965
8			0,960	0,961	0,961	0,961	0,960	0,959	0,957
10			0,954	0,955	0,956	0,955	0,954	0,952	0,950
12			0,950	0,950	0,951	0,949	0,948	0,946	0,944
14		0,946	0,946	0,946	0,947	0,945	0,943	0,942	0,940
16		0,944	0,944	0,944	0,944	0,942	0,940	0,938	0,937
18		0,942	0,942	0,942	0,942	0,940	0,938	0,936	0,934
20		0,941	0,941	0,940	0,939	0,938	0,936	0,934	0,931
22	0,940	0,940	0,940	0,939	0,938	0,936	0,934	0,932	0,929
24		0,939	0,939	0,938	0,936	0,934	0,932	0,930	0,927
26		0,939	0,938	0,937	0,934	0,933	0,931	0,928	0,925

Spezifische Wärme von Gasen und Dämpfen. S. S. 417 u. f.

### D. Temperatur von Mischungen.

Richmannsche Regel:  $G + G_1$  kg einer Mischung, entstanden aus  $G$  kg eines Körpers von  $t^0$  und der spezifischen Wärme  $c$  und aus  $G_1$  kg eines Körpers von  $t_1^0$  und der spezifischen Wärme  $c_1$ , haben eine Temperatur von

$$t_m = \frac{cGt + c_1G_1t_1}{cG + c_1G_1}; \quad \text{allgemein } t_m = \frac{\Sigma cGt}{\Sigma cG}$$

Um  $G$  kg eines Körpers von der spezifischen Wärme  $c$  und der Temperatur  $t^0$  auf die Temperatur  $t_m^0$  zu bringen, sind  $G_1$  kg eines Körpers von der spezifischen Wärme  $c_1$  und  $t_1^0$  erforderlich, wobei

$$G_1 = \frac{c}{c_1} G \frac{t_m - t}{t_1 - t_m}$$

Werden bei unveränderlichem Drucke  $G$  kg eines Gases (entsprechend  $V$  cbm) von  $t^0$  mit  $G_1$  kg desselben (entsprechend  $V_1$  cbm) von  $t_1^0$  gemischt, so ist die Mischungstemperatur

$$t_m \frac{G + G_1}{G + G_1} = \frac{V + V_1}{V : T + V_1 : T_1} - 273,$$

worin  $T$  und  $T_1$  die absoluten Temperaturen sind.

### Kältemischungen.

Die niedrigste Temperatur, die eine Kältemischung hervorbringen kann, ist der **Gefrierpunkt** der entstehenden Lösung.

Mischungen	G.-T.	Das Thermometer sinkt		Mischungen	G.-T.	Das Thermometer sinkt	
		von 0	auf 0			von 0	auf 0
Natriumphosphat	9			Chlornatrium	1	0	-17,7
Salmiak	6	12,5	-6	Schnee	3		
verd.Salpetersäure	4			Salpeter	1	8	-24
Natriumsulfat	6			Salmiak	1		
Ammoniumnitrat	5	10	-25	Wasser	1		
verd.Salpetersäure	4			verd.Salpetersäure	1	-14	-35
Salmiak	5			Schnee	1		
Salpeter	5	10	-12	Natriumsulfat	8	10	-18
Wasser	16			Salzsäure	5		
Natriumkarbonat	1			Natriumsulfat	8		
Ammoniumnitrat	1	10	-14	Salpeter	5	10	-15
Wasser	1			Salmiak	5		
Natriumsulfat	3	10	-19	Wasser	16		
verd.Salpetersäure	2			Natriumsulfat	5		
Natriumsulfat	6			verd. Schwefel-		10	-16
Salmiak	4	10	-23	säure	4		
Salpeter	2			Chlornatrium	1	0	-18
verd.Salpetersäure	4			Schnee	1		

Mischungen	G.-T.	Das Thermometer sinkt		Mischungen	G.-T.	Das Thermometer sinkt	
		von <sup>o</sup>	auf <sup>o</sup>			von <sup>o</sup>	auf <sup>o</sup>
Ammoniumnitrat	1	10	-16	verd. Schwefel- säure . . . . .	1	-5	-41
Wasser . . . . .	1						
Natriumphosphat	9	15	-9	Schnee . . . . .	1		
verd. Salpetersäure	4						
Kalihydrat . . . . .	4	0	-37	Chlorcalcium . . . . .	3	0	-33
Schnee . . . . .	3						
verd. Schwefel- säure . . . . .	1	-19	-40	Chlorcalcium . . . . .	2	0	-42
verd. Salpetersäure	1						
Schnee . . . . .	2			Schnee . . . . .	1		

## E. Aenderung der Aggregatform durch die Wärme.

### a. Schmelz- oder Gefrierpunkt verschiedener Stoffe

unter dem Druck von 760 mm Q.-S.

	Grad		Grad
Wolfram . . . . .	etwa 3000	Zink . . . . .	419
Tantal . . . . .	„ 2900	Blei . . . . .	327
Iridium . . . . .	„ 2400	Cadmium . . . . .	321
Platin . . . . .	1760	Wismut . . . . .	269
Palladium . . . . .	1550	Zinn . . . . .	232
Berliner Porzellan . . . . .	1550	Weichlote . . . . .	135—200
Eisen, rein . . . . .	1510	Wismutlote . . . . .	94—128
Nickel . . . . .	1470	Kautschuk . . . . .	125
Flußeisen . . . . .	1350—1450	Schwefel . . . . .	115
Stahl . . . . .	1300—1400	Natrium . . . . .	96
Eisenhochofenschlacke . . . . .	1300—1430	Naphtalin . . . . .	80
Mangan . . . . .	1245	Wachs . . . . .	64
Gufseisen, graues . . . . .	1200	Kalium . . . . .	62
„ weißes . . . . .	1130	Paraffin . . . . .	54
Kupfer . . . . .	1084	Stearin . . . . .	50
Gold . . . . .	1064	Walrat . . . . .	49
Silber . . . . .	961	Phosphor . . . . .	44
Schmelzfarben (Emailfarben)	960	Benzol . . . . .	5
Delta-Metall . . . . .	950	Wasser . . . . .	0
Messing . . . . .	etwa 900	Seewasser . . . . .	- 2,5
Bronze . . . . .	„ 900	Rüböl . . . . .	- 3,5
Aluminium . . . . .	657	Anilin . . . . .	- 6
Antimon . . . . .	630	Terpentinöl . . . . .	- 10

	Grad		Grad
Kochsalzlösung, gesätt. . .	— 18	Ammoniak . . . . .	— 78
Leinöl . . . . .	— 20	flüssige Kohlensäure . .	— 79
Glycerin . . . . .	— 20	Alkohol, absoluter . . .	— 100
Quecksilber . . . . .	— 39	Toluol . . . . .	— 100
Chlorcalciumlösung, gesätt.	— 40	Schwefelkohlenstoff . .	— 113
Chloroform . . . . .	— 64	Aether . . . . .	— 118
schweflige Säure . . . . .	— 76		

**b. Siedepunkte.**

**Siedepunkt verschiedener Stoffe unter dem Drucke von  
760 mm Q.-S. (S. a. S. 431.)**

	Grad		Grad
Zink . . . . .	915	Benzol . . . . .	80
Schwefel . . . . .	445	Alkohol, absoluter . . .	78,5
Quecksilber . . . . .	357	Chloroform . . . . .	61
Leinöl . . . . .	316	Schwefelkohlenstoff . .	46
Paraffin . . . . .	300	Aether . . . . .	35
Glycerin . . . . .	290	schweflige Säure . . .	— 10
Phosphor . . . . .	290	Ammoniak . . . . .	— 33
Naphthalin . . . . .	218	Kohlensäure . . . . .	— 78
Anilin . . . . .	184	Sauerstoff . . . . .	— 183
Chlorcalciumlösung, ges.	180	Kohlenoxyd . . . . .	— 190
Terpentinöl . . . . .	160	Stickstoff . . . . .	— 196
Toluol . . . . .	110	Wasserstoff . . . . .	— 253
Kochsalzlösung, gesätt.	108	Helium . . . . .	— 268
Wasser . . . . .	100		

**Siedepunkt  $t$  des Wassers bei verschiedenen Barometerständen  $b$   
in mm Q.-S. (Nach Wiebe.)**

$b$	$t$	$b$	$t$	$b$	$t$
680	96,92	720	98,49	760	100,00
685	97,12	725	98,69	765	100,18
690	97,32	730	98,88	770	100,37
695	97,52	735	99,07	775	100,55
700	97,71	740	99,26	780	100,73
705	97,91	745	99,44	785	100,91
710	98,11	750	99,63	790	101,09
715	98,30	755	99,82	795	101,26
720	98,49	760	100,00	800	101,44

**c. Schmelzwärme.**

Die **Schmelzwärme** eines festen Körpers ist die Anzahl WE, die verbraucht wird, um 1 kg des Körpers aus der festen in die flüssige Form ohne Erhöhung der Temperatur überzuführen. Dieselbe Wärmemenge wird beim Erstarren des flüssigen Körpers frei.

**Schmelzwärme verschiedener Körper.**

Aluminium . . .	77	Hochofenschlacke	(50)	Quecksilber . .	2,8
Benzol . . . . .	30	Kupfer . . . . .	42	Schwefel . . . .	9
Blei . . . . .	6	Naphthalin . . .	36	Silber . . . . .	21
Cadmium . . . .	14	Paraffin . . . .	35	Wismut . . . . .	13
Eis (Wasser) . .	80,0	Phosphor . . . .	5	Zink . . . . .	28
Eisen . . . . .	(30)	Platin . . . . .	27	Zinn . . . . .	13

**d. Verdampfungswärme.**

Die **Verdampfungswärme** *r* einer Flüssigkeit ist die Anzahl WE, die verbraucht wird, um 1 kg der Flüssigkeit entgegen dem (unveränderlichen) äußeren Drucke in Dampf von gleicher Temperatur zu verwandeln. Dieselbe Wärmemenge wird frei, wenn der Dampf kondensiert.

Die Verdampfungswärme ist abhängig von der Temperatur, bei der die Verdampfung stattfindet.

Tafeln der Werte von *r* für Wasserdampf s. S. 435 u. f.

**Verdampfungswärme bei 760 mm Q.-S. Druck.**

Aether . . . . .	90	Chloroform . . . .	58	Stickstoff . . . .	48
Alkohol . . . . .	210	Quecksilber . . . .	68	Terpentinöl . . .	70
Anilin . . . . .	105	Sauerstoff . . . . .	51	Toluol . . . . .	85
Benzol . . . . .	94	Schwefel . . . . .	362	Wasser . . . . .	539
Chlor . . . . .	70	Schwefelkohlenstoff.	90	Wasserstoff . . .	123
Chlormethyl . . .	97				

(Verdampfungswärme der bei Kältemaschinen angewendeten Stoffe s. S. 451 u. f.)

**F. Lösung von Gasen in Wasser.**

1 cbm Wasser kann bei 1 at abs. und verschiedenen Temperaturen die folgenden Gasmengen in cbm von 15° und 1 at lösen.

<i>t</i> =	0°	20°	100°	<i>t</i> =	0°	20°
Luft . . . . .	0,027	0,0185	—	Kohlenoxyd . . . . .	0,037	0,025
Stickstoff . . . .	0,026	0,017	0,0105	Chlor . . . . .	—	2,35
Sauerstoff . . . .	0,053	0,034	0,0185	Schwefelwasserstoff	4,75	3,17
Wasserstoff . . . .	0,023	0,020	0,018	Schweflige Säure . .	87	43
Kohlensäure . . . .	1,96	0,98	0,26	Ammoniak . . . . .	1250	700

### Lösung von Ammoniak in Wasser. (Nach H. Mollier.)

1, kg Wasser löst bei den angegebenen Drücken und Temperaturen die folgenden Mengen Ammoniak in kg.

at abs.	0°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°	100°	110°	120°	130°	140°	150°
$\eta = 0,1$	0,22	0,085	0,043	0,012											
0,2	0,35	0,172	0,109	0,060	0,0235										
0,5	0,57	0,337	0,247	0,173	0,111	0,065	0,030								
1,0	0,88	0,515	0,400	0,304	0,224	0,158	0,104	0,061	0,026						
1,5	1,23	0,666	0,521	0,404	0,311	0,232	0,167	0,111	0,067	0,031	0,002				
2,0	1,62	0,812	0,632	0,497	0,389	0,299	0,224	0,159	0,106	0,064	0,029				
2,5	2,01	0,953	0,735	0,580	0,459	0,357	0,274	0,222	0,142	0,093	0,053	0,020			
3,0	2,40		0,839	0,659	0,524	0,414	0,324	0,245	0,179	0,124	0,078	0,040	0,0077		
4,0			1,044	0,808	0,639	0,512	0,406	0,318	0,241	0,177	0,123	0,078	0,040	0,008	
5,0				0,961	0,758	0,605	0,482	0,383	0,300	0,228	0,166	0,114	0,071	0,0345	0,00
6,0					0,873	0,694	0,556	0,447	0,353	0,274	0,208	0,149	0,101	0,060	0,00
7,0					0,989	0,786	0,629	0,506	0,405	0,318	0,247	0,185	0,131	0,086	0,00
8,0						0,877	0,699	0,562	0,453	0,362	0,283	0,217	0,159	0,117	0,00
9,0						0,072	0,776	0,624	0,502	0,404	0,318	0,247	0,186	0,134	0,00
10,0						1,072	0,855	0,686	0,553	0,444	0,352	0,276	0,211	0,155	0,10

### G. Zähigkeit.

Der Reibungskoeffizient oder Zähigkeitsfaktor  $\eta$  ist die Schubspannung, die in einer strömenden Flüssigkeit an einem Flächenelement eintritt, wenn der Geschwindigkeitsabfall für die Flächennormale gleich 1 ist.

Die Dimension von  $\eta$  ist im technischen Maßsystem

$$(\eta_t) = \text{kg} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{sk}$$

und im absoluten (C. G. S.) System

$$(\eta_a) = \text{g} \cdot \text{cm}^{-1} \cdot \text{sk}^{-1}$$

Zwischen beiden besteht die Beziehung

$$(\eta_a) = 98,1 (\eta_t)$$

#### Zähigkeit des Wassers:

$t = 0$	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	120	150° C
$10^6 \eta = 183$	133	102	82	67	56	48	41	36	32	29	24	19 kg·m <sup>-2</sup> ·sk.

#### Zähigkeit verschiedener Flüssigkeiten:

$\eta \cdot 10^6 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{sk}$  bei 18° C

Quecksilber . . . . .	162	Anilin . . . . .	470
Aether . . . . .	27	Benzol . . . . .	67
Alkohol . . . . .	133	Glycerin . . . . .	100 000
Olivenöl . . . . .	9400		

Für Gase und Dämpfe ist die Zähigkeit bei der absoluten Temperatur  $T$

$$\eta = \eta_0 \frac{1 + \frac{C}{273}}{1 + \frac{C}{T}} \sqrt{\frac{T}{273}}$$

gültig von -180 bis +1200° C.

	$\eta_0 \cdot 10^6 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{sk}$	C
Luft . . . . .	1,69	114
Kohlensäure . . . . .	1,40	260
Sauerstoff . . . . .	1,84	128
Stickstoff . . . . .	1,63	110
Wasserstoff . . . . .	0,85	74
Wasserdampf . . . . .	0,89	—

## II. WÄRMEÜBERGANG.

### a. Wärmeübergang durch Berührung und Leitung.

#### 1. Wärmeübergang zwischen einer Körperoberfläche (Wandfläche) und einer tropfbaren oder gasförmigen Flüssigkeit.

Bedeutet

- $F$  die Größe der Fläche in qm,  
 $\vartheta$  die Temperatur der Fläche in Grad,  
 $t$  die Temperatur der Flüssigkeit in Grad,  
 $z$  die Zeitdauer des Wärmeüberganges in st,  
 $Q$  die übergehende Wärmemenge in WE,

so ist

$$Q = \alpha F z (t - \vartheta).$$

Die **Wärme-Übergangszahl**  $\alpha$ , d. i. die stündlich auf 1 qm Fläche und 1 Grad Temperaturunterschied übergehende Wärmemenge, ist hauptsächlich von der Art der Flüssigkeit und ihrem Bewegungszustande abhängig; für  $\alpha$  kann i. M. etwa gesetzt werden:

- 1) für siedendes Wasser kann ungefähr gesetzt werden:

$$\alpha = 4000 \text{ bis } 6000,$$

guter Umlauf der Flüssigkeit erhöht, mangelhafter erniedrigt diesen Wert;

- 2) für kondensierenden Wasserdampf bis zu

$$\alpha = 10\,000,$$

Luftfreiheit und rasche Entfernung des kondensierten Wassers begünstigen den Wärmeübergang;

- 3) für nicht siedendes Wasser

$$\text{wenn ruhend, etwa } \alpha = 500$$

(es können sich höhere oder kleinere Werte ergeben, je nachdem die Form der Wandfläche die in der Flüssigkeit entstehenden inneren Strömungen begünstigt oder beschränkt);

wenn die Flüssigkeit durch eine Mischvorrichtung (Rührwerk) bewegt ist,

$$\alpha = 2000 \text{ bis } 4000$$

je nach Wirksamkeit des Rührwerkes;

- 4) ruhende Luft.

Ist  $\Delta$  der Temperaturunterschied zwischen der Oberflächentemperatur und der mittleren Temperatur der Raumluft, so ist für **senkrechte**

**ebene Flächen**  $\alpha = 3,0 + 0,08 \Delta$  für  $\Delta < 10^0$

$$\alpha = 2,2 \sqrt[4]{\Delta} \quad \text{für } \Delta > 10^0.$$

Diese Formeln liefern die Tabelle

$\Delta = 0$	5	10	25	50	100	200	300	400
$\alpha = 3,0$	3,4	3,8	4,9	5,9	7,0	8,3	9,1	9,8.

Der Wärmeübergang von einem **wagerechten Rohre** an ruhende Luft ist (berechnet nach Versuchen von Wamsler und Hinlein)

$$\alpha = 1,02 \sqrt[4]{\frac{\Delta}{d}}$$

$d$  ist der Rohrdurchmesser in m.

Zahlentafel 1 ist nach dieser Formel berechnet.

Tafel 1.

$\Delta =$	10° C	50° C	100° C	200° C	300° C	400° C
$d = 0,01$	5,74	8,58	10,2	12,1	13,4	14,4
$0,05$	3,84	5,74	6,82	8,11	8,97	9,64
$0,10$	3,23	4,82	5,74	6,82	7,55	8,11
$0,20$	2,71	4,06	4,82	5,74	6,35	6,82
$0,30$	2,45	3,66	4,36	5,18	5,74	6,16
$0,40$	2,28	3,41	4,06	4,82	5,34	5,74
$0,50$	2,16	3,23	3,84	4,56	4,95	5,43

Der Wärmeübergang in **senkrechten Luftschichten**. Die durch Strahlung ausgetauschte Wärme wird nach den unter b angegebenen Formeln berechnet; die übergeleitete Wärme ist

$$Q = \frac{\lambda' \cdot \Delta}{d} z \cdot F.$$

Ist  $d$  die Stärke der Luftschicht, so ist der Beiwert  $\lambda'$

$d = 0,04$ bis $0,14$	$0,015$	$0,01$ m
$\lambda' = 0,070$	$0,035$	$0,020$ WE/m. st. °C.

### 5) Der Wärmeübergang in Röhren.

Bei turbulenter Strömung ist (nach Dr. Nusselt):

α) Gase und überhitzte Dämpfe.

$$\alpha = 15,90 \frac{\lambda_{\text{Wand}}}{d^{0,214}} \left( \frac{w C}{\lambda} \right)^{0,786} \frac{\text{WE}}{\text{m}^2 \cdot \text{st.} \cdot ^\circ\text{C}}$$

Hierin ist

$\lambda_{\text{Wand}}$  die Wärmeleitzahl des Gases bei der Temperatur der Rohrwand in WE/st. m. °C,

$\lambda$  die Wärmeleitzahl des Gases bei der mittleren Temperatur im Rohr in WE/st. m. °C,

$w$  die mittlere Strömungsgeschwindigkeit in m/s,

$C$  die spezifische Wärme des Gases für 1 cbm bei konstantem Druck und dem Zustand des Gases im Rohr,

$d$  der Rohrdurchmesser in m.

Die Gleichung ist abgeleitet aus Versuchen an einem Messingrohr von 0,022 m Dmr. mit Druckluft (1 bis 16 at), Kohlensäure und Leuchtgas.

Führt man das Gewicht  $G$  der in der Sekunde durch das Rohr strömenden Gasmenge ein, so geht die Gleichung über in

$$\alpha = 19,23 \frac{\lambda_{\text{Wand}}}{d^{1,786}} \left( \frac{G \cdot c_p}{\lambda} \right)^{0,786}$$

Zur Auswertung der Formel dienen Tab. 2 und 3.

Tafel 2.

$d$	0,005	0,010	0,020	0,030	0,040	0,050	0,100
$\frac{1}{d^{0,214}}$	3,11	2,68	2,26	2,12	1,99	1,90	1,64
$\frac{1}{d^{1,786}}$	12 860	3730	1105	524	314	210	61

Tafel 3.  $(\alpha \cdot b)^{0,786}$ .

$\alpha =$	1,00	1,25	1,50	1,75	2,00	2,50	3,00	3,50	4,00	4,50	5,00	6,00	7,00	8,00	9,00
$b = 0,1$	0,164	0,195	0,225	0,254	0,282	0,337	0,388	0,438	0,487	0,534	0,580	0,669	0,756	0,840	0,921
1,0	1,000	1,027	1,375	1,552	1,724	2,00	2,37	2,68	2,97	3,20	2,54	4,09	4,62	5,13	5,62
10	6,11	7,28	8,40	9,48	10,50	12,55	14,5	16,3	18,2	19,9	21,6	25,0	28,2	31,3	34,4
100	37,3	44,5	51,3	58,0	64,3	76,7	88,5	99,9	111	122	132	153	172	191	210
1000	228	272	314	354	393	469	540	610	678	744	808	932	1050	1170	1280
10 000	1390	1660	1920	2160	2400	2860	3300	3730	4140	4540	4940	5700	6430	7140	7840

Beispiel: Durch ein Rohr von 25 mm l. W. ströme überhitzter Wasserdampf vom 8 at Druck und 400° C mit 20 m Geschwindigkeit. Die Temperatur der Rohrwand sei 300° C. Wie groß ist die Wärmeübergangszahl?

Nach Tafel 5 ist  $\lambda_{\text{wand}} = 0,0348$   
 $\lambda = 0,0296$ .

Da ferner

$$C = \frac{c_p}{v} = \frac{0,52}{0,3928} = 1,325,$$

wird

$$\begin{aligned} \alpha &= 15,90 \cdot 0,0296 \cdot 2,20 \left( \frac{1,325 \cdot 20}{0,0296} \right)^{0,786} \\ &= 1,035 (895)^{0,786} = 1,035 (8,95 \cdot 100)^{0,786} \\ &= 1,035 (\alpha \cdot b)^{0,786} = 1,035 \cdot 209 = 216 \text{ WE} / \text{st. qm. } ^\circ\text{C}. \end{aligned}$$

$\beta$ ) Wasser.

$$\alpha = (4100 + 50 t_m) w^{0,84}.$$

$t_m$  ist das Mittel aus der Wassertemperatur und der Temperatur der Rohrwand und  $w$  ist die mittlere Wassergeschwindigkeit in m/sk. Die Formel ist abgeleitet aus Versuchen von Stanton an Kupferrohren (Dmr. 7 bis 14 mm,  $w = 0,8$  bis 4,0 m). Zahlentafel 4 ist danach berechnet.

Tafel 4.

$t_m$	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
$w = 0,1$	665	738	810	882	954	1 030	1 100	1 170	1 240	1 315
0,2	1 180	1 320	1 450	1 580	1 710	1 840	1 970	2 090	2 220	2 350
0,3	1 670	1 850	2 070	2 220	2 400	2 580	2 760	2 950	3 130	3 310
0,4	2 130	2 360	2 590	2 830	3 060	3 280	3 520	3 750	3 980	4 220
0,5	2 570	2 850	3 130	3 410	3 690	3 970	4 250	4 520	4 800	5 080
0,7	3 410	3 780	4 150	4 520	4 890	5 260	5 630	6 000	6 370	6 740
1,0	4 600	5 100	5 600	6 100	6 600	7 100	7 600	8 100	8 600	9 100
1,5	6 470	7 170	7 880	8 580	9 280	9 980	10 700	11 400	12 100	12 800
2,0	8 240	9 130	10 000	10 900	11 800	12 700	13 600	14 500	15 400	16 300
2,5	9 930	11 000	12 100	13 200	14 200	15 300	16 400	17 500	18 600	19 600
3,0	11 600	12 800	14 100	15 300	16 600	17 900	19 100	20 400	21 600	22 900
3,5	13 200	14 600	16 000	17 500	18 900	20 300	21 800	23 200	24 600	26 100
4,0	14 700	16 300	17 900	19 500	21 100	22 700	24 300	25 900	27 500	29 100

6) Wärmeabgabe der Mantelfläche eines um eine horizontale Achse **rotierenden Zylinders** an Luft (nach Versuchen von Hinlein an einer Trommel von 0,5 m Dmr.). (Dynamos, Schwungräder usw.)

1. Glatte Oberfläche (Blankkupfer):

$$w = 0 \quad 5 \quad 10 \quad 15 \quad 20 \quad 25 \quad 30 \text{ m/sk}$$

$$\alpha = 2,20 \quad 8,80 \quad 12,40 \quad 14,70 \quad 15,45 \quad 16,10 \quad 16,40 \text{ WE/qm. st. } ^\circ\text{C.}$$

2. Rauhe Oberfläche (schwarzer Mattlack).

$$w = 0 \quad 5 \quad 10 \quad 15 \quad 20 \quad 25 \quad 30 \text{ m/sk}$$

$$\alpha = 2,20 \quad 10,96 \quad 15,03 \quad 17,58 \quad 19,93 \quad 22,15 \quad 24,53 \text{ WE/qm. st. } ^\circ\text{C.}$$

**2. Wärmedurchgang durch eine ebene Wand von gleichförmiger Dicke, die zwei Flüssigkeiten trennt.**

Bedeutet

$t_1$  die Temperatur der heißeren Flüssigkeit in  $^\circ\text{C}$ ,

$t_2$  die Temperatur der kälteren Flüssigkeit in  $^\circ\text{C}$ ,

$\vartheta_1$  und  $\vartheta_2$  die Temperaturen der Wandoberflächen in  $^\circ\text{C}$ ,

$F$  die Größe der Wand in qm,

$\alpha_1$  und  $\alpha_2$  die Wärmeübergangszahlen der beiden Flüssigkeiten,

$\delta$  die Dicke der Wand in m,

$\lambda$  die Wärme-Leitfähigkeit der Wand ( $Q$  und  $z$  s. S. 401),

so ist

$$Q = kFz(t_1 - t_2).$$

Die **Wärme-Durchgangszahl**  $k$  berechnet sich aus

$$k = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \frac{\delta}{\lambda}}.$$

Die Wandtemperaturen sind

$$\vartheta_1 = t_1 - \frac{k}{\alpha_1}(t_1 - t_2)$$

$$\vartheta_2 = t_2 + \frac{k}{\alpha_2}(t_1 - t_2).$$

**Wärme-Leitzahl  $\lambda$  für verschiedene Stoffe**

[in WE : (m. st. °C)], \*)

d. i. die stündlich durch 1 qm Fläche des Stoffes zu einer anderen im Abstand von 1 m übertretende Wärmemenge bei 1 Grad Temperaturunterschied beider Flächen

Alkohol . . . . .	0,18	Kupfer . . . . .	320
Aluminium . . . . .	175	Marmor . . . . .	0,43 bis 0,65
Beton . . . . .	0,56	Maschinenöle . . . . .	0,1
Blei . . . . .	30	Messing . . . . .	50 bis 100
Bruchsteinmauerwerk	1,3 bis 2,1	Nickel . . . . .	50
Eis . . . . .	0,8	Olivenöl . . . . .	0,15
Eisen . . . . .	40 bis 50	Petroleum . . . . .	0,13
Erdreich . . . . .	0,45	Platin . . . . .	60
Flufssand . . . . .	0,97	Porzellan . . . . .	0,9
Glas, Jenaer XVI u. 59	0,8	Quecksilber . . . . .	6,5
Glyzerin . . . . .	0,25	Silber . . . . .	360
Gold . . . . .	250	Steinkohle . . . . .	0,12
Hohlziegelmauerwerk	0,2	Verputz . . . . .	0,68
Kautschuk . . . . .	0,17 bis 0,3	Wasser . . . . .	0,5
Kesselstein . . . . .	2	Wasserstoff . . . . .	0,14
Kiefernholz, längs der Faser	0,1	Zement (reiner	
„ quer zur Faser	0,03	Portland-)	0,78
Kies . . . . .	0,32	Ziegelmauerwerk	0,35
Konstantan . . . . .	200	Zink . . . . .	95
Kreide . . . . .	0,8	Zinn . . . . .	54

$$\lambda_{\text{Luft}} = 0,01894 (1 + 0,00228 t)$$

$$\lambda_{\text{Wasserdampf}} = 0,01405 (1 + 0,00369 t)$$

Tafel 5.

$t =$	0	50	100	150	200	250	300	350	400 <sup>0</sup> C.
$\lambda_{\text{Luft}} =$	0,0189	0,0211	0,0233	0,0254	0,0276	0,0297	0,0319	0,0341	0,0362
$\lambda_{\text{Wasserdampf}} =$	0,0141	0,0166	0,0192	0,0218	0,0244	0,0270	0,0296	0,0322	0,0348

**Wärmeleitzahlen für Isolierstoffe.**

(Nach Nusselt.)

Stoff	Gewicht kg von 1 cbm	Wärmeleitungsahl bei einer Temperatur							
		von							
		0 <sup>0</sup>	50 <sup>0</sup>	100 <sup>0</sup>	150 <sup>0</sup>	200 <sup>0</sup>	300 <sup>0</sup>	400 <sup>0</sup>	500 <sup>0</sup>
Asbest . . . . .	576	0,130	0,153	0,167	0,175	0,180	0,186	0,192	0,198
Gebrannte Kieselgurform- steine für Heiße- dampfleitungen	200	0,064	0,071	0,078	0,085	0,092	0,106	0,120	

\*) S. Landolt & Börnstein, Phys.-Chem. Tab.; Kohlrausch, Prakt. Physik und Gröber.

Stoff	Gewicht von 1 cbm kg	Wärmeleitungszahl bei einer Temperatur							
		von							
		0°	50°	100°	150°	200°	300°	400°	500°
Isolierkomposition (lose)	405	0,060	0,070	0,076	0,079	0,081			
dieselbe mit Wasser ange- rührt und ge- trocknet . . . .	690	—	—	—	0,100	0,120 (bei 220°)			
Kieselgur (lose)	350	0,052	0,060	0,066	0,070	0,074	0,078		
dieselbe mit Wasser ange- rührt und ge- trocknet . . . .	580	—	—	—	0,083	—	0,123 (bei 350°)		
Baumwolle . . .	81	0,047	0,054	0,059					
Seidenzopf . . .	147	0,039	0,047	0,052					
Seide . . . . .	101	0,038	0,045	0,051					
Schafwolle . . .	136	0,033	0,042	0,050					
Korkmehl . . .	161	0,031	0,041	0,048	0,052	0,055			

Stoff	Gewicht v. 1 cbm kg	Temperatur- bereich	Wärme- Leitungs- zahl
Rheinischer Bimskies . . .	292	20— 65	0,20
Hochofenschlackschlacke . .	360	25—128	0,095
TorfmuII II . . . . .	195	23— 36	0,070
TorfmuII I . . . . .	160	20— 40	0,055
Korkstein (asphaltiert) . . .	200	10— 57	0,061
Sägemehl . . . . .	215	20—136	0,055
Blätterholzkohle . . . . .	190	20— 80	0,056

### Wärmeleitzahlen für Isolierstoffe bei tiefen Temperaturen.

(Nach Gröber.)

Stoff	Spez. Gew. kg/cbm	Wärmeleitzahl bei der Temperatur				
		0°	— 50°	— 100°	— 150°	— 200°
Asbest . . .	702	0,201	0,196	0,190	0,183	0,134
„ . . .	470	0,133	0,127	0,117	0,100	0,071
Baumwolle . .	81	0,0484	0,0432	0,0380	0,0328	0,0276
Seide . . .	100	0,0432	0,0377	0,0323	0,0269	0,0215

**Einige besondere Fälle des Wärmedurchganges durch ebene Metallwände von gleichförmiger Dicke.** Setzt man

$$\frac{1}{k_0} = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2}, \text{ so wird } k = \frac{k_0}{1 + k_0 \frac{d}{\lambda}}.$$

Von Dampf an siedendes Wasser . . . . .  $k_0 = 3000$  bis 5000

Von Dampf an nicht siedendes Wasser:

Flüssigkeit ruhend . . . . .  $k_0 = 300$  bis 600

Flüssigkeit strömend . . .  $k_0 = 1700 \sqrt[3]{w}$  ( $w = 0,05$  bis 2 m/sk)

Flüssigkeit durch Rührwerk bewegt . . . . .  $k_0 = 1500$  bis 2500.

Bemerkung. Für dünne Wände, besonders für solche aus Kupfer oder Messing, kann  $k = k_0$  gesetzt werden.

Bei Wärmedurchgang durch eine ebene Metallwand zwischen Luft (Gas) und Wasser (siedend und nicht siedend) oder gesättigtem Wasserdampf kann in der Regel gesetzt werden

$$k = \alpha \text{ (Luft)}$$

$\vartheta_1 = \vartheta_2$  gleich der Temperatur des Wassers bzw. Dampfes.

Von Luft an Luft

$$k = \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}.$$

**Wärmedurchgang bei veränderlichen Flüssigkeitstemperaturen.**

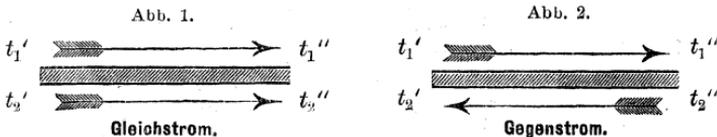
Wenn sich die Temperaturen der Flüssigkeiten infolge des Wärmedurchganges ändern zwischen den Werten  $t_1'$  und  $t_1''$  bzw.  $t_2'$  und  $t_2''$ , so ist

$$Q = k F z \frac{(t_1' - t_2') - (t_1'' - t_2'')}{\ln \frac{t_1' - t_2'}{t_1'' - t_2''}},$$

und wenn  $G_1$  und  $G_2$  die Mengen (in kg) und  $c_1$  und  $c_2$  die spezifischen Wärmen der beiden Flüssigkeiten (s. S. 393) sind:

$$Q = c_1 G_1 (t_1' - t_1'') \text{ bzw. } Q = c_2 G_2 (t_2'' - t_2').$$

Dieselben Formeln haben auch Gültigkeit, wenn die Flüssigkeiten längs der Heizfläche strömen (Abb. 1 u. 2).



Angenähert ist in allen Fällen

$$Q = k F z \left( \frac{t_1' + t_1''}{2} - \frac{t_2' + t_2''}{2} \right).$$

Die Genauigkeit dieser Formel zeigt folgende Tafel, die auch zur Verbesserung der angenäherten Rechnung benutzt werden kann.

$\frac{t_1' - t_2'}{t_1'' - t_2''} = \left\{ \right.$	1	1,5	2	3	4	5	10	100
		$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$
$\frac{Q \text{ (angenähert)}}{Q \text{ (genau)}} =$	1	1,014	1,038	1,099	1,154	1,210	1,410	2,35

Ist nur die Temperatur einer der beiden Flüssigkeiten veränderlich, so gelten nach Einführung von  $t_1' = t_1''$  bzw.  $t_2' = t_2''$  dieselben Formeln sowie auch die Fehlertafel.

**Wärmeübergang von Dampf an Kühlwasser.** Wenn der Dampf kondensiert und das Kondensat abgekühlt wird, ist die Kühlfläche für beide Teile des Vorganges gesondert zu berechnen.

**Wärmedurchgang durch eine zusammengesetzte Wand.** Besteht eine Wand aus mehreren fest aneinander liegenden Schichten von den Dicken  $\delta, \delta', \delta'' \dots$  mit den Wärmeleitungszahlen  $\lambda, \lambda', \lambda'' \dots$ , so ist

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{\delta'}{\lambda'} + \frac{\delta''}{\lambda''} + \dots$$

Ist eine Heizfläche ( $\delta, \lambda$ ) durch eine Schicht ( $\delta', \lambda'$ ) verunreinigt so ist der Wärmedurchgang im Verhältnis zu dem der reinen Wand

$$\frac{Q'}{Q} = \frac{k'}{k} = \frac{1}{1 + \frac{\delta'}{\lambda'} k}$$

Es sei z. B. eine Verdampferheizfläche, für die im reinen Zustande  $k = 3000$  betrage, mit einem Kalkniederschlag bedeckt,  $\delta' = 0,001$  m,  $\lambda' = 1$ , dann ist  $Q' : Q = 1/4$ . Dieselbe Schicht in einem Dampfkessel mit  $k = 20$  ergibt  $Q' : Q = 0,98$ .

### 3. Wärmedurchgang durch zylindrische Rohrwände.

Ist außer den früheren Bezeichnungen  $d_a$  der äußere,  $d_i$  der innere Rohrdurchmesser in m,  $l$  die Länge des Rohres in m, so ist

$$Q = l \pi z \frac{t_1 - t_2}{\frac{1}{\alpha_1 d_i} + \frac{1}{\alpha_2 d_a} + \frac{1}{2\lambda} \ln \frac{d_a}{d_i}}$$

wenn sich die wärmere Flüssigkeit innen befindet; im umgekehrten Falle sind  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  zu vertauschen.

Besteht die Rohrwand aus zwei Schichten (isoliertes Rohr) vom Leitungsvermögen  $\lambda_i$  und  $\lambda_a$  und ist  $d_m$  der Durchmesser der Trennungsfläche, so ist

$$Q = l \pi z \frac{t_1 - t_2}{\frac{1}{\alpha_1 d_i} + \frac{1}{\alpha_2 d_a} + \frac{1}{2\lambda_i} \ln \frac{d_m}{d_i} + \frac{1}{2\lambda_a} \ln \frac{d_a}{d_m}}$$

Für **einfache Metallrohre** kann mit genügender Genauigkeit von den Formeln für ebene Flächen Gebrauch gemacht werden (s. S. 404 u. f.); jedoch ist folgendes zu beachten:

Wenn  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  nicht sehr voneinander abweichen, so ist die Heizfläche  $F$  auf den mittleren Rohrdurchmesser  $\frac{1}{2}(d_u + d_i)$  zu beziehen.

Sind  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  sehr verschieden, so ist stets bei Berechnung der Heizfläche der Durchmesser zu wählen, der auf der Seite der Flüssigkeit mit der kleineren Uebergangszahl liegt.

Bei Bestimmung der Kesselheizfläche ist immer für Feuerrohre die innere, für Wasserrohre die äußere Rohrfläche zugrunde zu legen; für Ueberhitzer die mittlere.

### b. Wärmeübergang durch Strahlung.

Stehen sich zwei Körper von verschiedener Temperatur gegenüber, so tauschen sie Wärme durch Strahlung aus, wenn ihr Zwischenraum mit einem für strahlende Wärme durchlässigen Körper ausgefüllt ist. Der Körper 1 strahlt Wärme nach dem Körper 2 aus, und dieser sendet Wärmestrahlen gegen jenen, so daß sich die vom heißen zum kalten Körper übergestahlte Wärme als Differenz zweier Wärmemengen ergibt.

Das Emissions- oder Strahlungsvermögen eines Körpers ist die in der Zeiteinheit von der Oberflächeneinheit des Körpers ausgestrahlte Wärme.

Das Absorptionsvermögen eines Körpers ist das Verhältnis der von einem Oberflächenteil absorbierten Wärme zu der auf diese Fläche aufgetroffenen Strahlung. Der absolut schwarze Körper absorbiert die gesamte auffallende Strahlung; er hat also das Absorptionsvermögen 1.

Einige **Gesetze der Wärmestrahlung** sind:

1. Das **Kirchhoffsche Gesetz**: Das Verhältnis von Emission und Absorption eines Körpers bei einer Temperatur ist für alle Körper gleich der Emission des absolut schwarzen Körpers. Dieses Gesetz gilt streng nur für die Strahlung einer Wellenlänge. Für die bei praktischen Problemen auftretende Gesamtstrahlung gilt es sehr angenähert.

2. Das **Stefan-Boltzmannsche Gesetz**: Das Strahlungsvermögen des absolut schwarzen Körpers ist der 4. Potenz seiner absoluten Temperatur proportional.

Die in  $z$  Stunden von der Oberfläche  $F$  in qm des schwarzen Körpers von der absoluten Temperatur  $T = t + 273$  ausgestrahlte Wärme ist:

$$Q = CFz (T/100)^4 \text{ WE.}$$

$C$  ist die Strahlungszahl.

Für andere Körper gilt dieses Gesetz nur angenähert, aber mit einer für viele technische Zwecke genügenden Genauigkeit. Folgende Tafel 6 enthält die für einige Körper bestimmte Strahlungszahl  $C$ .

Die Strahlungskonstante reiner Metalle nimmt mit zunehmendem Wärmeleitvermögen ab.

Zur Berechnung der zwischen zwei Körpern durch Strahlung ausgetauschten Wärme dient:

3. das **Lambertsche Gesetz**: Die von dem Oberflächenelement eines Körpers in einer Richtung ausgestrahlte Wärme ist dem Cosinus des Winkels proportional, den jene Richtung mit der Normalen zum Flächenelement einschließt.

Tafel 6.

Körper	Oberflächenbeschaffenheit	Temperaturbereich des Versuchs °C	C
Absolut schwarzer Körper	Hohlraum gleicher Temperatur mit feiner Oeffnung	- 180 bis + 1262	4,61
Glas . . . . .	glatt	20	4,4
Messing . . . . .	matt	50 bis 350	1,03
Lampenrufs . . . . .	glatt	0 „ 50	4,40
Kupfer . . . . .	schwach poliert	50 „ 280	0,79
Schmiedeseisen . . . . .	matt, oxydiert	20 „ 360	4,40
„ . . . . .	blank	30 „ 108	1,60
„ . . . . .	hoch poliert	40 „ 250	1,33
Zink . . . . .	matt	50 „ 290	0,97
Gufeseisen . . . . .	rauh, stark oxydiert	40 „ 250	4,48
Kalkmörtel . . . . .	rauh, weiß	10 „ 90	4,30
Basalt . . . . .	glatt geschliffen, doch nicht glänzend	60 „ 200	3,42
Tonschiefer . . . . .	„	60 „ 200	3,29
Humus . . . . .	„	„	3,14
Roter Sandstein . . . . .	„	60 „ 200	2,86
Italienischer Marmor . . . . .	„	60 „ 200	2,70
Granit . . . . .	„	60 „ 200	2,12
Dolomitkalk . . . . .	„	60 „ 200	1,96
Lehm . . . . .	„	„	1,85
Ackererde . . . . .	„	„	1,79
Schlammkreide . . . . .	„	60 „ 200	1,45
Kies . . . . .	„	60 „ 200	1,37
Wasser . . . . .	„	60	3,20
Eis . . . . .	„	0	3,06

Es gilt nur für matte Oberflächen, welche Wärmestrahlen nicht regelmäßig zurückstrahlen.

Der einfachste und häufigste Fall ist der, daß ein Körper, dessen Oberfläche  $F$  die gleichförmige Temperatur  $\vartheta$  hat, rings von Flächen umgeben ist, die ebenfalls eine gleichförmige Temperatur  $t$  haben (z. B. freie Rohrleitungen, einfache Heizkörper oder Oefen). Hierfür ist die in  $z$  Stunden durch Strahlung an die Umgebung übergehende Wärme

$$Q = \frac{F \cdot z \left[ \left( \frac{\Theta}{100} \right)^4 - \left( \frac{T}{100} \right)^4 \right]}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} - \frac{1}{C}} \text{ WE.}$$

$\Theta = 273 + \vartheta$  und  $T = 273 + t$  sind die absoluten Temperaturen.  $C_1$  ist die Strahlungszahl des Wärme abgebenden Körpers,  $C_2$  ist die der Umgebung und  $C$  diejenige des absolut schwarzen Körpers. Nach dem

Vertauschen von  $t$  und  $\vartheta$  gilt die Gleichung auch für den Fall, daß die Temperatur des Körpers niedriger ist als die Umgebung (Kühlleitungen). Setzt man

$$\left(\frac{\Theta}{100}\right)^4 - \left(\frac{T}{100}\right)^4 = a(\Theta - T) = a(\vartheta - t),$$

so wird

$$Q = \frac{F \cdot \varepsilon a (\vartheta - t)}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} - \frac{1}{C}}$$

$a$  kann der Tafel 7 entnommen werden.

Tafel 7. 
$$\frac{\left(\frac{\Theta}{100}\right)^4 - \left(\frac{T}{100}\right)^4}{\Theta - T} = a.$$

$t =$	-273	-200	-100	0	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000
$\vartheta = -273$	0	0,0039	0,0518	0,2034	0,519	1,058	1,882	3,050	4,62	6,66	9,21	12,35	16,14	20,45
-200	0,0039	0,0756	0,0867	0,2764	0,644	1,251	2,155	3,418	5,10	7,24	9,96	13,26	17,21	21,88
-100	0,0518	0,0867	0,2070	0,466	0,923	1,639	2,673	4,08	5,94	8,28	11,19	14,72	18,92	23,87
0	0,2034	0,2764	0,466	0,814	1,380	2,225	3,408	4,99	7,03	9,59	12,72	16,50	20,97	26,21
100	0,519	0,644	0,923	1,380	2,076	3,070	4,422	6,19	8,44	11,30	14,62	18,66	23,42	28,06
200	1,058	1,251	1,639	2,225	3,070	4,233	5,77	7,75	10,23	13,27	16,92	21,26	26,33	32,20
300	1,882	2,155	2,673	3,408	4,422	5,77	7,53	9,73	12,40	15,77	19,71	24,30	29,70	35,98
400	3,050	3,418	4,08	4,99	6,19	7,75	9,73	12,19	15,19	18,70	23,04	28,01	33,76	40,35
500	4,62	5,10	5,94	7,03	8,44	10,23	12,40	15,19	18,48	22,38	26,90	32,29	38,41	45,38
600	6,66	7,24	8,28	9,59	11,30	13,27	15,77	18,79	22,38	26,61	31,55	37,29	43,75	51,1
700	9,21	9,96	11,19	12,72	14,62	16,92	19,71	23,04	26,96	31,55	36,84	42,93	49,85	57,6
800	12,35	13,26	14,72	16,50	18,66	21,26	24,30	28,01	32,29	37,29	42,93	49,5	56,8	65,0
900	16,14	17,21	18,92	20,97	23,42	26,33	29,76	33,76	38,41	43,75	49,85	56,8	64,6	73,3
1000	20,45	21,88	23,87	26,21	28,96	32,20	35,98	40,35	45,38	51,1	57,6	65,0	73,3	82,6

### III. ALLGEMEINE GRUNDSÄTZE DER THERMODYNAMIK.

Es bedeute im folgenden

$Q$  eine Wärmemenge in WE,

$P$  den absoluten Druck (Spannung) von Gasen, Dämpfen und Flüssigkeiten in kg/qm,

$p$  denselben Druck in kg/qcm (at),

$G$  das Gewicht des betrachteten Stoffes in kg,

$V, v$  den Rauminhalt in cbm, cbm/kg,

$t$  die Temperatur in °C,

$T = t + 273$  die absolute Temperatur,

$U, u$  die (innere) Energie in WE (S. 413),

$S, s$  die Entropie (S. 414),

$J, i$  den Wärmehalt für unveränderlichen Druck in WE,

$A = \frac{1}{427}$  das mechanische Wärmeäquivalent (S. 413),

$c_p, c_v$  die spezifischen Wärmen bei unveränderlichem Druck bzw. unveränderlichem Rauminhalt.

Alle jene Größen, die von der Menge des Körpers abhängen, sind bei einer beliebigen Menge mit großen Buchstaben  $V, U, S, J$  bezeichnet, hingegen mit kleinen Buchstaben  $v, u, s, i$ , wenn die Gewichtseinheit vorliegt, so daß  $V = Gv, U = Gu$  usw.

Der **Druck** der Gase und Dämpfe wird **gemessen** in Millimeter (oder Meter) Wassersäule (W.-S.), in Millimeter Quecksilbersäule (Q.-S.), in kg/qm, kg/qcm, Pfd/QuZ. und in Atmosphären.

**1 metrische (neue) Atmosphäre (at)\*** = 1 kg/qcm = 735,5 mm Q.-S. von 0° (= 737,4 mm Q.-S. von 15°)  
 = 28,958 engl. Zoll Q.-S. von 0°  
 = 10,000 m W.-S. von +4°  
 = 14,223 engl. Pfd/QuZ.  
 = 0,968 alte Atmosphäre.

**1 alte Atmosphäre** = 760 mm Q.-S. von 0° (= 762 mm Q.-S. von 15°)  
 = 29,922 engl. Zoll Q.-S. von 0°  
 = 10,333 m W.-S. von +4°  
 = 14,696 engl. Pfd/QuZ.  
 = 1,0333 at

$$1 \text{ mm W.-S. von } +4^\circ = \frac{1}{13,596} = 0,07355 \text{ mm Q.-S. von } 0^\circ.$$

$$1 \text{ mm Q.-S.} = 13,596 \text{ mm W.-S.} = 0,0013596 \text{ at} \\ = 0,0013158 \text{ alte Atmosphäre.}$$

Der **mittlere Barometerstand** beträgt bei 10° Temperatur und

0	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000
760	751	742	733	724	716	707	699	690	682	674
1200   1500   2000 m Höhe über dem Meeresspiegel										
658   635   598 mm Q.-S.										

Ist der Barometerstand  $h$  oder eine andere Quecksilberhöhe in mm bei  $t^\circ$  abgelesen worden, so beträgt bei 0° oder 15°

$$h_0 = h(1 - \alpha t) \quad h_{15} = h(1 - \alpha [t - 15])$$

$\alpha = 0,000162$  für Messingskalen,

$\alpha = 0,000175$  für Holz- und Glasskalen.

Einer at (kg/qcm) entsprechen folgende Quecksilberhöhen (gemessen an Holz oder Glasskala)

bei $t = 0$	5	10	15	20	25	30
$h = 735,5$	736,1	736,8	737,4	738,0	738,7	739,3

## A. Die beiden Hauptsätze.

### a. Der erste Hauptsatz.

1. Der erste Hauptsatz der Thermodynamik besteht in der Anwendung des Prinzips der Erhaltung der Energie auf solche Vorgänge, bei denen Wärmeerscheinungen auftreten; er spricht aus, daß **Wärme und Arbeit gleichwertig** sind.

$$1 \text{ WE} = 427 \text{ mkg.}$$

\*) Die Bezeichnung **at** bedeutet im folgenden stets **metrische Atmosphären**.

Die Zahl  $\frac{1}{427} = A$  wird das **mechanische Wärmeäquivalent** genannt.\*) In absolutem Maß beträgt 1 WE = 4189 Joule.

2. Bezeichnet in mkg  $E_1$  die **Gesamtenergie** eines Körpers im Anfangszustand 1,  $E_2$  dieselbe Größe im Endzustand 2, so ist der Ausdruck des ersten Hauptsatzes für die Zustandsänderung 1 bis 2 die Gleichung

$$\frac{Q}{A} - L = E_2 - E_1.$$

Hierin bedeutet  $Q$  die während der Zustandsänderung dem Körper zugeführte Wärme in WE,  $L$  die vom Körper geleistete mechanische Arbeit.

3. Für die im folgenden allein zu behandelnden tropfbaren Flüssigkeiten, Gase und Dämpfe besteht die äußere Arbeit  $L$  nur in der Ueberwindung des äußeren Oberflächendruckes, der bei stetigen (umkehrbaren) Zustandsänderungen stets gleich dem inneren Drucke (Spannung) der Flüssigkeit ist. In diesem Falle ist dann

$$dL = PdV \quad L = \int PdV.$$

Die Gesamtenergie der genannten Körper besteht aus der **inneren Energie** ( $U$ ), die nur von dem inneren Zustande der Körper abhängig ist, und der **äußeren kinetischen Energie**; in besonderen Fällen kann neben diesen noch die Energie der Schwere zu berücksichtigen sein. Die kinetische Energie kommt erst bei der später zu behandelnden strömenden Bewegung in Betracht. Ist die kinetische Energie unveränderlich oder = 0, so wird

$$dQ = APdV + dU \quad \text{und} \quad Q = \int_{V_1}^{V_2} APdV + U_2 - U_1.$$

Durch diese Gleichung ist zugleich der Begriff der inneren Energie  $U$  definiert; ihr Zuwachs ist gleich der Summe der von dem Körper aufgenommenen Wärme und Arbeit. Für die Zählung der Energie besteht kein bestimmter Nullpunkt, es kommen nur Aenderungen der Energie in Betracht. Als Maß der inneren Energie ist im folgenden die Wärmeinheit angenommen.

## b. Der zweite Hauptsatz.

1. Der zweite Hauptsatz der Thermodynamik besagt, daß aus einem Körper oder Körpersystem, dessen Temperatur in allen Teilen dieselbe ist, keine mechanische Arbeit gewonnen werden kann. Vorausgesetzt ist hierbei, daß das System nicht durch seinen mechanischen oder chemischen Zustand Arbeit leisten kann. Ein derartiges System bezeichnet man als im vollkommenen Gleichgewichte befindlich. Gleichwertig mit diesem ist der von **Clausius** ausgesprochene Satz, daß Wärme nicht von selbst von einem kälteren zu einem wärmeren Körper übergehen kann, d. h. ohne daß bleibende Veränderungen an anderen Körpern eintreten.

\*) 427 mkg gilt heute als der wahrscheinlichste Wert der 15 WE. S. Warburg „Referat über die Wärmeinheit“ Leipzig 1900.

Als Ausdruck des zweiten Hauptsatzes gilt für umkehrbare Zustandsänderungen, d. h. für stetige oder Gleichgewichtsprozesse

$$dQ = TdS.$$

$S$  ist wie  $P$ ,  $V$ ,  $T$  und  $U$  nur vom Zustande des Körpers abhängig und heißt die **Entropie**. Kennt man für einen Körper die Beziehungen der Größen  $P$ ,  $V$ ,  $T$  und  $U$ , so bestimmt sich die Entropie aus der Gleichung

$$TdS = dU + APdV.$$

2. Der zweite Hauptsatz liefert eine Erklärung der **Umkehrbarkeit**. Umkehrbare Prozesse sind solche, bei denen die Summe der Entropie der beteiligten Körper unveränderlich bleibt. Bei allen **nichtumkehrbaren** Prozessen, d. h. solchen, welche bei gestörtem Gleichgewicht verlaufen, wächst die Entropiesumme. Die Entropie eines isolierten Systems kann niemals abnehmen.

## B. Nutzbare Arbeit.

1. Um aus einem gegebenen System den größtmöglichen Betrag von mechanischer Arbeit zu gewinnen, muß man es auf irgend einem umkehrbaren Weg in den Zustand vollkommenen Gleichgewichts bringen, oder mit anderen Worten: die **nutzbare Arbeit**  $L_n$  eines Systems ist der Betrag, um den seine Gesamtenergie bei gleichbleibender Entropie vermindert werden kann.

2. In fast allen technischen Arbeitsprozessen bildet die äußere Umgebung, die als ein Behälter von unveränderlichem Druck und unveränderlicher Temperatur aufzufassen ist, einen Teil der Systeme, die zur Arbeitsleistung benutzt werden. In solchen Fällen lautet der Grundsatz für die günstigsten Arbeitsprozesse: Das gegebene System muß auf irgend einem umkehrbaren Weg auf den Druck und die Temperatur der Umgebung gebracht werden. Bezeichnet  $E_1$ ,  $V_1$  und  $S_1$  die Gesamtenergie, den Rauminhalt und die Entropie des Systems (ohne Umgebung) im Anfangszustand und  $E_2$ ,  $V_2$  und  $S_2$  diese Größen nach umkehrbarem Uebergang im Endzustand,  $T_0$ ,  $P_0$  die Temperatur und den Druck der Umgebung, so ist die nutzbare Arbeit in WE

$$AL_n = (E_1 - E_2) - T_0(S_1 - S_2) + AP_0(V_1 - V_2).$$

Jedes der drei Glieder kann positiven oder negativen Wert haben.

3. Der **Arbeitsverlust**, der in solchen Fällen durch einen nicht-umkehrbaren Teil des Prozesses entsteht, ist in WE gemessen gleich dem Produkt aus der absoluten Umgebungstemperatur und der durch den Teilprozeß hervorgerufenen Entropievermehrung.

Ist aus praktischen Gründen (Kühlwassermangel, ungünstige Wärmeübertragungszahl) ein Wärmeaustausch des Systems mit der Umgebung untunlich, so muß man sich damit begnügen, das System auf umkehrbarem Weg auf den Druck der Umgebung zu bringen.

## C. Formeln aus den beiden Hauptsätzen.

1. Bezeichnet man alle Größen für die Gewichtseinheit mit kleinen Buchstaben  $v$ ,  $s$ ,  $u$ , und die spezifische Wärme bei unveränderlichem

Druck bzw. unveränderlichem Rauminhalt mit  $c_p$  und  $c_v$ , so folgen aus der Hauptgleichung

$$T ds = du + AP dv$$

die Beziehungen

$$c_p = \left( \frac{\partial Q}{\partial T} \right)_P = T \left( \frac{\partial s}{\partial T} \right)_P \quad c_v = \left( \frac{\partial Q}{\partial T} \right)_v = T \left( \frac{\partial s}{\partial T} \right)_v$$

$$c_p - c_v = AT \left( \frac{\partial v}{\partial T} \right)_P \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_v$$

$$ds = -A \left( \frac{\partial v}{\partial T} \right)_P dP + c_p \frac{dT}{T} = A \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_v dv + c_v \frac{dT}{T}$$

$$-A \left( \frac{\partial v}{\partial T} \right)_P = \left( \frac{\partial s}{\partial P} \right)_T \quad A \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_v = \left( \frac{\partial s}{\partial v} \right)_T$$

$$A \left( \frac{\partial T}{\partial P} \right)_s = \left( \frac{\partial v}{\partial s} \right)_P \quad -A \left( \frac{\partial T}{\partial v} \right)_s = \left( \frac{\partial P}{\partial s} \right)_v$$

2. Neben der Energie ist in vielen technischen Anwendungen die Einführung einer ihr ähnlichen Größe

$$i = u + APv$$

von großem Vorteil. Diese Größe stellt den **Wärmeinhalt bei unveränderlichem Druck** dar. Durch Einführung von  $i$  geht die Hauptgleichung über in

$$dQ = T ds = di - Av dP;$$

weiter gelten

$$\left( \frac{\partial i}{\partial s} \right)_P = T$$

$$\left( \frac{\partial u}{\partial s} \right)_v = T$$

$$\left( \frac{\partial i}{\partial P} \right)_s = Av$$

$$\left( \frac{\partial u}{\partial v} \right)_s = -AP$$

$$\left( \frac{\partial i}{\partial T} \right)_P = c_p$$

$$\left( \frac{\partial u}{\partial T} \right)_v = c_v$$

$$\left( \frac{\partial i}{\partial P} \right)_T = -AT^2 \left( \frac{\partial v}{\partial T} \right)_P = -AT \left( \frac{\partial v}{\partial T} \right)_P + Av$$

$$\left( \frac{\partial u}{\partial v} \right)_T = AT^2 \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_v = AT \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_v - AP$$

$$\left( \frac{\partial c_p}{\partial P} \right)_T = -AT \left( \frac{\partial^2 v}{\partial T^2} \right)_P \quad \left( \frac{\partial c_v}{\partial v} \right)_T = AT \left( \frac{\partial^2 P}{\partial T^2} \right)_v$$

## D. Zeichnerische Darstellungen.

Die zeichnerischen Darstellungen der Thermodynamik bestehen in der Regel darin, daß man die Zustände des betrachteten Körpers durch Punkte einer Ebene darstellt, indem man von den Größen  $P$ ,  $T$ ,  $V$ ,  $S$ ,  $J$ ,  $U$  zwei als rechtwinklige Koordinaten wählt.

1. Das **PV-Diagramm, Arbeitsdiagramm, Indikatordiagramm**, die Fläche unter der Zustandslinie stellt die geleistete Arbeit  $\int P dV$  dar.

2. Das **TS-Diagramm, Wärmediagramm**, hat die Entropie zu Abszissen und die absolute Temperatur zu Ordinaten. Die Flächen zwischen Zustandslinie, S-Achse und Endordinaten stellen die vom Körper aufgenommene Wärme dar. Die Adiabaten und Isothermen (s. S. 424) sind den Achsen parallele Geraden.

Das Wärmediagramm ist zur klaren Darstellung der Vorgänge in den Wärmemaschinen besonders geeignet.

3. Das **JS-Diagramm**,\*) mit dem Wärmeinhalt  $J = U + APV$  als Ordinaten und der Entropie als Abszissen. Dieses Diagramm bietet, auf Wärmemaschinen angewendet, den großen Vorteil, daß alle wichtigen Arbeits- und Wärmegrößen durch Strecken dargestellt sind und daher leicht zahlenmäßig bestimmt werden können. Von großem Wert ist diese Darstellungsart auch bei allen Strömungs- und Drosselungsvorgängen und bei Dampfturbinen.

## IV. VOLLKOMMENE GASE.

Bezeichnungen s. S. 411.

### A. Allgemeines.

1. Vollkommene Gase sind solche, für welche die Gesetze von **Gay-Lussac (Boyle)** und **Mariotte** Geltung haben. Beide Gesetze sind vereinigt in der **Zustandsgleichung** der vollkommenen Gase

$$Pv = RT \qquad PV = GRT.$$

$R$  heißt die **Gaskonstante**; sie ist umgekehrt proportional der Dichte oder dem Molekulargewicht  $\mu$  des Gases; setzt man letzteres für Sauerstoff = 32, so berechnet sich

$$R = 848 : \mu.$$

Diese Beziehung folgt aus dem Gesetze von **Avogadro**, wonach gleiche Räume bei gleichem Druck und gleicher Temperatur für alle Gase dieselbe Anzahl Moleküle enthalten.

Aus der Zustandsgleichung folgt weiter unter Benutzung der Beziehung (S. 415)

$$\left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_T = AT \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right) - AP = 0,$$

d. h. die Energie der vollkommenen Gase ist nur eine Funktion der Temperatur (Gesetz von **Joule**).

2. Nach den Versuchen von **Regnault** u. a. kann wenigstens für mäßig hohe Temperaturen für zweiatomige Gase  $c_p = \text{konst.}$  ange-

\*) S. Mollier, Neue Diagramme zur technischen Wärmelehre, Z. d. V. d. I. 1904 S. 271 u. f.

nommen werden, damit wird auch  $c_v = \text{konst.}$  Für Gase von mehr als zwei Atomen, z. B. Wasserdampf, Kohlensäure, Ammoniak usw., wächst die spezifische Wärme stark mit der Temperatur. So fand z. B. Wiedemann folgende Zahlen

Gasart	Spezifische Wärme $c_p$ bei		
	0°	100°	200°
Kohlensäure $\text{CO}_2$ . . . . .	0,195	0,217	0,239
Stickoxydul $\text{N}_2\text{O}$ . . . . .	0,198	0,221	0,244
Ammoniak $\text{NH}_3$ . . . . .	0,501	0,532	0,563
Aethylen $\text{C}_2\text{H}_4$ . . . . .	0,336	0,419	0,502

Aus diesem Grunde haben die Zahlen für die spezifischen Wärmen mehratomiger Gase in der folgenden Tafel nur angenähert Gültigkeit für niedrige Temperaturen (0 bis  $\infty$  200°).

Nach neuen Versuchen von Holborn und Henning beträgt zwischen 0 und  $t^0$  die mittlere spezifische Wärme für unveränderlichen Druck:

$$\begin{aligned} \text{Stickstoff: } c_m &= 0,235 + 0,000\ 019\ t \\ \text{Kohlensäure: } c_m &= 0,201 + 0,000\ 0742\ t - 0,000\ 000\ 018\ t^2 \\ \text{Wasserdampf: } c_m &= 0,467 - 0,000\ 0168\ t + 0,000\ 000\ 044\ t^2. \end{aligned}$$

Andere Formeln sowie Tabellen für die spez. Wärme der Gase bei hohen Temperaturen s. S 485.

Unabhängig von der Veränderlichkeit der spezifischen Wärme mit der Temperatur gilt immer

$$c_p - c_v = AR = \frac{1,985}{\mu} \approx \frac{2}{\mu};$$

die Energie ist  $u = c_v T + C$

der Wärmeinhalt  $i = c_p T + C$

und  $dQ = c_v dT + AP dv = c_p dT - Av dP;$

weiter gelten noch

$$\frac{c_p}{c_v} = x \quad c_v = \frac{2}{\mu(x-1)} \quad c_p = \frac{2x}{\mu(x-1)}$$

und im besonderen für zweiatomige Gase

$$x = 1,4 \quad c_v = \frac{5}{\mu} \quad c_p = \frac{7}{\mu}.$$

3. Die Entropie der vollkommenen Gase ist bestimmt durch

$$s = c_v \ln(Pv^x) + C = c_v \ln P + c_p \ln v + C$$

$$s = c_v \ln(Tv^{x-1}) + C = c_v \ln T + AR \ln v + C$$

$$s = c_p \ln \frac{T}{P^{1/x}} + C = c_p \ln T - AR \ln P + C.$$

$$P^{1/x}$$

4. Bei den Gasen ist es in vielen Fällen bequem, mit der Raumeinheit statt mit der Gewichtseinheit zu rechnen.

Tafel für Gase.

Gas	Zeichen	Atomzahl	Molekular-Gewicht $\mu$		Dichte, bezogen auf Luft $= 1$		Gas-konstante $R$	Spez. Wärme für 1 kg		Spez. Wärme für 1 cbm v. 15° u. 1 at		$x = \frac{C_p}{C_v}$
			genau $O_2 = 32$	angegenähert	bei 15° u. 1 at	bei 0° u. 76 mm Hg		$C_p$	$C_v$	$C_p$	$C_v$	
Helium . . . .	He	1	4,0	4	0,164	0,178	0,137	1,25	0,75	0,205	0,123	1,66
Argon . . . .	Ar	1	39,9	40	1,640	1,781	1,378	0,124	0,075	0,205	0,123	1,66
Luft . . . .	—	—	28,95	29	1,188	1,293	1	0,238	0,170	0,282	0,200	1,405
Sauerstoff . . . .	O <sub>2</sub>	2	32	32	1,312	1,429	1,105	0,217	0,155	0,285	0,204	1,400
Stickstoff . . . .	N <sub>2</sub>	2	28,08	28	1,151	1,251	0,970	0,247	0,176	0,281	0,200	1,408
Wasserstoff . . . .	H <sub>2</sub>	2	2,016	2	0,0827	0,0899	0,0696	3,41	2,42	0,282	0,200	1,405
Stickoxyd . . . .	NO	2	30,04	30	1,232	1,340	1,038	0,231	0,165	0,286	0,204	1,400
Kohlenoxyd . . . .	CO	2	28,00	28	1,148	1,250	0,968	0,242	0,172	0,279	0,197	1,410
Chlorwasserstoff . . . .	ClH	2	36,5	36,46	1,495	1,640	1,260	0,191	0,136	0,284	0,203	1,400
Kohlensäure . . . .	CO <sub>2</sub>	3	44,00	44	1,804	1,977	1,520	0,21	0,16	0,37	0,29	1,28
Wasserdampf . . . .	H <sub>2</sub> O	3	18,02	18	0,739	0,804	0,622	0,48	0,37	0,35	0,27	1,30
Stickoxydul . . . .	N <sub>2</sub> O	3	44,08	44	1,806	1,978	1,522	0,21	0,16	0,38	0,30	1,27
Schweflige Säure . . . .	SO <sub>2</sub>	3	64,06	64	2,627	2,927	2,213	0,15	0,12	0,39	0,31	1,25
Ammoniak . . . .	NH <sub>3</sub>	4	17,06	17	0,700	0,771	0,590	0,53	0,41	0,37	0,29	1,28
Azetylen . . . .	C <sub>2</sub> H <sub>2</sub>	4	26,02	26	1,066	1,176	0,899	0,35	0,27	0,37	0,29	1,28
Chlormethyl . . . .	CH <sub>3</sub> Cl	5	50,5	50,47	2,070	2,305	1,744	0,24	0,20	0,50	0,42	1,20
Methan . . . .	CH <sub>4</sub>	5	16,03	16	0,657	0,717	0,554	0,59	0,46	0,39	0,31	1,28
Aethylen . . . .	C <sub>2</sub> H <sub>4</sub>	6	28,03	28	1,149	1,250	0,969	0,40	0,33	0,46	0,38	1,25

Man setzt als Mengeneinheit

a) 1 cbm des Gases von 0° und 760 mm Q.-S.-Druck,

oder b) 1 cbm des Gases von 15° und 1 at Druck,

c) 1 Mol, d. i. die Menge von  $\mu$  kg. Das Volumen dieser Menge ist = 22,4 cbm von 0° und 760 mm oder 24,4 cbm von 15° und 1 at.

Ist  $m$  die Menge in Mol, so ist  $G = m \cdot \mu$ , und die Zustandsgleichung schreibt sich:

$$PV = 848 m T \quad APV = 1,985 m T \quad APV \approx 2 m T.$$

Für 1 Mol wird

$$Pv = 848 T \quad APv \approx 2 T.$$

Das Gewicht der Mengeneinheiten unter a) und b) ist

$$G_{0;760} = \frac{\mu}{22,4} \quad G_{15;1} = \frac{\mu}{24,4}.$$

Mit diesen Werten sind die auf die Gewichtseinheit bezogenen Größen zu multiplizieren, um sie auf die obigen Mengeneinheiten bezogen zu erhalten.

Bezeichnen  $C_p$  und  $C_v$  die spezifischen Wärmen für die Mengeneinheit für **1 cbm von 0° und 760 mm Q.-S.**, so ist

$$C_p = \frac{\mu}{22,4} c_p \quad C_v = \frac{\mu}{22,4} c_v \quad C_p - C_v = 0,089 \approx 0,09$$

und

$$C_p = \frac{0,089}{x-1} x \quad C_v = \frac{0,089}{x-1}$$

ganz unabhängig von der Art des Gases.

Für zweiatomige Gase gilt

$$C_p = 0,311 \approx 0,31 \quad C_v = 0,222 \approx 0,22.$$

Bezeichnen  $C_p$  und  $C_v$  die spezifischen Wärmen für **1 cbm von 15° und 1 at**, so ist

$$C_p = \frac{\mu}{24,4} c_p \quad C_v = \frac{\mu}{24,4} c_v \quad C_p - C_v = 0,081 \approx 0,08$$

$$C_p = \frac{0,081}{x-1} x \quad C_v = \frac{0,081}{x-1}$$

und für zweiatomige Gase

$$C_p = 0,284 \approx 0,28 \quad C_v = 0,203 \approx 0,20.$$

Für ein Mol sind die spezifischen Wärmen  $\mu c_p$ , und  $\mu c_v$  und es ist

$$\mu c_p - \mu c_v = 1,985 \approx 2$$

$$\mu c_p = \frac{1,985 x}{x-1} \quad \mu c_v = \frac{1,985}{x-1}$$

Für zweiatomige Gase ist

$$\mu c_p = 6,95 \approx 7 \quad \mu c_v = 4,96 \approx 5.$$

Die Entropie für 1 Mol

$$S = 1,985 \left( \frac{1}{x-1} \ln P + \frac{x}{x-1} \ln v \right)$$

$$S = 1,985 \left( \frac{1}{x-1} \ln T + \ln v \right) \quad S = 1,985 \left( \frac{x}{x-1} \ln T - \ln P \right).$$

Für 1 cbm von 0° und 760 mm Q.-S. tritt 0,089, für 1 cbm von 15° und 1 at 0,081 an die Stelle von 1,985.

## B. Gasmischungen.

### a. Allgemeines.

1. Die Mischung bestehe aus einzelnen Gasen von den Gewichtsteilen  $m_1, m_2, m_3 \dots$  und den Raumteilen  $r_1, r_2, r_3 \dots$ , so daß

$$\Sigma(m_i) = 1 \quad \Sigma(r_i) = 1.$$

Zur Umrechnung von Gewichtsteilen und Raumteilen gelten

$$m_1 = \frac{r_1 \mu_1}{\Sigma(r_i \mu_i)} \quad r_1 = \frac{m_1}{\mu_1} : \Sigma\left(\frac{m_i}{\mu_i}\right).$$

Gasmischungen verhalten sich so, wie wenn jedes einzelne Gas den gegebenen Gesamtraum unbehindert von den anderen völlig ausfüllen würde; die sich hieraus ergebenden Teildrücke der einzelnen Gase setzen sich zu dem Gesamtdrucke zusammen. (Gesetz von Dalton.) Danach gelten für Mischungen dieselben Gesetze wie für einfache Gase.

Die Teildrücke der einzelnen Gase verhalten sich wie die Raumteile derselben:

$$p_1 : p_2 : p_3 \dots = r_1 : r_2 : r_3 \dots$$

$$r_1 = \frac{p_1}{p} \quad r_2 = \frac{p_2}{p} \dots$$

2. Die **Gaskonstante** für Mischungen ist

$$R = \Sigma(m_i R_i) = 848 \Sigma\left(\frac{m_i}{\mu_i}\right) = \frac{1}{\Sigma\left(\frac{r_i}{R_i}\right)} = \frac{848}{\Sigma(r_i \mu_i)}.$$

$\Sigma(r_i \mu_i)$  vertritt für die Mischung die Stelle des Molekulargewichtes (scheinbares Molekulargewicht).

3. Die **spezifische Wärme** von Mischungen ist

$$c_p = \Sigma(m_i c_{p i}) \quad c_v = \Sigma(m_i c_{v i})$$

$$C_p = \Sigma(r_i C_{p i}) \quad C_v = \Sigma(r_i C_{v i})$$

$$\mu c_p = \Sigma(r_i \mu_i c_{p i}) \quad \mu c_v = \Sigma(r_i \mu_i c_{v i}).$$

Für Mischungen von nur zweiatomigen Gasen ist wieder für 1 cbm von 15° und 1 at

$$C_p = 0,284 \quad C_v = 0,203$$

$$\mu c_p = 7 \quad \mu c_v = 5.$$

**b. Mischung von Luft und Wasserdampf.**

(Feuchte Luft.)

Nach den Eigenschaften der Dämpfe (s. S. 430) kann der Teildruck des Wasserdampfes  $p_D$  nie einen bestimmten Höchstwert  $p'$  überschreiten, welcher nur von der Temperatur abhängig ist und mit dieser steigt; die Tafel S. 422 gibt in der zweiten Reihe diese Werte in mm Q.-S. ( $h'$ ); für höhere Temperaturen finden sie sich in den Tafeln S. 434 sowohl in mm Q.-S. wie in at. Natürlich kann aber der Teildruck beliebig kleiner als  $p'$  sein. Daraus folgt, daß 1 cbm Luft von gegebener Temperatur  $t$  immer nur ein bestimmtes Höchstgewicht von Dampf = der Dichte  $\gamma'$  des Wasserdampfes bei  $t$  und dem zugehörigen Druck  $p'$  enthalten kann. Die Werte von  $\gamma'$  finden sich in der Tafel S. 422 in Gramm für 1 cbm und in der Tafel S. 434 unter der Bezeichnung  $\gamma$  in kg/cbm. Im allgemeinen enthält die Luft  $\varphi\gamma'$  Wasserdampf, wobei  $\varphi$  die **relative Feuchtigkeit** genannt wird und zwischen 0 und 1 liegt.

Es ist auch  $\varphi = \frac{p_D}{p'}$ , d. h. die relative Feuchtigkeit ist auch das Verhältnis des wirklichen Teildruckes des Wasserdampfes zum Sättigungsdruck.\*) Für  $\varphi = 1$  ist die Luft mit Wasserdampf gesättigt, bei  $\varphi < 1$  kann 1 cbm noch  $(1 - \varphi)\gamma'$  Gramm Wasserdampf aufnehmen.

Ist der Druck des Gemisches (der feuchten Luft) =  $p$ , so sind die Raumteile von Luft und Wasserdampf

$$r_L = \frac{p - \varphi p'}{p}, \quad r_D = \frac{\varphi p'}{p}.$$

Das scheinbare Molekulargewicht (s. S. 420) der feuchten Luft ist

$$\mu = 28,95 - 10,93 \varphi \frac{p'}{p} \sim 28,95 - 11 \varphi \frac{p'}{p}$$

und ihre Gaskonstante

$$R = \frac{29,28}{1 - 0,377 \varphi \frac{p'}{p}}.$$

Das Gewicht von 1 cbm feuchter Luft in kg berechnet sich zu

$$\gamma = 342 \frac{p}{T} - 0,176 \varphi \frac{h'}{T}.$$

Zur Erleichterung dieser Berechnung dient die Reihe 4 und 5 der Tafel S. 422. Mit derselben ist

$$\gamma = \gamma'' p - A \varphi,$$

oder, wenn der Druck in mm Q.-S. von  $15^0$  ( $h$ ) (z. B. als Barometerstand) gegeben ist,

$$\gamma = \gamma'' \frac{h}{737,4} - A \varphi.$$

Für trockene Luft ist  $A = 0$  zu setzen.

\*) Dies gilt nicht mehr genau bei sehr hohen Teildrücken (mehrere Atmosphären) des Wasserdampfes.

Wird 1 cbm Luft, welche bei  $t_0$  und  $p_0$  eine relative Feuchtigkeit  $\varphi_0$  hat, auf eine Temperatur  $t$  und einen Druck  $p$  gebracht, so ändert sich auch die relative Feuchtigkeit in  $\varphi$ , wofür

$$\varphi \frac{p'}{p} = \varphi_0 \frac{p'_0}{p_0}$$

Ergibt sich  $\varphi > 1$ , so ist bei der Zustandsänderung Wasser niedergeschlagen worden, und  $\varphi$  ist = 1. Die Menge  $w$  des niedergeschlagenen Wassers in Gramm für 1 cbm von  $p_0, t_0, \varphi_0$  ist

$$w = \frac{\varphi_0 \frac{p}{p'} - \frac{p_0}{p'_0}}{\frac{p}{p'} - 1} \gamma'_0$$

### Mischung von Luft und Wasserdampf.

$t$	Spannung des Wasserdampfes in mm Q.-S. von 0°		Gewicht von 1 cbm Wasserdampf bei $t$ und $h'$ in g	Gewicht von 1 cbm trockener Luft von 1 at und $t'$ in kg	Korrektur für feuchte Luft	$t$	Spannung des Wasserdampfes in mm Q.-S. von 0°		Gewicht von 1 cbm Wasserdampf bei $t$ und $h'$ in g	Gewicht von 1 cbm trockener Luft von 1 at und $t'$ in kg	Korrektur für feuchte Luft
	$h'$	$\gamma'$					$\gamma''$	$A$			
-10	1,9	2,1	1,300	0,001	15	12,8	12,8	1,188	0,008		
-9	2,1	2,3	1,295	0,001	16	13,6	13,7	1,183	0,008		
-8	2,3	2,5	1,290	0,002	17	14,5	14,5	1,179	0,009		
-7	2,5	2,7	1,286	0,002	18	15,5	15,4	1,175	0,009		
-6	2,8	3,0	1,281	0,002	19	16,5	16,3	1,171	0,010		
-5	3,0	3,3	1,276	0,002	20	17,5	17,3	1,167	0,011		
-4	3,3	3,6	1,271	0,002	21	18,6	18,3	1,163	0,011		
-3	3,6	3,9	1,267	0,002	22	19,8	19,4	1,159	0,012		
-2	3,9	4,2	1,262	0,003	23	21,1	20,6	1,155	0,013		
-1	4,2	4,5	1,257	0,003	24	22,4	21,8	1,151	0,013		
0	4,6	4,9	1,253	0,003	25	23,8	23,1	1,148	0,014		
+1	4,9	5,2	1,248	0,003	26	25,3	24,5	1,144	0,015		
2	5,3	5,6	1,244	0,003	27	26,8	25,8	1,140	0,016		
3	5,7	6,0	1,239	0,004	28	28,4	27,3	1,136	0,017		
4	6,1	6,4	1,235	0,004	29	30,1	28,8	1,132	0,017		
5	6,5	6,8	1,230	0,004	30	31,8	30,4	1,128	0,018		
6	7,0	7,3	1,226	0,004	32	35,3	33,5	1,121	0,020		
7	7,5	7,8	1,221	0,005	34	39,5	37,2	1,114	0,023		
8	8,0	8,3	1,217	0,005	36	44,2	41,3	1,107	0,025		
9	8,6	8,8	1,212	0,005	38	49,3	45,8	1,100	0,028		
10	9,2	9,4	1,208	0,006	40	54,9	50,7	1,093	0,031		
11	9,8	10,0	1,204	0,006	42	61,0	56,0	1,086	0,034		
12	10,5	10,7	1,200	0,007	44	67,8	61,8	1,079	0,037		
13	11,2	11,4	1,196	0,007	46	75,1	68,1	1,072	0,041		
14	12,0	12,1	1,192	0,007	48	83,2	74,9	1,065	0,045		
15	12,8	12,8	1,188	0,008	50	92,0	82,3	1,058	0,050		

Ist  $\varphi < 1$ , so bedeutet  $w$  in der Gleichung S. 422 diejenige Dampfmenge, welche die Luft bei der gedachten Zustandsänderung noch aufzunehmen vermag.

Der Dampfmenge  $w$  entspricht im Anfangszustand  $p_0 t_0$  ein Raum

$$\Delta V = \frac{\varphi_0 \frac{p}{p'} \frac{p_0'}{p'} - 1}{\frac{p}{p'} - 1} \text{ cbm.}$$

Wird feuchte Luft abgekühlt, so wächst der Feuchtigkeitsgrad  $\varphi$  und wird bei der Temperatur  $t'$ , welche dem gegebenen Teildruck des Dampfes  $p_D = \varphi_0 p_0'$  nach Tafel S. 422 entspricht, = 1. Diese Temperatur, bei welcher das Niederschlagen des Dampfes beginnt, nennt man den **Taupunkt**.

#### Messung der Luftfeuchtigkeit.

**1. Taupunkt-Hygrometer.** Durch Verdunstung von Aether wird ein Glas- oder Metallgefäß mit glänzender Oberfläche so lange abgekühlt, bis sich Wasserdampf auf ihr niederschlägt und sie trübt; die gleichzeitig abgelesene Temperatur im Gefäß gibt den Taupunkt der Luft  $t'$ . In Tafel S. 422 findet sich zu  $t'$  unter  $\gamma'$  der Wassergehalt der Luft, derselbe muß noch mit  $\frac{T'}{T}$  multipliziert werden, worin  $T'$  und  $T$  die absoluten Temperaturen zu  $t'$  und  $t$  sind. Die relative Feuchtigkeit ergibt sich als das Verhältnis des so bestimmten Wassergehalts zum Werte  $\gamma'$  bei  $t$ .

**2. Psychrometer.** Ein Thermometer, dessen Kugel mit einem feuchten Lappchen umwickelt ist, wird gleichzeitig mit einem trockenen Thermometer der zu untersuchenden Luft ausgesetzt. Ist  $t$  die Lufttemperatur (trockenes Thermometer),  $t_f$  die Anzeige des feuchten Thermometers,  $h'$  und  $h'_f$  die entsprechenden Dampfspannungen in mm Q.-S. nach Tafel S. 422, so berechnet sich der wirkliche Teildruck des Wasserdampfes in der Luft

$$h_D = \varphi h' = h'_f - 0,60 (t - t_f), \quad \text{wenn } t' > 0,$$

$$h_D = \varphi h' = h'_f - 0,52 (t - t_f), \quad \text{wenn } t' < 0.$$

Die Konstanten gelten für mäßig bewegte freie Luft; bei ruhiger Luft muß das Psychrometer etwas bewegt werden.

Genauer als das einfache ist das **Aspirationspsychrometer**.

Für viele Zwecke reichen gut justierte **Haarhygrometer** aus.

## C. Besondere Zustandsänderungen.

### (Expansionskurven.)

Die folgenden Formeln gelten für  $G$  kg des Gases. Ist die Gewichtseinheit vorhanden, so sind statt  $V, U, J, S$  die kleinen Buchstaben und  $G = 1$  zu setzen. Zeiger 1 und 2 beziehen sich auf Anfang und Ende der Zustandsänderung.

#### a. Rauminhalt unveränderlich.

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{T_1}{T_2} \quad Q = U_2 - U_1 = G c_v (t_2 - t_1) \quad \text{und}$$

$$Q = \frac{A}{z-1} V (P_2 - P_1) = \frac{A}{z-1} V (p_2 - p_1) 10^4.$$

Für zweiatomige Gase  $Q = 58,5 V (p_2 - p_1)$ .

**b. Druck unveränderlich.**

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{T_1}{T_2}$$

$$L = P(V_2 - V_1) = GR(t_2 - t_1)$$

$$Q = Gc_p(t_2 - t_1) = \frac{\alpha}{\alpha - 1} AL.$$

**c. Temperatur unveränderlich (Isotherme).**

$$U = \text{unveränderlich} \quad pV = \text{unveränderlich}$$

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{V_2}{V_1}$$

$$L = GR T \ln \frac{p_1}{p_2} = P_1 V_1 \ln \frac{p_1}{p_2}$$

$$Q = AL.$$

**d. Entropie unveränderlich (Adiabate).**

$$Q = 0 \quad \dots \quad 1$$

$$pV^\alpha = \text{unveränderlich} \quad \frac{p_1}{p_2} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^\alpha \quad \dots \quad 2, 3$$

$$TV^{\alpha-1} = \text{unveränderlich} \quad \frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\alpha-1} \quad \dots \quad 4, 5$$

$$\frac{T}{p^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}} = \text{unveränderlich} \quad \frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \quad \dots \quad 6, 7$$

$$AL = U_1 - U_2 = Gc_v(t_1 - t_2)$$

$$L = \frac{P_1 V_1}{\alpha - 1} \left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right).$$

Werte der Exponenten für zweiatomige Gase:

$$\alpha = 1,4 \quad \alpha - 1 = 0,4 \quad \frac{\alpha - 1}{\alpha} = 0,286$$

$$\frac{1}{\alpha} = 0,714 \quad \frac{1}{\alpha - 1} = 2,5 \quad \frac{\alpha}{\alpha - 1} = 3,5.$$

**e. Polytrope.**

$$pV^n = \text{unveränderlich} \quad p v^n = \text{unveränderlich.}$$

Diese Kurve wird vielfach zur Darstellung der Expansionskurven in Maschinen gebraucht, hierbei liegen die Exponenten  $n$  gewöhnlich zwischen 1 und  $\alpha$ .

Es gelten die vorstehenden Beziehungen 2 bis 7 der Adiabate mit  $n$  statt  $\alpha$ .

Die Polytropen der Gase sind Kurven unveränderlicher spezifischer Wärme; es ist

$$c_n = \frac{n - \alpha}{n - 1} c_v;$$

für  $1 < n < \alpha$  ist  $c_n$  negativ.

$$AL = G(c_n - c_v)(t_2 - t_1) \qquad Q = Gc_n(t_2 - t_1)$$

$$L = \frac{GR}{n-1}(t_1 - t_2) \qquad Q = \frac{x-n}{x-1}AL$$

$$L = \frac{P_1 V_1}{n-1} \left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right) = \frac{P_1 V_1}{n-1} \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{n-1}\right]$$

$$= \frac{P_1 V_1}{n-1} \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{n-1}{n}}\right]$$

**Adiabatische und polytropische Expansion von Gasen.**

$\frac{p_1}{p_2}$	Für $n =$				Für $n =$			
	<sup>1,4</sup> (Adiabate)	1,3	1,2	1,1	<sup>1,4</sup> (Adiabate)	1,3	1,2	1,1
	ist $\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{V_2}{V_1} =$				ist $\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{n-1}{n}} = \frac{T_1}{T_2} =$			
1,1	1,070	1,076	1,083	1,090	1,028	1,022	1,016	1,009
1,2	1,139	1,151	1,164	1,180	1,053	1,043	1,031	1,017
1,3	1,206	1,224	1,244	1,269	1,078	1,062	1,045	1,024
1,4	1,271	1,295	1,323	1,358	1,101	1,081	1,058	1,031
1,5	1,336	1,366	1,401	1,445	1,123	1,098	1,070	1,038
1,6	1,399	1,436	1,479	1,533	1,144	1,115	1,081	1,044
1,7	1,461	1,504	1,557	1,620	1,164	1,130	1,092	1,050
1,8	1,522	1,571	1,633	1,706	1,183	1,145	1,103	1,055
1,9	1,581	1,638	1,706	1,791	1,201	1,160	1,113	1,060
2,0	1,641	1,705	1,782	1,879	1,219	1,174	1,123	1,065
2,5	1,924	2,023	2,145	2,300	1,299	1,235	1,165	1,087
3,0	2,193	2,330	2,498	2,715	1,369	1,289	1,201	1,105
3,5	2,449	2,624	2,842	3,126	1,431	1,336	1,232	1,121
4,0	2,692	2,907	3,177	3,505	1,487	1,378	1,260	1,134
4,5	2,926	3,178	3,500	3,925	1,526	1,415	1,285	1,147
5,0	3,156	3,449	3,824	4,320	1,583	1,449	1,307	1,157
5,5	3,378	3,712	4,142	4,710	1,627	1,482	1,328	1,167
6,0	3,598	3,970	4,447	5,100	1,668	1,512	1,348	1,177
6,5	3,809	4,218	4,760	5,483	1,707	1,540	1,366	1,186
7,0	4,012	4,467	5,058	5,861	1,742	1,566	1,383	1,194
7,5	4,217	4,710	5,360	6,250	1,778	1,591	1,399	1,201
8,0	4,415	4,950	5,650	6,620	1,811	1,616	1,414	1,208
9,0	4,800	5,420	6,240	7,370	1,873	1,660	1,442	1,221
10,0	5,188	5,885	6,820	8,120	1,931	1,701	1,468	1,233

**Konstruktion der polytropischen Kurve.\***

(Abb. 3.)

Man ziehe  $OA$  unter dem beliebigen Winkel  $\alpha$  gegen die  $x$ -Achse geneigt, bestimme den Winkel  $YOB = \beta$  aus der Gleichung

$$(1 + \operatorname{tg} \beta) = (1 + \operatorname{tg} \alpha)^n;$$

dann ziehe man von den dem gegebenen Anfangszustande  $p_0 v_0$  entsprechenden Punkten  $D$  und  $C$  abwechselnd zu den Koordinatenachsen winkelrechte und unter  $45^\circ$  geneigte Linien in der aus der Abb. 3 ersichtlichen Weise, so sind die Punkte 1, 2, 3 Punkte der Kurve.

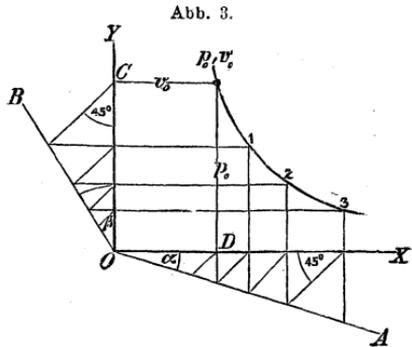


Abb. 3.

**f. Untersuchung von Expansionskurven.**

(Ermittlung des Exponenten  $n$ .)

Es seien  $V_1$  und  $V_2$  die absoluten Rauminhalte zweier Zustände,  $p_1$  und  $p_2$  die Drücke, dann ist

$$n = \frac{\lg p_1 - \lg p_2}{\lg V_2 - \lg V_1}.$$

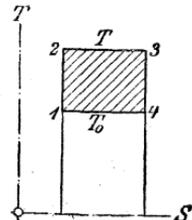
Die Berechnung von  $n$  für mehr als zwei Punkte zeigt, ob und in welchen Grenzen  $n$  als unveränderlich betrachtet werden kann, und inwieweit eine Zustandsänderung nach der polytropischen Kurve angenommen werden darf.  $n=1$  ergibt die **gleichseitige Hyperbel**. Besser noch läßt sich der Exponent  $n$  ermitteln, wenn man für verschiedene Punkte der Expansionskurve  $\lg V$  und  $\lg p$  in rechtwinkligen Koordinaten aufträgt. Für  $n =$  unveränderlich muß sich dann eine Gerade ergeben; die Tangente ihres Neigungswinkels ist  $= n$ .

**D. Besondere Arbeitsprozesse.**

**a. Carnotscher Kreisprozess. (Abb. 4.)**

- 1 2, adiabatische Kompression von  $T_0$  auf  $T$ ,
- 2 3, isothermische Expansion,
- 3 4, adiabatische Expansion von  $T$  auf  $T_0$ ,
- 4 1, isothermische Kompression.

Abb. 4.



$$\begin{aligned} p_2 p_4 &= p_1 p_3 \\ T_2 T_4 &= T_1 T_3 \\ V_2 V_4 &= V_1 V_3 \\ V_2 p_2 &= V_3 p_3 \\ V_4 p_4 &= V_1 p_1 \end{aligned}$$

\*) Nach E. Brauer; vrgl. Z. d. V. d. I. 1885 S. 433.

$$\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{x-1}{x}} = \left(\frac{p_3}{p_4}\right)^{\frac{x-1}{x}} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{x-1} = \left(\frac{V_4}{V_3}\right)^{x-1} = \frac{T}{T_0}$$

$$L = GR(t - t_0) \ln \frac{p_2}{p_3} = P_1 V_1 \left(\frac{T}{T_0} - 1\right) \ln \frac{p_2}{p_3}$$

Der Wirkungsgrad des Prozesses ist

$$\eta = \frac{AL}{Q_{23}} = \frac{T - T_0}{T}$$

Wird der Prozess umgekehrt durchlaufen, so wird die Arbeit  $L$  aufgewendet, und die Wärme  $Q_{14}$  wird bei der tiefen Temperatur  $T_0$  entzogen; sie stellt im Falle einer Kältemaschine die Kälteleistung dar.

$$\epsilon = \frac{Q_{14}}{AL} = \frac{T_0}{T - T_0}$$

nennt man die **Leistungsziffer** der nach dem Carnotschen Prozess arbeitenden Kältemaschine.

**b. Kreisprozess zwischen zwei Linien gleichen Druckes und zwei Adiabaten.** (Abb. 5.)

(Heiß- und Kalt-Luftmaschinen.)

$$\frac{V_3}{V_2} = \frac{V_4}{V_1} = \frac{T_3}{T_2} = \frac{T_4}{T_1}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{T_3}{T_4} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{x-1} = \left(\frac{V_4}{V_3}\right)^{x-1} = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{x-1}{x}} \quad (\text{s. Tafel S. 425})$$

$$AL = Gc_p(t_3 - t_2 - t_4 + t_1)$$

$$\eta = \frac{AL}{Q_{23}} = 1 - \frac{T_4}{T_3} = 1 - \left(\frac{p_0}{p}\right)^{\frac{x-1}{x}}$$

$$\epsilon = \frac{Q_{14}}{AL} = \frac{T_4}{T_3 - T_4} = 1 : \left[ \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{x-1}{x}} - 1 \right]$$

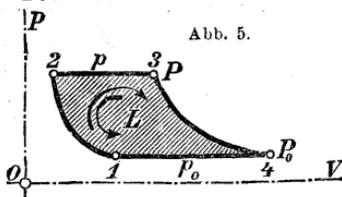


Abb. 5.

Für Kaltluftmaschinen ist die theoretische Kolbenfläche  $F$  in qm für doppeltwirkende Kompressoren

$$F = \frac{1}{c} \frac{Q_0}{300000} \frac{T_4}{T_4 - T_1}$$

wenn  $c$  die Kolbengeschwindigkeit in m/sk und  $Q_0$  die Kälteleistung für die Stunde in WE bedeutet.

**c. Kreisprozess zwischen zwei Kurven gleichen Rauminhaltes und zwei Polytropen** oder Adiabaten. (Abb. 6.)

Der Exponent sei für beide Polytropen derselbe ( $n$ ).

(Gasmaschine.)

$$\frac{T_2}{T_3} = \frac{T_1}{T_4} = \frac{p_2}{p_3} = \frac{p_1}{p_4}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{T_3}{T_4} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{n-1}{n}} = \left(\frac{p_3}{p_4}\right)^{\frac{n-1}{n}} = \left(\frac{V}{V_0}\right)^{n-1}$$

$$L = \frac{P_1 V}{n-1} \left(\frac{p_3}{p_2} - 1\right) \left[\left(\frac{V}{V_0}\right)^{n-1} - 1\right].$$

Der mittlere Druck des Diagramms

$$p_i = \frac{L}{V - V_0} \text{ folgt}$$

$$p_i = p_1 \left(\frac{p_3}{p_2} - 1\right) \frac{\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{n-1}{n}} - 1}{n-1} \cdot \frac{\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{1}{n}}}{\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{1}{n}} - 1} = p_1 \left(\frac{p_3}{p_2} - 1\right) a.$$

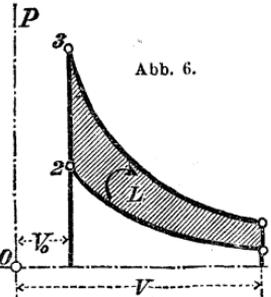


Abb. 6.

Die Werte von  $a$  gibt die folgende Tafel:

$p_2 : p_1 =$	3	4	5	6	8	10	12	14	16
$n = 1,4$	$a = 1,70$	1,94	2,13	2,31	2,62	2,88	3,10	3,31	3,50
$n = 1,3$	$a = 1,69$	1,92	2,11	2,28	2,57	2,81	3,03	3,22	3,39
$n = 1,2$	$a = 1,68$	1,90	2,08	2,25	2,51	2,74	2,94	3,12	3,27

Sind die Kurven 12 und 34 Adiabaten, so ist überall  $n$  durch  $\kappa$  zu ersetzen, und insbesondere gilt dann noch

$$AL = G c_v (t_3 - t_2 - t_4 + t_1)$$

$$= G c_v T_1 \left(\frac{p_3}{p_2} - 1\right) \left[\left(\frac{V}{V_0}\right)^{\kappa-1} - 1\right],$$

$$\eta = \frac{AL}{Q_{23}} = 1 - \frac{T_4}{T_3} = 1 - \left(\frac{V_0}{V}\right)^{\kappa-1}.$$

#### d. Luftkompressor.

Für einen Kompressor ohne schädlichen Raum und ohne Arbeitsverluste (Abb. 7) ist die Arbeit zur Kompression von  $G$  kg bzw.  $V$  cbm Luft oder Gas vom Druck  $p_0$  und der Temperatur  $t_0$  auf den Druck  $p$

1. bei isothermischer Kompression:

$$L = G R T_0 \ln \frac{p}{p_0} = P_0 V \ln \frac{p}{p_0},$$

$$\text{da } T_1 = T_2 = T_0 \quad p_1 V_1 = p_2 V_2$$

$$p_1 = p_0.$$

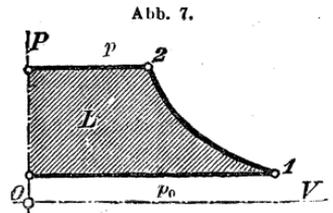


Abb. 7.

Die während der Kompression durch Kühlwasser abzuführende Wärme ist

$$Q_{12} = AL.$$

2. bei polytropischer und adiabatischer Kompression:

$$L = G \frac{n}{n-1} R (t_2 - t_1)$$

$$L = P_0 V \frac{n}{n-1} \left( \frac{T_2}{T_1} - 1 \right) = P_0 V \frac{n}{n-1} \left[ \left( \frac{p}{p_0} \right)^{\frac{n-1}{n}} - 1 \right]$$

$$p_1 = p_0 \qquad T_1 = T_0.$$

Für die Adiabate ist  $n$  durch  $\kappa$  zu ersetzen.

Die abzuführende Wärme ist

$$Q_{12} = \frac{\kappa - n}{\kappa - 1} \frac{1}{n} AL.$$

Die kleinste und daher günstigste Kompressorarbeit liefert die **isotherme**, sie ist daher bei der Beurteilung von ausgeführten Kompressoren zugrunde zu legen.

3. Die Ausdrücke für die Kompressorarbeit (Fläche  $L$  der Abb. 7) lassen sich in allen Fällen schreiben

$$L = 10\,000 V p_m,$$

worin  $p_m$  den mittleren Druck des verlustfreien Kompressors ohne schädlichen Raum darstellt. Zur Berechnung von  $p_m$  für verschiedene Kompressionskurven dient die folgende Tafel, es ist

$$p_m = p_0 b.$$

( $b$  stellt den mittleren Druck dar, wenn der Ansaugedruck  $p_0$  gerade = 1 at ist.)

Tafel für  $b$ .

$p : p_0 =$	1,5	2	2,5	3	4	5	6	8	10
$n = 1$ Isotherme	0,405	0,693	0,916	1,099	1,386	1,61	1,79	2,08	2,30
$n = 1,1$	0,418	0,715	0,957	1,155	1,470	1,73	1,95	2,29	2,56
$n = 1,2$	0,420	0,738	0,990	1,205	1,560	1,84	2,09	2,48	2,81
$n = 1,3$	0,425	0,754	1,018	1,252	1,640	1,95	2,22	2,67	3,04
$n = 1,4$ Adiabate	0,430	0,768	1,046	1,290	1,703	2,04	2,34	2,84	3,26

Für Verbundkompression berechnet sich unter der Voraussetzung, daß im Zwischenkühler auf die Anfangstemperatur  $t_0$  gekühlt wird,

die Arbeit, wenn man in die obigen Formeln und die Tafel  $\sqrt{\frac{p}{p_0}}$

statt  $\frac{p}{p_0}$  einführt und die gefundene Arbeit verdoppelt.

Ausgeführte Kompressoren (Abb. 8) saugen weniger Luft an, als ihrem Hubraum entspricht. Das Verhältnis der wirklich angesaugten Luftmenge in cbm vom Druck  $p_0$  und der Temperatur  $t_0$  zum Hub-

raum heisst der **Lieferungsgrad**  $\lambda$  des Kompressors; er wird bedingt durch den schädlichen Raum (Rückexpansion 3—4, Abb. 8), durch Drosselung der angesaugten Luft ( $p_1 < p_0$ ) und Erwärmung der angesaugten Luft durch die Zylinder- und Kanalwände ( $t_1 > t_0$ ).

Die durch den Indikator gemessene indizierte Kompressorarbeit ist stets grösser als die theoretische Arbeit bei isothermischer Kompression; das Verhältnis beider heisst der **indizierte Wirkungsgrad**  $\eta_i$  des Kompressors, er wird bedingt durch mangelhafte Kühlung ( $n > 1$ ), durch die Mehrarbeit infolge der Drosselung und durch die schädliche Erwärmung der Luft an den heissen Wandungen während des Ansaugens, denn die Arbeit steigt im Verhältnis der absoluten Temperatur  $T_1$ . Ist  $p_m$  der mittlere Druck des theoretischen (verlustfreien Prozesses) und  $p_i$  der mittlere indizierte Druck des untersuchten Kompressors,  $\lambda$  sein Lieferungsgrad, so ist

$$\eta_i = \lambda \frac{p_m}{p_i}.$$

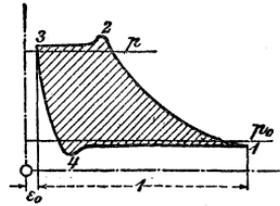
Der Wirkungsgrad  $\eta_i$  und der Lieferungsgrad  $\lambda$  nehmen wegen der Wandungswirkung rasch ab, wenn das Druckverhältnis  $p : p_0$  wächst, daher Verbundkompression vorteilhaft.

Um einen Einblick in die schädliche Wirkung der Wandungen zu erhalten, berechnet man die Temperatur  $T_1$  nach dem Ansaugen bzw. beim Beginn der Kompression. Es ist

$$\frac{T_1}{T_0} = \frac{(\varepsilon_1 + \varepsilon_0) \frac{p_1}{p_0}}{(\varepsilon_3 + \varepsilon_0) \frac{p_3}{p_0} \frac{T_0}{T_3} + \lambda}.$$

$T_3$  wird der zu messenden Austrittstemperatur der Luft gleichgesetzt;  $\varepsilon_0$  ist das Verhältnis des schädlichen Raumes zum Hubraum.  $\varepsilon_3$  und  $\varepsilon_1$  sind die Hubstrecken bei Beginn der Rückexpansion und der Kompression, die meist gleich 0 bzw. gleich 1 zu setzen sein werden. Die Formel kann auch zur Berechnung der Temperatur in irgend einem anderen Punkt der Kompressionslinie dienen. Dichtigkeit des Kolbens und der Steuerung ist vorausgesetzt.

Abb. 8.



## V. DÄMPFE.

### A. Allgemeines.

1. Wenn man ein beliebiges Gas bei gleichbleibender Temperatur verdichtet, so beginnt es bei einem bestimmten, von der Temperatur abhängigen Druck (**Sättigungsdruck**) und zugehörigen

Rauminhalt  $v''$  flüssig zu werden. Setzt man die Raumverminderung weiter fort, so bleibt von diesem Punkt ab mit der Temperatur auch der Druck unveränderlich, bis das Gas vollständig verflüssigt ist, wobei es einen Raum  $v'$  einnimmt.

Zwischen Beginn und Ende der Verflüssigung besteht eine Mischung aus einem gasförmigen (dampfförmigen) und einem flüssigen Anteil. Es bezeichne für 1 kg Mischung  $x$  den dampfförmigen und  $y = 1 - x$  den flüssigen Anteil.

Im Gebiete des nassen Dampfes, dem Sättigungsgebiete, ist also die Temperatur nur eine Funktion des Druckes und umgekehrt. Die Beziehung zwischen diesen Werten heißt die Spannungsgleichung oder -kurve. Im besonderen ist die dem Atmosphärendrucke zugehörige Temperatur die Siedetemperatur.

Wo eine Unterscheidung nötig ist, soll im folgenden die zu einem gegebenen Druck  $p$  gehörige Sättigungstemperatur mit  $\vartheta$  bzw.  $\Theta$  (absolut) bezeichnet werden.

2. Für jedes Gas gibt es eine bestimmte Höchsttemperatur  $t_k$  und einen zugehörigen Druck  $p_k$ , oberhalb deren eine Verflüssigung des Gases bei der Verdichtung nicht mehr eintritt. Den durch  $t_k$  und  $p_k$  bestimmten Zustand nennt man den **kritischen**. In ihm treffen sich die Grenzzustände (Grenzkurven) für Flüssigkeit und Dampf. Außerhalb der Werte  $t_k$  und  $p_k$  besteht keine merkbare Grenze zwischen den beiden Aggregatzuständen.

**Tafel der Siedetemperaturen  $t_{760}$ ,  
der kritischen Temperatur  $t_k$  und des kritischen Druckes  $p_k$  at.**

	$t_{760}$	$t_k$	$p_k$		$t_{760}$	$t_k$	$p_k$
Naphthalin $C_{10}H_8$ . . .	218	468	40	Chlorwasserstoff HCl . . .	- 80	+ 52	87
Anilin $C_6H_7N$ . . .	184	425	54	Azetylen $C_2H_2$ . . .	- 83	- 35	68
Wasser . . . . .	100	374	225	Stickoxydul $N_2O$ . . .	- 92	- 36	80
Benzol $C_6H_6$ . . . . .	80	290	50	Aethan $C_2H_6$ . . . . .	- 93	+ 32	50
Alkohol $C_2H_5O$ . . . . .	78	238	67	Aethylen $C_2H_4$ . . . . .	- 105	- 10	54
Aether $C_4H_{10}O$ . . . . .	35	192	38	Stickoxyd NO . . . . .	- 150	- 94	73
Schweflige Säure $SO_2$ . . .	- 10	156	81	Methan $CH_4$ . . . . .	- 164	- 82	57
Chlormetyl $CH_3Cl$ . . . . .	- 24	142	68	Sauerstoff . . . . .	- 183	- 118	60
Chlor $Cl_2$ . . . . .	- 33	+ 143	92	Argon . . . . .	- 186	- 117	54
Ammoniak $NH_3$ . . . . .	- 33	130	115	Kohlenoxyd CO . . . . .	- 190	- 136	34
Propan $C_3H_8$ . . . . .	- 45	+ 97	46	Stickstoff . . . . .	- 196	- 149	29
Schwefelwasserstoff $H_2S$ . .	- 52	+ 100	94	Wasserstoff . . . . .	- 253	- 241	20
Kohlensäure $CO_2$ . . . . .	- 79	31	75	Helium . . . . .	- 268	- 267	3

## B. Nasser Dampf.

Es bezeichne

$v'$  bzw.  $v''$  den Rauminhalt in cbm von 1 kg Flüssigkeit bzw. Dampf im Grenzzustand, d. h. unter dem der gegebenen Temperatur entsprechenden Sättigungsdruck,

$c$  die spezifische Wärme der Flüssigkeit im Grenzzustand,

**Druck des gesättigten Wasserdampfes bis zum kritischen Punkt für  
Temperaturen von Grad zu Grad nach Holborn, Henning u. Baumann.**

Grad	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0,0062	0,0067	0,0072	0,0077	0,0083	0,0089	0,0095	0,0102	0,0109	0,0117
10	0,0125	0,0134	0,0143	0,0153	0,0163	0,0174	0,0185	0,0197	0,0210	0,0224
20	0,0238	0,0253	0,0269	0,0286	0,0304	0,0322	0,0342	0,0363	0,0384	0,0407
30	0,0431	0,0456	0,0483	0,0511	0,0541	0,0572	0,0604	0,0638	0,0673	0,0711
40	0,0750	0,0791	0,0834	0,0878	0,0925	0,0974	0,1026	0,1079	0,1135	0,1194
50	0,1255	0,1318	0,1385	0,1455	0,1527	0,1602	0,1681	0,1762	0,1848	0,1936
60	0,2028	0,2124	0,2224	0,2328	0,2435	0,2547	0,2664	0,2785	0,2910	0,3040
70	0,3175	0,3315	0,3460	0,3611	0,3768	0,3929	0,4097	0,4269	0,4449	0,4635
80	0,4828	0,5027	0,5233	0,5445	0,5666	0,5894	0,6129	0,6371	0,6623	0,6881
90	0,7149	0,7425	0,7710	0,8004	0,8307	0,8620	0,8942	0,9274	0,9617	0,9970
100	1,0333	1,0707	1,1093	1,1490	1,1898	1,2320	1,2752	1,3196	1,3655	1,4124
110	1,4609	1,5107	1,5618	1,6144	1,6684	1,7239	1,7808	1,8392	1,8994	1,9611
120	2,0243	2,0892	2,1559	2,2243	2,2944	2,3664	2,4401	2,5021	2,5932	2,6727
130	2,7540	2,8374	2,9229	3,0102	3,0999	3,1917	3,2855	3,3818	3,4802	3,5810
140	3,6839	3,7894	3,8972	4,0078	4,1201	4,2356	4,3536	4,4742	4,5973	4,7233
150	4,8521	4,9834	5,1177	5,2548	5,395	5,538	5,685	5,833	5,985	6,141
160	6,299	6,461	6,627	6,795	6,967	7,142	7,320	7,502	7,689	7,874
170	8,072	8,268	8,469	8,673	8,882	9,094	9,311	9,531	9,755	9,984
180	10,216	10,453	10,695	10,940	11,190	11,444	11,704	11,967	12,235	12,500
190	12,786	13,069	13,356	13,648	13,944	14,247	14,555	14,866	15,184	15,508
200	15,836	16,170	16,510	16,855	17,205	17,561	17,923	18,291	18,664	19,044
210	19,429	19,820	20,218	20,621	21,031	21,446	21,869	22,298	22,733	23,175
220	23,623	24,078	24,540	25,008	25,483	25,965	26,454	26,951	27,454	27,965
230	28,483	29,008	29,541	30,080	30,628	31,183	31,746	32,316	32,895	33,481
240	34,076	34,678	35,289	35,907	36,535	37,172	37,816	38,467	39,128	39,797
250	40,476	41,162	41,859	42,565	43,279	44,001	44,734	45,476	46,227	46,987
260	47,758	48,537	49,326	50,125	50,934	51,752	52,581	53,419	54,267	55,126
270	55,995	56,874	57,764	58,665	59,576	60,497	61,430	62,374	63,329	64,295
280	65,274	66,263	67,263	68,276	69,299	70,336	71,386	72,449	73,522	74,608
290	75,705	76,815	77,94	79,08	80,23	81,39	82,57	83,76	84,96	86,18
300	87,41	88,65	89,90	91,17	92,45	93,745	95,055	96,38	97,715	99,06
310	100,42	101,80	103,19	104,60	106,02	107,46	108,91	110,37	111,85	113,35
320	114,86	116,39	117,94	119,50	121,07	122,66	124,27	125,90	127,55	129,21
330	130,89	132,58	134,28	136,01	137,75	139,51	141,30	143,10	144,91	146,74
340	148,60	150,46	152,34	154,25	156,17	158,12	160,09	162,07	164,07	166,09
350	168,12	170,17	172,25	174,34	176,46	178,60	180,75	182,94	185,15	187,39
360	189,63	191,91	194,21	196,54	198,91	201,32	203,74	206,20	208,68	211,19
370	213,73	216,30	218,89	221,54	224,24					

Anmerkung. Weitere Spannungstafeln für Wasser s. S. 434 u. f.  
schweflige Säure, Kohlensäure und Ammoniak S. 451 u. f.

$r$  die Verdampfungswärme, d. h. die zur Verdampfung von 1 kg Flüssigkeit bei unveränderlichem  $t$  und  $p$  nötige Wärme in WE,  $\psi = AP(v'' - v')$  die Arbeit, die bei der Verdampfung infolge der Raumvergrößerung geleistet wird, in WE (äußere Verdampfungswärme),

$q = r - \psi$  die Vergrößerung der Energie durch die Verdampfung in WE (innere Verdampfungswärme),

$i'$  und  $u'$  den Wärmeinhalt und die Energie der Flüssigkeit im Grenzzustand, von  $0^0$  ab gerechnet.

Dann ist 
$$i' = u' + APv' - AP_0v_0'$$

$$c = \frac{di'}{dt} - A v' \frac{dP}{dT}$$

$i'' = i' + r$  der Wärmeinhalt des gesättigten Dampfes,

$u'' = u' + q$  die Energie des gesättigten Dampfes,

$s' = \int_0^t \frac{cdT}{T}$  die Entropie der Flüssigkeit,

$s'' = s' + \frac{r}{T}$  die Entropie des gesättigten Dampfes.

a. Als Ausdruck des zweiten Hauptsatzes gilt für gesättigte Dämpfe die **Clapeyronsche Gleichung**: 
$$\frac{r}{T} = A(v'' - v') \frac{dP}{dT}.$$

Für nassen Dampf in beliebigem Zustande gelten

$$v = v' + x(v'' - v') \quad u = u' + xq$$

$$s = s' + x \frac{r}{T} \quad i = i' + xr.$$

Für eine Zustandsänderung 1 2 für 1 kg ist

$$Q_{12} = u_2' - u_1' + x_2 q_2 - x_1 q_1 + A \int_1^2 P dv$$

oder 
$$Q_{12} = i_2' - i_1' + x_2 r_2 - x_1 r_1 - A \int_1^2 v dP.$$

### b. Wasserdampf.

Die folgenden Tafeln für gesättigten Wasserdampf beruhen hauptsächlich auf den Versuchen **Regnaults** und denen von **Knoblauch, Linde** und **Klebe**.\*)

Außer den oben angeführten Bezeichnungen bedeutet noch  $c_p''$  den Wert der spez. Wärme für gleichen Druck in unmittelbarer Nähe der Grenzkurve.

Von den folgenden Tafeln sind die ersten beiden nach Drücken, die anderen nach Temperaturen geordnet.

\*) S. Mollier, Neue Tabellen und Diagramme für Wasserdampf. Berlin bei Springer. 1906. Taschenbuch der Hütte. 21. Aufl. I. Band.

Tafel I.

1.	2.	3.	4.	5. 6.		7.	8.
Druck at (kg/qcm) (absolut)	Absolute Tem- peratur	Rauminhalt von 1 kg Dampf cbm	Gewicht von 1 cbm Dampf kg	Entropie		$s'' - s'$ = $r/T$	Spez. Wärme an der Grenzkurve
P	T	$v''$	$\gamma''$	der Flüss- igkeit $s'$	des Dampfes $s''$		$c_p''$
0,02	290,3	68,126	0,01468	0,0616	2,0783	2,0167	0,478
0,04	301,8	35,387	0,02826	0,1004	2,0202	1,9198	0,479
0,06	309,0	24,140	0,04142	0,1240	1,9868	1,8628	0,480
0,08	314,3	18,408	0,05432	0,1411	1,9631	1,8220	0,481
0,10	318,6	14,920	0,06703	0,1546	1,9449	1,7903	0,481
0,12	322,2	12,568	0,07956	0,1659	1,9300	1,7641	0,482
0,15	326,7	10,190	0,09814	0,1799	1,9121	1,7322	0,483
0,20	332,8	7,777	0,12858	0,1984	1,8890	1,6906	0,484
0,25	337,6	6,307	0,1586	0,2129	1,8711	1,6582	0,486
0,30	341,7	5,316	0,1881	0,2252	1,8566	1,6314	0,487
0,35	345,3	4,600	0,2174	0,2356	1,8444	1,6088	0,488
0,40	348,5	4,060	0,2463	0,2448	1,8336	1,5888	0,490
0,50	353,9	3,2940	0,3036	0,2604	1,8159	1,5555	0,492
0,60	358,5	2,7770	0,3601	0,2734	1,8015	1,5281	0,494
0,70	362,5	2,4040	0,4160	0,2846	1,7895	1,5049	0,496
0,80	366,0	2,1216	0,4713	0,2944	1,7789	1,4845	0,498
0,90	369,2	1,9003	0,5262	0,3032	1,7698	1,4666	0,499
1,0	372,1	1,7220	0,5807	0,3111	1,7615	1,4504	0,501
1,1	374,8	1,5751	0,6349	0,3183	1,7541	1,4358	0,503
1,2	377,2	1,4521	0,6887	0,3250	1,7473	1,4223	0,504
1,4	381,7	1,2571	0,7955	0,3370	1,7352	1,3982	0,507
1,6	385,7	1,1096	0,9013	0,3475	1,7248	1,3773	0,510
1,8	389,3	0,9939	1,0062	0,3569	1,7156	1,3587	0,513
2,0	392,6	0,9006	1,1104	0,3655	1,7077	1,3420	0,516
2,5	399,7	0,7310	1,3680	0,3839	1,6903	1,3064	0,521
3,0	405,8	0,6163	1,6224	0,3993	1,6760	1,2767	0,526
3,5	411,1	0,5335	1,8743	0,4125	1,6640	1,2515	0,531
4,0	415,8	0,4708	2,1239	0,4242	1,6537	1,2295	0,536
4,5	420,1	0,4217	2,3716	0,4347	1,6445	1,2098	0,541
5,0	424,0	0,3820	2,6177	0,4442	1,6363	1,1921	0,546
5,5	427,6	0,3494	2,8624	0,4529	1,6290	1,1761	0,550
6,0	430,9	0,3220	3,1058	0,4609	1,6221	1,1612	0,554
6,5	434,1	0,2987	3,3481	0,4683	1,6158	1,1475	0,558
7,0	437,0	0,2786	3,5891	0,4753	1,6101	1,1348	0,561
7,5	439,8	0,2611	3,8294	0,4819	1,6048	1,1229	0,565
8,0	442,5	0,2458	4,0683	0,4881	1,5997	1,1116	0,568
8,5	445,0	0,2322	4,3072	0,4939	1,5949	1,1010	0,572
9,0	447,4	0,2200	4,5448	0,4995	1,5905	1,0910	0,575
9,5	449,7	0,2091	4,7819	0,5048	1,5863	1,0815	0,578
10,0	451,9	0,1993	5,018	0,5099	1,5822	1,0723	0,581
11,0	456,1	0,1822	5,489	0,5194	1,5748	1,0554	0,588
12,0	459,9	0,1678	5,960	0,5282	1,5678	1,0396	0,593
13,0	463,6	0,15565	6,425	0,5364	1,5616	1,0252	0,598
14,0	467,0	0,14515	6,889	0,5440	1,5557	1,0117	0,603
15,0	470,2	0,13601	7,352	0,5513	1,5504	0,9991	0,608
16,0	473,3	0,12797	7,814	0,5581	1,5452	0,9871	0,614
18,0	479,1	0,11450	8,734	0,5707	1,5359	0,9652	0,623
20,0	484,3	0,10365	9,648	0,5821	1,5274	0,9453	0,632

Tafel II.

1.	2.	3.		4.	5.	6.	7.	8.
Druck at (kg/qcm) (absolut)	Tem- peratur	Wärmeinhalt der Flüssigkeit		des Dampfes	Energie des Dampfes	Verdamp- fungswärme	$u'' - u'$	$AP (v'' - v')$
p	t	i'	i''		u''	$i'' - i' =$ r	= ρ	= ψ
0,02	17,3	17,3	602,9	571,0	585,5	553,6	31,91	
0,04	28,8	28,8	608,3	575,1	579,4	546,3	33,15	
0,06	36,0	36,0	611,6	577,7	575,6	541,7	33,92	
0,08	41,3	41,4	614,1	579,6	572,7	538,2	34,49	
0,10	45,6	45,7	616,0	581,1	570,4	535,4	34,94	
0,12	49,2	49,3	617,7	582,3	568,4	533,1	35,32	
0,15	53,7	53,8	619,7	583,9	565,9	530,1	35,79	
0,20	59,8	59,9	622,4	586,0	562,6	526,1	36,42	
0,25	64,6	64,8	624,6	587,7	559,8	522,9	36,92	
0,30	68,7	68,9	626,4	589,1	557,5	520,2	37,34	
0,35	72,3	72,5	628,0	590,3	555,5	517,8	37,70	
0,40	75,5	75,7	629,4	591,3	553,7	515,6	38,02	
0,50	80,9	81,2	631,7	593,1	550,5	512,0	38,56	
0,60	85,5	85,8	633,7	594,6	547,8	508,8	39,01	
0,70	89,5	89,9	635,3	595,9	545,5	506,1	39,39	
0,80	93,0	93,5	636,8	597,0	543,3	503,6	39,73	
0,90	96,2	96,7	638,1	598,1	541,4	501,4	40,03	
1,0	99,1	99,6	639,3	599,0	539,7	499,4	40,30	
1,1	101,8	102,3	640,7	599,8	538,4	497,5	40,55	
1,2	104,2	104,8	641,3	600,5	536,5	495,7	40,78	
1,4	108,7	109,4	643,1	601,9	533,7	492,6	41,18	
1,6	112,7	113,4	644,7	603,0	531,2	489,7	41,54	
1,8	116,3	117,1	646,0	604,1	528,9	487,1	41,85	
2,0	119,6	120,4	647,2	605,1	526,8	484,7	42,14	
2,5	126,7	127,7	649,9	607,1	522,2	479,4	42,74	
3,0	132,8	133,9	652,0	608,7	518,1	474,9	43,23	
3,5	138,1	139,4	653,8	610,1	514,5	470,8	43,65	
4,0	142,8	144,2	655,4	611,3	511,2	467,2	44,01	
4,5	147,1	148,6	656,8	612,4	508,2	463,9	44,33	
5,0	151,0	152,6	658,1	613,3	505,5	460,8	44,61	
5,5	154,6	156,3	659,2	614,2	502,9	458,0	44,87	
6,0	157,9	159,8	660,2	615,0	500,4	455,3	45,10	
6,5	161,1	163,0	661,1	615,7	498,1	452,8	45,32	
7,0	164,0	166,1	662,0	616,3	495,9	450,4	45,51	
7,5	166,8	168,9	662,8	616,9	493,9	448,2	45,67	
8,0	169,5	171,7	663,5	617,5	491,8	446,0	45,86	
8,5	172,0	174,3	664,2	618,0	489,9	443,9	46,02	
9,0	174,4	176,8	664,9	618,5	488,1	441,9	46,17	
9,5	176,7	179,2	665,5	619,0	486,3	440,0	46,30	
10,0	178,9	181,5	666,1	619,4	484,6	438,2	46,43	
11,0	183,1	185,8	667,1	620,2	481,3	434,6	46,67	
12,0	186,9	189,9	668,1	620,9	478,2	431,3	46,88	
13,0	190,6	193,7	668,9	621,6	475,3	428,2	47,08	
14,0	194,0	197,3	669,7	622,2	472,5	425,2	47,26	
15,0	197,2	200,7	670,5	622,7	469,8	422,4	47,43	
16,0	200,3	203,9	671,2	623,2	467,3	419,7	47,58	
18,0	206,1	210,0	672,4	624,1	462,4	414,6	47,85	
20,0	211,3	215,5	673,4	624,9	457,9	409,8	48,08	

Tafel III.

1. Temperatur t	2. Druck at (kg/qcm) (absolut) p	3. Druck mm Hg von 0°	4. Rauminhalt von 1 kg Dampf cbm v''	5. Gewicht von 1 cbm Dampf kg γ''	6. Entropie		8. s'' - s' = r/T
					der Flüssigkeit s'	des Dampfes s''	
0	0,0063	4,60	204,97	0,00488	0,0000	2,1783	2,1783
5	0,0089	6,53	146,93	0,00681	0,0182	2,1479	2,1297
10	0,0125	9,17	106,62	0,00938	0,0360	2,1188	2,0828
15	0,0173	12,70	78,23	0,01278	0,0535	2,0909	2,0374
20	0,0236	17,40	58,15	0,01720	0,0707	2,0643	1,9936
25	0,0320	23,6	43,667	0,02290	0,0877	2,0389	1,9512
30	0,0429	31,5	33,132	0,03018	0,1044	2,0146	1,9102
35	0,0569	41,8	25,393	0,03938	0,1208	1,9912	1,8704
40	0,0747	54,9	19,650	0,05089	0,1369	1,9688	1,8319
45	0,0971	71,4	15,346	0,06516	0,1528	1,9474	1,7946
50	0,125	92,0	12,091	0,08271	0,1685	1,9268	1,7583
55	0,160	117,5	9,607	0,10409	0,1839	1,9070	1,7231
60	0,202	148,8	7,695	0,12995	0,1991	1,8880	1,6889
65	0,254	186,9	6,211	0,16100	0,2141	1,8697	1,6556
70	0,317	233,1	5,050	0,19800	0,2289	1,8522	1,6233
75	0,392	288,5	4,1353	0,2418	0,2435	1,8352	1,5917
80	0,482	354,6	3,4085	0,2934	0,2579	1,8189	1,5610
85	0,589	433,0	2,8272	0,3537	0,2721	1,8031	1,5310
90	0,714	525,4	2,3592	0,4239	0,2861	1,7879	1,5018
95	0,862	633,7	1,9797	0,5051	0,2999	1,7731	1,4732
100	1,033	760	1,6702	0,5987	0,3136	1,7589	1,4453
105	1,232	906	1,4166	0,7059	0,3271	1,7452	1,4181
110	1,462	1075	1,2073	0,8283	0,3404	1,7319	1,3915
115	1,726	1269	1,0338	0,9673	0,3536	1,7190	1,3654
120	2,027	1491	0,8894	1,1243	0,3666	1,7064	1,3398
125	2,371	1744	0,7681	1,3018	0,3795	1,6943	1,3148
130	2,760	2030	0,6664	1,5005	0,3922	1,6824	1,2902
135	3,200	2354	0,5800	1,7241	0,4048	1,6710	1,2662
140	3,695	2718	0,5071	1,9719	0,4173	1,6599	1,2426
145	4,248	3125	0,4450	2,2471	0,4296	1,6490	1,2194
150	4,868	3581	0,3917	2,553	0,4418	1,6384	1,1966
155	5,557	4088	0,3460	2,890	0,4538	1,6280	1,1742
160	6,323	4651	0,3065	3,262	0,4658	1,6181	1,1523
165	7,170	5274	0,2724	3,671	0,4776	1,6082	1,1306
170	8,104	5961	0,2429	4,117	0,4893	1,5986	1,1093
175	9,131	6717	0,2171	4,607	0,5009	1,5893	1,0884
180	10,258	7546	0,1945	5,140	0,5124	1,5802	1,0678
185	11,491	8453	0,1748	5,720	0,5238	1,5713	1,0475
190	12,835	9442	0,1575	6,348	0,5351	1,5626	1,0275
195	14,300	10519	0,1423	7,028	0,5463	1,5541	1,0078
200	15,890	11688	0,1288	7,763	0,5574	1,5458	0,9884

Tafel IV.

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
Temperatur	Wärmeinhalt		Diff.	Energie des Dampfes	Verdampfungswärme	$(u'' - u')$	AP $(v'' - v')$
t	der Flüssigkeit	des Dampfes					
	i'	i''					
0	0	594,7		564,7	594,7	564,7	30,02
5	5,0	597,1		566,5	592,1	561,5	30,56
10	10,0	599,4	4,74	568,3	589,4	558,3	31,11
15	15,0	601,8		570,1	586,8	555,1	31,65
20	20,0	604,1	4,71	571,9	584,1	551,9	32,19
25	25,0	606,5		573,7	581,5	548,7	32,74
30	30,0	608,8	4,67	575,5	578,8	545,5	33,28
35	35,0	611,1		577,3	576,1	542,3	33,81
40	40,1	613,5	4,63	579,1	573,4	539,1	34,34
45	45,1	615,8		580,9	570,7	535,8	34,88
50	50,1	618,0	4,58	582,6	567,9	532,5	35,41
55	55,1	620,3		584,4	565,2	529,3	35,93
60	60,1	622,6	4,52	586,1	562,4	526,0	36,45
65	65,2	624,8		587,8	559,6	522,7	36,96
70	70,2	627,0	4,44	589,5	556,8	519,3	37,47
75	75,3	629,2		591,2	553,9	516,0	37,97
80	80,3	631,3	4,34	592,8	551,0	512,6	38,47
85	85,3	633,5		594,5	548,1	509,3	38,96
90	90,4	635,6	4,23	596,1	545,2	505,7	39,45
95	95,5	637,6		597,7	542,2	502,2	39,92
100	100,5	639,7	4,09	599,2	539,1	498,7	40,39
105	105,6	641,7		600,8	536,1	495,2	40,85
110	110,7	643,6	3,95	602,3	532,9	491,6	41,30
115	115,8	645,5		603,8	529,8	488,0	41,74
120	120,9	647,4	3,79	605,2	526,6	484,4	42,17
125	126,0	649,2		606,6	523,3	480,7	42,59
130	131,1	651,0	3,63	608,0	520,0	477,0	43,00
135	136,2	652,8		609,3	516,6	473,2	43,41
140	141,3	654,5	3,45	610,6	513,2	469,4	43,80
145	146,4	656,1		611,9	509,7	465,5	44,18
150	151,6	657,8	3,27	613,1	506,2	461,6	44,55
155	156,7	659,3		614,3	502,6	457,7	44,90
160	161,9	660,8	3,07	615,4	498,9	453,7	45,25
165	167,1	662,3		616,5	495,2	449,6	45,58
170	172,2	663,7	2,86	617,6	491,4	445,5	45,90
175	177,4	665,0		618,6	487,6	441,4	46,20
180	182,6	666,3	2,66	619,6	483,7	437,2	46,49
185	187,9	667,6		620,6	479,8	433,0	46,78
190	193,1	668,8	2,48	621,5	475,7	428,7	47,05
195	198,3	670,0		622,3	471,7	424,4	47,31
200	203,6	671,1	2,27	623,2	467,5	420,0	47,56

Tafel V.

t	℔	℥	⊘	t	℔	℥	⊘
0	0,075	8	0,021	225	0,0101	1,00	0,00159
5	0,071	7	0,020	230	0,0098	0,97	0,00152
10	0,067	7	0,018	235	0,0095	0,94	0,00146
15	0,063	6	0,017	240	0,0092	0,91	0,00139
20	0,059	6	0,016	245	0,0089	0,88	0,00134
25	0,056	6	0,015	250	0,0086	0,85	0,00128
30	0,053	5	0,014	255	0,0083	0,82	0,00123
35	0,050	5	0,013	260	0,0081	0,79	0,00118
40	0,048	5	0,012	265	0,0078	0,77	0,00113
45	0,045	5	0,011	270	0,0076	0,75	0,00109
50	0,043	4,3	0,0103	275	0,0074	0,72	0,00105
55	0,041	4,1	0,0097	280	0,0071	0,70	0,00101
60	0,039	3,9	0,0091	285	0,0069	0,68	0,00097
65	0,037	3,7	0,0085	290	0,0067	0,66	0,00093
70	0,035	3,5	0,0080	295	0,0065	0,64	0,00090
75	0,033	3,4	0,0075	300	0,0063	0,62	0,00086
80	0,032	3,2	0,0070	305	0,0062	0,60	0,00083
85	0,030	3,1	0,0066	310	0,0060	0,58	0,00080
90	0,029	2,9	0,0062	315	0,0058	0,57	0,00077
95	0,028	2,8	0,0059	320	0,0057	0,55	0,00074
100	0,0265	2,66	0,00554	325	0,0055	0,53	0,00072
105	0,0255	2,55	0,00524	330	0,0053	0,52	0,00069
110	0,0243	2,44	0,00494	335	0,0052	0,50	0,00067
115	0,0232	2,35	0,00468	340	0,0051	0,49	0,00064
120	0,0223	2,24	0,00442	345	0,0049	0,48	0,00062
125	0,0214	2,14	0,00418	350	0,0048	0,46	0,00060
130	0,0205	2,06	0,00397	355	0,0047	0,45	0,00058
135	0,0197	1,97	0,00376	360	0,0046	0,44	0,00056
140	0,0189	1,89	0,00357	365	0,0044	0,43	0,00054
145	0,0181	1,82	0,00339	370	0,0043	0,41	0,00052
150	0,0174	1,75	0,00321	375	0,0042	0,40	0,00051
155	0,0168	1,68	0,00306	380	0,0041	0,39	0,00049
160	0,0161	1,61	0,00291	385	0,0040	0,38	0,00047
165	0,0155	1,55	0,00277	390	0,0039	0,37	0,00046
170	0,0149	1,49	0,00263	395	0,0038	0,36	0,00044
175	0,0144	1,44	0,00251	400	0,0037	0,35	0,00043
180	0,0139	1,38	0,00239	405	0,0036	0,34	0,00042
185	0,0134	1,33	0,00228	410	0,0035	0,33	0,00040
190	0,0129	1,29	0,00217	415	0,0034	0,33	0,00039
195	0,0124	1,24	0,00208	420	0,0034	0,32	0,00038
200	0,0120	1,20	0,00198	425	0,0033	0,31	0,00037
205	0,0116	1,15	0,00189	430	0,0032	0,30	0,00036
210	0,0112	1,11	0,00181	435	0,0031	0,29	0,00035
215	0,0108	1,08	0,00173	440	0,0031	0,29	0,00034
220	0,0105	1,04	0,00166	445	0,0030	0,28	0,00033
225	0,0101	1,00	0,00159	450	0,0029	0,27	0,00032

### c. Besondere Zustandsänderungen. (Expansionskurven.)

1. **Isothermen**, zugleich **Linien gleichen Druckes**:  $t =$  unveränderlich,  $p =$  unveränderlich.

$$L = P(V_2 - V_1) = GP(v'' - v')(x_2 - x_1)$$

$$Q = Gr(x_2 - x_1).$$

Im  $pv$ - und  $ts$ -Diagramm (s. S. 416) sind die Isothermen der Abszissenachse parallele Geraden. Im  $is$ -Diagramm sind sie ebenfalls Geraden, u. zw. ist die Tangente ihres Neigungswinkels gleich der abs. Temperatur.

2. **Adiabaten**:  $s =$  unveränderlich.

$$s_1' + x_1 \frac{r_1}{T_1} = s_2' + x_2 \frac{r_2}{T_2}; \quad AL = G(u_1' + x_1 \varrho_1 - u_2' - x_2 \varrho_2).$$

Für Wasserdampf kann bei  $x > 0,7$  die Adiabate im  $pv$ -Diagramm mit genügender Annäherung durch eine polytropische Kurve (s. S. 416 u. 424) dargestellt werden:

$$pV^x = \text{unveränderlich,}$$

u. zw.  $x = 1,035 + 0,1x.$

In dieser Näherungsgleichung hat  $x$  nicht die besondere Bedeutung wie bei Gasen. Es wird nun

$$L = \frac{P_1 V_1}{x-1} \left[ 1 - \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{x-1}{x}} \right].$$

3. **Linien gleicher Dampfmenge** (gleichen Mischungsverhältnisses):  $x =$  unveränderlich.

Ist  $x \geq 0,5$ , so kann für Wasserdampf mit genügender Genauigkeit gesetzt werden

$$p_1 v_1^{\frac{16}{15}} = p_2 v_2^{\frac{16}{15}} = 1,787 x^{\frac{16}{15}}$$

oder

$$p_1^{\frac{15}{16}} v_1 = p_2^{\frac{15}{16}} v_2 = 1,7235 \cdot x,$$

d. h. die Linien gleicher Dampfmenge sind Polytropen. Im besonderen gilt für trockenen Dampf  $x = 1$

$$p^{\frac{15}{16}} v'' = 1,7235.$$

Diese Formel kann zur Berechnung des Rauminhalts oder der Dichte des trocken gesättigten Dampfes benutzt werden.

Die Linien für  $x = 0$  und  $x = 1$  heißen **Grenzkurven**, da sie das Sättigungsgebiet begrenzen.

Die Linien gleicher Dampfmenge werden im  $pv$ -,  $ts$ - und  $is$ -Diagramm (s. S. 416) gezeichnet, indem man die geraden Isothermen zwischen den Grenzkurven in gleiche Teile teilt und entsprechende Punkte verbindet.

**4. Linien gleichen Rauminhaltes:**

$v =$  unveränderlich,  $v' + x(v'' - v') =$  unveränderlich.

$$x_1(v_1'' - v_1') = x_2(v_2'' - v_2'); \quad Q = G(u_2' + x_2 \varrho_2 - u_1' - x_1 \varrho_1).$$

**C. Ueberhitzter Dampf.****(Unvollkommene Gase.)**

1. In der Nähe des Sättigungsgebietes weichen die Gase von den Gesetzen der vollkommenen Gase ab; diese Abweichungen werden am größten in der Nähe des kritischen Punktes. In diesem wird

$$\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_P = \infty \quad \left(\frac{\partial v}{\partial P}\right)_T = \infty \quad \left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_P = \infty \quad c_p = \infty.$$

Diesem Verhalten ist besonders bei der Kohlensäure in ihrer Anwendung bei Kältemaschinen Rechnung zu tragen.

2. Für **Wasserdampf** sind in dem technisch in Betracht kommenden Gebiete (Heißdampfmaschinen) die Abweichungen von den Gasgesetzen nicht sehr beträchtlich.

Zur Berechnung des Rauminhaltes, der Entropie, des Wärmeinhaltes und der Energie des überhitzten Wasserdampfes dienen die folgenden Formeln:

$$\text{Rauminhalt: } v = 47 \frac{T}{P} + 0,001 - \mathfrak{B}$$

$$\text{Entropie: } s = 0,477 \ln T - 0,11 \ln p - \mathfrak{E}p - 1,0544$$

$$\text{Wärmeinhalt: } i = 594,7 + 0,477 t - \mathfrak{J}p$$

$$\text{Energie: } u = 564,7 + 0,367 t - 78,1 \mathfrak{B}p.$$

Die Hilfsgrößen  $\mathfrak{B}$ ,  $\mathfrak{E}$  und  $\mathfrak{J}$  sind durch die folgenden Ausdrücke gegeben und können der Tafel V, S. 438 entnommen werden.

$$\mathfrak{B} = 0,075 \left(\frac{273}{T}\right)^{\frac{10}{3}}, \quad \mathfrak{E} = \frac{10\,000}{427} \frac{10}{3} \frac{\mathfrak{B}}{T}, \quad \mathfrak{J} = \frac{10\,000}{427} \left(\frac{13}{3} \mathfrak{B} - 0,001\right).$$

Es läßt sich auch schreiben:

$$i = \frac{13}{3} \psi + A v' P + 464,7$$

$$u = \frac{10}{3} \psi + 464,7.$$

Zur Berechnung der Ueberhitzungswärme  $= i - i''$  zieht man von dem nach obiger Formel berechneten Wert des Wärmeinhaltes des überhitzten Dampfes den dem gegebenen Druck entsprechenden Wert  $i''$  nach Taf. II, S. 435 ab.

Für adiabatische Zustandsänderungen des überhitzten Wasserdampfes folgen aus obigen Formeln die Gleichungen:

$$\frac{p}{T^{\frac{13}{3}}} = \text{Konst.}; \quad T(v - 0,001)^{0,3} = \text{Konst.}; \quad p(v - 0,001)^{1,3} = \text{Konst.}$$

Wenn man das sehr kleine Flüssigkeitsvolumen  $v' = 0,001$  vernachlässigt, was in den meisten Fällen unbedenklich geschehen kann, so stimmt das Verhalten des überhitzten Wasserdampfes in den folgenden Beziehungen mit jenem der vollkommenen Gase überein.

Für die Adiabate gilt:

$$\frac{p}{T^{\frac{x}{x-1}}} = \text{konst.} \quad T v^{x-1} = \text{konst.} \quad p v^x = \text{konst.}$$

und der Wärmehalt und die Energie berechnen sich wie bei Gasen zu:

$$i = A \frac{x}{x-1} P v + \text{konst.} \quad u = A \frac{1}{x-1} P v + \text{konst.,}$$

wobei für Wasserdampf zu setzen ist:

$$x = 1,3, \quad \frac{x}{x-1} = \frac{13}{3} \quad \frac{1}{x-1} = \frac{10}{3}.$$

**Mittlere spezifische Wärme  $[C_p]_p^t$  des überhitzten Wasserdampfes zwischen der Sättigungstemperatur  $\vartheta$  und verschiedenen Ueberhitzungstemperaturen  $t$  bei verschiedenen Drücken  $p$ , nach den Formeln S. 440.**

$p =$	0,1	0,5	1	2	4	6	8	10	12	14	16
$\vartheta =$	45,6	80,9	99,1	119,6	142,8	157,9	169,5	178,9	187,0	194,0	200,3
$t = 100$	0,480	0,490	0,501	—	—	—	—	—	—	—	—
150	0,479	0,488	0,495	0,513	0,533	—	—	—	—	—	—
200	0,479	0,486	0,491	0,503	0,523	0,538	0,558	0,573	0,588	0,601	—
250	0,479	0,484	0,489	0,500	0,514	0,528	0,543	0,556	0,569	0,578	0,588
300	0,479	0,483	0,487	0,496	0,508	0,519	0,531	0,541	0,551	0,562	0,569
350	0,479	0,482	0,485	0,493	0,503	0,513	0,522	0,531	0,539	0,547	0,555
400	0,478	0,482	0,484	0,491	0,500	0,508	0,517	0,523	0,531	0,538	0,545

**Knoblauch und Jakob\*)** haben die spezifische Wärme des überhitzten Wasserdampfes durch Versuche bei 2, 4, 6 und 8 at bis 350° bestimmt.

**Mittlere spezifische Wärme  $[C_p]_p^t$  nach den Versuchen von Knoblauch u. Jakob.**

$p =$	2	4	6	8
$\vartheta =$	119,6	142,8	157,9	169,5
$t = 150$	0,478	0,515	—	—
200	0,475	0,502	0,530	0,560
250	0,474	0,495	0,514	0,532
300	0,475	0,492	0,505	0,517
350	0,477	0,492	0,503	0,512

\*) Forscherarbeiten Heft 35 u. 36. Eine Fortsetzung der Untersuchungen befindet sich im Druck.

## D. Anwendung auf die Theorie der Dampfmaschine.

Es bezeichne

- $p$ ,  $P$  den Dampfdruck vor dem Eintritt in die Maschine,  
 $\vartheta$ ,  $\Theta$  die dem Drucke  $p$  entsprechende Sättigungstemperatur,  
 $t$ ,  $T$  die Temperatur des eintretenden Dampfes bei Ueberhitzung,  
 $x$  dessen spezifischen Dampfgehalt, wenn nass,  
 $p_0$ ,  $P_0$  den Gegendruck (Kondensator- oder Auspuffdruck),  
 $\vartheta_0$ ,  $\Theta_0$  die zugehörige Sättigungstemperatur,  
 $t_0$ ,  $T_0$  die Temperatur des austretenden Dampfes, wenn überhitzt,  
 $x_0$  dessen spezifischen Dampfgehalt, wenn nass.

a. Die aus 1 kg trocken gesättigten Dampfes in der verlustfreien Maschine (d. h. bei vollständiger adiabatischer Expansion von  $p$  auf  $p_0$  in einem wärmedichten Zylinder einer reibungsfreien Maschine) **gewinnbare Arbeit** ist

$$AL = i'' - i_0'' + \Theta_0 (s_0'' - s''),$$

für nassen Dampf ist  $AL$  um

$$r(1-x) \left(1 - \frac{T_0}{T}\right)$$

kleiner.

### Näherungsformeln:

Für trockenen Dampf,  $x = 1$  | Für nassen Dampf,  $x > 0,7$

$$AL = \frac{\lg p - \lg p_0}{6,76 - 0,9 \lg p_0} 632$$

$$L = \frac{x}{x-1} P v \left[ 1 - \left( \frac{p_0}{p} \right)^{\frac{x-1}{x}} \right]$$

$$v = v' + x(v'' - v'); \quad x = 1,035 + 0,1x.$$

b. Die aus 1 kg **überhitzten** Dampfes in der verlustfreien Maschine **gewinnbare Arbeit** ist

$$AL = i - i_0'' + \Theta_0 (s_0'' - s),$$

wenn, wie in der Regel:

$$s_0'' \geq s.$$

$i$  und  $s$  sind nach den Formeln S. 440 für den gegebenen überhitzten Dampf zu berechnen,  $i_0''$  und  $s_0''$  beim Druck  $p_0$  aus den Dampftafeln S. 434 zu entnehmen. Ist

$$s_0'' < s,$$

so ist

$$L = \frac{13}{3} P v \left[ 1 - \left( \frac{p_0}{p} \right)^{\frac{3}{13}} \right]$$

oder

$$AL = (i - 464,7) \left[ 1 - \left( \frac{p_0}{p} \right)^{\frac{3}{13}} \right].$$

c. **Der Dampfverbrauch für die Stunde und Pferdestärke** in der verlustfreien Maschine ist

$$D = \frac{1}{AL} \frac{75}{427} 60^2 = \frac{632}{AL}.$$

Für trockenen Dampf ergibt sich (s. u. a.)

$$D = \frac{6,76 - 0,9 \lg p_0}{\lg p - \lg p_0}.$$

Am raschesten und bequemsten lassen sich die Arbeit und der Dampfverbrauch von verlustfreien Maschinen mit Hilfe des JS-Diagrammes ermitteln (s. Anm. S. 416).

d. Der **thermische Wirkungsgrad**  $\eta_t$  einer Dampfmaschine ist das Verhältnis der gewonnenen indizierten Arbeit  $L_i$  zu der zur Dampf-erzeugung aufgewendeten Wärme.

Allgemein

$$\eta_t = \frac{AL_i}{i - t_w}.$$

$t_w$  ist die Speisewasser-Temperatur; soll  $\eta_t$  zum Vergleich verschiedener Maschinen dienen, so ist für  $t_w$  stets ein gleicher Normalwert einzuführen, setzt man dafür  $25^\circ \text{C}$ , so wird angenähert (Fehler meist unter 1 vH), wenn  $D_i$  den tatsächlichen Dampfverbrauch für die indizierte Pferdekraftstunde bezeichnet,

für trockenen Dampf

$$\eta_t = 1 : D_i$$

Für trockenen Dampf

$$\eta_t = \frac{AL_i}{i'' - t_w}.$$

für überhitzten Dampf

$$\eta_t = 1 : D_r.$$

$D_r$  bezeichnet den **reduzierten Dampfverbrauch** bei Heißdampfmaschinen und berechnet sich aus dem tatsächlichen Dampfverbrauch  $D_i$  für die indizierte Pferdestärke nach

$$D_r = \frac{i - t_w}{i'' - t_w} D_i.$$

Dieser reduzierte Dampfverbrauch, der den Arbeitswert des überhitzten Dampfes auf trockenen gesättigten Dampf bezogen angibt, ist bei dem Vergleich der Wirtschaftlichkeit von Heißdampfmaschinen mit gewöhnlichen Dampfmaschinen einzuführen.

Statt des thermischen Wirkungsgrades wird manchmal der **Wärmeverbrauch**  $W$  für die Stunde und Pferdestärke angegeben, es ist

$$W = 632 : \eta_t.$$

e. Der **indizierte Wirkungsgrad**  $\eta_i$  stellt das Verhältnis der wirklich gewonnenen indizierten Arbeit zu der Arbeit der verlustfreien Maschine dar; er ist

$$\eta_i = D : D_i.$$

### f. Auswertung von Dampfmaschinen-Versuchen.

Für die folgenden Rechnungen muß aus dem Versuche ermittelt sein: der Dampfverbrauch  $D_i$ , die Mittelwerte der Ein- und Austrittsdrücke, die Ueberhitzung oder Feuchtigkeit beim Eintritt, ein mittleres Indikator diagramm (Abb. 9).

Es bezeichne außer den S. 431 u. 440 genannten Größen

$\epsilon_0$  das Verhältnis des schädlichen Raumes zum Hubraume,

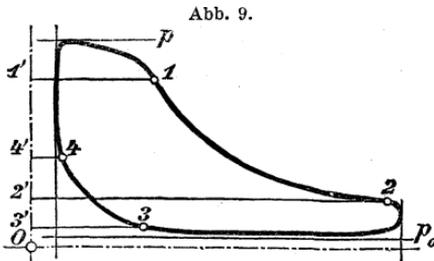
$\epsilon_1, \epsilon_2 \dots$  das Verhältnis der vom Kolben bis zu den betreffenden Punkten durchlaufenen Räume zum Hubraume,

$p_i$  den mittleren Druck des Diagramms,

$p_I, p_{II} \dots$  denselben für die einzelnen Zylinder bei mehrfacher Expansion,

$N_i$  die gesamte indizierte Leistung in PS,  
 $N_I, N_{II} \dots$  die indizierte Leistung der einzelnen Zylinder,  
 $\varphi$  das Verhältnis des in den Zylinder gelangten Dampfgewichtes  
zum ganzen verbrauchten Dampfgewicht (Zylinder + Mantel),  
 $\varphi_I, \varphi_{II} \dots$  das Verhältnis der in die einzelnen Zylinder einer  
mehrstufigen Maschine eintretenden Dampfgewichte zum ganzen  
verbrauchten Dampfgewicht,  
 $\mu, \mu_I, \mu_{II} \dots$  das Verhältnis der in den einzelnen Zylindermänteln  
niedergeschlagenen Dampfgewichte zum ganzen verbrauchten  
Dampfgewicht. Für Einzylindermaschinen ist

$$\varphi = 1 - \mu.$$



**1. Das Gewicht der im  
schädlichen Raum abge-  
sperrten Dampfmenge ( $m$ )**  
im Verhältnis zu der während  
des Spiels gebrauchten Dampf-  
menge berechnet sich zu

$$m = \frac{27(\epsilon_0 + \epsilon_3)}{p_i D_i v_3}.$$

Für Mehrzylindermaschinen  
ist für die einzelnen Zylinder  
zu setzen

$$p_I, p_{II} \dots \text{ statt } p_i \quad \text{und} \quad D_i \frac{N_i}{N_I}, D_i \frac{N_i}{N_{II}} \dots \text{ statt } D_i.$$

An die Stelle von  $\epsilon_3$  und  $v_3$  kann auch  $\epsilon_4$  und  $v_4$  oder jeder  
beliebige Punkt der Kompressionslinie treten. Der Zustand des ab-  
gesperrten Dampfes und damit  $v_3$  und  $v_4$  können nicht genau ermittelt  
werden, doch ist der Einfluss dieser Unsicherheit, die sich durch die  
folgenden Rechnungen zieht, meist gering.

Man nimmt für gewöhnliche Fälle den Dampf im Punkte 3 trocken  
an. Dann wird

$$m = \frac{27(\epsilon_0 + \epsilon_3) \gamma_3''}{p_i D_i}.$$

Da sich die Werte von  $\gamma$  bei niedrigen Drücken rasch ändern und  
die Interpolation schwierig wird, schreibt sich die Formel für  $m$  be-  
quemer

$$m = \frac{632(\epsilon_0 + \epsilon_3) p_3}{p_i D_i \psi_3}.$$

$\psi$  und  $\gamma''$  s. Tafel S. 434 bis 437.

In Fällen, wo der Dampf den Zylinder überhitzt verläßt, ist  
 $t_3 = t_0$  zu setzen und nach der später folgenden Gleichung zu be-  
rechnen. Damit ist dann  $v_3$  bestimmt.

## 2. Berechnung des Dampfzustandes während der Expansion.

Für einen beliebigen Punkt der Expansionslinie gilt für Einzylindermaschinen mit oder ohne Mantel, mit oder ohne Ueberhitzung

$$x_e = \frac{27(\epsilon_0 + \epsilon_e) \gamma_e}{D_i p_i (\varphi + m)} \quad \text{oder} \quad x_e = \frac{632(\epsilon_0 + \epsilon_e) p_e}{D_i p_i (\varphi + m) \psi_e}.$$

Für Mehrzylindermaschinen ist in vorstehenden Formeln wie oben  $p_I, p_{II} \dots, D_i \frac{N_i}{N_I} \dots$  sowie  $\varphi_I, \varphi_{II} \dots$  statt  $\varphi$  einzuführen.

Wird der für  $x_e$  erhaltene Wert größer als 1, so berechnet sich der spez. Rauminhalt des überhitzten Dampfes zu

$$v = xv''$$

und damit aus Formel S. 440 die Temperatur.

### 3. Zustand des austretenden Dampfes.

Der Wärmeinhalt des eintretenden Dampfes ist für gesättigten bzw. überhitzten Dampf

$$i = i' + xr \quad \text{bzw.} \quad i = 594,7 + 0,477 t - \mathfrak{S}p$$

und derjenige des austretenden Dampfes

$$i_0 = i_0' + x_0 r_0 \quad \text{bzw.} \quad i_0 = 594,7 + 0,477 t_0 - \mathfrak{S}p_0.$$

Werte von  $\mathfrak{S}$  s. Taf. S. 438.

Bezeichnet

$\Sigma(\mu i')$  den Wärmeinhalt sämtlicher Kondensationswasser,  
 $(\mu i')_I \dots$  den Wärmeinhalt für den Mantel eines einzelnen Zylinders,  
 $S, S_I \dots$  die durch Ausstrahlung verlorene,  
 $K, K_I \dots$  die durch Kolbenreibung erzeugte Wärme für 1 kg verbrauchten Dampf, für die ganze Maschine bzw. einen einzelnen Zylinder,

so ist für **Einzylindermaschinen**

$$(1 - \mu) i_0 = i - \mu i' - \frac{632}{D_i} - S + K.$$

Aus dieser Gleichung berechnet sich  $i_0$  und damit aus einer der vorstehenden Gleichungen  $x_0$  oder  $t_0$ ;

für **Mehrzylindermaschinen**

Hochdruck-Zylinder:

$$\varphi_I i_0 = i (\varphi_I + \mu_I) - (\mu i')_I - \frac{N_I}{N_i} \frac{632}{D_i} - S_I + K_I.$$

Niederdruck-Zylinder:

$$\varphi i_0 = i - \Sigma(\mu i') - \frac{632}{D_i} - S + K.$$

Entsprechende Formeln gelten für Mitteldruck-Zylinder unter Berücksichtigung der Art der Mantelheizung.

### 4. Wärmeaustausch zwischen Dampf und Zylinderwand. (Kalorimetrische Untersuchung.)

Alle Wärmemengen sind für 1 kg des von der Maschine gebrauchten Dampfes gerechnet.

Wünscht man die Wärmemengen auf einen Hub zu beziehen, so sind sie mit der für den Hub gebrauchten Dampfmenge  $\left( \frac{D_i N_i}{2 \cdot 60 \cdot n} \right)$  zu multiplizieren.

Zunächst sind aus dem Indikatordiagramm die mittleren Drücke (auf die Diagrammlänge bezogen) der Flächen 411'4'4, 122'1'1 (Abb. 9 S. 444) usw. durch Planimetrieren zu ermitteln, sie seien  $p_{41}$ ,  $p_{12}$ ,  $p_{23}$ ,  $p_{34}$ .

Die von dem Dampf in den vier Abschnitten aufgenommenen oder abgegebenen Wärmemengen berechnen sich nun, wie folgt:

$$1. \text{ Eintritt: } Q_{41} = (\varphi + m) i_1 - \varphi i - m i_4 + \frac{p_{41}}{p_i} \frac{632}{D_i}$$

$$2. \text{ Expansion: } Q_{12} = (\varphi + m) (i_2 - i_1) + \frac{p_{12}}{p_i} \frac{632}{D_i}$$

$$3. \text{ Kompression: } Q_{34} = m (i_4 - i_3) + \frac{p_{34}}{p_i} \frac{632}{D_i}$$

$$4. \text{ Austritt: } Q_{23} = \varphi i_0 + m i_3 - (\varphi + m) i_2 + \frac{p_{23}}{p_i} \frac{632}{D_i}$$

Ist die Wärmemenge  $Q_0$ , die 1 kg Dampf im Kondensator an das Kühlwasser abgibt, sowie die Temperatur  $t_l$  des Kondensates durch Versuch bestimmt, so ist  $i_0 = Q_0 + t_l$ .

Tritt der Dampf überhitzt aus der Maschine aus mit der Temperatur  $t_0$ , die gemessen sei, so ist damit der entsprechende Wärmeinhalt  $i_0$  bestimmt.

Endlich kann  $Q_{23}$  noch bestimmt werden aus der Gleichung

$$Q_{41} + Q_{12} + Q_{23} + Q_{34} = \mu (i - i') - S + K.$$

Die vorstehenden Formeln gelten für Einzylindermaschinen, u. zw. für Betrieb mit gesättigtem wie mit überhitztem Dampf. Sollen sie auf Mehrzylindermaschinen Anwendung finden, so ist folgendes zu beachten:

Für die Zylinder, die aus den Aufnehmern gespeist werden, ist statt  $i$  der entsprechende Wert einzuführen;  $\varphi$  ist durch  $\varphi_I$ ,  $\varphi_{II}$  . . .

zu ersetzen;  $\frac{632}{D_i}$  ist stets mit  $\frac{N_I}{N_i}$ ,  $\frac{N_{II}}{N_i}$  . . . zu multiplizieren. In der Gleichung, welche die Summe der vier Wärmemengen enthält, bezieht sich  $\mu$  nur auf den Mantel des betrachteten Zylinders und an Stelle von  $S$ ,  $K$  tritt  $S_I$ ,  $K_I$  . . .

## E. Anwendung auf die Theorie der Kältemaschinen.

### (Kaldampfmaschinen.)

1. Die Kältemaschinen bestehen im wesentlichen aus dem Kompressor, dem Verdampfer und dem Kondensator. Die letztgenannten beiden werden durch Rohrschlangen gebildet, in denen die Arbeitsflüssigkeit, meist Kohlensäure, Ammoniak oder schweflige Säure umläuft. Die Kondensatorrohre werden äußerlich von Kühlwasser, die des Verdampfers von dem Kühlmittel (meist einer Salzlösung)\* umspült. Der Prozeß der Maschinen spielt sich zwischen zwei von der Spannungskurve des verwendeten Dampfes abhängigen Drücken ab:

\*) Spezifische Wärme von Kochsalzlösungen s. S. 395.

dem Verdampfendruck  $p_0$  und dem Kondensatordruck  $p$ . Ersterer ist wesentlich bestimmt durch die Temperatur, auf der das Kühlmittel erhalten werden soll, letzterer durch die Temperatur und Menge des Kühlwassers. In gewöhnlichen Fällen liegen die zu  $p_0$  und  $p$  gehörigen Sättigungstemperaturen  $\vartheta_0$  und  $\vartheta$  nur sehr wenig unter oder über den Ablauftemperaturen des Salz- und Kühlwassers.

2. Abb. 10 stellt den Prozess im Wärmediagramm (s. S. 416) dar. Der Kompressor saugt aus dem Verdampfer trockenen oder wenig feuchten Dampf an (Zustand 1 Abb. 10 Punkt 1), komprimiert denselben adiabatisch auf den Zustand 2 (Punkt 2) und drückt ihn in den Kondensator. Dasselbst wird der durch die Kompression überhitzte oder getrocknete Dampf unter Abgabe der Wärme  $Q$  an das Kühlwasser vollständig verflüssigt (Linie 2 3) und gelangt im Zustand 3 mit einer Temperatur  $t_3$  zum **Regulierventil** (Drosselventil) und durch dieses in den Verdampfer zurück (Punkt 4). Beim Durchströmen des Regulierventils verdampft ein kleiner Teil der Flüssigkeit (Zustand 4), der Rest wird vollständig oder doch fast vollständig im Verdampfer verdampft (Linie 41), indem Wärme von der Salzlösung an den Arbeitsdampf übergeht. Diese der Salzlösung entzogene Wärme  $Q_0$  ist die erstrebte **Kälteleistung**.

Bezeichnet man die Kompressorarbeit in WE mit  $AL$ , so hat man die Hauptbeziehung

$$Q = Q_0 + AL.$$

3. Entscheidend für die Wirtschaftlichkeit einer Kältemaschine ist das Verhältnis der erzeugten Kälte  $Q_0$  zu dem Arbeitsaufwande  $AL$ , es heißt die **Leistungsziffer** der Maschine

$$\varepsilon = \frac{Q_0}{AL}.$$

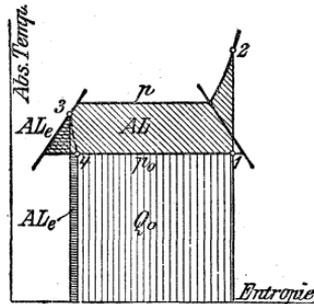
Anstatt der Leistungsziffer gibt man häufig die Kälteleistung  $K$  für die Stunde und Pferdestärke an. Es ist

$$K = 632 \varepsilon.$$

Die Leistungsziffer ist wesentlich von den Temperaturen von Salz- und Kühlwasser und den hierdurch bedingten Drücken abhängig.

Die Anwendung des Regulierventils verursacht infolge des nicht umkehrbaren Durchströmungsprozesses einen Leistungsverlust. Die Arbeit  $AL_e$ , welche die gespannte Flüssigkeit in einem besonderen Expansionszylinder leisten könnte, geht verloren, und außerdem wird noch die Kälteleistung um den gleichen Betrag vermindert, da die Flüssigkeit die nicht abgegebene Arbeit  $AL_e$  als Wärme in den Verdampfer mitbringt. Der **Leistungsverlust** durch das Regulierventil ist

Abb. 10.



daher, wenn  $\epsilon' = \frac{Q_0 + AL_e}{AL - AL_e}$  die Leistungsziffer mit Expansionszylinder bedeutet,

$$\zeta = \frac{\epsilon' - \epsilon}{\epsilon'} = \frac{AL_e}{AL} \left( 1 + \frac{1}{\epsilon'} \right).$$

Bei Anwendung eines Expansionszylinders wäre der Prozeß ein Carnotscher, solange ohne Ueberhitzung (nafs) und ohne Unterkühlung gearbeitet wird; in diesem Fall ist

$$\epsilon' = \frac{T_0}{T - T_0} \quad \text{und} \quad \zeta = \frac{AL_e}{AL} \frac{T}{T_0}.$$

Da bei gegebenen Temperaturen  $AL_e$  nur von der Größe der spezifischen Wärme des Arbeitstoffes in flüssigem Zustande abhängt

**Rauminhalt von 1 kg Kohlensäure in Litern von — 20°**  
(Nach Amagats)

°C.	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80
— 20	19,50	1,00	1,00	0,99	0,99	0,99	0,99	0,98	0,98	0,98	0,98	0,98	0,98
— 15	20,35	1,02	1,02	1,01	1,01	1,01	1,00	1,00	1,00	0,99	0,99	0,99	0,99
— 10	21,15	1,04	1,04	1,03	1,03	1,03	1,02	1,02	1,02	1,01	1,01	1,01	1,01
— 5	21,90	1,06	1,06	1,05	1,05	1,05	1,04	1,04	1,04	1,03	1,03	1,03	1,03
0	22,65	1,07	1,07	1,06	1,06	1,06	1,05	1,05	1,05	1,04	1,04	1,04	1,04
5	23,35	1,08	1,08	1,07	1,07	1,07	1,06	1,06	1,06	1,05	1,05	1,05	1,05
10	24,05	1,09	1,09	1,08	1,08	1,08	1,07	1,07	1,07	1,06	1,06	1,06	1,06
15	24,70	1,09	1,09	1,08	1,08	1,08	1,07	1,07	1,07	1,06	1,06	1,06	1,06
20	25,30	1,09	1,09	1,08	1,08	1,08	1,07	1,07	1,07	1,06	1,06	1,06	1,06
25	25,90	1,09	1,09	1,08	1,08	1,08	1,07	1,07	1,07	1,06	1,06	1,06	1,06
30	26,50	1,09	1,09	1,08	1,08	1,08	1,07	1,07	1,07	1,06	1,06	1,06	1,06
35	27,10	1,09	1,09	1,08	1,08	1,08	1,07	1,07	1,07	1,06	1,06	1,06	1,06
40	27,70	1,09	1,09	1,08	1,08	1,08	1,07	1,07	1,07	1,06	1,06	1,06	1,06
45	28,30	1,09	1,09	1,08	1,08	1,08	1,07	1,07	1,07	1,06	1,06	1,06	1,06
50	28,85	1,09	1,09	1,08	1,08	1,08	1,07	1,07	1,07	1,06	1,06	1,06	1,06
55	—	22,96	18,80	15,60	13,40	11,50	10,25	9,00	7,90	7,08	6,36	5,66	5,10
60	—	23,45	19,25	16,00	13,80	11,80	10,55	9,30	8,25	7,35	6,64	5,97	5,40
65	—	23,94	19,65	16,40	14,15	12,10	10,85	9,60	8,50	7,62	6,90	6,27	5,68
70	—	24,43	20,05	16,80	14,50	12,40	11,10	9,90	8,80	7,90	7,16	6,55	5,94
75	—	24,92	20,45	17,20	14,80	12,70	11,40	10,20	9,10	8,20	7,40	6,79	6,19
80	—	25,42	20,85	17,58	15,10	13,00	11,70	10,45	9,40	8,48	7,63	7,03	6,44
85	—	25,91	21,25	17,95	15,45	13,30	11,95	10,75	9,65	8,74	7,88	7,24	6,66
90	—	26,40	21,65	18,30	15,75	13,60	12,20	11,00	9,90	8,98	8,12	7,45	6,87
95	—	26,89	22,00	18,65	16,05	13,90	12,45	11,25	10,15	9,21	8,36	7,67	7,08
100	—	27,38	22,40	19,00	16,35	14,20	12,70	11,50	10,40	9,43	8,60	7,88	7,30
105	—	—	22,75	19,35	16,65	14,50	12,95	11,75	10,65	9,65	8,80	8,10	7,49
110	—	—	23,15	19,70	16,95	14,80	13,20	12,00	10,85	9,87	9,00	8,32	7,66
115	—	—	23,50	20,05	17,25	15,05	13,45	12,20	11,10	10,10	9,20	8,50	7,85
120	—	—	23,85	20,35	17,55	15,35	13,70	12,40	11,30	10,30	9,40	8,69	8,04
125	—	—	24,20	20,65	17,80	15,65	13,95	12,60	11,50	10,50	9,60	8,83	8,23
130	—	—	24,50	20,95	18,05	15,90	14,20	12,80	11,70	10,70	9,75	9,00	8,43
135	—	—	24,80	21,25	18,30	16,15	14,45	13,00	11,90	10,90	9,95	9,17	8,60
140	—	—	25,10	21,55	18,55	16,45	14,70	13,20	12,10	11,10	10,10	9,34	8,75
145	—	—	25,40	21,80	18,80	16,70	14,95	13,40	12,25	11,25	10,25	9,47	8,88
150	—	—	25,70	22,05	19,00	16,95	15,20	13,60	12,40	11,35	10,40	9,60	9,00

und  $AL$  mit der Verdampfungswärme wächst, so wird  $\zeta$  um so ungünstiger sein, je größer die Flüssigkeitswärme und je kleiner die Verdampfungswärme des Stoffes ist; im allgemeinen also ungünstig in der Nähe des kritischen Punktes.

Für Ammoniak und schweflige Säure beträgt je nach den Temperaturen  $\zeta=0,04$  bis  $0,08$ ; für Kohlensäure liegt  $\zeta$  etwa zwischen  $0,15$  und  $0,40$ .

Außer den genannten physikalischen Eigenschaften des Arbeitstoffes sind, wie schon angedeutet, die Temperaturen von Einfluß auf  $\zeta$ . Im besonderen kann der Verlust verringert werden, wenn man die Temperatur vor dem Regulierventil  $t_3$  möglichst tief hält. Dies ist besonders bei Kohlensäure von Wichtigkeit und wird durch besondere Flüssigkeitskühler erreicht.

#### 4. Die Kompressorarbeit $AL$ einer verlustfreien Maschine.

Allgemein ist für  $1 \text{ kg}$ :  $AL = i_2 - i_1$ , wobei  $s_2 = s_1$ .

bis +  $150^\circ \text{ B}$  und von  $20$  bis  $150 \text{ at}$  absolutem Druck.  
Versuchen.)

85	90	95	100	105	110	115	120	125	130	135	140	145	150 at
0,98	0,98	0,97	0,97	0,97	0,97	0,97	0,97	0,96	0,96	0,96	0,96	0,96	0,96
0,99	0,99	0,98	0,98	0,98	0,98	0,98	0,98	0,97	0,97	0,97	0,97	0,97	0,97
1,01	1,00	1,00	1,00	0,99	0,99	0,99	0,98	0,98	0,98	0,98	0,98	0,98	0,98
1,02	1,02	1,02	1,01	1,01	1,01	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	0,99	0,99	0,99
1,05	1,04	1,04	1,03	1,03	1,03	1,02	1,02	1,02	1,02	1,01	1,01	1,01	1,00
1,08	1,07	1,07	1,06	1,06	1,05	1,05	1,04	1,04	1,04	1,03	1,03	1,03	1,02
1,11	1,11	1,10	1,09	1,09	1,08	1,08	1,07	1,07	1,06	1,06	1,05	1,05	1,04
1,16	1,15	1,14	1,13	1,13	1,12	1,11	1,11	1,10	1,09	1,09	1,08	1,08	1,07
1,22	1,20	1,19	1,18	1,17	1,16	1,15	1,15	1,14	1,13	1,13	1,12	1,11	1,10
1,29	1,27	1,26	1,24	1,23	1,22	1,21	1,20	1,19	1,18	1,17	1,16	1,15	1,14
1,41	1,38	1,35	1,32	1,30	1,29	1,27	1,26	1,24	1,23	1,22	1,21	1,20	1,19
1,71	1,58	1,51	1,45	1,40	1,37	1,35	1,33	1,31	1,30	1,28	1,27	1,26	1,25
2,99	2,29	1,80	1,67	1,57	1,51	1,47	1,43	1,39	1,37	1,35	1,33	1,32	1,31
3,67	3,07	2,61	2,19	1,86	1,72	1,64	1,58	1,52	1,48	1,45	1,42	1,40	1,38
4,17	3,65	3,19	2,76	2,38	2,09	1,88	1,77	1,67	1,62	1,57	1,53	1,49	1,46
4,53	4,09	3,62	3,20	2,82	2,55	2,30	2,05	1,90	1,81	1,73	1,67	1,62	1,58
4,85	4,44	3,99	3,56	3,20	2,91	2,68	2,45	2,22	2,04	1,92	1,84	1,77	1,71
5,15	4,72	4,29	3,92	3,53	3,25	2,97	2,75	2,54	2,35	2,29	2,04	1,95	1,86
5,43	4,99	4,56	4,21	3,84	3,52	3,25	3,02	2,80	2,62	2,45	2,29	2,16	2,03
5,68	5,23	4,81	4,45	4,10	3,80	3,50	3,26	3,04	2,86	2,69	2,52	2,38	2,24
5,93	5,47	5,06	4,69	4,34	4,03	3,74	3,48	3,26	3,06	2,90	2,74	2,59	2,44
6,18	5,70	5,28	4,90	4,56	4,25	3,96	3,70	3,47	3,27	3,09	2,92	2,77	2,62
6,39	5,90	5,48	5,10	4,76	4,45	4,18	3,92	3,67	3,47	3,28	3,10	2,95	2,80
6,60	6,12	5,68	5,30	5,00	4,64	4,37	4,10	3,86	3,65	3,46	3,27	3,11	2,97
6,80	6,32	5,86	5,50	5,14	4,83	4,54	4,29	4,05	3,83	3,63	3,44	3,28	3,13
7,00	6,51	6,05	5,68	5,33	5,01	4,71	4,48	4,22	4,00	3,80	3,60	3,49	3,29
7,19	6,69	6,23	5,85	5,50	5,19	4,88	4,64	4,40	4,16	3,95	3,75	3,57	3,44
7,37	6,90	6,41	6,03	5,67	5,35	5,04	4,80	4,55	4,32	4,11	3,90	3,74	3,58
7,54	7,06	6,58	6,20	5,84	5,52	5,20	4,94	4,70	4,48	4,26	4,04	3,88	3,72
7,76	7,20	6,74	6,36	6,00	5,67	5,34	5,08	4,84	4,62	4,40	4,18	4,00	3,84
7,87	7,36	6,90	6,51	6,16	5,82	5,47	5,20	4,96	4,76	4,54	4,30	4,12	3,96
8,04	7,52	7,05	6,65	6,36	5,96	5,61	5,32	5,08	4,88	4,64	4,42	4,22	4,06
8,20	7,68	7,20	6,80	6,46	6,10	5,73	5,44	5,20	5,00	4,76	4,52	4,33	4,16
8,34	7,84	7,35	6,94	6,59	6,23	5,85	5,55	5,32	5,12	4,86	4,61	4,41	4,24
8,48	8,00	7,50	7,08	6,71	6,35	5,98	5,65	5,42	5,22	4,95	4,69	4,50	4,32

a) Es wird trockener Dampf angesaugt:

$$AL = \frac{z}{z-1} AP_0 v_0'' \left[ \left( \frac{p}{p_0} \right)^{\frac{z-1}{z}} - 1 \right],$$

es kann gesetzt werden

$$\frac{z}{z-1} = 4, \quad z = \frac{4}{3} \text{ für } NH_3$$

$$\frac{z}{z-1} = 5, \quad z = 1,25 \text{ für } SO_2.$$

b) Der Dampf ist am Ende der adiabatischen Kompression gerade trocken:

$$AL = i'' - i_0'' + \Theta_0 (s_0'' - s'').$$

Benutzung der Tafeln S. 451.

### 5. Die im Kondensator abgegebene Wärme $Q$ :

$$Q = i_2 - i_3.$$

$i_3$  ist unter  $i'$  den Dampftabellen zu entnehmen.  $i$  ev. aus:

$$i = i_1 + AL.$$

### 6. Durchgang durch das Regulierventil:

$$i_3 = i_4; \quad i_3 = i_0' + x_4 r_0, \text{ daraus } x_4.$$

### 7. Kälteleistung $Q_0$ :

$$Q_0 = i_1 - i_4 = i_1 - i_3; \quad i_1 = i_0' + x_1 r_0.$$

Wärmebilanz des Kreislaufes:  $Q = Q_0 + AL.$

Für Kohlensäure ist Formel a) wegen der Nähe des kritischen Punktes unzulässig. Die Tafel S. 454 gibt für diesen Dampf die Kompressorarbeit und die durch die Kompression erzeugte Temperatur  $t$  (Ueberhitzungstemperatur) nach zeichnerischer Ermittlung mit Hilfe des *JS*-Diagramms (s. Anm. S. 416).

8. Bemerkungen zu den Tafeln S. 451 bis 457. Die Tafeln S. 451 bis 453 geben für schweflige Säure, Ammoniak und Kohlensäure die wichtigsten physikalischen Größen des Sättigungsgebietes.

In den Tafeln S. 454 bis 456 geben die oberen Zahlen die Kälteleistungen von verlustfreien Maschinen in WE für 1 Stunde und 1 PS; sie sind unter der Annahme berechnet, daß trockener Dampf angesaugt wird. Die Drücke  $p=9$  für Ammoniak und  $p=60$  für Kohlensäure entsprechen etwa normalen Kühlwasserverhältnissen, während die einander entsprechenden Drücke  $p=13$  und  $p=80$  bei Kühlwassermangel oder sehr warmem Kühlwasser vorkommen. Um zu zeigen, daß Kohlensäuremaschinen auch bei Kondensatordrücken arbeiten können, die weit über dem kritischen liegen, ist noch der Druck  $p=100$  und für Ammoniak ungefähr entsprechend  $p=17$  aufgenommen.

In denselben Tafeln stellen die unteren Ziffern das Verhältnis der Kälteleistung bei der gegebenen Flüssigkeitstemperatur  $t'$  zu jener bei  $t'=t_0$  dar. Da im letzteren Falle, d. h. beim Abkühlen bis zur Verdampferetemperatur, der Verlust durch das Ueberströmen und der Einfluß der besonderen physikalischen Eigenschaften des Arbeitsstoffes wegfällt, so ermöglichen diese Tafelwerte einen völlig unabhängigen Vergleich der Leistungsfähigkeit der beiden Maschinen für die verschiedensten Arbeitsverhältnisse. Zieht man die genannten Ziffern von 1 ab, so erhält man die spez. Dampfmenge  $x_4$  nach Eintritt in den Verdampfer.

Schwefligsäuremaschinen haben bei gleichen Sättigungstemperaturen im Kondensator angenähert dieselbe theoretische Leistung wie

Tafel für gesättigte Dämpfe der schwefligen Säure (s. S. 450).  
(Berechnet nach Versuchen von Cailletet & Mathias.)

Temperatur <i>t</i> (°C)	Druck in at (kg/qcm) (absolut) <i>p</i>	<i>v''</i> cbm/kg	Spezi- fisches Gewicht <i>γ</i> (kg/cbm)	Wärmeinhalt		Ver- damp- fungs- wärme <i>r</i>	Ver- dampfungs- wärme		Entropie der Flüssig- keit <i>s'</i>	Entropie des Dampfes <i>s''</i>	<i>r</i> <i>T</i>
				der Flüssig- keit <i>i'</i>	des Damp- fes <i>i''</i>		innere <i>q</i>	äußere <i>ψ</i>			
				— 30	0,39		0,822	1,217			
— 25	0,51	0,643	1,556	— 7,62	89,28	96,91	89,24	7,67	— 0,0293	0,3614	0,3907
— 20	0,65	0,513	1,950	— 6,15	89,77	95,92	88,12	7,80	— 0,0234	0,3557	0,3791
— 15	0,83	0,416	2,406	— 4,66	90,16	94,82	86,90	7,92	— 0,0176	0,3499	0,3675
— 10	1,04	0,330	3,024	— 3,14	90,46	93,60	85,57	8,03	— 0,0117	0,3442	0,3559
— 5	1,29	0,270	3,708	— 1,58	90,69	92,27	84,15	8,12	— 0,0059	0,3385	0,3443
0	1,58	0,223	4,490	0	90,82	90,82	82,62	8,20	0,0000	0,3327	0,3327
+ 5	1,93	0,184	5,443	+ 1,61	90,86	89,25	80,99	8,26	+ 0,0059	0,3269	0,3210
+ 10	2,34	0,152	6,592	+ 3,25	90,81	87,56	79,28	8,28	+ 0,0117	0,3212	0,3094
+ 15	2,81	0,127	7,893	+ 4,92	90,68	85,76	77,46	8,30	+ 0,0176	0,3154	0,2978
+ 20	3,35	0,107	9,372	+ 6,62	90,47	83,85	75,55	8,30	+ 0,0234	0,3096	0,2862
+ 25	3,96	0,090	11,148	+ 8,35	90,17	81,82	73,54	8,28	+ 0,0293	0,3039	0,2746
+ 30	4,67	0,076	13,210	+ 10,11	89,78	79,67	71,44	8,23	+ 0,0351	0,2981	0,2629
+ 35	5,46	0,065	15,456	+ 11,90	89,30	77,40	69,24	8,16	+ 0,0410	0,2923	0,2513
+ 40	6,35	0,055	18,282	+ 13,71	88,74	75,03	66,95	8,08	+ 0,0468	0,2865	0,2397

29\*

$$c = 0,3194 + 0,00117 t$$

$$s' = 0,00117 t$$

$$\frac{r}{T} = 0,3327 - 0,002324 t$$

$$v' = 0,0007.$$

**Tafel für gesättigten Ammoniakdampf** (s. S. 450).  
(Berechnet nach Versuchen von Dieterici und Wobsa.)

Temperatur $t$ (°C)	Druck in at (kg, qcm) (absolut) $p$	Raum- inhalt (cbm/kg) $v''$	Spezi- fisches Gewicht $\gamma''$	Wärmeinhalt		Ver- dampfungswärme			Entropie der Flüssig- keit $s'$	Entropie des Dampfes $s''$	Diffe- renz $\frac{r}{T}$
				der Flüssig- keit $i'$	des Damp- fes $i''$	ganze $r$	innere $q$	äußere $\psi$			
— 30	1,192	0,9857	1,013	— 32,72	295,2	327,9	300,4	27,52	— 0,1265	1,2234	1,3499
— 25	1,512	0,7896	1,266	— 27,40	297,0	324,4	296,5	27,90	— 0,1048	1,2039	1,3087
— 20	1,900	0,6373	1,570	— 22,03	298,7	320,8	292,5	28,30	— 0,0835	1,1850	1,2685
— 15	2,367	0,5180	1,928	— 16,61	300,3	317,0	288,4	28,62	— 0,0622	1,1678	1,2300
— 10	2,923	0,4247	2,355	— 11,13	301,9	313,0	284,0	28,95	— 0,0414	1,1490	1,1904
— 5	3,579	0,3505	2,853	— 5,59	303,3	308,8	279,5	29,24	— 0,0206	1,1315	1,1521
0	4,347	0,2914	3,432	0	304,4	304,4	274,9	29,50	0	1,1158	1,1158
+ 5	5,242	0,2439	4,103	+ 5,65	305,5	299,9	270,2	29,73	+ 0,0205	1,0998	1,0793
+ 10	6,271	0,2051	4,874	+ 11,35	306,6	295,0	265,1	29,89	+ 0,0405	1,0825	1,0420
+ 15	7,451	0,1735	5,762	+ 17,13	307,2	290,0	260,0	30,01	+ 0,0607	1,0670	1,0063
+ 20	8,792	0,1479	6,768	+ 22,95	307,7	284,7	254,6	30,11	+ 0,0805	1,0513	0,9708
+ 25	10,308	0,1265	7,910	+ 28,84	308,1	279,1	249,0	30,14	+ 0,1003	1,0363	0,9360
+ 30	12,009	0,1087	9,205	+ 34,79	308,3	273,5	243,4	30,08	+ 0,1207	1,0213	0,9006
+ 35	13,906	0,0939	10,655	+ 40,80	308,3	267,4	237,4	30,03	+ 0,1392	1,0077	0,8685
+ 40	16,011	0,0814	12,289	+ 46,87	308,0	261,0	231,1	29,85	+ 0,1583	0,9922	0,8338

Tafel für gesättigte Dämpfe der Kohlensäure (s. S. 450).  
(Berechnet nach Versuchen von Amagat.)

Temperatur <i>t</i> (°C)	Druck in at (kg/qcm) (absolut) <i>p</i>	Rauminhalt		Spezi- fisches Gewicht $\gamma''$ (kg/cbm)	Wärmeinhalt		Ver- damp- fungs- wärme <i>r</i>	Ver- dampfungs- wärme		Entropie der Flüssig- keit <i>s'</i>	Entropie des Dampfes <i>s''</i>	$\frac{r}{T}$
		der Flüssigk. <i>v'</i> cbm/kg	des Dampfes <i>v''</i> cbm/kg		der Flüssig- keit <i>i'</i>	des Damp- fes <i>i''</i>		innere $\varrho$	äußere $\psi$			
-30	15,0	0,00097	0,02697	37,1	-14,29	55,78	70,07	60,96	9,11	-0,0533	0,2350	0,2883
-25	17,5	0,00098	0,02292	43,7	-12,15	56,00	68,15	59,16	8,99	-0,0448	0,2300	0,2748
-20	20,3	0,00100	0,01954	51,2	-9,93	56,11	66,04	57,21	8,83	-0,0363	0,2248	0,2611
-15	23,5	0,00102	0,01668	59,9	-7,63	56,10	63,73	55,10	8,63	-0,0276	0,2194	0,2470
-10	27,1	0,00104	0,01426	70,1	-5,21	55,97	61,18	52,80	8,38	-0,0186	0,2140	0,2326
-5	31,0	0,00107	0,01218	82,1	-2,68	55,68	58,36	50,27	8,08	-0,0095	0,2083	0,2178
0	35,4	0,00110	0,01041	96,2	0	55,19	55,19	47,47	7,72	0	0,2021	0,2021
+5	40,3	0,00113	0,00887	112,7	+2,87	54,49	51,62	44,31	7,31	+0,0099	0,1956	0,1857
+10	45,7	0,00117	0,00752	133,0	+5,98	53,50	47,52	40,73	6,79	+0,0205	0,1884	0,1679
+15	51,6	0,00123	0,00630	158,7	+9,45	52,14	42,69	36,53	6,16	+0,0321	0,1803	0,1482
+20	58,1	0,00131	0,00524	191	+13,45	50,20	36,75	31,41	5,34	+0,0452	0,1707	0,1255
+25	65,4	0,00142	0,00419	238	+18,44	47,28	28,84	24,60	4,24	+0,0613	0,1581	0,0968
+30	73,1	0,00167	0,00296	338	+26,39	41,32	14,93	12,72	2,21	+0,0868	0,1361	0,0493
+31	74,7	0,00186	0,00257	389	+29,87	38,23	8,36	7,12	1,24	+0,0981	0,1256	0,0275
+31,35	75,3	0,00216	0,00216	464	+34,14	34,14	0	0	0	+0,1120	0,1120	0

$$p = C \left( \frac{T}{100} - 1 \right)^{4,525} \quad \lg C = 0,47237 \quad c = 0,000333 T + 0,285 \frac{r}{T} + 0,215 \frac{r}{304,35 - T}$$

$$r = 1,125 T^{0,48} (304,35 - T)^{0,48} \quad s' = 0,10155 + 0,000333 t - \frac{1}{2} \frac{r}{T}$$

Tafel für gesättigte Kohlensäuredämpfe.

Ammoniakmaschinen. Den drei Kondensatordrücken der Tafeln würden hier etwa die Drücke  $p = 3,5, 5,0$  und  $6,5$  entsprechen.

Die in den Tafeln gegebenen Kälteleistungen werden von ausgeführten Maschinen wegen der eintretenden Verluste (Wandungswirkung, Ventilwiderstände, Wärmeeinstrahlung) nicht erreicht, doch darf man bei guten Maschinen auf 75 bis 85 vH der theoretischen Tafelwerte rechnen. Ueber Drosselungsverluste s. S. 471 u. f.

### Adiabatische Kompression von trocken gesättigten Kohlendämpfen (s. S. 450).

$p$ in at =		60	70	80	90	100
$t_0 = -30^\circ$	$AL$	15,15	17,18	19,00	20,63	22,14
	$t$	72,0	86,5	99,0	111,0	122,0
$= -25^\circ$	$AL$	13,19	15,14	16,90	18,47	19,92
	$t$	67,0	80,5	93,0	105,0	115,5
$= -20^\circ$	$AL$	11,30	13,18	14,87	16,39	17,78
	$t$	62,0	75,0	87,5	99,0	109,0
$= -15^\circ$	$AL$	9,53	11,32	12,95	14,40	15,75
	$t$	57,0	70,0	82,0	93,0	103,0
$= -10^\circ$	$AL$	7,86	9,55	11,13	12,54	13,84
	$t$	52,0	65,0	76,5	87,0	97,5
$= -5^\circ$	$AL$	6,31	7,90	9,42	10,77	12,01
	$t$	47,0	60,0	71,0	81,0	92,0
$= 0^\circ$	$AL$	4,85	6,30	7,76	9,07	10,25
	$t$	42,0	55,0	66,0	76,0	86,5

$p$  = Enddruck der Kompression,

$t$  = Endtemperatur,

$t_0$  = Anfangstemperatur,

$AL$  = Kompressorarbeit für 1 kg Kohlendämpfe.

Tafel für Rauminhalt von 1 kg Kohlendämpfen bei  $-20^\circ$  bis  $+150^\circ$  C und 20 bis 150 at s. S. 448 u. 449.

### Kälteleistung in WE für eine Stunde und Pferdestärke (s. S. 447).

Verdampfer-Temperatur $t_0 =$	-5	-10	-15	-20	-25
-------------------------------	----	-----	-----	-----	-----

#### A. Ammoniakmaschine.

Kondensatordruck  $p = 9$  at

Temperatur vor dem Regulierventil	$t' =$	$t_0$	6473	5277	4432	3779	3276
		10	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
		15	6118	4898	4041	3386	2884
		20	0,95	0,93	0,91	0,90	0,88
		15	5997	4800	3960	3318	2826
		20	0,93	0,91	0,89	0,88	0,86
			5875	4702	3879	3249	2767
			0,91	0,89	0,88	0,86	0,85

Verdampfer-Temperatur $t_0 =$	- 5	- 10	- 15	- 20	- 25
-------------------------------	-----	------	------	------	------

Kondensatordruck  $p = 13$  at

Temperatur vor dem Regulierventil	$t' =$	$t_0$	4400 1,00	3794 1,00	3305 1,00	2909 1,00	2586 1,00
		10	4159 0,95	3522 0,93	3013 0,91	2607 0,90	2277 0,88
		15	4077 0,93	3452 0,91	2953 0,89	2554 0,88	2231 0,86
		20	3994 0,91	3381 0,89	2893 0,88	2501 0,86	2185 0,85
		25	3910 0,89	3310 0,87	2831 0,86	2448 0,84	2138 0,83
		30	3825 0,87	3238 0,85	2769 0,84	2394 0,82	2090 0,81

Kondensatordruck  $p = 17$  at

Temperatur vor dem Regulierventil	$t' =$	$t_0$	3522 1,00	3101 1,00	2755 1,00	2459 1,00	2215 1,00
		10	3329 0,95	2878 0,93	2512 0,91	2203 0,90	1951 0,88
		15	3263 0,93	2821 0,91	2462 0,89	2159 0,88	1911 0,86
		20	3197 0,91	2764 0,89	2411 0,88	2114 0,86	1872 0,85
		25	3130 0,89	2705 0,87	2360 0,86	2069 0,84	1831 0,83
		30	3062 0,87	2646 0,85	2308 0,84	2023 0,82	1791 0,81

**B. Kohlensäuremaschine.**Kondensatordruck  $p = 60$  at

Temperatur vor dem Regulierventil	$t' =$	$t_0$	5985 1,00	5025 1,00	4310 1,00	3747 1,00	3312 1,00
		10	5130 0,86	4150 0,83	3435 0,80	2888 0,77	2472 0,75
		15	4770 0,80	3864 0,77	3196 0,74	2687 0,72	2300 0,70
		20	4330 0,73	3506 0,70	2903 0,68	2442 0,65	2089 0,63

Kondensatordruck  $p = 80$  at

Temperatur vor dem Regulierventil	$t' =$	$t_0$	4032 1,00	3566 1,00	3178 1,00	2857 1,00	2588 1,00
		10	3503 0,87	2986 0,84	2570 0,81	2235 0,79	1965 0,76
		15	3289 0,92	2806 0,79	2416 0,76	2101 0,74	1846 0,72

Verdampfer-Temperatur, $t_0 =$		- 5	- 10	- 15	- 20	- 25	
Temperatur vor dem Regulierventil	$t' =$	20	3072 0,76	2621 0,74	2258 0,71	1963 0,69	1725 0,67
		25	2790 0,69	2398 0,68	2066 0,65	1796 0,63	1578 0,61
		30	2397 0,60	2066 0,58	1779 0,56	1548 0,55	1358 0,53

Kondensatordruck  $p = 100$  at

Temperatur vor dem Regulierventil	$t' =$	$t_0$	3170 1,00	2879 1,00	2614 1,00	2392 1,00	2195 1,00
		10	2779 0,88	2433 0,85	2140 0,82	1895 0,79	1687 0,77
		15	2629 0,83	2303 0,80	2025 0,78	1793 0,75	1596 0,73
		20	2474 0,78	2168 0,75	1906 0,73	1688 0,71	1503 0,69
		25	2304 0,73	2032 0,71	1787 0,68	1583 0,66	1410 0,64
		30	2102 0,66	1856 0,64	1633 0,63	1446 0,60	1288 0,59

Für die Theorie der Maschinen zur Luftverflüssigung und Trennung von Sauerstoff und Stickstoff durch fraktionierte Destillation ist die folgende Dampftabelle des Stickstoffes von Wichtigkeit.

Formeln für gesättigten und überhitzten Stickstoffdampf:

$$v = \frac{30,2 T}{P} - \frac{64,4}{T^2}$$

$$i = 37,45 + 0,2246 T + 0,000019 T^2 - 0,452 \frac{P}{T^2}$$

$$u = 37,45 + 0,1539 T + 0,000019 T^2 - 0,3 \frac{P}{T^2}$$

$$s = 0,3880 + 0,2246 \ln T + 0,000038 T - 0,0707 \ln P - 0,3 \frac{P}{T^3}$$

$$c_p = 0,2246 + 0,000038 T + 0,905 \frac{P}{T^3}$$

Im Sättigungsgebiet gelten ferner näherungsweise

$$\log p = 3,0 + 0,4 \log T - \frac{289,6}{T}$$

$$r = 68,85 - 0,2736 T.$$

Tafel für gesättigten Stickstoffdampf.  
(Nach R. Plank.)

Temperatur $t$ °C	Absolute Temperatur $T$	Druck $p$ in at kg/qcm	Spezifisches Volumen		Gewicht von 1 cbm Dampf $v'' = \frac{1}{v''}$ kg/cbm	Entropie		$v'' - s' = -\frac{r}{T}$ $s'' - s' = -\frac{r}{T}$	Wärmeinhalt		Verdampfungswärme $r = i'' - i'$ WE	$u'' - u' = \rho$ WE	$h' = (v' - v'') - (u' - u'')$ WE
			der Flüssigkeit $v'$ cbm/kg	des Dampfes $v''$ cbm/kg		der Flüssig- keit $s'$	des Dampfes $s''$		der Flüssig- keit $i'$ WE	des Dampfes $i''$ WE			
— 210	63	0,132	0,001140	1,425	0,702	0,0030	0,8175	0,8145	0,22	51,53	51,31	46,91	4,40
— 208	65	0,174	0,001152	1,113	0,899	0,0170	0,7992	0,7822	1,08	51,93	50,85	46,32	4,53
— 206	67	0,240	0,001165	0,829	1,206	0,0303	0,7828	0,7525	1,94	52,35	50,41	45,76	4,65
— 204	69	0,329	0,001177	0,620	1,613	0,0433	0,7668	0,7235	2,80	52,73	49,93	45,16	4,77
— 202	71	0,446	0,001190	0,4681	2,137	0,0550	0,7510	0,6960	3,67	53,10	49,43	44,55	4,88
— 200	73	0,592	0,001204	0,3602	2,778	0,0665	0,7365	0,6700	4,53	53,44	48,91	43,93	4,98
— 198	75	0,771	0,001217	0,2824	3,542	0,0778	0,7228	0,6450	5,39	53,78	48,39	43,31	5,08
— 196	77	0,984	0,001231	0,2254	4,438	0,0892	0,7104	0,6212	6,26	54,10	47,84	42,67	5,17
— 194	79	1,240	0,001245	0,1821	5,493	0,1003	0,6989	0,5986	7,12	54,41	47,29	42,04	5,25
— 192	81	1,538	0,001259	0,1492	6,702	0,1115	0,6885	0,5770	7,98	54,71	46,73	41,40	5,33
— 190	83	1,885	0,001274	0,1234	8,105	0,1218	0,6777	0,5559	8,85	54,98	46,13	40,73	5,40
— 188	85	2,329	0,001289	0,1013	9,87	0,1322	0,6674	0,5352	9,72	55,22	45,50	40,04	5,46
— 186	87	2,805	0,001304	0,0852	11,74	0,1423	0,6578	0,5155	10,60	55,46	44,86	39,35	5,51
— 184	89	3,352	0,001320	0,0721	13,87	0,1520	0,6489	0,4969	11,47	55,68	44,21	38,65	5,56
— 182	91	3,964	0,001336	0,0615	16,26	0,1616	0,6402	0,4789	12,34	55,91	43,57	37,98	5,59

Tafel für Kältemaschinen — Tafel für Stickstoffdampf.

## VI. STRÖMENDE BEWEGUNG VON GASEN UND DÄMPFEN.

### A. Allgemeines.

Es bezeichne

- $F, F_1, F_2$  verschiedene Querschnitte des Stromes in  $qm$ ,  
 $G$  die durch diese in 1 sk hindurchfließende Menge in  $kg$ ,  
 $w, w_1, w_2$  die mittleren Geschwindigkeiten in den betrachteten Querschnitten in  $m/sk$ ,  
 $h, h_1, h_2$  die Höhe der Querschnitte über einer beliebigen Waagrechten in  $m$ ,  
 $u, u_1, u_2$  die innere Energie und  
 $i, i_1, i_2$  den Wärmehalt für 1  $kg$  der Flüssigkeit in den betrachteten Querschnitten (s. S. 414 u. f.) in  $WE$ ,  
 $P, P_1, P_2$  die spez. Drücke in  $kg/qm$ ,  
 $\gamma, \gamma_1, \gamma_2$  die spez. Gewichte in  $kg/cbm$  und  
 $v, v_1, v_2$  die spez. Rauminhalte in  $cbm/kg$  in den betrachteten Querschnitten,  
 $A$  das mechanische Wärmeäquivalent  $= \frac{1}{427}$ ,  
 $Q_{12}$  die auf der Strecke 1 bis 2 einem  $kg$  der strömenden Flüssigkeit von außen zugeführte Wärme in  $WE$ ,  
 $R_{12}$  die durch innere und äußere Reibung verbrauchte Energie für 1  $kg$  in  $mkg$ ,  
 $g = 9,81 m/sk^2$  die Beschleunigung durch die Schwere.

Die Bedingung für die Stetigkeit der Bewegung ist

$$G = F_1 w_1 \gamma_1 = F_2 w_2 \gamma_2 = F_1 \frac{w_1}{v_1} = F_2 \frac{w_2}{v_2}$$

oder

$$\frac{dw}{v} = \frac{dF}{F} + \frac{dw}{w}.$$

Ferner nach dem Energieprinzip

$$A \frac{w_2^2 - w_1^2}{2g} + u_2 - u_1 + A(P_2 v_2 - P_1 v_1) + A(h_2 - h_1) = Q_{12}$$

oder wenn man den Wärmehalt einführt,

$$A \frac{w_2^2 - w_1^2}{2g} + i_2 - i_1 + A(h_2 - h_1) = Q_{12}.$$

oder

$$\frac{A w dw}{g} + di + A dh = dQ.$$

Führt man die Wärmegleichung ein in der Form

$$dQ = di - A v dP \quad (\text{s. S. 414 u. f.}),$$

so gilt für den vorliegenden Fall

$$dQ + dR = di - A v dP$$

$$\text{oder} \quad Q_{12} + AR_{12} = i_2 - i_1 - A \int_1^2 v dP,$$

da die Reibung auch als eine dem strömenden Stoff zugeführte Wärmemenge aufzufassen ist, und weiter

$$\frac{w_2^2 - w_1^2}{2g} + \int_1^2 v dP + R_{12} + (h_2 - h_1) = 0$$

$$\text{oder} \quad \frac{w dw}{g} + v dP + dR + dh = 0.$$

In vielen praktischen Fällen wird  $(h_2 - h_1)$  sowie  $Q_{12}$  als sehr klein zu vernachlässigen sein, dann ist

$$A \frac{w_2^2 - w_1^2}{2g} = i_1 - i_2 \quad \text{oder} \quad \frac{A w dw}{g} = -di \quad \text{und}$$

$$\frac{w_2^2 - w_1^2}{2g} = - \int_1^2 v dP - R_{12} \quad \text{oder} \quad \frac{w dw}{g} = -v dP - dR.$$

Vernachlässigt man auch die Reibung, so ist  $i_1 - i_2$  und  $\int v dP$  nach der Gleichung der Adiabate zu bestimmen, da in diesem Fall der strömenden Flüssigkeit keine Wärme zugeführt wird.

## B. Ausfluß.

Es bezeichne

- $p, P$  den unveränderlichen Druck in dem Raume, aus dem der Ausfluß stattfindet, in at und kg/qm,
- $t, T, v$  die Temperatur, absolute Temperatur und den spez. Rauminhalt daselbst,
- $p_0, P_0$  den ebenfalls unveränderlichen Druck in dem Raume, in den das Gas einströmt,
- $t_0, T_0$  die Temperatur des ausfließenden Strahles,
- $F_0$  den Querschnitt der Ausflußöffnung in qm,
- $\alpha$  die Kontraktionszahl (s. S. 305),
- $w_0$  die Ausflußgeschwindigkeit.

Vernachlässigt man zunächst die Reibung und setzt die Geschwindigkeit im Ausflußraum sehr klein gegen  $w_0$ , dann ist unter der Annahme, daß der Strahl im Ausflußquerschnitt den Druck der Umgebung  $p_0$  erreicht

$$\frac{w_0^2}{2g} = \frac{i - i_0}{A} = \int_{F_0}^P v dP$$

d. h. die Ausströmungsenergie ist gleich der Arbeit, die das Gas (Dampf) vom Druck  $p$  in einer Kolbenmaschine beim Gegendrucke  $p_0$  leisten könnte.

Die Reibung wird in der Regel, wie in der Hydraulik, durch die Einführung einer Geschwindigkeitszahl  $\varphi$  berücksichtigt.

**a. Vollkommene Gase.**

Da  $i = c_p T + C$ ,  $i_0 = c_p T_0 + C$  ist (s. S. 416 u. f.), so folgt

$$A \frac{w_0^2}{2g} = c_p (T - T_0)$$

und nach Einführung der Gleichung der Adiabate

$$w_0 = \varphi \sqrt{\frac{2g c_p}{A} T \left[ 1 - \left( \frac{p_0}{p} \right)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \right]}$$

oder auch

$$w_0 = \varphi \sqrt{2g \frac{\alpha}{\alpha-1} P v \left[ 1 - \left( \frac{p_0}{p} \right)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \right]} \dots 1)$$

$$\left( \frac{p_0}{p} \right)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} = \frac{T_0}{T}, \text{ siehe auch Tafel, S. 425.}$$

Die Temperatur des ausströmenden Gases ist

$$t_0 = t - \frac{A}{c_p} \frac{w_0^2}{2g} = t - \varphi^2 T \left[ 1 - \left( \frac{p_0}{p} \right)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \right].$$

Für reibungslosen Austritt,  $\varphi = 1$ , folgt  $T_0$  aus vorstehender Formel und Tafel S. 425.

**b. Wasserdampf.**

Nach dem oben ausgesprochenen Satz ist die Ausströmungsenergie des Wasserdampfes gleich der Arbeit einer verlustfreien Dampfmaschine für dieselben Drücke, und es können daher die S. 442 für diese Arbeit gegebenen Formeln ohne weiteres zur Berechnung von  $A \frac{w_0^2}{2g}$  dienen.

Im *JS*-Diagramm (s. Anm. S. 416) kann die Ausfluggeschwindigkeit für nassen, trockenen und überhitzten Dampf unmittelbar abgegriffen werden.

**c. Ausfluffsexponent.**

Die Formeln für den Ausfluss von Gasen sowie von gesättigtem Wasserdampf sind von gleicher Art.

Für Wasserdampf ist  $\alpha = 1,035 + 0,1 x$ .

Es läßt sich nun nach Vorschlag von Zeuner die Reibung statt durch  $\varphi$  dadurch berücksichtigen, daß man an Stelle des Exponenten der Adiabate  $\alpha$  einen etwas kleineren, den **Ausfluffsexponenten**  $m$ , für die Expansion verwendet, so daß

$$w_0 = \sqrt{2g \frac{\alpha}{\alpha-1} P v \left[ 1 - \left( \frac{p_0}{p} \right)^{\frac{m-1}{m}} \right]}$$

Der Ausfluss exponent beruht auf der Annahme einer unveränderlichen **Widerstandszahl**  $\zeta$  (s. Hydraulik); es ist

$$m = \frac{x(1 + \zeta)}{1 + x\zeta}.$$

Die Beziehung zwischen Geschwindigkeitszahl  $\varphi$  und Ausfluss exponent  $m$  ist vom Druckverhältnis  $p:p_0$  abhängig, u. zw. ist bei gegebenen Ausfluss exponenten die Geschwindigkeitszahl um so größer, je größer  $p:p_0$  ist.

Für kleine Werte von  $p:p_0$  gilt angenähert der Grenzwert für  $p=p_0$

$$\varphi^2 = \frac{m-1}{x-1} \frac{x}{m}.$$

#### d. Form der Ausflussdüsen.

Die Gleichungen für  $w_0$  sind nicht nur für den Endquerschnitt  $F_0$  einer Ausflussdüse, sondern nach Einführung des entsprechenden Druckes  $p_x$  für jeden beliebigen Querschnitt  $F_x$  der Düsen gültig. Aus der Bedingung, dass der Druck von dem Höchstwerte  $p$  stetig bis auf  $p_0$  abnehmen muss, folgt eine bestimmte Form der Düse.

Aus  $G = \frac{w_x F_x}{v_x}$  folgt für Gase und Dämpfe

$$F_x = G \sqrt{2g \frac{x}{x-1} \frac{P}{v} \left[ \left( \frac{p_x}{p} \right)^{\frac{2}{m}} - \left( \frac{p_x}{p} \right)^{\frac{m+1}{m}} \right]}.$$

Diese Gleichung ergibt für  $F_x$  bei einem bestimmten Druckverhältnis

$$\frac{p_1}{p} = \left( \frac{2}{m+1} \right)^{\frac{m}{m-1}} = \beta \quad \lg \beta \approx \frac{3 + 0,1314 m}{3 + m} - 1$$

einen kleinsten Querschnitt  $F_1$ .

Für trockenen Wasserdampf ergibt sich die Düsenweiterung wie folgt

$\frac{p}{p_0}$	$\frac{F_0}{F_1}$	$\frac{d_0}{d_1}$	$\frac{w_0}{w_1}$	$\frac{p}{p_0}$	$\frac{F_0}{F_1}$	$\frac{d_0}{d_1}$	$\frac{w_0}{w_1}$
100	13,80	3,72	2,58	20	3,97	1,99	2,18
90	12,69	3,56	2,56	10	2,44	1,56	1,92
80	11,56	3,40	2,54	8	2,07	1,44	1,86
70	10,40	3,22	2,51	6	1,72	1,31	1,74
60	9,16	3,03	2,47	4	1,35	1,16	1,55
50	7,98	2,83	2,43	2	1,02	1,01	1,12

Ist  $p_0:p > \beta$ , so hat dieses Minimum keine Bedeutung, und jede innen abgerundete Mündung, sich verengende Düse oder Öffnung in dünner Wand wird einen zylindrischen Strahl von der grösstmöglichen

Ausflusgeschwindigkeit ergeben. Ist jedoch  $p_0 < p < \beta$ , so muß die Düse so geformt werden, daß auf die innere Abrundung eine engste Stelle  $F_1$  und dann eine allmähliche Erweiterung auf  $F_0$  folgt. \*) Das Verhältnis der Querschnitte  $F_1:F_0$  ist von dem Druckverhältnis  $p_0:p$  abhängig und findet sich leicht, wenn man in die Gleichung für  $F_x$  einmal  $p_0:p$  und einmal  $\beta$  einführt.

Wendet man bei  $p_0 < p < \beta$  eine sich erweiternde Düse nicht an, sondern läßt durch eine einfache Oeffnung oder sich verengende Düse ausströmen, so kann im Endquerschnitt der Aufsendruck nicht erreicht werden, sondern es stellt sich daselbst der höhere Druck  $p_1 = p\beta$  ein. Die Geschwindigkeit im Endquerschnitt der Mündung (Düse)  $w_1$  ist in diesem Fall unabhängig von  $p_0$

$$w_1 = \sqrt{2g \frac{x}{x-1} P v \frac{m-1}{m+1}}$$

oder

$$w_1 = \varphi_1 \sqrt{2g \frac{x}{x+1} P v} = \varphi_1 \sqrt{g x P_1 v_1^{**}} \quad \varphi_1^2 = \frac{m-1}{x-1} \frac{x+1}{m+1}$$

Nach dem Austritt aus einer solchen Mündung breitet sich der Strahl infolge des Ueberdruckes aus.

### e. Ausflusmenge.

Allgemein ist  $G = \frac{w_0 F_0}{v_0}$ .  $v_0$  berechnet sich aus  $\frac{v_0}{v} = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{1}{m}}$  oder bei Benutzung der Geschwindigkeitszahl

für Gase

$$v_0 = v \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{1}{x}} + \frac{x-1}{x P_0} \left(\frac{1}{\varphi^2} - 1\right) \frac{w_0^2}{2g}$$

für Wasserdampf

$$v_0 = v \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{1}{x}} + \frac{A}{\gamma_0 r_0} \left(\frac{1}{\varphi^2} - 1\right) \frac{w_0^2}{2g}$$

Für  $\frac{p_0}{p} > \beta$  ist

$$G = F_0 \sqrt{2g \frac{x}{x-1} \frac{P}{v} \left[ \left(\frac{p_0}{p}\right)^{\frac{2}{m}} - \left(\frac{p_0}{p}\right)^{\frac{m+1}{m}} \right]}$$

Für  $\frac{p_0}{p} < \beta$  ist

$$G = F_1 \sqrt{g x \frac{m-1}{x-1} \left(\frac{2}{m+1}\right)^{\frac{m+1}{m-1}} \frac{P}{v}}$$

$F_1$  ist der kleinste Querschnitt der Düse oder Mündung.

\*) Solche Düsen finden bei Dampfturbinen, Injektoren usw. Anwendung.

\*\*) Dies ist, abgesehen von  $\varphi$ , die Gleichung der Schallgeschwindigkeit für den Zustand im Ausflusquerschnitte.

### f. Ausfluss bei geringem Ueberdruck.

Ist  $p_0 : p > 0,9$ , so kann mit genügender Genauigkeit (Fehler unter  $2 vH$ )  $v_0 = v$  gesetzt werden, und daher

$$w_0 = \varphi \sqrt{2 g v (P - P_0)}.$$

In diesen Fällen gibt man die Ausflussmenge  $V$  häufig in cbm statt dem Gewichte nach an:

$$V = \alpha F_0 w_0.$$

## C. Zusammenstellung der Ausflussformeln für Luft und gesättigten Wasserdampf. Erfahrungswerte.

### a. Luft.

Für verschiedene Werte von  $m$  wird das Druckverhältnis  $\beta$  und die zugehörige Geschwindigkeitszahl  $\varphi_1$  wie folgt

$m =$	1,4	1,38	1,35	1,30	1,25
$\beta =$	0,530	0,533	0,538	0,547	0,556
$\varphi_1^2 =$	1	0,940	0,876	0,767	0,654
$\varphi_1 =$	1	0,970	0,936	0,876	0,810

1. Ist  $\frac{p_0}{p} > \beta$ , so gelten

$$w_0 = 44,8 \varphi \sqrt{T \left[ 1 - \left( \frac{p_0}{p} \right)^{0,286} \right]}.$$

$$\left( \frac{p_0}{p} \right)^{0,286} = \frac{T_0}{T} \text{ s. Tafel S. 425.}$$

Oder 
$$w_0 = 44,8 \sqrt{T \left[ 1 - \left( \frac{p_0}{p} \right)^{\frac{m-1}{m}} \right]}$$

$$G = 1,53 \alpha F_0 P_0 \sqrt{\frac{1}{T} \left( \frac{p}{p_0} \right)^m \left[ \left( \frac{p}{p_0} \right)^{\frac{m-1}{m}} - 1 \right]}$$

$$G = 1,53 \mu F_0 P_0 \sqrt{\frac{1}{T} \left( \frac{p}{p_0} \right)^{0,286} \left[ \left( \frac{p}{p_0} \right)^{0,286} - 1 \right]}.$$

Die Ausflussmenge in cbm vom Druck  $p_0$  und der Temperatur  $T$  ist

$$V = 45,35 \mu F_0 \sqrt{T \left( \frac{p}{p_0} \right)^{0,286} \left[ \left( \frac{p}{p_0} \right)^{0,286} - 1 \right]}.$$

Für  $p_0 : p > 0,5$  ist nach Weisbach und Grashof\*)

Art der Ausflusmündung	$\mu$	$\alpha$	$\varphi$	$\zeta$	$m$	Bemerkungen
Bei kreisförmiger Mündung von 14 mm Durchmesser in dünner, ebener Wand	0,64	0,65	0,981	0,04	1,388	—
Bei kurzem, zylindrischem Ansatzrohre von 14 mm Durchmesser ohne innere Abrundung	0,815 0,813 0,831	1 1 1	0,821 0,838 0,866	0,490 0,444 0,362	1,243 1,252 1,271	bei $p_0 : p = 1,08$ " $p_0 : p = 1,41$ " $p_0 : p = 1,70$
Bei kurzem, kegelförmigem Mundstücke von 10 mm Mündungsdurchmesser	0,97	1	0,974	0,034	1,392	—

Nach v. Hauer ist für kegelförmige Gebläsedüsen  $\mu = 0,86$  und für zylindrische Ansatzrohre bei Bessemergebläsen  $\mu = 0,78$ .

2. Ist  $\frac{p_0}{p} < \beta$ , so wird  $w_1 = 18,3 \varphi_1 \sqrt{T}$ ;  $G = 3970 \varphi_1 F_1 \frac{p}{\sqrt{T}}$

und die Ausflusmenge in cbm von  $p_0$  und  $T$

$$V = 11,6 \varphi_1 F_1 \frac{p}{p_0} \sqrt{T}.$$

Nach Versuchen von Zeuner ist für innen gut abgerundete Mündungen  $\varphi_1 = 0,96$ .  $F_1$  ist der engste Düsenquerschnitt.

Nach vielfachen Beobachtungen setzt sich das im austretenden Strahle noch enthaltene Arbeitsvermögen teilweise in Schwingungsenergie (Schallwellen) um, und es ist noch nicht ermittelt, ob es überhaupt möglich ist, durch geeignete Mündungsformen die volle Austrittsgeschwindigkeit  $w_0$  zu erhalten.

3. Bei geringem Ueberdruck ist

$$w_0 = 24 \varphi \sqrt{T \left(1 - \frac{p_0}{p}\right)} \quad G = 0,82 \alpha \varphi F_0 \sqrt{\frac{p}{T} (p - p_0)}.$$

Beim Austritt in die freie Luft ist, wenn  $h$  den Ueberdruck in mm W.-S. und  $b$  den Barometerstand in mm Q.-S. bedeutet,

$$w_0 = 24 \varphi \sqrt{\frac{T}{13,7 \frac{b}{h} + 1}}$$

oder angenähert

$$w_0 = 0,24 \varphi \sqrt{T h}.$$

Die Ausflusmenge in cbm ist in allen diesen Fällen  $V = \alpha \varphi F_0 w_0$ , u. zw. bezogen auf  $T$  und  $p$ .

### b. Trocken gesättigter Wasserdampf.

$m =$	1,135	1,128	1,120	1,105	1,090
$\beta =$	0,577	0,579	0,581	0,583	0,585
$\varphi_1^2 =$	1	0,951	0,895	0,789	0,681
$\varphi_1 =$	1	0,975	0,946	0,888	0,825

\*) Vgl. Grashof, Theoretische Maschinenlehre, Bd. I S. 580 bis 592.

$$1. \quad w_0 = 1680 \varphi p^{0,03} \sqrt{1 - \left(\frac{p_0}{p}\right)^{0,12}} \quad \text{oder} \quad w_0 = 2300 \varphi \sqrt{\frac{\lg p - \lg p_0}{6,76 - 0,9 \lg p_0}}$$

Beim Ausströmen in die Atmosphäre wird

$$w_0 = 880 \varphi \sqrt{\lg p}.$$

Nach Versuchen von Rosenhain\*) ergaben sich bei Austritt in die freie Luft folgende Werte für  $\varphi$

$p$	2,4	3,8	5	8	12	15
Oeffnung in dünner Wand, $d_1 = 4,8$ mm	0,90	0,87	0,86	0,86	0,86	0,85
Sich erweiternde Düse $d_1 = 4,8$ mm, $d_0 = 6,5$ mm, $l = 20$ mm	—	0,79	0,84	0,93	0,96	0,96

2. Ist  $p_0 : p < \beta$ , so berechnet sich die Geschwindigkeit im kleinsten Querschnitt  $F_1$  der Mündung zu

$$w_1 = 422 \varphi_1 p^{0,03}, \text{ ist also nahezu unveränderlich,}$$

und die Ausflußmenge in der Sekunde

$$G = 153 \varphi_1 F_1 p^{0,97}.$$

Nach Versuchen kann angenommen werden, daß  $\varphi_1$  meist nur wenig von 1 abweicht.

Für geringen Ueberdruck ist

$$w_0 = 579 \varphi p^{0,03} \sqrt{1 - \frac{p_0}{p}}.$$

Bei Austritt in die Außenluft ist angenähert

$$w_0 = 5,79 \varphi \sqrt{h} \quad G = 3,4 \alpha \varphi F_0 \sqrt{h}$$

wo  $h$  der Ueberdruck in mm W.-S.

Werte von  $p^{0,97}$ .

$p =$	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6	6,5
$p^{0,97} =$	1,48	1,96	2,43	2,90	3,37	3,83	4,30	4,76	5,22	5,68	6,14
$p =$	7	7,5	8	8,5	9	9,5	10	10,5	11	11,5	12
$p^{0,97} =$	6,60	7,05	7,51	7,96	8,42	8,87	9,32	9,77	10,22	10,67	11,12

3. Für das **Sicherheitsventil eines Dampfkessels** ist, wenn  $d$  den Durchmesser des Ventilrohres in m,  $h$  die Ventilerhebung in m bezeichnet, nach Kolster die abblasende Dampfmenge in kg/sk

$$G = 595 \frac{h}{d} \frac{\pi d^2}{4} p^{0,97}.$$

(Werte von  $p^{0,97}$  s. die vorstehende Tafel.)

\*) Vrgl. Inst. of Civil Engineers 1900.

Der **Querschnitt**  $F$  des Sicherheitsventils (mit Ausschluß der Sitzfläche), welches

- 1) bei der Dampfspannung  $p$  at anfangen soll abzublasen und
- 2) eine gegebene Dampfmenge  $G$  in kg/sk entweichen lassen soll, wenn die Spannung auf  $p_1$  at gestiegen ist, wird

$$F = \frac{56 G}{\left(1 - \sqrt{\frac{p}{p_1}}\right) p_1^{0,97}} \text{ in qcm.}$$

Die erforderliche **Belastung**  $K$  (einschl. Eigengewicht des Ventils) ist, wenn  $a$  die (möglichst klein anzunehmende) wagerechte Projektion der Sitzfläche in qcm bezeichnet,

$$K = (F + 0,6 a) (p - 1) \text{ kg.}$$

Soll das Sicherheitsventil bei der höchsten zulässigen Dampfspannung  $p_1$  die ganze, bei voller Feuerung gleichzeitig im Kessel in einer Sekunde entwickelte Dampfmenge  $G$  entweichen lassen, so setze man unter der Annahme  $p = 0,8 p_1$

$$F = \frac{531 G}{p_1^{0,97}} \text{ qcm.}$$

Da  $G$  außer vom Grade der Anstrengung des Kessels wesentlich von dessen Heizfläche  $H$  abhängig ist, so setzt man gewöhnlich den Querschnitt des Sicherheitsventils für 1 qm Heizfläche

$$\frac{F}{H} = f = \varphi(p_1).$$

(Vergl. Abschn. Kraftmaschinen, unter Dampfkessel.)

## D. Bewegung der Gase und Dämpfe durch Rohrleitungen.

Ueber Bewegung bei geringen Druckunterschieden s. unter Mechanik luftförmiger Körper III C. 3. Es bedeute

$D$  in mm der gleichbleibende Durchmesser der Leitung,

$l$  in m die Länge der Leitung,

$G$  in kg/Stunde die durch die Leitung gehende Gewichtsmenge.

Für eine sehr kurze Leitungsstrecke  $dl$  gilt nach S. 459:

$$\frac{dv}{v} = \frac{dw}{w}; \quad A \frac{w dw}{g} + di + A dh = dQ;$$

$$dQ + A dR = di - A v dP;$$

$$\frac{w dw}{g} + v dP + dR + dh = 0.$$

Für eine horizontale Rohrleitung ohne Wärmefbergang wird für Gase, für überhitzten und trocken gesättigten Wasserdampf:

$$di = A \frac{x}{x-1} d(Pv)$$

und damit:

$$\frac{d(Pv)}{P dv} = -(\kappa - 1) \frac{w^2}{w_s^2}.$$

$w_s = \sqrt{\kappa g P v}$  = Schallgeschwindigkeit.

In fast allen technisch wichtigen Fällen ist  $w^2$  sehr klein gegen  $w_s^2$  und daher in diesem Fall:

$$Pv = \text{konst.},$$

d. h. der Stoff expandiert in der Rohrleitung nach einer gleichseitigen Hyperbel. Ferner wird

$$dR = -v dP.$$

Für die Reibungsarbeit oder den Leitungswiderstand  $dR$  auf der Strecke  $dl$  muss man zwei Fälle unterscheiden:

a) Die Geschwindigkeit ist kleiner als eine gewisse kritische Geschwindigkeit  $w_k$ . Dann stellt sich die geordnete schichtenweise oder Stromlinien-Bewegung ein, und die Reibung ist:

$$dR = \alpha \frac{\eta w}{\gamma D^2} dl;$$

$\eta$  ist die Zähigkeit (Reibungszahl, s. S. 400) der Flüssigkeit,  $\alpha$  eine Konstante.

b) Die Geschwindigkeit ist größer als die kritische. Dann tritt wirbelnde Strömung ein, und es gilt angenähert:

$$dR = \beta \frac{w^2}{D} dl;$$

$\beta$  angenähert konstant.

Im folgenden soll nur der Fall b)

$$w > w_k \text{ behandelt werden.}$$

Für eine wagerechte Leitung folgt dann unter den früheren Annahmen:

$$v dP + \beta \frac{w^2}{D} dl = 0;$$

ist der Spannungsabfall  $\Delta P$  in der Leitung nur gering gegen  $P$ , so kann er aus der Gleichung unmittelbar gefunden werden, indem man schreibt:

$$\Delta P = \beta \frac{w^2}{D v} l \quad \text{oder} \quad \Delta P = \beta \frac{w^2}{D} \gamma l$$

oder

$$\frac{\Delta P}{P} = \frac{\beta w^2}{D P_1 v_1} l,$$

für  $\gamma$  und  $w$  sind in diesem Fall Mittelwerte einzuführen.

Für längere Leitungen mit starkem Druckabfall ist die Gleichung zu integrieren und ergibt, wenn sich der Zeiger 1 und 2 auf Anfang und Ende der Leitung beziehen

$$\frac{P_1^2 - P_2^2}{2} = \beta \frac{16}{\pi^2} \frac{G^2}{D^5} P_1 v_1 \cdot l.$$

**Fritzsohe**\*) hat auf Grund eigener Versuche mit Luft, sowie mit Benutzung aller früheren Versuche für  $\beta$  folgenden Ausdruck gefunden:

$$\beta = 6,02 \cdot D - 0,269 \cdot (\gamma w) - 0,148.$$

Dieser Wert stimmt auch vorzüglich mit den Ergebnissen neuer Versuche über die Fortleitung von gesättigtem und überhitztem Wasserdampf überein, welche vom bayer. Revisionsverein ausgeführt wurden.\*\*) Er kann somit für Luft wie für Dampf Anwendung finden;

$$\text{mit } G = \frac{\gamma w D^2}{353,7} \text{ wird auch } \beta = 2,526 \frac{D^{0,027}}{G^{0,148}}.$$

Da die Veränderlichkeit von  $D^{0,027}$  stets klein ist gegenüber dem erreichbaren Genauigkeitsgrad, so läßt sich (mit  $D=100$ ) einfach setzen:

$$\beta = \frac{2,86}{G^{0,148}}.$$

Dieser Wert kann aus der folgenden Tafel entnommen werden:

#### Widerstandszahlen für Rohrleitungen.

$G$	$\beta$	$G$	$\beta$	$G$	$\beta$	$G$	$\beta$
10	2,03	100	1,45	1000	1,03	10 000	0,73
15	1,92	150	1,36	1500	0,97	15 000	0,69
25	1,78	250	1,26	2500	0,90	25 000	0,64
40	1,66	400	1,18	4000	0,84	40 000	0,595
65	1,54	650	1,10	6500	0,78	65 000	0,555
100	1,45	1000	1,03	10000	0,73	100 000	0,520

Die Werte gelten für einen gewöhnlichen (mittleren) Rauigkeitsgrad der Rohrleitung.

In  $a$  beträgt der Druckabfall:

$$\Delta p = \frac{\beta}{10\,000} \gamma \frac{w^2}{D} l$$

oder in anderer Schreibweise:

$$\Delta p = 12,5 \beta \frac{G^2}{\gamma D^5} l$$

oder

$$\Delta p = 0,0354 \beta G \frac{w}{D^3} l$$

oder

$$\Delta p = \frac{0,0532 \beta}{10\,000} \sqrt{\frac{\gamma^3 w^5}{G}} \cdot l.$$

\*) Mitt. üb. Forschungsarb. Heft 60. Herausg. v. V. d. I.

\*\*) Die Versuche ergaben im Mittel  $\beta = 1,06$  für  $d = 70$ ,  $G = 860$  (im Mittel).

### a. Luftleitungen.

Für Gase lassen sich die allgemeinen Formeln noch umgestalten; es wird:

$$\frac{\Delta p}{p} = \frac{\beta}{RT} \frac{w^2}{D}$$

$R$  ist die Gaskonstante für Luft = 29,2, für  $p$  und  $T$  sind wie für  $w$  Mittelwerte für die betrachtete Rohrstrecke einzuführen.

### b. Dampfleitungen.

Da sich  $\frac{p}{\gamma''} = p v''$  für **trocken gesättigten Dampf** nur wenig ändert, so kann man setzen:

Für Hochdruckleitungen ( $p = 4$  bis 20 at):

$$\frac{\Delta p}{p} = \frac{0,51 \cdot \beta}{10\,000} \cdot \frac{w^2}{D} l$$

$$\Delta p = 24,5 \beta \frac{G^2}{p D^5} l \quad \Delta p = \frac{0,0194 \beta}{10\,000} \sqrt{\frac{p^3 w^5}{G}} l$$

Für Niederdruckleitungen ( $p = 1$  bis 4 at):

$$\frac{\Delta p}{p} = \frac{0,56 \beta}{10\,000} \frac{w^2}{D} l$$

und 
$$\Delta p = 22,5 \beta \frac{G^2}{p D^5} l$$

Für **überhitzten Dampf** ist in den allgemeinen Gleichungen oben S. 467 u. 468  $v = \frac{1}{\gamma}$  nach der Gleichung S. 440 einzuführen.

Wenn die Fortleitung unter **Wärmeaustausch** mit der Umgebung erfolgt, so wird die Zustandsänderung nicht mehr eine Hyperbel sein, sondern bei Wärmeabgabe steiler, bei Wärmeaufnahme flacher verlaufen, doch ändert dies, solange  $w^2$  klein gegen  $w_s^2$  ist, nichts Wesentliches an den bisher für den Spannungsabfall gegebenen Formeln.

Für die Bestimmung des zweckmäßigsten Durchmessers einer Dampfleitung sind der Druckverlust durch Leitungswiderstand und der Wärmeverlust durch äußere Abkühlung maßgebend. Mit der Verkleinerung des Rohrdurchmessers nimmt der Leitungswiderstand zu und die äußere Abkühlung ab.

Die Verluste durch **äußere Abkühlung** bestimmen sich aus den Gesetzen des Wärmedurchgangs, S. 401 u. f.

Im folgenden sind einige Versuchsergebnisse mit gesättigtem Dampf mitgeteilt.

### Stündliche Kondensationswassermenge $K$ in kg/qm Rohrfinnenfläche. (Nach Gutermuth.)\*

Versuchs- Dampfleitung	Isolierung der Leitung	$K$			Bemerkungen	
		Dampfspannung in at Ueberdruck	Flanschen nicht umhüllt	Flanschen umhüllt		
gußeiserne Leitung: $l = 323$ m $d = 0,140$ m	Grünzweig & Hartmannsche Kork-Isoliermasse, 20 mm dick + 10 mm Filz und Blechmantel	3,0	1,03	.	Schachtleitungen	
		4,0	1,09	.		
dgl.: $l = 365$ m $d = 0,294$ m	40 mm Korksteinschalen + 8 mm Asbestmasse	5,0	1,21	.		
		6,0	1,33	.		
schmiedeiserne Leitung: $l = 330$ m $d = 0,075$ m	Grünzweig & Hartmannsche Kork-Isoliermasse, 20 mm dick + 10 mm Filz	3,0	1,10	.		
		4,0	1,21	.		
schmiedeiserne Leitung: $l = 22$ m $d = 0,120$ m	alte Kieselgurschnur, 25 mm dick	3,0	1,11	.		wage rechte Leitungen
		5,0	1,24	.		
	neue Kieselgurschnur, 30 mm dick	3,0	0,93	.		
		5,0	1,13	.		
	Knochsche Masse, 30 mm dick	3,0	0,93	.		
		5,0	1,128	.		
	nackte Leitung	3,0	3,39	.		
		5,0	4,17	.		
	Kieselgurmasse, 20 mm dick.	3,0	0,96	0,85		
		5,0	1,128	0,956		
Torfschalen, 35 mm dick, mit Asbestunterlage.	3,0	0,62	0,54			
	5,0	0,70	0,64			
Asbest-Seidenformstücke, 26 mm dick, mit Asbestunterlage	3,0	0,71	.			
	5,0	0,812	.			

Die Versuche (vgl. Tabelle auf S. 471) sind vom bayer. Revisionsverein mit Leitungen von 26 m Länge mit 6 Flanschen ausgeführt. Die Umhüllung bestand aus Diatomit:

3. Für die **Ermittlung des zweckmäßigsten Leitungsdurchmessers** ist unter Zugrundelegung der am Ende der Dampfleitung nötigen Dampfmenge und des nötigen Dampfdruckes folgende Ueberlegung maßgebend.

$\alpha$ . Der Kesseldruck ist vorgeschrieben. Dann ist der zulässige Spannungsabfall bestimmt, und die Dampfgeschwindigkeit sowie der Leitungsdurchmesser ermitteln sich aus der Formel für den Leitungswiderstand ohne Rücksicht auf die Kondensationsverhältnisse in der Leitung. Der Kondensationsverlust würde sich alsdann nur durch Erhöhung des Spannungsverlustes (also nur durch Verminderung des Leitungsdurchmessers) verringern lassen.

\*) S. Z. d. V. d. I. 1887 S. 670.

### Dampf- und Wärmersparnis durch die Umhüllung von Dampfleitungen.

Temperatur- gefälle zwischen Dampf und Luft	Wärmeverlust für 1 m in 1 Stunde			Dampf- und Wärme- ersparnis	
	Nackte Leitung	Umhüllte Leitung		Flanschen frei	Flanschen umhüllt
		WE	Flanschen frei WE		
	WE	WE	WE	vH	vH

Lichte Weite der Leitung = 150 mm

100	655	161	105	75	84
110	756	186	116	75	85
120	873	210	131	76	85
130	992	232	146	77	85
140	1118	258	161	77	86
150	1245	281	176	77	86
160	1385	308	191	78	86
170	1535	330	206	79	87

Lichte Weite der Leitung = 70 mm

100	328	92	66	72	80
110	369	103	73,5	72	80
120	411	113	81	72,5	80,5
130	456	120	89	73,5	80,5
140	510	131	97	74,5	81
150	567	141	103	75	82
160	629	149	110	76,5	82,5
170	693	159	118	77	83
180	766	173	127	77,5	83,5

$\beta$ . Der Kesseldruck ist nicht vorgeschrieben. Hierbei müssen Vergleichsrechnungen über den Dampfverbrauch der ganzen Dampfmaschinenanlage samt Leitung bei großem und kleinem Spannungsabfall, also bei enger und weiter Leitung, sowie die besonderen praktischen Anforderungen an den Maschinenbetrieb den Leitungsdurchmesser bestimmen.

Im allgemeinen wird sich hinsichtlich der Dampfkosten großer Spannungsabfall und enge Leitung vorteilhafter erweisen als geringer Spannungsabfall und weite Leitung.

### E. Drosseln.

Wird in einen stetigen Flüssigkeitsstrom eine engere Durchgangsstelle (Ventil, Klappe usw.) eingeschaltet, so entsteht dadurch ein Druckabfall. Es sei  $p$  der unveränderliche Druck und  $w$  die Geschwindigkeit vor,  $p_0$  und  $w_0$  hinter der Drosselstelle.

Die Gleichung für den Durchgang durch den Drosselquerschnitt lautet, wenn kein Wärmeaustausch mit der Umgebung stattfindet,

$$A \frac{w^2}{2g} + i = A \frac{w_0^2}{2g} + i_0.$$

Fast in allen praktischen Fällen wird der Unterschied der kinetischen Energie vor und nach dem Drosseln zu vernachlässigen sein; dann ergibt sich das einfache Gesetz: Der Wärmeinhalt bleibt durch Drosseln unverändert:  $i = i_0$ .

Daraus läßt sich der Zustand der Flüssigkeit nach dem Drosseln bestimmen, wenn man den Spannungsabfall sowie den Zustand vor dem Drosseln kennt (vrgl. S. 415).

### a. Vollkommene Gase. (S. 416 u. f.)

Da für diese  $i = c_p T + C$  ist, folgt  $T = T_0$ , d. h. die Temperatur wird bei vollkommenen Gasen durch Drosseln nicht verändert.

Da die meisten Gase nicht genau den Gesetzen der vollkommenen Gase entsprechen, so treten geringe Abweichungen von diesem Gesetz auf, u. zw. in dem Sinne, daß die Temperatur durch das Drosseln etwas sinkt. Von dieser Erscheinung hat Linde bei der Konstruktion seiner Maschine zur Verflüssigung von Gasen Gebrauch gemacht.

Die Temperaturänderung durch Drosseln ist bestimmt durch die allgemeine Gleichung

$$\left(\frac{dT}{dP}\right)_i = -\frac{1}{c_p} \left(\frac{di}{dP}\right)_T = \frac{A}{c_p} \left[ T \left(\frac{dv}{dT}\right)_P - v \right] = \frac{AT^2}{c_p} \left(\frac{d\left(\frac{v}{T}\right)}{dT}\right)_P$$

Versuche von Thomson und Joule über das Drosseln haben ergeben

$$\left(\frac{\delta T}{\delta p}\right)_i = a \left(\frac{273}{T}\right)^2$$

$$\begin{aligned} a &= 0,271 \text{ für Luft,} \\ a &= 0,333 \text{ für Sauerstoff.} \\ a &= 1,35 \text{ für Kohlensäure.} \end{aligned}$$

Wasserstoff ergab einen kleinen negativen Wert für  $a$ .

Die Versuche wurden mit Drücken von 1 bis 4,5 at und bei Temperaturen von 14 bis 100° C. ausgeführt.

E. Vogel (Dissertation) fand im Münchner Lab. f. techn. Phys.  $a$  abhängig vom Druck, nämlich:

$$\begin{aligned} a &= 0,268 - 0,00086 p \text{ für Luft} \\ a &= 0,313 - 0,00085 p \text{ für Sauerstoff.} \end{aligned}$$

Die Versuchstemperatur wurde nicht verändert und betrug 10° C. Druckbereich bis 150 at.

### b) Gesättigte Dämpfe. (S. 431 u. f.)

Es ist  $i = i' + xr$  und daher

$$i' + xr = i'_0 + x_0 r_0,$$

woraus sich die spezifische Dampfmenge  $x_0$  nach dem Drosseln berechnen läßt (Anwendung s. Kältemaschinen, S. 446).

Wasserdampf wird durch Drosseln stets trockener, trockener Dampf überhitzt. Ergibt die Formel  $x_0 > 1$ , so ist Ueberhitzung eingetreten, und es gilt die Formel

$$i' + \alpha r = i_0' + r_0 + 0,5(t_0 - \vartheta_0).$$

Die Gleichung kann zur Berechnung der ursprünglichen Dampfeuchtigkeit dienen, wenn die Ueberhitzungstemperatur gemessen wird (Anwendung beim Drosselkalorimeter zur Bestimmung der Feuchtigkeit von Kesseldampf).

### Arbeitsverlust durch Drosseln.

Das Drosseln hat als nicht umkehrbarer Vorgang stets eine Verringerung der nutzbaren Arbeit der gedrosselten Flüssigkeit zur Folge. Dieser Verlust läßt sich für Dampfmaschinen und Kältemaschinen leicht berechnen, indem man die durch das Drosseln bewirkte Entropievermehrung mit der absoluten Kondensatortemperatur multipliziert (S. 414).

Die Entropievergrößerung berechnet sich aus der Wärmeleichung

$$T ds = di - Av dP \text{ zu } \left(\frac{ds}{dP}\right)_i = -A \frac{v}{T}.$$

So lange die Druckverminderung  $\Delta p$  nicht sehr groß ist, läßt sich demnach schreiben

$$\Delta s = A \frac{v}{T} \Delta P.$$

Für vollkommene Gase wird

$$\Delta s = AR \frac{\Delta p}{p} = \frac{2}{\mu} \frac{\Delta p}{p}.$$

Für gesättigte Dämpfe wird

$$\Delta s = A \frac{v' + \alpha(v'' - v')}{\Theta} \Delta P = \frac{APv' + \alpha \psi \Delta p}{p},$$

oder wenn  $\alpha$  nicht sehr klein:  $\Delta s = \frac{\alpha \psi \Delta p}{\Theta p}.$

Für überhitzten Dampf wird

$$\Delta s = (0,11 - 0,3 \Theta p) \frac{\Delta p}{p}.$$

☉ s. Tafel V. S. 438.

In diese Formeln sind für  $p$ ,  $\vartheta$  und  $\psi$  die Mittelwerte vor und nach dem Drosseln zu setzen.

**Beispiel:** Bei einer Auspuffmaschine werde der Dampf in der Zuleitung oder in den Eintrittskanälen von 10 auf 9 at gedrosselt, wie groß ist der Arbeitsverlust  $AL_d$ ? Gegendruck = 1,0,

a) Der Dampf sei trocken gesättigt:

$$AL_d = \Delta s \Theta_0 = \frac{\psi}{\Theta} \frac{\Delta p}{p} \Theta_0 = \frac{45,8}{450} \cdot \frac{1}{9,5} \cdot 372 = 3,8 \text{ WE.}$$

Nehmen wir den Dampfverbrauch der Maschine  $D_i = 12,5$ , also  $AL_i = \frac{632}{12,5} = 50,7$  WE, so beträgt der Drosselverlust  $\frac{3,8}{50,7} \cdot 100 = 7,5$  vH der indizierten Leistung der Maschine.

b) Der Dampf sei überhitzt,  $t = 350^{\circ}$ :

$$AL_d = (0,11 - 0,3 \text{ } \textcircled{p}) \frac{\Delta p}{p} \Theta_0 = (0,11 - 0,3 \cdot 0,0006 \cdot 9,5) \frac{0,1}{9,5} 372 = 4,24,$$

wenn wir  $D_i$  hier zu 8,5 annehmen, ist dies 5,7 vH der indizierten Leistung.

Für dieselbe Maschine betrage die Drosselung beim Austritt 0,1 at [von 1,1 auf 1,0]  
Dann ist im Falle:

a) Der austretende Dampf ist feucht,  $x = 0,94$ :

$$AL_d = \frac{x \psi}{\Theta} \frac{\Delta p}{p} \Theta_0 = \frac{0,94 \cdot 40,3}{373} \frac{0,1}{1,05} 372 = 3,6 \text{ WE}$$

oder 7,1 vH der indizierten Arbeit.

b) Der austretende Dampf ist überhitzt,  $t = 150$ :

$$AL_d = (0,11 - 0,3 \text{ } \textcircled{p}) \frac{\Delta p}{p} \Theta_0 = (0,11 - 0,3 \cdot 0,0082 \cdot 1,05) \frac{0,1}{1,05} 372 = 3,86$$

oder 5,2 vH der indizierten Arbeit.

Von großer Bedeutung sind auch die Drosselverluste bei Kältemaschinen; der Rechnungsweg ist derselbe.

Setzen wir gleich große Maschinen, gleiche Umdrehungszahlen, gleiches Verhältnis von Zylinderdurchmesser zum Hub und vom freien Ventilquerschnitt zum Zylinderquerschnitt und gleiche Widerstandskoeffizienten für die Ventile voraus, so sind die relativen Arbeitsverluste durch Drosselung beim Durchgang durch die Gang- und Druckventile proportional dem Ausdruck

$$\sqrt[3]{\frac{v^2}{Q_0^5}},$$

worin  $v$  das spez. Volumen an der Drosselstelle und  $Q_0$  die Kälteleistung für 1 kg Flüssigkeit bedeutet.

Bei diesem Vergleich verhält sich Ammoniak am günstigsten, dann folgt Kohlensäure und dann schweflige Säure.

## VII. VERBRENNUNG.

### A. Brennstoffe.

**Natürliche:** Holz, Torf, Kohle (Braunkohle, Steinkohle), Erdöl, Naturgas.

**Künstliche:** Holzkohle, Koks (Grudekoks, Hüttenkoks, Gaskoks), Briketts (aus Braunkohle, aus Steinkohle), Erdöldestillate (Benzin, Petroleum usw.), Generatorgas oder Luftgas, Mischgas, Kraftgas, Wassergas, Leuchtgas, Koksofengas, Hochofengas oder Gichtgas, Oelgas.

Alle diese Brennstoffe bestehen vorwiegend aus Kohlenstoff und Wasserstoff neben mehr oder weniger Sauerstoff, die festen Brennstoffe enthalten noch mineralische Bestandteile (Asche) und Wasser, außerdem Stickstoff und Schwefel.

**Holz.** Frisch gefälltes Holz enthält 20 bis 60 vH Wasser, luft-trockenes 10 bis 20 vH. Spezifisches Gewicht und Heizwert\*) sind daher sehr veränderlich.

### Zusammensetzung des getrockneten Holzes.

Holzart	Spez. Gew.	C vH	H vH	O vH	N vH	Asche vH	Heizwert für 1 kg bei Verbrennung zu CO <sub>2</sub> und	
							flüssigem Wasser WE	Wasserdampf WE
Eiche . .	0,9—0,8	50,16	6,02	43,45		0,37	4620	—
Buche . .	0,8—0,7	49,06	6,11	44,17	0,09	0,57	4780	—
Tanne . .	0,5—0,4	50,36	5,92	43,39	0,05	0,28	5035	—
Fichte . .		50,31	6,20	43,08	0,04	0,37	5085	—
Mittel		49,56	6,11	43,82	0,10	0,42	4820	4490
In runden Zahlen		50	6	44	—	—	—	4500

Die **Holzkohle** ist ein von flüchtigen Bestandteilen und **Schwefel** freier, aschearmer Brennstoff. Destillationsprodukte bei der Gewinnung der Holzkohle: Holzgas, Holzessig, Holzteer.

**Torf.** Lufttrockener Torf enthält noch 15 bis 20 vH Wasser, 2 bis 20 vH und noch mehr Asche, sein Heizwert beträgt 3300 bis 4500 WE. In der wasser- und aschefreien Substanz finden sich auf 50 bis 60 vH Kohlenstoff, 5 bis 7 vH Wasserstoff, 44 bis 28 vH Sauerstoff, 1 bis 2,5 vH Stickstoff.

Die unter der Bezeichnung **Mineralkohlen** zusammengefaßten **Braunkohlen, Steinkohlen** und **Anthrazite** sind nicht immer scharf voneinander zu trennen und zeigen in einigen Abarten Uebergangsformen.

Die **Braunkohlen** werden unterschieden in dichte, erdige Braunkohle (teils in Stücken, teils zerfallen), Pechbraunkohle (fast schwarz mit muscheligen Bruch, der Steinkohle nahestehend), Lignit (bituminöses Holz mit deutlicher Holzstruktur), Blätterbraunkohle, Moorkohle, Schwelkohle, wovon die letztere bitumenreiche Sorte durch trockene Destillation Paraffin, Solaröl, Karbolsäure, Kreosot und als festen Rückstand pulvrigen **Grudekoks** liefert.

Braunkohle gibt einen braunen, Steinkohle einen braunschwarzen oder schwarzen Strich, erstere gibt mit Kalilauge eine braune Färbung, letztere nicht. Die Destillationsprodukte der Braunkohle reagieren vorwiegend sauer, die der Steinkohle infolge des höheren Stickstoff- bzw. Ammoniakgehalts alkalisch. Frisch geförderte Braunkohle ist sehr wasserreich (40 bis 60 vH), ohne dabei naß auszusehen. Auch der Aschegehalt ist häufig hoch, so daß der Heizwert der Rohkohle oft nur 2 500 WE beträgt und weitere Transporte sich nicht lohnen. Störend ist auch der oft hohe Schwefelgehalt der Braunkohlen (Gips,

\*) Ueber den Begriff Heizwert s. nächstes Kapitel.

Schwefelkies). Wegen des meist hohen Gehalts an Grus wird Braunkohle vorwiegend auf Treppenrosten verbrannt.

**Steinkohlen.** Nach dem stärkeren oder geringeren Glanze unterscheidet man Glanz- und Mattkohle. Als mineralische Beimengungen (Asche) überwiegen Silikate, Sulfate, Schwefelkies. Beim Erhitzen schmelzen gewisse Steinkohlensorten. Nach vollendeter Zersetzung durch Hitze bleibt Koks zurück, der zum Teil aus freiem Kohlenstoff besteht.

Nach dem Gasreichtum, der mit dem Sauerstoffgehalt steigt und fällt, unterscheidet man **Mager-** und **Fettkohlen**.

Ueber den Charakter und die Verwendbarkeit der Steinkohlen gibt weniger die Elementarzusammensetzung Aufschluss, als vielmehr die Verkokungsprobe.

Als Klassifizierungsprinzip für die Kohlen dient die Beschaffenheit der unter gleichen Versuchsbedingungen erzielten Verkokungsrückstände, die entweder keine äußere Verschiedenheit gegen das ursprüngliche (gepulverte) Material erkennen lassen oder eine durch Erweichen oder oberflächliches Zusammenkleben charakterisierte sog. Sinterung oder ein völliges Schmelzen zu teigartiger, durch entweichende Gase aufgeblähter Masse zeigen.

Backkohlen geraten beim Verkoken völlig in Flufs, Sandkohlen backen nicht, entweder infolge Mangels an flüchtigen Bestandteilen bei überwiegendem, fixem Kohlenstoff (geologisch alte Kohlen) oder infolge großen Gasreichtums bei hohem Sauerstoffgehalt (junge Kohlen). Man unterscheidet danach folgende Hauptklassen:

1. Anthrazit, gasarme Sandkohle,
2. Magerkohle, gasarme Sinterkohle,
3. Back-, Schmiede- oder Kokskohle (Fettkohle),
4. Gaskohle, gasreiche Back- oder backende Sinterkohle,
5. Gasreiche Sinter- und Sandkohle (zu ersteren gehören die Flammkohlen, zu letzteren die Braunkohlen).

Zwischen 4. und 5. stehen die Gasflammkohlen.

### Steinkohlentypen.

Nr.	Kohlentypen	Elementar- zusammensetzung	Ver- hältnis O : H	Koks- menge nach der Destillat.	Spez. Gewicht des Koks	Beschaffenhe des Koks
	1.	2.	3.	4.	5.	6.
I	Trockene Kohle mit langer Flamme (Sandkohle)	75,0—80,0 vH C 5,5—4,5 vH H 12,5—15,0 vH O	} 3—4	50—60	1,25	Pulverförm höchstens sammengefä
II	Fette Kohle mit langer Flamme. (Gaskohle)	80,0—85,0 vH C 5,8—5,0 vH H 14,2—10,2 vH O	} 2—3	60—68	1,28 bis 1,30	Geschmolz aber stark klüftet
III	Fette Kohle (Schmiedekohle)	84,0—89,0 vH C 5,5—5,0 vH H 11,0—5,5 vH O	} I	68—74	1,30	Geschmolz bis mittelm kompak

## Steinkohlentypen.

Nr.	Kohlentypen	Elementar- zusammensetzung	Ver- hältnis O : H	Koks- menge nach der Destillat.	Spez. Gewicht des Koks	Beschaffenheit des Koks
	1.	2.	3.	4.	5.	6.
IV	Fette Kohle mit kurzer Flamme (Kokskohle)	88,0—91,0 vH C 5,5—4,5 vH H 6,8—5,5 vH O	I	74—82	1,30 bis 1,35	Geschmolzen, sehr kompakt, wenig zerklüftet
V	Magere Kohle oder Anthrazit mit kurzer Flamme	90,0—93,0 vH C 4,5—4,0 vH H 5,5—3,0 vH O				

## Zusammensetzung und Heizwert von deutschen Kohlen.\*)

		Ruhrkohlen	Saarkohlen, Schlesische und Sächsische Kohlen	Oberbayerische Molasse-Kohlen	Sächsische Braunkohlen	Torf	Steinkohlen- Briketts	Braunkohlen- Briketts	Gaskoks	Westfäl. Anthrazit**)
100 G.-T. Infröckener Kohle enthalten	Kohlenstoff C	80	75	53	40	44	82	52	84	85,42
	Wasserstoff H	4,7	5	4	3	4,5	4,2	4,3	0,8	3,82
	Sauerstoff O + Stickstoff N	6	10	12	11	25	3,7	16	3,4	4,68
	Schwefel S	1,5	1	5	2	0,5	1,2	2	1,0	1,23
	Wasser W	1,3	2,5	9	37	20	1,7	17	1,8	0,95
	Asche	6,5	6,5	17	7	6	7,2	9	9	3,9
Brennbare Stoffe in 100 G.-T. Kohle		92,2	91	74	56	74	91,1	74	89,2	95,2
100 G.-T. wasser- und aschefreier Stoffe enthalten	Kohlenstoff C	86,8	82,5	71,6	71,5	59,4	90	70	94,2	89,7
	Wasserstoff H	5,1	5,5	5,4	5,4	6,1	4,6	5,8	0,9	4,0
	Sauerstoff O + Stickstoff N	6,5	11	16,2	19,5	33,8	4,1	21,5	3,8	4,9
	Schwefel	1,6	1	6,8	3,6	0,7	1,3	2,7	1,1	1,3
100 T. Kohle geben	Koksausbeute	77	64	56	31	31	83	40	96	89,33
	festen Kohlenstoff	70	57	38	24	25	76	32	88	85,00
	flüchtige Bestandteile	22	33	35	33	49	15	43	2	9,72
Heizwert der Kohle		7650	7100	5200	3600	3800	7750	4800	7000	7975
Heizwert der brennbaren Stoffe		8300	7800	7100	6630	5400	8500	6540	7830	8380

\*) Die Tafel enthält Mittelwerte für gute Kohlen nach Untersuchungen von Bunte  
Z. d. V. d. I. 1900 S. 669.    \*\*) Z. d. V. d. I. 1905 S. 238.

## Syndikatsmarken des Rheinisch-Westfälischen Kohlsyndikats:\*)

## 1. Fettkohlen.

Fördergruskohlen . . . . .	etwa 10 vH Stückgehalt
Förderkohlen . . . . .	„ 25 „ „
Melierte Kohlen . . . . .	„ 40 „ „
Bestmelierte Kohlen . . . . .	„ 50 „ „
Förderschmiedekohlen . . . . .	„ 25 „ „
Melierte Schmiedekohlen . . . . .	„ 40 „ „
Stückkohlen I . . . . .	abgesiebt über 80 mm
„ II . . . . .	„ „ 50 „
„ III . . . . .	„ „ 35 „
Gewaschene melierte Kohlen . . . . .	(Stücke und Nüsse III/IV gemischt)
Nufskohlen I . . . . .	etwa 50/80 mm Korngröße
„ II . . . . .	„ 30/50 „ „
„ III . . . . .	„ 15/30 „ „
„ IV . . . . .	„ 10/15 „ „
„ V . . . . .	„ 6/10 „ „
Nufgruskohlen . . . . .	„ 0/50/75 mm „
Fein- und Kokskohlen . . . . .	„ 0/6—0/10 mm Korngröße.

## 2. Gas- und Gasflammkohlen.

Fördergruskohlen . . . . .	etwa 10 vH Stückgehalt
Flammförderkohlen . . . . .	„ 25 „ „
Gasflammförderkohlen . . . . .	„ 45 „ „
Generatorkohlen . . . . .	„ 45 „ „
Gasförderkohlen . . . . .	„ 45 „ „
Stückkohlen I . . . . .	abgesiebt über etwa 80 mm
„ II . . . . .	„ „ 50 „
„ III . . . . .	„ „ 35 „
Nufskohlen I . . . . .	etwa 50/80 mm Korngröße
„ II . . . . .	„ 28/50 „ „
„ III . . . . .	„ 18/28 „ „
„ IV . . . . .	„ 8/18 „ „
„ V . . . . .	„ 5/8 „ „
Nufgruskohlen in verschiedenen Absiebungen über Siebe von nicht weniger als 20 mm und nicht mehr als 80 mm Lochweite.	
Feinkohlen . . . . .	etwa 0/8 mm Korngröße.

## 3. Ess- und Magerkohlen.

Fördergruskohlen . . . . .	etwa 10 vH Stückgehalt
Förderkohlen . . . . .	„ 25 „ „
„ „ . . . . .	„ 35 „ „
Melierte Kohlen . . . . .	„ 45 „ „
Bestmelierte Kohlen . . . . .	„ 50 „ „
Aufgebaute melierte Kohlen . . . . .	„ 60 „ „
„ „ „ . . . . .	„ 75 „ „
Stückkohlen . . . . .	abgesiebt über 80 mm
Gewaschene melierte Kohlen . . . . .	(Stücke und Nüsse III/IV gemischt)
Nufskohlen I . . . . .	etwa 50/80 mm Korngröße
„ II . . . . .	„ 25/50 „ „
„ III . . . . .	„ 15/25 „ „
„ IV . . . . .	„ 8/15 „ „
„ V oder Perikohlen . . . . .	„ 6/10 „ „
Nufgruskohlen . . . . .	„ 4/8 „ „
Feinkohlen . . . . .	„ 0/4—0/8 mm Korngröße.

## 4. Koks.

Hochofenkoks	
Gießereikoks	
Brechekoks I . . . . .	etwa 50/80, 60/100, 70/100 mm Korngröße
„ II . . . . .	„ 30/50, 40/60, 40/70 „ „
„ III . . . . .	„ 20/30, 20/40 mm Korngröße
„ IV . . . . .	„ 10/20, 10/30 „ „

## 5. Briketts.

Eiform-Briketts . . . . .	etwa 50, 80, 125 g schwer
Briketts (vierkantig) . . . . .	„ 1 <sup>1</sup> / <sub>2</sub> , 3, 5, 6, 7, 10 kg schwer

\*) Januar 1911.

**Lagerungsverluste und Selbstentzündung der Kohlen.** Durch längeres Lagern an der Luft tritt ein Zerfall (Verwitterung) der Kohlen ein, verbunden mit einem Verlust an Heizkraft, Verkokungs- und Vergasungswert. Zugleich besteht die Gefahr einer Selbstentzündung der in hoher Schicht aufgespeicherten Kohlenvorräte.

Kohlen sind daher, vor Nässe und Erwärmung geschützt, in nicht zu hohen Haufen zu lagern (in der Regel nicht über 5 m). In die Kohlenhaufen sind unten verschlossene und zugespitzte Röhren einzutreiben, in welche Thermometer zur Beobachtung der Temperaturerhöhung eingeführt werden. Feuchte, grusige Kohle darf nicht mit anderer Kohle überdeckt werden, sondern muß vorher austrocknen. Einen entstehenden Kohlenbrand soll man nicht mit Wasser zu löschen versuchen, weil die starke Dampfentwicklung das weitere Vorgehen gegen den Brandherd erschwert. Vielmehr ist die Kohle um die brennende Stelle abzugraben und zur Erstickung der Glut mit breiigem Ton zu bedecken. Eine Ventilation der gelagerten Kohlen zur Verhütung der Selbstentzündung ist zu verwerfen, weil sie oft gerade die Erhitzung begünstigt.

**Briketts.** Braunkohlenbriketts (mit einem Heizwert von etwa 5000 WE.) namentlich für Zimmerheizung.

Aus Steinkohlenklein werden Prefskohlen (Kohlenziegel) unter Zusatz von etwa 5 vH eines Bindemittels, wie Teer, Weichpech, Asphalt, Harz, Melasse u. a., gewonnen und wegen ihres geringen Platzbedarfs viel zur Heizung von Lokomotiven und Dampfschiffen verwendet. Auch ist der Lagerungsverlust bei Briketts sehr gering.

**Koks.** Hauptprodukt im Kokereibetrieb (sog. Hüttenkoks), Nebenprodukt bei der Leuchtgasfabrikation (Gaskoks). Koks, im Gegensatz zur Steinkohle, unschmelzbar, fest und hart, also widerstandsfähig gegen den Druck der Hochofenbeschickung, dabei poröser und ärmer an Schwefel. Je dichter der Koks, desto höhere Temperaturen lassen sich damit erzeugen. Koks erfordert, mit Steinkohle verglichen, entsprechend seiner geringeren Dichte und deshalb niedrigerem Heizwert in gleichen Volumen größere Heizflächen.

**Erdöl oder Petroleum.** Das rohe Erdöl ist weinhell bis pechschwarz, von 0,79 bis 0,94 spez. Gewicht. Es besteht fast nur aus Kohlenwasserstoffen, enthält etwa 84 vH Kohlenstoff, 14 vH Wasserstoff, selten über 2 bis 3 vH Sauerstoff, wenig Schwefel und Stickstoff und hat einen Heizwert von 10000 bis 11000 WE. für 1 kg. Die Kohlenwasserstoffe sind in der Hauptsache Paraffine ( $C_n H_{2n+2}$ ) (pennsylvanisches Oel), Olefine, Naphthene ( $C_n H_{2n}$ ) (Oel aus Baku).

Durch Destillation in Raffinerien wird das Rohpetroleum zerlegt

1. in Benzin, Siedepunkt bis  $150^{\circ}$  (Petroleumäther, Gasolin Kanadol, spez. Gewicht 0,64 bis 0,65, S.-P. 40 bis  $70^{\circ}$  C; Benzin, spez. Gewicht 0,70, S.-P. 70 bis  $120^{\circ}$  C; Ligroin, spez. Gewicht 0,73, S.-P. 120 bis  $135^{\circ}$  C; Putzöl, spez. Gewicht 0,74 bis 0,75, S.-P. 130 bis  $160^{\circ}$  C);

2. in Brennpetroleum oder Kerosin, S.-P. 150 bis 300° C, spez. Gewicht von pennsylvanischem Oel 0,83 bis 0,87, von Bakuöl 0,815 bis 0,825;
3. in die Rückstände, die über 300° sieden: Schmieröl, Masut, Heizöle, Paraffinöl, Vaseline.

Von diesen drei Fraktionen, die alle einen Heizwert von 10 000 bis 11 000 WE. für 1 kg haben, enthalten die Rohöle etwa folgende Mengen:

Rohöl von	Spez. Gewicht	Benzin vH	Brennöl vH	Rückstand vH
Pennsylvanien . . .	0,79—0,82	10—20	55—75	10—20
Ohio . . . . .	0,80—0,85	16—20	30—40	35—50
Baku . . . . .	0,85—0,90	5	25—30	60—65
Galizien . . . .	0,82—0,88	5—20	35—50	30—45
Elsafs . . . . .	0,90	0—5	25	65—70

**Teer** hat ein spez. Gewicht von 1,10 bis 1,26, einen Heizwert von etwa 8500 WE. und wird in Gaswerken zu 3,5 bis 6 vH, in Kokereien zu 2,5 bis 3,5 vH, bei der Trockendestillation der Steinkohlen zu etwa 10 bis 15 vH aus Braunkohlen gewonnen.

Näheres über flüssige Brennstoffe s. auch nächst. Kapitel „Verbrennung“.

Ueber **gasförmige Brennstoffe** s. ebenfalls das Kapitel „Verbrennung“, ferner Bd. II. Kapitel „Verbrennungsmaschinen“.

## B. Verbrennung.

Unter **Heizwert** (Verbrennungswärme) eines Stoffes verstehen wir diejenige Wärme, welche der Stoff bei seiner Verbrennung abgibt, wenn die Verbrennungserzeugnisse wieder auf die Anfangstemperatur abgekühlt werden. Wir unterscheiden weiter noch zwei Arten der Verbrennung, für welche der Heizwert unter Umständen etwas verschieden ist: a) die Verbrennung bei konst. Druck, b) die Verbrennung bei konst. Volumen. (Näheres S. 490, 491.) Für feste Brennstoffe kommt nur die Verbrennung bei konst. Druck in Betracht. Allgemein ist dann der Heizwert = der Differenz des Wärmeinhalts des brennbaren Gemisches und der Verbrennungserzeugnisse bei gleicher Temperatur

$$h = J' - J''.$$

Da die spezifische Wärme vor und nach der Verbrennung im allgemeinen etwas verschieden sein wird, so ändert sich der Heizwert etwas mit der Temperatur, doch ist dieser Einfluss praktisch verschwindend. Hingegen ändert sich der Heizwert sprunghaft, wenn die Verdampfungstemperatur des in den Verbrennungserzeugnissen enthaltenen Wassers überschritten wird, u. zw. um den Betrag der Verdampfungswärme jener Wassermenge ( $w$ ), wofür wir rund 600 WE für 1 kg Wasser setzen können.

Danach unterscheiden wir den **oberen Heizwert**, der auf flüssiges Wasser bezogen ist, und den um 600 *w* kleineren **unteren Heizwert** bezogen auf Wasserdampf. Der letztere kommt praktisch meist in Betracht.

### Heizwerte *h* für 1 kg Brennstoff.

(Die Werte der Tafel sind obere Heizwerte, d. h. sie beziehen sich auf flüssiges Wasser.

	WE		WE
Aether . . . . .	8900	Masut (Petroleumrückstände) .	10500
Alkohol . . . . .	7100	Naphthalin . . . . .	9700
Anilin . . . . .	8800	Petroleum . . . . .	11000
Antimon . . . . .	960	Phosphor (P zu P <sub>2</sub> O <sub>5</sub> ) . . . . .	5950
Benzol . . . . .	10000	Rohrzucker . . . . .	4000
Blei . . . . .	260	Rüböl, Olivenöl, Leinöl . . . . .	9300
Braunkohlenteeröl . . . . .	10000	Schießpulver . . . . .	700—800
Chlormethyl . . . . .	3200	Schwefel (S zu SO <sub>2</sub> ) . . . . .	2220
Eisen (Fe zu FeO) . . . . .	1260	Schwefelkohlenstoff . . . . .	3400
„ (Fe zu Fe <sub>3</sub> O <sub>4</sub> ) . . . . .	1680	Schwefelwasserstoff . . . . .	2740
„ (Fe zu Fe <sub>2</sub> O <sub>3</sub> ) . . . . .	1890	Silicium (Si zu SiO <sub>2</sub> ) . . . . .	7830
Glycerin . . . . .	4300	Talg . . . . .	8370
Holz . . . . .	4100	Terpentinöl . . . . .	10850
Holzgeist . . . . .	5300	Wachs . . . . .	9000
Kohlenstoff (C zu CO <sub>2</sub> ) . . . . .	8140	Zellulose . . . . .	4200
„ (C zu CO) . . . . .	2440	Zink (Zn zu ZnO) . . . . .	1300
Kupfer (Cu zu CuO) . . . . .	590		

Angenähert kann der Heizwert eines Brennstoffes aus der Elementaranalyse nach folgender Formel berechnet werden:

$$h_u = 8100 c + 29\,000 \left( h - \frac{o}{8} \right) + 2500 s - 600 w,$$

worin *c*, *h*, *o*, *s* und *w* den Gehalt an Kohlenstoff, Wasserstoff, Sauerstoff, Schwefel und Wasser in kg für 1 kg Brennstoff bedeuten.

Die Ermittlung des Heizwertes durch Verbrennen in der **kalorimetrischen Bombe** von Berthelot-Mahler oder Hempel ist stets vorzuziehen. Die Verbrennung erfolgt in verdichtetem Sauerstoff von rd. 25 at Druck; die entwickelte Wärmemenge wird kalorimetrisch gemessen.

Bedeutet *G* das Gewicht der verbrannten Substanz, *π* den Wasserwert des Apparates, *W* die Wassermenge des Kalorimeters in kg, *Δt* die beobachtete Temperaturerhöhung, *Δt<sub>k</sub>* eine den Wärmeaustausch mit der Umgebung berücksichtigende Korrektur in °C, so ist der Heizwert

$$h = \frac{(W + \pi)(\Delta t + \Delta t_k)}{G} \text{ WE.}$$

*Δt<sub>k</sub>* bestimmt man durch Beobachtung der Temperaturänderung des Kalorimeters vor und nach dem Versuch. *π* wird durch Verbrennen einer Normalsubstanz (Benzoësäure 6322, Kampfer 9292, Rohrzucker

3955 WE/kg) oder auf elektrischem Wege ein für allemal ermittelt. An der gemessenen Wärmemenge sind Korrekturen für Zündung und die bei der Verbrennung gebildete Salpeter- und Schwefelsäure anzubringen. Die Säuren werden durch Titration bestimmt.

Zur genauen Ermittlung von  $h$  sind relativ große Wassermengen erforderlich und nur kleine Temperaturerhöhungen (2 bis 3° C) zulässig, daher die Anwendung hochempfindlicher Thermometer (Beckmann-, Widerstandsthermometer, Thermolemente) geboten.

Mittels der Bombe wird der obere Heizwert bestimmt. Ergibt sich aus der Elementaranalyse  $w$  kg Verbrennungswasser für 1 kg Brennstoff, so ist der untere Heizwert

$$h_u = h - 600 w \text{ WE.}$$

### Luftbedarf für die Verbrennung.

#### Zusammensetzung der Luft:

	Gew.-Teile	Raumteile	
Sauerstoff, O <sub>2</sub> . . .	0,231	0,2090	} ≈ 0,21
Stickstoff, N <sub>2</sub> . . .	0,7555	0,7813	
Argon, A . . . . .	0,013	0,0094	} ≈ 0,79.
Kohlensäure, CO <sub>2</sub> .	0,0005	0,0003	

Dazu kommt noch der nach Temperatur und Feuchtigkeitsgrad sehr verschiedene Wasserdampfgehalt. Größenordnung etwa 1 g für 1 cbm Luft. Näheres s. S. 421.

1 kg Brennstoff von der Zusammensetzung  $c$ ,  $h$ ,  $o$  in Gewichtsteilen braucht zu seiner vollkommenen Verbrennung an Sauerstoff mindestens:

$$S_{\min} = \frac{1}{12} \left[ c + 3 \left( h - \frac{o}{8} \right) \right] \text{ in Mol, } ^*)$$

dieser Wert ist mit 24,4 oder 22,4 zu multiplizieren, um die Sauerstoffmenge in cbm von 15<sup>0</sup> u. 1 at oder in cbm von 0<sup>0</sup> u. 760 mm zu erhalten.

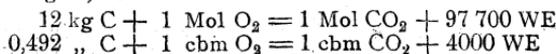
An Luft ist der  $\frac{1}{0,21}$ -fache Betrag nötig.

$$L_{\min} = 9,7 \left[ c + 3 \left( h - \frac{o}{8} \right) \right] \text{ in cbm von } 15^0 \text{ u. } 1 \text{ at,}$$

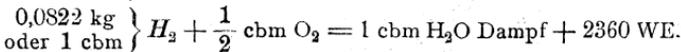
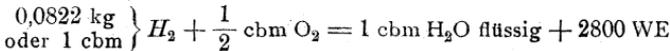
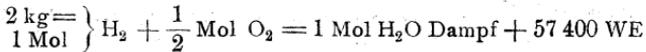
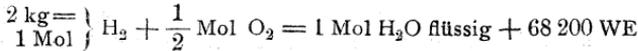
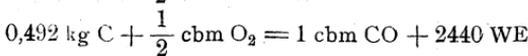
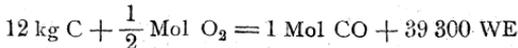
$$L_{\min} = 8,9 \left[ c + 3 \left( h - \frac{o}{8} \right) \right] \text{ in cbm von } 0^0 \text{ u. } 760 \text{ mm.}$$

In der Praxis wird stets mehr Luft zugeführt, als für die Verbrennung nötig. Das Verhältnis  $\lambda = \frac{L}{L_{\min}}$  der zugeführten zur Mindestluftmenge nennen wir den **Luftüberschuß**.

**Verbrennungsgleichungen:** (Alle Raumeinheiten sind auf 15<sup>0</sup> u. 15 at bezogen.)



\*) S. Kapitel VII S. 416 „Vollkommene Gase“.



**1 kg Brennstoff gibt Verbrennungserzeugnisse in Mol:**

$$\text{CO}_2 = \frac{c}{12}, \quad \text{H}_2\text{O} = \frac{h}{2} + \frac{w}{18},$$

zur Umrechnung in cbm sind diese Werte wie oben mit 24,4 bzw. 22,4 zu multiplizieren. Außerdem enthalten die Verbrennungsgase den Stickstoff der Luft und den überschüssigen Sauerstoff und zwar beträgt für 1 kg Brennstoff in cbm:

$$\text{O}_2 = 0,21 L_{\text{min}} (\lambda - 1)$$

$$\text{N}_2 = 0,79 L_{\text{min}} \cdot \lambda$$

$$\text{O}_2 + \text{N}_2 = L_{\text{min}} (\lambda - 0,21)$$

Das Verhältnis der Menge der **trockenen Rauchgase** (ohne Wasser) zu der zugeführten Luftmenge beträgt:

$$\frac{\text{Rauchgase}}{\text{Luft}} = 1 + \frac{1}{\lambda} \left( \frac{c}{12 L_{\text{min}}} - 0,21 \right).$$

Die **Zusammensetzung der trockenen Rauchgase** nach Raumteilen beträgt:

$$\text{CO}_2 = \frac{0,21 c}{\lambda c + (\lambda - 0,21) 3 \left( h - \frac{o}{8} \right)}$$

$$\text{CO}_2 + \text{O}_2 = 0,21 - 0,79 \frac{3}{c} \left( h - \frac{o}{8} \right)$$

oder

$$\text{CO}_2 + \text{O}_2 = 0,21 \left[ 1 - \frac{0,79}{\lambda \left[ 3 \left( h - \frac{o}{8} \right) - 0,21 \right]} \right].$$

Für einen Brennstoff, der nur Kohlenstoff enthält, beträgt der  $\text{CO}_2 + \text{O}_2$ -Gehalt der Rauchgase stets 0,21 Raumteile; je mehr Wasserstoff der Brennstoff enthält, desto mehr sinkt der  $\text{CO}_2 + \text{O}_2$ -Gehalt.

Der Kohlensäuregehalt der Rauchgase hängt in erster Linie vom Luftüberschufs ab; für Brennstoffe, die nur Kohlenstoff enthalten (Koks), beträgt  $\text{CO}_2$  in den Rauchgasen:

$$\text{CO}_2 = \frac{0,21}{\lambda}$$

Aus dem durch Analyse bestimmten Kohlensäuregehalt der Rauchgase läßt sich bei bekannter Zusammensetzung des Brennstoffes der Luftüberschufs berechnen; es ist:

$$\lambda = \frac{\frac{c}{\text{CO}_2} + 3 \left( h - \frac{o}{8} \right)}{c + 3 \left( h - \frac{o}{8} \right)} \cdot 0,21.$$

Wenn der Kohlenstoff nicht vollständig zu  $\text{CO}_2$ , sondern zum Teil zu **Kohlenoxyd** verbrennt, so bedeutet dies einen Verlust für die Feuerung, der sich wie folgt berechnet:

Verlust durch unvollkommenes Verbrennen

$$= \frac{\text{Heizwert des gebildeten Kohlenoxyds}}{\text{Heizwert des Brennstoffes}} = \frac{\text{CO}}{\text{CO}_2 + \text{CO}} = 5,04 \left( 0,285 + \frac{h - \frac{o}{8}}{c} \right)$$

$\text{CO}_2$  und CO bedeuten die Raumenteile dieser Gase in den trockenen Rauchgasen.

**Verbrennungstemperatur** ist die Temperatur, welche die Verbrennungserzeugnisse bei vollkommener Verbrennung und bei Ausschluß von Wärmeverlusten annehmen. Auch hierbei unterscheiden wir Verbrennung bei gleichem Druck (Feuerungen) und bei gleichem Volumen (Verbrennungsmaschinen). Im ersten Fall bleibt der Wärmeinhalt, in letzterem die Energie konstant. Die Höhe der Verbrennungstemperatur ist von der Art des Brennstoffes (Heizwert), der Anfangstemperatur (Vorwärmung der Verbrennungsluft) und sehr wesentlich vom Luftüberschufs abhängig. Bei der Berechnung der Verbrennungstemperatur muß das Anwachsen der spezifischen Wärme der Gase mit der Temperatur beachtet werden.

Die folgende Zusammenstellung und Tafel I gibt nach Versuchen von Langen, Pier und Holborn & Henning die mittleren spezifischen Wärmen für konstanten Druck zwischen  $0^0$  und  $t^0$  für 1 Mol, d. h. für die durch das Molekulargewicht angegebene Menge. Die spezifischen Wärmen für konstantes Volumen sind für alle Gase und alle Temperaturen um 2 kleiner. Die spezifische Wärme für 1 cbm von  $15^0$  u. 1 at oder  $0^0$  u. 760 mm findet man, indem man die Formel oder Tafelwerte durch 24,4 bzw. 22,4 dividiert.

Die wirklichen spez. Wärmen  $C_v$ ,  $C_p$  ergeben sich, wenn man in diesen Formeln den Faktor von  $t$  verdoppelt, von  $t^2$  verdreifacht usw.

Die Wärmemenge, welche nötig ist, um eine Gasmenge von  $\gamma$  cbm von  $15^0$  u. 1 at bei unveränderlichem  $p$  oder  $v$  von  $t_1$  auf  $t_2$  zu erwärmen, berechnet sich nach folgendem Muster:

$$Q = \frac{\gamma}{24,4} [(a + bt_2 + ct_2^2 + dt_2^3) t_2 - (a + bt_1 + ct_1^2 + dt_1^3) t_1]$$

worin die Gröfsen  $a, b, c, d$  den folgenden Gleichungen zu entnehmen sind.

Ueber  $1800^0$  C beginnt die Verbrennung allmählich unvollständig zu werden, da dann Zersetzung von Kohlensäure und Wasserdampf eintritt.

Mittlere Molekularwärmen für konstanten Druck  $[\mu c_p]_o^t$

für zweiatomige Gase:

Langen . . . . .	6,8 + 0,0006 t
Pier . . . . .	6,9 + 0,00045 t
Holborn & Henning . . . . .	6,58 + 0,000532 t

für H<sub>2</sub>O:

Langen . . . . .	7,9 + 0,00215 t
Pier . . . . .	8,065 + 0,0005 t + 0,0000000002 t <sup>2</sup>
Holborn & Henning . . . . .	8,43 - 0,0003815 t + 0,000000792 t <sup>2</sup>

für CO<sub>2</sub>:

Langen . . . . .	8,7 + 0,0026 t
Pier . . . . .	8,800 + 0,0033 t - 0,00000095 t <sup>2</sup> + 0,0000000001 t <sup>3</sup>
Holborn & Henning . . . . .	8,84 + 0,003267 t - 0,000000792 t <sup>2</sup>

Für andere Gase besitzen wir noch keine genauen Versuche über die Veränderlichkeit der spezifischen Wärme.

Es kann etwa gesetzt werden:

$$\text{für CH}_4: [\mu c_p]_o^t = 7,7 + 0,008 t$$

$$\text{für C}_2\text{H}_4: [\mu c_p]_o^t = 9,4 + 0,011 t.$$

Die Verbrennungstemperatur  $t$  für 1 kg Brennstoff mit  $L = \lambda \cdot L_{\text{min}}$  Luft bei einer Anfangstemperatur der Luft von  $t_0$  und bei gegebener Zusammensetzung und bekanntem Heizwert des Brennstoffes findet sich nun wie folgt:

$$h_u + \lambda \cdot L_{\text{min}} \cdot [\mu C_p]_{2 \text{ at}}^{t_0} \cdot t_0 = \left[ \frac{c}{12} [\mu c_p]_{\text{CO}_2}^t + \left( \frac{h}{2} + \frac{w}{18} \right) [\mu c_p]_{\text{H}_2\text{O}}^t + L_{\text{min}} (\lambda - 0,21) [\mu c_p]_{2 \text{ at}}^t \right] t.$$

Damit findet sich  $t$  rasch mit Hilfe der Tafel der mittleren spezifischen Wärmen, indem man für  $[\mu c_p]_o^t$  zunächst schätzungsweise die Temperatur  $t$  annimmt.

Für einige typische Brennstoffe ist in der folgenden Tafel (3. Reihe) die Rechnung für verschiedenen Luftüberschufs durchgeführt, wobei die Werte der spezifischen Wärmen von Pier benutzt sind. Angenommen ist hierbei, daß die Luft mit  $20^0$  zugeführt wird.

Tafel I.

Temp. ° C	Zweiatomige Gase			H <sub>2</sub> O			CO <sub>2</sub>			Temp. ° C
	Langen	Pier	Holborn & Henning	Langen	Pier	Holborn & Henning	Langen	Pier	Holborn & Henning	
0	6,80	6,90	6,58	7,90	8,07	8,40	8,70	8,80	8,84	0
100	6,86	6,95	6,63	8,12	8,12	8,40	8,96	9,12	9,16	100
200	6,92	6,99	6,69	8,33	8,17	8,39	9,22	9,42	9,46	200
300	6,98	7,04	6,74	8,55	8,22	8,38	9,48	9,71	9,75	300
400	7,04	7,08	6,79	8,76	8,28	8,40	9,74	9,97	10,02	400
500	7,10	7,13	6,85	8,98	8,34	8,44	10,00	10,23	10,28	500
600	7,16	7,17	6,90	9,19	8,41	8,49	10,26	10,47	10,52	600
700	7,22	7,22	6,95	9,41	8,48	8,55	10,52	10,68	10,74	700
800	7,28	7,26	7,01	9,62	8,57	8,63	10,78	10,88	10,95	800
900	7,34	7,31	7,06	9,84	8,66	8,73	11,04	11,07	11,14	900
1000	7,40	7,35	7,11	10,05	8,77	8,84	11,30	11,25	11,32	1000
1100	7,46	7,40	7,17	10,27	8,88	8,97	11,56	11,41	11,48	1100
1200	7,52	7,44	7,22	10,48	9,01	9,11	11,82	11,56	11,62	1200
1300	7,58	7,49	7,27	10,70	9,15	9,27	12,08	11,70	11,75	1300
1400	7,64	7,53	7,32	10,91	9,31	9,45	12,34	11,83	11,86	1400
1500	7,70	7,58	7,38	11,13	9,49	9,64	12,60	11,95	—	1500
1600	7,76	7,62	7,43	11,34	9,68	9,85	12,86	12,06	—	1600
1700	7,82	7,67	7,48	11,56	9,90	10,07	13,12	12,16	—	1700
1800	7,88	7,71	7,54	11,77	10,13	10,31	13,38	12,25	—	1800
1900	7,94	7,76	7,59	11,99	10,39	10,56	13,64	12,33	—	1900
2000	8,00	7,80	7,64	12,20	10,67	10,84	13,90	12,40	—	2000
2100	8,06	7,85	7,70	12,42	10,98	11,12	14,16	12,47	—	2100
2200	8,12	7,89	7,75	12,63	11,29	11,42	14,42	12,53	—	2200
2300	8,18	7,94	7,80	12,85	11,65	11,74	14,68	12,58	—	2300
2400	8,24	7,98	7,86	13,06	12,03	12,08	14,94	12,63	—	2400
2500	8,30	8,03	7,91	13,28	12,44	12,43	15,20	12,68	—	2500

**Wärmeverlust durch die Verbrennungsgase.** Dadurch, daß die Verbrennungsgase einer Feuerung mit einer höheren als der Umgebungstemperatur in den Schornstein abziehen, entsteht ein Verlust. Dieser Schornsteinverlust ist gleich:

$$\frac{\text{Wärmeinhalt der abziehenden Gase}}{\text{Heizwert des Brennstoffes}}$$

damit erhalten wir diesen Verlust in Bruchteilen des Heizwertes durch folgende Formel:

Schornsteinverlust

$$t_1 \cdot \left\{ \frac{c}{12} [\mu c_p]_{\text{CO}_2}^{t_1} + \left( \frac{h}{2} + \frac{w}{18} \right) [\mu c_p]_{\text{H}_2\text{O}}^{t_1} + L_{\text{min}} (\lambda - 0,21) [\mu c_p]_{2 \text{ at}}^{t_1} \right\}$$

*hu*

für  $t_1$  ist der Temperaturüberschufs der abziehenden Rauchgase über der Umgebung zu setzen.

Auch hierfür sind in der folgenden Tafel Beispiele für typische Brennstoffe, verschiedene Abgastemperaturen und verschiedenen Luftüberschufs gerechnet.

Vielfaches der theo- retischen Luftmenge	CO <sub>2</sub> -Gehalt der Heizgase aus der Analyse  R.-T.	Ver- brennungs- temperatur  °C	Wärmeverlust $z$ für eine Abgastemperatur von °C				
			500	400	300	200	100
			Kohlenstoff. $h = 8140$ .				
1,0	0,210	2330	0,181	0,142	0,103	0,066	0,029
1,25	0,167	1965	0,222	0,175	0,127	0,081	0,036
1,5	0,139	1690	0,263	0,207	0,151	0,096	0,042
2,0	0,105	1340	0,346	0,273	0,199	0,127	0,055
2,5	0,084	1105	0,428	0,338	0,247	0,158	0,068
3,0	0,070	945	0,511	0,403	0,295	0,188	0,082
Steinkohle. 0,75 C, 0,05 H <sub>2</sub> , 0,03 W. $h_u = 7500$ .							
1,0	0,181	2185	0,193	0,151	0,110	0,070	0,031
1,25	0,144	1855	0,236	0,184	0,134	0,085	0,038
1,5	0,120	1620	0,278	0,217	0,158	0,101	0,045
2,0	0,089	1285	0,363	0,284	0,207	0,131	0,058
2,5	0,071	1065	0,448	0,351	0,255	0,163	0,072
3,0	0,059	910	0,534	0,419	0,304	0,194	0,086
Braunkohle. 0,40 c, 0,03 h, 0,36 w. $h_u = 3600$ .							
1,0	—	1920	0,231	0,183	0,136	0,089	0,045
1,5	—	1450	0,323	0,256	0,190	0,125	0,062
2,0	—	1170	0,414	0,328	0,244	0,161	0,080
2,5	—	980	0,505	0,401	0,298	0,197	0,098
3,0	—	850	0,596	0,473	0,352	0,232	0,113
Gichtgas. 0,03 H <sub>2</sub> + 0,29 CO + 0,08 CO <sub>2</sub> + 0,60 N <sub>2</sub> . $h_u = 880$ .							
1,0	0,236	1595	0,279	0,218	0,158	0,101	0,044
1,5	0,190	1350	0,339	0,265	0,192	0,122	0,053
2,0	0,159	1170	0,399	0,312	0,227	0,144	0,063
2,5	0,137	1040	0,459	0,358	0,261	0,166	0,072
3,0	0,121	930	0,518	0,401	0,295	0,187	0,082

In lebhaftes Verbrennung gerät ein Körper nur, wenn er auf seine für ihn charakteristische Entzündungstemperatur erhitzt wird, er brennt weiter, solange die Temperatur nicht unter die Entzündungstemperatur sinkt und genug Sauerstoff zu seiner Verbrennung vorhanden ist.

Durch Abkühlung wird die Verbrennung unvollständig (Rufscheidung usw.).

Feste (und flüssige) natürliche Brennstoffe werden bei der Verbrennung wie bei der trockenen Destillation (Entgasung) zunächst zersetzt und geben gasförmige Produkte ab, die mit Flamme verbrennen.

Brennstoffe, die keine flüchtigen Bestandteile enthalten, z. B. Holzkohle, Koks, glühen nur, brennen aber nicht mit Flamme. Bei der gewöhnlichen Rostfeuerung ist daher zu unterscheiden eine Verbrennung über dem Rost, gebildet durch die Flamme der entwickelten Gase, und eine Verbrennung auf dem Rost, gebildet durch die Glut des Destillationsrückstandes.

Die Produkte vollkommener Verbrennung sind bei allen Brennstoffen Kohlensäure und Wasserdampf.

**Rufs und Rauch.** Bei Verbrennung fester Heizstoffe ist häufig die Zuführung von Luft durch den Rost ungleichmäßig und dadurch die Mischung von Gas und Luft unvollständig, oder die Entwicklung von brennbaren Gasen (Teerdämpfen usw.) erfolgt schneller und reichlicher als die zur völligen Verbrennung erforderliche Luftzufuhr, oder die Flamme wird vor der vollständigen Verbrennung durch Berührung mit kalten Flächen unter die Entzündungstemperatur der schwer brennbaren Teerdämpfe abgekühlt. In diesen Fällen entsteht Rauch und Rufs. Die vollständige Verbrennung fester Brennstoffe wird meistens nur durch einen Luftüberschuß ermöglicht.

Zur Abhilfe gegen Rufs und Rauch ist die Temperatur in der Feuerung möglichst hoch zu halten und dem Brennstoff mehr Luft zuzuführen. Ganz unwirksam oder direkt schädlich ist die nachträgliche Zuführung von Luft zu den Verbrennungsgasen; es hat dies eine weitere Abkühlung und eine Verminderung des Schornsteinzuges zur Folge, bewirkt aber keine Rauchverzehrung.

Gut entgaster Koks liefert ohne Rauch- und Rufsbildung bei vollständiger Verbrennung Kohlensäure, bei unvollständiger Kohlenoxyd.

Im **Bunsenbrenner** kann dem Gase bis zur Hälfte der zur vollständigen Verbrennung notwendigen Luft zugeführt werden.

Am inneren Kegel der Bunsenflamme verbrennt Luft in überschüssigem Gas unter Bildung von Kohlensäure, Wasser, Kohlenoxyd und Wasserstoff (Wassergasgleichgewicht); im äußeren Flammenmantel verbrennt das nur teilweise verbrannte Gas vollständig im Luftüberschuß zu Wasser und Kohlensäure; in der Zwischenzone brennt nichts; d. h. da kein freier Sauerstoff vorhanden ist, kann auch keine Oxydation erfolgen, vielmehr ist die Flamme eine Masse glühender Gase, welche allseitig von einer ungemein dünnen Zone umgeben ist, in der die Verbrennung stattfindet. Bei weiterer Steigerung der Luftzufuhr im Bunsenbrenner schlägt die Flamme zurück, d. h. die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Flamme nach rückwärts wird dann größer als die Ausströmungsgeschwindigkeit des Gasluftgemisches aus dem Brennerrohr. Durch Erhöhung der letzteren (Preßgas, Preßluft, Gebläse) gelingt es, die ganze zur vollkommenen Verbrennung nötige Luft vor der Verbrennung beizumischen und eine auf ein kleines Volumen konzentrierte sehr heiße Flamme zu erzielen (Sauerstoff-Leuchtgasgebläse).

## C. Verbrennung gasförmiger und flüssiger Brennstoffe.\*)

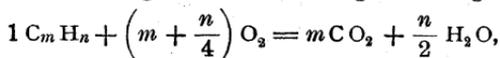
1. Von gasförmigen Brennstoffen kommen technisch in Betracht: Kohlenoxyd  $\text{CO}$ , Wasserstoff  $\text{H}_2$  und eine Anzahl Kohlenwasserstoffe der allgemeinen Formel  $\text{C}_m\text{H}_n$ , darunter besonders: Methan  $\text{CH}_4$ , Aethylen  $\text{C}_2\text{H}_4$ , Azetylen  $\text{C}_2\text{H}_2$ .

Die Sauerstoff- und Luftmenge, die zur Verbrennung von 1 cbm eines Gases mindestens notwendig sind, seien:  $S_{\min}$ , und  $L_{\min}$  in cbm.

Für Kohlenwasserstoffe  $\text{C}_m\text{H}_n$  ist

$$S_{\min} = m + \frac{n}{4}, \quad L_{\min} = \frac{1}{0,21} S_{\min}.$$

Für Kohlenwasserstoffe gilt die Verbrennungs-Gleichung



d. h. 1 Raum-Einheit des Gases verbrennt mit  $\left(m + \frac{n}{4}\right)$  R.-E. Sauerstoff zu  $m$  R.-E. Kohlensäure und  $\frac{n}{2}$  R.-E. Wasserdampf.

2. 1 R.-E. Gas sei aus folgenden Bestandteilen gemischt [die chemischen Zeichen sollen zugleich die Raumteile bezeichnen]:

$\text{CO} + \text{H}_2 + \text{CH}_4 + \text{C}_2\text{H}_4 + \text{C}_2\text{H}_2 + \text{O}_2 + \text{N}_2 + \text{CO}_2 + \text{H}_2\text{O} = 1$ .  
Die zur Verbrennung von 1 R.-E. dieser Mischung nötige Sauerstoffmenge in R.-E. ist

$$S_{\min} = \frac{\text{CO} + \text{H}_2}{2} + 2 \text{CH}_4 + 3 \text{C}_2\text{H}_4 + 2,5 \text{C}_2\text{H}_2 - \text{O}_2.$$

Als Verbrennungsgase ergeben sich in R.-E., wenn dem Gase  $L$  R.-E. Luft beigemischt werden:

$$\text{Kohlensäure} = \text{CO}_2 + \text{CO} + \text{CH}_4 + 2 \text{C}_2\text{H}_4 + 2 \text{C}_2\text{H}_2,$$

$$\text{Wasserdampf} = \text{H}_2\text{O} + \text{H}_2 + 2 \text{CH}_4 + 2 \text{C}_2\text{H}_4 + \text{C}_2\text{H}_2,$$

$$\text{Sauerstoff} = 0,21 L - S_{\min},$$

$$\text{Stickstoff} = \text{N}_2 + 0,79 L.$$

Die Verbrennung hat im allgemeinen eine Veränderung (Verkleinerung) der Moleküllzahl im Gefolge, dadurch ändert sich die Gaskonstante  $R$  und, gleiche Anfangs- und Endwerte von Druck und Temperatur vorausgesetzt, auch der Rauminhalt.

Für 1 R.-E. von  $\text{C}_m\text{H}_n$  ist die Raumverkleinerung (Kontraktion)  $\Delta V = \left(1 - \frac{n}{4}\right)$  R.-E. Ist die Gaskonstante des Gemisches von Gas und Luft vor der Verbrennung  $R'$  und nach derselben  $R''$ , so ist

$$\frac{R''}{R'} = \frac{1 + L - \Delta V}{1 + L}.$$

\*) In diesem Kapitel sind wiederholt die Formeln und Tafeln über vollkommene Gase S. 416 bis 420 benutzt.

Für die obige Gasmischung ist

$$\Delta V = \frac{\text{CO} + \text{H}_2 + \text{C}_2\text{H}_2}{2}.$$

Da bei den gewöhnlichen Werten von Druck und Temperatur der Wasserdampf kondensiert, so tritt dadurch eine weitere Raumabnahme  $\Delta V'$  ein, die gleich dem früher berechneten Rauminhalt des dampfförmig gedachten Wassers ist.

3. Den **Heizwert** eines gasförmigen Brennstoffes bezieht man entweder auf die Gewichtseinheit (kg),  $h$ , oder auf die Raumeinheit, u. zw. auf 1 cbm bei 15° C und 1 at,  $H$ :

$$H = h \frac{\mu}{847} \frac{10000}{288} = h \frac{\mu}{24,4}; \quad \mu h = 24,4 H.$$

Der Heizwert hat erst eine bestimmte Bedeutung, wenn man den Zustand des Gemisches vor und nach der Verbrennung genau angibt. Hierbei kommen zwei Fälle besonders in Betracht:

$\alpha$ . Der Heizwert für gleichbleibenden Druck  $h_p$ ,  $H_p$ , ist die Wärmemenge, die nach außen abgegeben wird, wenn Temperatur und Druck vor und nach der Verbrennung denselben Wert haben.

$\beta$ . Der Heizwert für gleichbleibenden Rauminhalt  $h_v$ ,  $H_v$ , ist die Wärmemenge, die abgegeben wird, wenn Temperatur und Rauminhalt vor und nach der Verbrennung gleiche Werte haben.

Die Heizwerte für gleichen Druck und gleichen Rauminhalt unterscheiden sich (gleichen Anfangszustand vorausgesetzt) durch die Arbeit, die der Raumveränderung  $\Delta V + \Delta V'$  für gegebenen unveränderlichen Druck entspricht. Für den Druck von 1 at ist

$$H_p - H_v = A 10000 (\Delta V + \Delta V') = 23,4 (\Delta V + \Delta V').$$

Der Unterschied der beiden Heizwerte ist sehr gering und kommt höchstens bei Wasserstoff in Betracht; für ihn ist bei 15° und 1 at

$$H_p - H_v = \frac{15000}{427} = 35 \text{ oder } 1,25 \text{ vH von } H_p.$$

Bezeichnen  $i'$ ,  $u'$ ,  $c'_v$ ,  $c'_p$  den Wärmeinhalt, die Energie und die spez. Wärmen für 1 kg des brennbaren Gemisches und  $i''$ ,  $u''$ ,  $c''_v$ ,  $c''_p$  dieselben Größen nach der Verbrennung, O in kg die nötige Sauerstoffmenge für 1 kg des Brennstoffes, so ist

$$h_p = (1 + O)(i' - i''), \quad h_v = (1 + O)(u' - u'').$$

Besteht das Gemenge vor und nach der Verbrennung nur aus Gasen, und bezeichnet man den Heizwert für 0° mit  $h_p^0$ ,  $h_v^0$ , so ist der Heizwert für eine beliebige Temperatur  $t$

$$h_p = h_p^0 + (1 + O)(c'_p - c''_p)t, \quad h_v = h_v^0 + (1 + O)(c'_v - c''_v)t.$$

In der Regel kommt diese Abhängigkeit des Heizwertes von der Temperatur nicht in Betracht. Bestehen die Verbrennungserzeugnisse ganz oder zum Teil aus Wasser, so ändert sich der Heizwert bei der Verdampfungstemperatur sprunghaft um das Produkt aus der Ver-

dampfungswärme  $r$  (s. S. 480 u. f.) und der gebildeten Wassermenge. Letztere sei für 1 kg des Brennstoffes  $w$  kg, für 1 cbm  $W$  kg.

Für 1 kg Wasserstoff beträgt für atmosphärischen Druck  $w r_{100} = 9.539,1 = 4852$  WE oder 14 vH des Heizwertes  $h_p$ . Die Aenderung von  $h_v$  ist  $w q_{100} = 9.498,7 = 4488$  WE.

4. Wenn die Verbrennung ohne Wärmeabgabe nach außen stattfindet, so wird die ganze entwickelte Wärme von den Verbrennungsgasen aufgenommen. Auch hier sind zwei Sonderfälle wichtig:

**α. Verbrennung bei unveränderlichem Druck:** Das Gemisch, enthaltend 1 kg Brennstoff und  $G$  kg Luft und Beimengungen, habe vor der Verbrennung die Temperatur  $t_1$ , nach der Verbrennung die Temperatur  $t$ ; die gebildete Wassermenge sei  $w$ , dann ist

$$h_p + (1 + G) c_p' t_1 = w r_0 + (1 + G) c_p'' t.$$

**β. Verbrennung bei unveränderlichem Rauminhalt:**

$$h_v + (1 + G) c_v' t_1 = w q_0 + (1 + G) c_v'' t.$$

Diese und die früheren Formeln gelten auch für veränderliche spez. Wärmen, wenn unter  $C_p'$ ,  $C_p''$ ,  $C_v'$ ,  $C_v''$  die mittleren spez. Wärmen zwischen  $0^0$  und  $t_1^0$  bzw.  $t^0$  verstanden werden.

Die Größen  $h_p - w r_0$  und  $h_v - w q_0$  nennt man den **unteren Heizwert** bei unveränderlichem Druck und unveränderlichem Rauminhalt. Tritt bei der Verbrennung keine Raumverminderung ein, ( $\Delta V = 0$ ), so sind beide einander gleich; sonst unterscheiden sich beide durch den sehr kleinen, der Raumverminderung entsprechenden Arbeitswert. Man kann daher beide Werte einander gleich setzen und kurz mit  $h_u$  und  $H_u$  bezeichnen; setzt man noch abgerundet  $r_0 = 600$ , so erhält man die üblichen Formeln

$$h_u = h_p - w \cdot 600, \quad H_u = H_p - W \cdot 600.$$

Zur praktischen Bestimmung von  $H_p$  und  $W$  und damit von  $H_u$  dient in bester Weise das Kalorimeter von Junkers.

Wenn die Temperatur  $t_1$  vor der Verbrennung gering ist gegen  $t$ , so können mit Rücksicht auf die Unsicherheit der spez. Wärme der Verbrennungserzeugnisse die vorstehenden Verbrennungsgleichungen für den praktischen Gebrauch wie folgt vereinfacht werden:

$$h_u = (1 + G) c_p'' (t - t_1) \quad \text{und} \quad H_u = (1 + G) c_v'' (t - t_1).$$

Für gasförmige Brennstoffe schreibt man die Verbrennungsgleichungen nach Raumteilen ( $r$ )

$$\begin{aligned} H_u + \sum (r' C_p') t_1 &= \sum (r'' C_p'') t, \\ H_u + \sum (r' C_v') t_1 &= \sum (r'' C_v'') t, \end{aligned}$$

hierbei ist  $\sum r''$  um den Betrag der Raumverkleinerung  $\Delta V$  kleiner als  $\sum r'$ .

Ist  $p_1$  der Druck vor und  $p$  der nach der Verbrennung im unveränderlichen Raum, so ist

$$\frac{p}{p_1} = \frac{T R''}{T_1 R'}.$$

Formeln und Tafeln über die mittleren spezifischen Wärmen der Gase finden sich S. 485 u. 486.

### Zündgeschwindigkeit.

Die Verbrennung, die in einem Punkt eines entzündlichen Gasgemisches ausgelöst wird, kann sich in zwei wesentlich verschiedenen Formen fortpflanzen. Die Zündgeschwindigkeit ist bei der langsamen Verbrennung besonders durch die Wärmeleitung, die spezifische Wärme, die Dichte und durch die Aenderung der Reaktionsgeschwindigkeit mit der Temperatur bestimmt. Eine zweite Fortpflanzungsart der Verbrennung beruht auf der Erscheinung, daß die Entzündung durch die durch starken Druck bedingte Temperatursteigerung stattfindet (Kompressionswelle).

Mit der Zündgeschwindigkeit stehen die Explosionsgrenzen im engen Zusammenhang. Für diese erreicht die Zündgeschwindigkeit annähernd den Wert Null. Beide sind von der Natur des Brenngases, der Art und Menge der im Gemisch enthaltenen inerten Gase, der Größe und Gestalt des Explosionsraumes abhängig.

Nägel\*) fand bei Verwendung einer kugelförmigen Bombe von 30 l Inhalt mit zentraler Zündung für die Zündgeschwindigkeit die in Tafel 2 zusammengestellten Werte.

Tafel 2.

Wasserstoff-Luftgemische Anfangs-Temp. 15°, $H_u = 2360$			Leuchtgas-Luftgemische Anfangs-Temp. 75°, $H_u = 4300$			Generatorgas-Luftgemische Anfangs-Temp. 75°, $H_u = 1180$		
Volumenanteil des Brenngases im Gemisch	absol. Anfangs- druck at	Zünd- geschwindigkeit msk <sup>-1</sup>	Volumenanteil des Brenngases im Gemisch	absol. Anfangs- druck at	Zünd- geschwindigkeit msk <sup>-1</sup>	Volumenanteil des Brenngases im Gemisch	absol. Anfangs- druck at	Zünd- geschwindigkeit msk <sup>-1</sup>
0,1030	0,50	0,602	0,08	0,50	0,372	0,30	0,50	0,526
0,1043	1,50	0,671	0,08	1,00	0,193	0,30	3,50	0,362
0,1013	2,50	0,508	0,08	2,00	0,108	0,30	7,50	0,149
0,1813	0,50	4,378	0,11	0,50	1,559	0,465	0,50	2,183
0,1823	1,50	5,715	0,11	3,50	1,430	0,465	3,50	2,207
0,1823	2,50	6,120	0,11	5,50	1,435	0,465	5,50	1,913
0,2397	0,50	8,220	0,16	0,50	4,033			
0,2437	1,50	11,82	0,16	3,00	3,768			
0,2440	2,50	13,92	0,16	5,50	3,623			

\*) Mitteil. über Forsch.-Arb., Heft 54.

Bei Gemischen mit mittleren und hohen Gasgehalten von Leuchtgas und Generatorgas ist die Zündgeschwindigkeit vom Anfangsdruck fast unabhängig. Wasserstoff-Luftgemische ergeben mit steigendem Druck um so grössere Zündgeschwindigkeiten, je höher die Gasgehalte sind.

Das Explosionsbereich eines Gas-Luftgemisches liegt zwischen der unteren Grenze mit Luftüberschuss und der oberen mit Luftmangel. Die Zündgeschwindigkeit geht mit steigendem Volumenanteil des Brenngases im Gemisch durch ein Maximum. Die Lage des Maximums entspricht einem Mischungsverhältnis, bei dem das Brenngas von dem vorhandenen Sauerstoff nicht vollständig verbrannt werden kann.

Benzindampf-Luftgemische ergeben nach Neumann\*) die größte Zündgeschwindigkeit  $2,6 \text{ msk}^{-1}$  und höchste Maschinenleistung bei 20 vH Luftmangel. Die Explosionsgrenzen liegen bei 1,40 und 4,13 Volumen-vH Brenngas.

Tafel 3.

## Explosionsgrenzen verschiedener Gase und Dämpfe.

Art des Gases	Prozentgehalt der Mischung an brennbarem Gas			Explosionsbereich erstreckt sich über Prozente der mög- lichen Gas-Luft- mischungen
	Keine Explosion (untere Explosions- grenze)	Explosions- bereich in 19 mm Rohr	Keine Explosion (obere Explosions- grenze)	
Kohlenoxyd . . .	16,4	16,6—74,8	75,1	58,4
Wasserstoff . . .	9,4	9,5—66,3	66,5	57,0
Wassergas . . .	12,3	12,5—66,6	66,9	54,3
Acetylen . . .	3,2	3,5—52,2	52,4	49,0
Leuchtgas . . .	7,8	8,0—19,0	19,2	11,2
Aethylen . . .	4,0	4,2—14,5	14,7	10,5
Alkohol . . .	3,9	4,0—13,6	13,7	9,7
Methan . . .	6,0	6,2—12,7	12,9	6,7
Aether . . .	2,6	2,9—7,5	7,9	5,0
Benzol . . .	2,6	2,7—6,3	6,7	3,9
Pentan . . .	2,3	2,5—4,8	5,0	2,5
Benzin . . .	2,3	2,5—4,8	5,0	2,5

## 5. Verbrennung von Gasen und Gasgemischen.

In der Tafel S. 494 sind ausser den eingangs erwähnten einfachen Gasen einige technisch wichtige Gasgemische aufgenommen; da die

) Mitteil. über Forsch.-Arb., Heft 79.

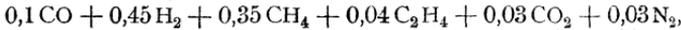
## Verbrennung von Gasen.

	Molekulargewicht	Dichte, bezogen auf Luft	Zur Verbrennung von 1 cbm nötiger Sauerstoff, cbm	Zur Verbrennung von 1 cbm nötige Luft, cbm	Raumverminderung bei der Verbrennung von 1 cbm Gas	Gebildetes Wasser für 1 cbm Gas von 15° und 1 at in kg	Oberer Heizwert für 1 kg Gas	Unterer Heizwert für 1 kg Gas	Oberer Heizwert für 1 cbm Gas von 15° und 1 at	Unterer Heizwert für 1 cbm Gas von 15° und 1 at
	$\mu$	$\delta$	$S$	$L$	$\Delta V$	$w$	$h$	$h_u$	$H$	$H_u$
Kohlenoxyd CO	28	0,97	0,5	2,38	0,5	0	2440	2440	2800	2800
Wasserstoff H <sub>2</sub>	2	0,07	0,5	2,38	0,5	0,74	34100	28700	2800	2360
Methan CH <sub>4</sub>	16	0,554	2	9,52	0	1,47	13250	11900	8700	7820
Aethan C <sub>2</sub> H <sub>6</sub>	30	1,035	3,5	16,7	-0,5	2,21	12350	11300	15200	13900
Propan C <sub>3</sub> H <sub>8</sub>	44	1,52	5	23,8	-1	2,95	12000	11050	21700	19950
Butan C <sub>4</sub> H <sub>10</sub>	58	2,00	6,5	31,0	-1,5	3,69	11800	10900	28100	25900
Aethylen C <sub>2</sub> H <sub>4</sub>	28	0,965	3	14,3	0	1,47	12000	11250	13800	12920
Propylen C <sub>3</sub> H <sub>6</sub>	42	1,45	4,5	21,4	-0,5	2,21	11850	11100	20400	19100
Butylen C <sub>4</sub> H <sub>8</sub>	56	1,935	6	28,6	-1	2,95	11600	10870	26600	24850
Azetylen C <sub>2</sub> H <sub>2</sub>	26	0,90	2,5	11,9	0,5	0,74	12000	11600	12800	12360
Leuchtgas . .	12,58	0,434	1,10	5,21	0,275	0,91	9960	8900	5135	4590
Wassergas . .	15,66	0,54	0,45	2,15	0,45	0,369	3930	3580	2520	2300
Generatorgas . .	24,25	0,84	0,21	1,00	0,21	0,133	1180	1100	1175	1095
Gichtgas . . .	28,48	0,98	0,16	0,76	0,16	0,022	768	757	896	883

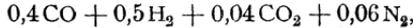
Zusammensetzung dieser Gase veränderlich ist, so können die Tafelwerte hier nur ungefähre Anhaltspunkte bieten.

Den Berechnungen sind folgende mittleren Raumverhältnisse zugrunde gelegt:

Leuchtgas:



Wassergas:



Generatorgas (Mischgas, Dowsongas, Kraftgas):



Gichtgas (Eisen-Hochofen):



Häufig enthält Wassergas und Mischgas etwas  $\text{CH}_4$ , in diesem Falle steigt der Heizwert beträchtlich.

Wird 1 cbm eines Gases oder Gasgemisches mit  $L$  cbm Luft gemischt und bei unveränderlichem Rauminhalt verbrannt, so berechnet sich die Endtemperatur ( $t$ ) aus folgender Gleichung:

$$H_u + t_0 \cdot \Sigma (V' [C_v]_0^{t_0}) = t \cdot \Sigma (V'' [C_v]_0^t)$$

oder

$$H_u + t_0 \cdot \Sigma (V' [\mu c_v]_0^{t_0}) = t \cdot \Sigma (V'' [\mu c_v]_0^t).$$

Die Lösung erfolgt am einfachsten durch vorläufige Annahme von  $t$  mit Hilfe der Tafel S. 486 und darauffolgende Wiederholung der Rechnung. (S. Beispiel S. 497.)

Bei Gasmaschinen sind stets noch Rückstände zu berücksichtigen.

Bei Verbrennung unter gleichbleibendem Druck ist oben  $C_p$  und  $c_p$  statt  $C_v$  und  $c_v$  zu setzen.

### Endtemperatur ( $t$ ) und Druckzunahme $\left(\frac{p}{p_0}\right)$ bei der Verbrennung von Gasen im geschlossenen Raum.

$\frac{H_u}{1+L} =$	300	350	400	450	500	550	600	650	700
	Generatorgas. $H_u = 1095$								
$t_0 = 0$	1315 5,49	1480 6,00	1640 6,48	1790 6,91	1940 7,30	2060 7,66	2180 7,96	2295 8,28	2405 8,52
100	1385 4,19	1545 4,55	1700 4,90	1850 5,21	1985 5,48	2115 5,73	2230 5,95	2345 6,15	2455 6,34
200	1450 3,44	1610 3,72	1765 3,98	1910 4,23	2040 4,43	2170 4,62	2285 4,79	2395 4,95	2505 5,08
300	1520 2,95	1680 3,18	1830 3,39	1970 3,58	2100 3,75	2225 3,91	2340 4,05	2450 4,17	2555 4,27
400	1590 2,62	1750 2,81	1895 2,98	2030 3,14	2160 3,28	2280 3,40	2395 3,51	2505 3,62	2605 3,71
500	1660 2,36	1815 2,53	1960 2,67	2095 2,80	2220 2,92	2235 3,02	2445 3,12	2555 3,21	2655 3,30

$\frac{H_u}{1+L} =$	300	350	400	450	500	550	600	650	700
	Leuchtgas. $H_u = 4590$								
$t_0 = 0$	1290 5,62	1460 6,22	1615 6,74	1760 7,25	1895 7,71	2025 8,14	2145 8,53	2260 8,92	2365 9,27
100	1365 4,31	1525 4,72	1675 5,10	1820 5,46	1955 5,79	2080 6,10	2195 6,38	2310 6,64	2415 6,90
200	1435 3,54	1595 3,86	1740 4,16	1880 4,43	2015 4,69	2135 4,92	2250 5,14	2360 5,33	2465 5,54
300	1505 3,05	1660 3,30	1805 3,54	1945 3,76	2075 3,97	2190 4,16	2305 4,34	2415 4,50	2515 4,66
400	1575 2,70	1730 2,91	1870 3,11	2005 3,29	2135 3,47	2250 3,63	2360 3,78	2470 3,92	2570 4,05
500	1650 2,44	1800 2,63	1940 2,79	2070 2,95	2195 3,10	2310 3,23	2420 3,36	2525 3,48	2620 3,59

Obere Zeile  $t$ . $t_0$  AnfangstemperaturUntere Zeile  $\frac{p}{p_0}$ . $H_u$  Unterer Heizwert  
 $L$  Luftmenge.

Die vorstehende Zahlentafel gibt ohne besondere Berücksichtigung der Rückstände die Endtemperaturen und Enddrücke für die Verbrennung von Leuchtgas und Generatorgas von der oben angenommenen mittleren Zusammensetzung. Für die spez. Wärme sind die Formeln von Langen S. 485 benutzt. Die Tafel läßt ersehen, daß der „Heizwert der Ladung“  $\frac{H_u}{1+L}$  in erster Linie maßgebend ist. Daß Leuchtgas niedrigere Temperaturen, aber höhere Drücke ergibt wie Generatorgas, ist eine Folge der geringeren Raumverminderung, denn diese wirkt auf Temperatur und Druck gerade entgegengesetzt ein.

Zusammensetzung der Gase wie S. 495.

Als Beispiel sind im folgenden alle in Betracht kommenden Rechnungen für das Leuchtgas durchgeführt.

Bestandteile	R.-T. $\rho$	$\mu$	$\mu r$	$H_p$	$r H_p$	Sauerstoff	
CO	0,10	28	2,80	2800	280	$\frac{1}{2}$	0,050
H <sub>2</sub>	0,45	2	0,90	2800	1260	$\frac{1}{2}$	0,225
CH <sub>4</sub>	0,35	16	5,60	8700	3045	2	0,700
C <sub>2</sub> H <sub>4</sub>	0,04	28	1,12	13800	550	3	0,120
CO <sub>2</sub>	0,03	44	1,32	—	—	—	—
N <sub>2</sub>	0,03	28	0,84	—	—	—	—
Summe	1,00	—	12,58	—	5135	—	1,095

Damit beträgt der Heizwert des Leuchtgases 5135 WE für 1 cbm bei 15° und 1 at.  
Die Gaskonstante ist  $R' = \frac{848}{12,58} = 67,4$ . Das Gewicht von 1 cbm ist  $\frac{12,58}{24,4} = 0,516$  kg

Die Dichtigkeit in bezug auf Luft ist  $\frac{12,58}{29} = 0,434$ .Zur Verbrennung ist 1,095 cbm Sauerstoff oder  $\frac{1,095}{0,21} = 5,21$  cbm Luft nötig. Es

sei angenommen, daß dem Gase 6,5 cbm Luft beigemischt werden, dann ergeben sich folgende Verbrennungserzeugnisse in cbm:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Kohlensäure} = 0,03 + 0,1 + 0,35 + 2 \cdot 0,04 = 0,560 \\ \text{Wasserdampf} = 0,45 + 2 \cdot 0,35 + 2 \cdot 0,04 = 1,230 \\ \text{Stickstoff und} \\ \text{Sauerstoff} \end{array} \right\} \begin{array}{l} 0,03 \\ = 5,405 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} \text{Kohlensäure} \\ \text{Wasserdampf} \\ \text{Stickstoff und} \\ \text{Sauerstoff} \end{array}} \right\} = \Sigma (r'') = L - S_{\min}$$

Summe = 7,225 cbm.

Die Raumverminderung beträgt mithin:  $1 + 6,5 - 7,225 = 0,275$ .  
Die für 1 cbm Gas gebildete Wassermenge ist

$$W = 1,23 \cdot \frac{18}{24,4} = 0,91 \text{ kg,}$$

daraus folgt der untere Heizwert des Gases

$$H_u = 5135 - 0,91 \cdot 600 = 4590 \text{ WE.}$$

Es sei nun die Temperatur und die Druckerhöhung zu bestimmen, welche eintreten, wenn das Gas-Luft-Gemisch ohne Wärmeverlust bei gleichem Rauminhalt verbrannt, und zwar unter der Annahme, daß dem Gemisch noch 1,5 cbm Rückstände beigemischt werden und daß die Temperatur  $t_0$  vor der Verbrennung  $300^0$  beträgt.

Nach Formel S. 495 und mit Benutzung der Werte von Pier, Tafel S. 486 folgt zunächst der Wert  $\Sigma (V' [\mu c_v]_0^{t_0})$  vor der Verbrennung aus der folgenden Uebersicht:

Bestandteile	Menge, $V'$	$[\mu c_v]_0^{300}$	$V' [\mu c_v]_0^{300}$
Zweiatom. Gase	$0,1 + 0,45 + 0,03 + 6,5 + \frac{1,5}{7,225} \cdot 5,435 = 8,21$	5,04	41,38
CO <sub>2</sub>	$0,03 + \frac{1,5}{7,225} \cdot 0,56 = 0,145$	7,71	1,12
H <sub>2</sub> O	$\frac{1,5}{7,225} \cdot 1,23 = 0,255$	6,22	1,58
CH <sub>4</sub>	= 0,35	8,00	2,80
C <sub>2</sub> H <sub>4</sub>	= 0,04	10,90	0,42
	9,00		47,30

Indem die Endtemperatur  $t$  zunächst  $2000^0$  geschätzt wird, ergibt sich nach der Verbrennung folgende Uebersicht:

Bestandteile	Menge, $V''$	$[\mu c_v]_0^{2000}$	$V'' [\mu c_v]_0^{2000}$	$[\mu c_v]_0^{2150}$	$V'' [\mu c_v]_0^{2150}$
Zweiatom. Gase	$5,435 + \frac{1,5}{7,225} \cdot 5,435 = 6,565$	5,80	38,00	5,87	38,50
CO <sub>2</sub>	$0,56 + \frac{1,5}{7,225} \cdot 0,56 = 0,675$	10,40	7,02	10,50	7,10
H <sub>2</sub> O	$1,23 + \frac{1,5}{7,225} \cdot 1,23 = 1,485$	8,67	12,88	9,14	13,55
	8,725		57,90		59,15

Wir erhalten nun in erster Annäherung:

$$t = \frac{H_u \cdot 24,4 + t_0 \Sigma (V' [\mu c_v]_0^{t_0})}{\Sigma (V'' [\mu c_v]_0^t)} = \frac{4590 \cdot 24,4 + 300 \cdot 47,3}{57,9} = 2180^0$$

nehmen wir  $t$  rund 2150 und rechnen wiederholt (s. Uebersicht), so finden wir:

$$t = \frac{4590 + 24,4 + 300 \cdot 47,3}{59,15} = 2134 \text{ oder rd. } \approx 2140^0.$$

Die Druckerhöhung beträgt:

$$\frac{p}{p_0} = \frac{T}{T_0} \cdot \frac{R''}{R'} = \frac{2413}{573} \cdot \frac{8,725}{9} = 4,08.$$

## Flüssige Brennstoffe.

		Molekulargewicht	Spez. Gew. bei 15°	Siedetemperatur	Oberer Heizwert für 1 kg	Unterer Heizwert für 1 kg	Zur Verbrennung von 1 kg nötiger Sauerstoff in cbm von 15° und 1 at	Zur Verbrennung von 1 kg nötige Luftmenge in cbm von 15° und 1 at	Bei der Verbrennung von 1 kg entsteht Kohlenstoff in cbm von 15° und 1 at	Bei der Verbrennung von 1 kg entsteht Wasserdampf in cbm von 15° und 1 at	Dasselbe in kg
		$\mu$	$\gamma$	$t_s$	$h$	$h_u$	$S_{min}$	$L_{min}$	$CO_2$	$H_2O$	$H_2O$
Alkohol	$C_2H_6O$	46	0,794	78,3	7100	6400	1,59	7,6	1,06	1,59	1,174
Spiritus	95 Gew.-Proz.		0,809	78,5	6740	6000	1,51	7,2	1,01	1,58	1,165
"	90 "		0,823	78,7	6390	5630	1,43	6,8	0,956	1,57	1,157
"	85 "		0,836	78,9	6030	5240	1,35	6,4	0,903	1,55	1,148
"	80 "		0,849	79,2	5680	4860	1,27	6,1	0,850	1,54	1,139
"	75 "		0,861	79,6	5320	4470	1,19	5,7	0,796	1,53	1,131
"	70 "		0,873	80,0	4970	4080	1,11	5,3	0,743	1,52	1,122
Benzol	$C_6H_6$	78	0,885	80,4	10000	9590	2,35	11,2	1,88	0,94	0,693
Naphthalin	$C_{10}H_8$	128	0,977 (bei 80°) 1,152 (fest b. 15°)	218	9700	9370	2,29	10,9	1,91	0,76	0,563
Pentan	$C_5H_{12}$	72	0,627	37	11750	10850	2,71	12,9	1,70	2,03	1,500
Hexan	$C_6H_{14}$	86	0,658	69	11550	10670	2,70	12,85	1,705	1,99	1,465
Heptan	$C_7H_{16}$	100	0,683	98	11520	10660	2,69	12,8	1,71	1,95	1,440
Benzin . . . . .		—	0,69~0,71	80—110	10500 bis 11000	9800 bis 10200	2,7	12,8	1,71	1,95	1,44
Petroleum . . . . .		—	0,79—0,82	200—250	10500 bis 11000	9800 bis 10200	2,7	12,8	1,73	1,87	1,38

6. Von **flüssigen Brennstoffen** kommen hauptsächlich die Destillationserzeugnisse des Erdöls in Betracht. Alle sind Mischungen einer großen Anzahl von Kohlenwasserstoffen, und zwar hauptsächlich der Methanreihe  $C_n H_{2n+2}$ ; sie unterscheiden sich wesentlich nur durch das spez. Gew. und die Flüchtigkeit (Siedepunkt), während die Zusammensetzung, der Heizwert, der Sauerstoffbedarf und die Verbrennungserzeugnisse nur wenig veränderlich sind.

Für Verbrennungsmaschinen werden am häufigsten Benzin und Petroleum (Leuchtöl) von den in der Zahlentafel S. 498 angenommenen mittleren Eigenschaften, für Dieselmotoren Petroleum, Braun- und Steinkohlenteeröle verwendet. Nach Rieppel ist für die Brauchbarkeit eines Oeles der Wasserstoffgehalt der Elementaranalyse entscheidend.

### Oele für Dieselmotoren.

	Spez. Gewicht bei 15°	Unterer Heizwert für 1 kg	Elementaranalyse		
			H	C	$12 \cdot \frac{H}{C}$
			vH	vH	vH
Gereinigtes Petroleum . .	0,879	10 610	14,20	85,10	2,00
Solaröl . . . . .	0,849	10 100	13,30	85,67	1,86
Braunkohlenrohöl . . . .	0,908	9 800	12,42	85,64	1,74
Paraffinöl . . . . .	0,926	9 750	11,63	85,98	1,55
Tegernsee-Rohöl . . . .	0,868	9 940	11,09	86,95	1,53
Anthracenöl . . . . .	1,091	8 960	6,89	89,10	0,92
Kreosotöl . . . . .	1,050	8 970	6,13	91,20	0,81

### Vergasung.

**Generatorgas** entsteht dadurch, daß in einem Schachtofen (Generator) eine hohe Schicht glühender Kohle erhalten wird, durch welche Luft und Wasserdampf geblasen werden. Die Kohle verbrennt größtenteils zu Kohlensäure, von welcher der überwiegende Teil wieder zu Kohlenoxyd reduziert wird.

Der eingeblasene Wasserdampf wird (meist nur teilweise) in Wasserstoff und Sauerstoff zersetzt. Der unzersetzte Teil erhöht den Feuchtigkeitsgehalt des Gases. Ist dieser während der Verbrennung noch im Gas erhalten, so erniedrigen sich die erreichbaren Verbrennungstemperaturen. Die Anwendung überhitzten Dampfes und Vorwärmen der eingeblasenen Luft ist vorteilhaft.

Die Größe des Wasserdampfzusatzes richtet sich nach der Beschaffenheit des zu vergasenden Brennstoffes. Bei Vergasung von reinem Kohlenstoff kann man etwa 0,220 kg, bei Steinkohle 0,180 kg Wasserdampf auf 1 cbm Luft rechnen.

Bei gut geleiteter Vergasung findet man unter normalen Verhältnissen und bei guten Brennstoffen einen um 25 vH schwankenden

Kohlenoxydgehalt. Als höchste Werte kommen 31 bis 32 vH als Folge einer sehr heißen Vergasung bei geringem oder keinem Wasserzusatz vor.

Die folgende Zahlentafel gibt die mittlere Gaszusammensetzung verschiedener Generatoren.

	Vergaster Brenn- stoff Heizwert für 1 kg	Gaszusammensetzung					Heizwert des Gases für 1 cbm
		CO <sub>2</sub>	CO	H <sub>2</sub>	CH <sub>4</sub>	N <sub>2</sub>	
Generator ohne Wasserdampf	Steinkohle 7950	0,053	0,237	0,065	0,019	0,626	1060
Generator mit Wasserdampf	Anthrazit 7800	0,072	0,268	0,184	0,006	0,470	1345
Wassergas	Koks 7000	0,030	0,445	0,489	0,004	0,032	2660
Hochofengas		0,075	0,312	0,024	5,001	0,588	1030

Das erzeugte Gas besteht aus CO, H<sub>2</sub>, CO<sub>2</sub> und N<sub>2</sub>, wobei die chemischen Zeichen zugleich die Raumteile der Stoffe in dem erzeugten Gas bezeichnen sollen. Das Verhältnis des Heizwertes der erzeugten Gasmenge zu dem Heizwert der gleichzeitig verbrannten Kohle bezeichnen wir als den Wirkungsgrad ( $\eta$ ) des Generators. Dann gelten folgende Beziehungen für die Raumteile:

$$H_2 + CO + CO_2 + N_2 = 1$$

$$\frac{21}{79} N_2 = 0,5 CO + CO_2 - 0,5 H_2$$

$$\eta (CO + CO_2) = 0,7 (H_2 + CO)$$

und daraus folgen für die Zusammensetzung des Gases bei angenommenem CO<sub>2</sub>-Gehalt:

$$H_2 + CO = \frac{8}{7} \frac{\eta}{3 - \eta} (1 - CO_2)$$

$$CO + CO_2 = \frac{0,8}{3 - \eta} (1 - CO_2)$$

$$N_2 = \frac{15}{7} \frac{1,4 - \eta}{3 - \eta} (1 - CO_2)$$

$$H_2 = \frac{8}{7} \frac{\eta - 0,7}{3 - \eta} (1 - CO_2) + CO_2.$$

Es sei

$\mathcal{H}$  der obere Heizwert für 1 cbm Gas bei 15° und 1 at,

$\mathcal{L}$  die Luftmenge in cbm für 1 cbm Gas,

$\mathcal{K}$  die Kohlenstoffmenge in kg für 1 cbm Gas von 15° und 1 at,

$\mathcal{W}$  die zersetzte Wassermenge in kg für 1 cbm Gas von 15° und 1 at;

dann gilt:

$$\mathcal{H} = 2800 (\text{H}_2 + \text{CO}); \quad \mathcal{L} = \frac{\text{N}_2}{0,79}; \quad \mathcal{K} = \frac{12}{24,4} (\text{CO} + \text{CO}_2); \quad \mathcal{W} = \frac{18}{24,4} \text{H}_2.$$

Das Verhältnis von Luft zu Kohlenstoff ist:

$$\frac{\mathcal{L}}{\mathcal{K}} = 6,9 (1,4 - \eta).$$

Führt man in den Generator keinen Wasserdampf, sondern nur Luft ein, so erhält man **Luftgas**, das aus CO, N<sub>2</sub> und CO<sub>2</sub> besteht, und zwar ist:

$$\text{CO} = 1,652 (0,21 - \text{CO}_2), \quad \text{N}_2 = 0,652 (1 + \text{CO}_2)$$

$$\eta = 0,7 \frac{0,21 - \text{CO}_2}{0,21 - 0,395 \text{CO}_2}.$$

**Wassergas** entsteht, wenn nur Wasserdampf in den Generator einblasen wird; es besteht aus H<sub>2</sub> und CO und meist etwas CO<sub>2</sub>:

Es wird  $\eta = 1,4$ , d. h. dem Generator muß noch eine Wärmemenge von 40 vH vom Heizwert des verbrannten Kohlenstoffes zugeführt werden. Dies geschieht durch „**Warmblasen**“ mittels des Luftgasprozesses bei abwechselndem Betrieb.

Die Zusammensetzung des Wassergases wird:

$$\text{H}_2 = 0,5 (1 + \text{CO}_2) \quad \text{CO} = 0,5 (1 - 3 \text{CO}_2).$$

$\mathcal{H}$ ,  $\mathcal{L}$ ,  $\mathcal{K}$  und  $\mathcal{W}$  berechnen sich auch in diesen Sonderfällen nach den obenstehenden Formeln.

## VIERTER ABSCHNITT.

# FESTIGKEITSLEHRE.

## I. ALLGEMEINES UND VERSUCHSWERTE.

### A. Erklärungen und allgemeine Gesetze.\*)

Die Formänderung, die ein würfelförmiges Körperteilchen unter der Einwirkung äußerer Kräfte erfährt, besteht im allgemeinen aus **Längenänderungen** und aus **Winkeländerungen**. Den ersteren entsprechen **Normalspannungen**  $\sigma$ , den letzteren **Schubspannungen**  $\tau$  in den Flächen des Körperteilchens.

#### a. Längenänderungen und Normalspannungen.

1. Wird ein gerader zylindrischer Stab von der Länge  $l$  und vom Durchmesser  $d$  an seinen Endflächen durch zwei gleiche, entgegengesetzt gerichtete, gleichmäßig über die Endflächen verteilte Zugkräfte  $P$  beansprucht, so erfolgt

- 1) eine Vergrößerung der Länge  $l$  um  $\lambda$ , also auf  $l + \lambda$ ,
- 2) eine Verminderung des Durchmessers  $d$  um  $\delta$ , also auf  $d - \delta$ .

Das Verhältnis  $\epsilon = \frac{\text{Verlängerung}}{\text{Ursprüngliche Länge}} = \frac{\lambda}{l}$  heißt **Dehnung**.

Das Verhältnis  $\epsilon_q = \frac{\delta}{d} = \frac{\epsilon}{m}$  heißt **Quersammenziehung**.

Der Wert  $m = \frac{\epsilon}{\epsilon_q} = \frac{\text{Dehnung}}{\text{Quersammenziehung}}$  ist vom Stoffe des

Stabes abhängig und liegt für isotrope, d. h. nach allen Richtungen hin physikalisch sich gleichartig verhaltende Körper zwischen 3 und 4; für Metalle ist  $m = \frac{10}{3}$ .\*\*)

2. Der Dehnung  $\epsilon = \lambda : l$  entspricht, wenn  $F'$  den Stabquerschnitt bedeutet, die **Zugspannung** (Normalspannung)  $\sigma = P : F'$ . (Die Span-

\*) Im wesentlichen nach C. Bach, Die Maschinen-Elemente, 10. Aufl.; Stuttgart 1908, A. Bergsträsser.

\*\*) Für Flußeisen liegt nach neuen Versuchen von W. Krüger (Z. d. V. d. I. 1909 S. 1453)  $m$  zwischen 3,3 und 3,5.

nung  $\sigma$  wird stets auf den ursprünglichen Stabquerschnitt bezogen.) Das Verhältnis

$$\frac{\text{Dehnung}}{\text{Spannung}} = \frac{\varepsilon}{\sigma} = \alpha = \frac{1}{E}$$

heißt die **Dehnungszahl** (in qcm/kg) und sein umgekehrter Wert  $E = 1 : \alpha$  das **Elastizitätsmaß** (in kg/qcm). Es ist

$$\frac{\lambda}{l} = \frac{\sigma}{E} \quad \text{oder} \quad \lambda = \alpha l \sigma, \quad \text{ferner} \quad \alpha = \frac{F \lambda}{P l} \quad \text{und} \quad E = \frac{P l}{F \lambda}.$$

Die Dehnungszahl  $\alpha$  eines Stoffes ist demnach die Verlängerung in cm, die ein aus dem Stoffe bestehender Stab von 1 cm Länge und 1 qcm Querschnitt durch 1 kg Belastung erfährt, oder auch die Zahl, mit der man die Spannung  $\sigma$  multiplizieren muß, um die Dehnung zu erhalten, oder kurz: die Zunahme der Einheit der Länge für das Kilogramm Spannung.\*)

Im allgemeinen ist  $\alpha$  (oder  $E$ ) abhängig von der Spannung  $\sigma$ . Für manche Stoffe (z. B. für Schweifeseisen, Flußeisen, Stahl, Kupfer, Aluminium, Holz) ist jedoch  $\alpha$  innerhalb gewisser Spannungsgrenzen nahezu unveränderlich; alsdann sind also die Dehnungen  $\varepsilon$  den Spannungen  $\sigma$  proportional, und es ist  $\varepsilon = \alpha \sigma$  (**Hookesches Gesetz**). Die Spannung  $\sigma_p$ , bis zu der diese Proportionalität zwischen Dehnung und Spannung stattfindet, heißt **Proportionalitätsgrenze**.

Die meisten Baustoffe haben keine Proportionalitätsgrenze. Für sie — mit Ausnahme von Marmor und Gummi — gilt bis zur Streckgrenze ( $\sigma_f$ ) nach C. Bach und W. Schüle mit hinreichender Genauigkeit das allgemeine Gesetz der elastischen Dehnungen

$$\varepsilon = \alpha_0 \sigma^n \quad (\text{Potenzgesetz}).$$

Hierin sind  $\alpha_0$  und  $n$  für jeden Stoff unveränderlich; für Gußeisen, Kupfer, Zinkguß, Granit, Sandstein, Zement, Zementmörtel und Beton ist  $n > 1$ , und die Dehnungen wachsen rascher als die Spannungen; für Leder und Hanfseile ist  $n < 1$ .\*\*)

In Abb. 1 sind, dem Verhalten eines Stabes bei allmählich wachsender Zugbeanspruchung entsprechend, die Spannungen  $\sigma$  als Funktion der Dehnungen  $\varepsilon$  dargestellt.  $OZ_0$  = Achse der Dehnungen,  $OB_1$  = Achse der zugehörigen Spannungen, Linie  $OPSBZ$  = Spannungslinie. Dabei ist eine Proportionalitätsgrenze  $P$  vorausgesetzt, mithin  $OP$  eine Gerade.

\*) Die Dehnungszahl  $\alpha$  läßt sich mit der Wärme-Ausdehnungszahl  $\alpha$  (s. S. 391) vergleichen, die die Zunahme der Einheit der Länge eines Stabes für 1 Grad Temperaturerhöhung bedeutet.

\*\*) Für **Kautschuk** ist nach A. Imbert (Civ.-Ing. 1893 S. 120)

$$\varepsilon = e^m \sigma - 1, \quad \text{also} \quad \alpha_\sigma = m e^m \sigma.$$

Bezeichnet  $\alpha_\sigma$  den Wert der veränderlichen Dehnungszahl bei der Spannung  $\sigma$ , so ist nach dem Potenzgesetz

$$\varepsilon = \alpha_0 \sigma^n = \int_0^\sigma \alpha_\sigma d\sigma, \quad \text{also} \quad \alpha_0 n \sigma^{n-1} d\sigma = \alpha_\sigma d\sigma, \quad \alpha_\sigma = \frac{d\varepsilon}{d\sigma} = (\alpha_0 n) \sigma^{n-1}.$$

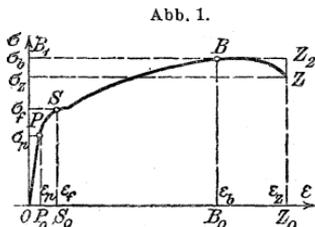
Für den spannungslosen Zustand ( $\sigma = 0$ ) würde hiernach  $\alpha_\sigma = 0$ ,  $E = \infty$  sein, falls  $n > 1$  (Gußeisen usw.), und  $\alpha_\sigma = \infty$ ,  $E = 0$ , falls  $n < 1$  (Leder usw.).

Die Dehnungszahl  $\alpha_\sigma$  ist die trigonometrische Tangente des Neigungswinkels der im Punkte  $(\varepsilon, \sigma)$  an die Spannungslinie gezogenen Tangente gegen die  $\sigma$ -Achse.

**Streck- oder Fließgrenze  $\sigma_f$**  (in kg/qcm) ist die oberhalb von  $\sigma_f$  liegende Spannung, bei der für manche Stoffe eine besonders rasche und bleibende Dehnung (ein Strecken, Fließen) eintritt. ( $S$  in Abb. 1.)

Oberer Streckgrenze ist die Spannung, bei der das Strecken beginnt, untere Streckgrenze die kleinste Spannung, auf die die Belastung während des Streckens sinkt. Auch bei Stoffen, die keine Streckgrenze besitzen, spricht man neuerdings von einer solchen, u. zw. versteht man darunter die Spannung, bei der die bleibende Dehnung  $\lambda_2$  (s. u. 3.) den Wert von 0,2 bis 0,5 vH erreicht.

Mit wachsender Belastung tritt unter Zunahme der Dehnung bei  $B$  die **Höchstspannung  $\sigma_b$**  ein, die man gewöhnlich gleich der **Zugfestigkeit  $K_z$**  anzunehmen pflegt. Die Zugfestigkeit (Bruchspannung)  $K_z$  (in kg/qcm) ist indessen genauer die (auf den ursprünglichen Stabquerschnitt  $F$  bezogene) Spannung  $\sigma_z$ , bei der mit fortgesetzter Dehnung der Bruch des Stabes erfolgt (bei  $Z$ , Abb. 1). Als zugehörige Dehnung zu  $K_z$  gilt allgemein  $\varepsilon_z$  (statt des schwer meßbaren  $\varepsilon_b$ ).



Bei zerrissenen Stäben (von der ursprünglichen Länge  $l$  und dem Querschnitte  $F$ ) ist noch festzustellen: die Länge  $l_b$  nach erfolgtem Bruch und der Querschnitt  $F_b$  an der Bruchstelle. Man nennt

$$\varphi = 100 \frac{l_b - l}{l} \text{ die Dehnung und}$$

$$\psi = 100 \frac{F - F_b}{F} \text{ die Querkusammenziehung (Einschnürung)}$$

des zerrissenen Stabes, ausgedrückt in vH der ursprünglichen Länge bzw. des ursprünglichen Querschnittes.  $\psi$  ist ein Maß für die **Zähigkeit** des Stoffes. (Ueber die Abhängigkeit der zu wählenden Länge  $l$  vom Stabquerschnitt  $F$  s. 5. Abschnitt, Stoffkunde.)

**3.** Wird der um  $\lambda$  gedehnte Stab entlastet, so verliert er die erlittene Formänderung nicht wieder vollständig; ist  $\lambda_1$  die verschwindende Längenänderung, die sogen. **elastische** (federnde) **Dehnung**, so ergibt sich die **bleibende Dehnung  $\lambda_2 = \lambda - \lambda_1$** .

Für genügend kleine Belastungen sind die bleibenden Dehnungen  $\lambda_2$  gleich null oder doch verschwindend klein. Die Spannung  $\sigma_e$ , bis zu der die bleibende Dehnung  $\lambda_2$  nahezu  $= 0$ , der Stab also nahezu vollkommen elastisch ist, neuerdings die Spannung, bei der  $\lambda_2$  den Wert 0,001 vH erreicht, heißt die **Elastizitätsgrenze**.

Bei Metallen wird durch Hämmern, Walzen, Ziehen (bei Stahl auch durch Härten und bei Gußeisen auch durch verminderten P- oder C-Gehalt) die Elastizitätsgrenze  $\sigma_e$  erweitert, in geringem Maße auch die Zugfestigkeit  $K_z$  vergrößert, die Dehnbarkeit (die bleibende Formänderung  $\lambda_2$ ) aber vermindert. — Ausglühen bewirkt das Gegenteil.

Ein Stoff ist um so elastischer, je größer die elastische (federnde) Längenänderung  $\lambda_1$  im Vergleich zur ganzen Längenänderung  $\lambda$  ist. Das Verhältnis  $\lambda_1 : \lambda$  dient daher als Maß für die **Vollkommenheit der Elastizität** (bei einer bestimmten Belastung). Für vollkommene Elastizität ist  $\lambda_1 : \lambda = 1$ ; sonst ist das Verhältnis ein echter Bruch.

Die **Größe der Elastizität**  $\alpha_1$  ist die Federung der Längeneinheit für die Einheit der Spannung, also  $\alpha_1 = \frac{\lambda_1}{l\sigma}$ .

4. Die durch eine bestimmte Belastung oder Entlastung zu erzielende Formänderung bedarf je nach dem Stoff einer kürzeren oder längeren Zeit, während deren die **elastische Nachwirkung** eintritt.

Die Formänderungen und ebenso die Festigkeit sind daher abhängig von der Zeit, innerhalb deren die Belastung von 0 bis zum Größtwerte wächst, und abhängig von der Dauer der vollen Belastung.

Eine besonders starke elastische Nachwirkung zeigt das Leder.

5. Die Formänderungen und die Festigkeit sind meist in hohem Grade abhängig von der **Temperatur**. (Weiteres hierüber s. S. 513 u. f.)

6. **Vorstehende Erklärungen gelten sinngemäß auch für eine Druckbeanspruchung des Stabes.**

Die **Druckspannung**  $\sigma$  bewirkt eine Verkürzung  $\varepsilon$  der Stablänge  $l$  um  $\lambda$  ( $\varepsilon = \lambda : l$ ) und eine Vergrößerung des Durchmessers, Querdehnung (Querausbauchung)  $\varepsilon_q = \varepsilon : m$ . An Stelle der Streckgrenze  $\sigma_f$  tritt hier die **Quetschgrenze**, bei der der Stoff nach der Seite abfließt, ohne daß eine Zerstörung erfolgt.

Die **Druckfestigkeit**  $K$  (in kg/qcm), d. i. die Spannung, bei der der gedrückte Körper zerstört wird, nimmt mit zunehmender Stablänge ab.

Nach Bauschinger ist für Steine

$$K = \left( a + b \frac{\sqrt{F}}{h} \right) \sqrt{\frac{F}{u}},$$

worin  $F$  der Querschnitt des gedrückten Prismas,  $h$  seine Höhe,  $u$  der Umfang seines Querschnittes,  $a$  und  $b$  zwei nur von der Stoffbeschaffenheit abhängige Zahlenwerte sind.

7. **Arbeit der Längenänderung.** Die Arbeit  $A$ , die zur Formänderung von 1 ccm eines prismatischen Stabes bis zu dessen Zerreißen (Zerdrücken) erforderlich ist, heißt das **Arbeitsvermögen** des Stoffes und wird dargestellt durch die Fläche  $OPSBZZ_0O$  in Abb. 1; es ist (in cmkg/ccm):

$$A = \xi \sigma_b \varepsilon_z,$$

worin  $\sigma_b \varepsilon_z$  das Rechteck  $OB_1Z_2Z_0O$  aus  $\sigma_b$  und  $\varepsilon_z$  und  $\xi$  ( $< 1$ ) den Völligkeitsgrad bedeutet.

Wird ein Stab durch eine von null bis  $P$  stetig wachsende, an dem einen Stabende angreifende Kraft gedehnt oder gedrückt, wobei in dem um  $x$  cm von der Endfläche abstehenden Querschnitt  $F$  die Normalspannung  $\sigma$  entsteht, so ist allgemein die zur Erzeugung der Formänderung aufgewendete Arbeit (in cmkg)

$$A = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{P^2 dx}{EF} = \frac{1}{2} \int_0^l \alpha_\sigma \sigma^2 F dx.$$

Insbesondere für den prismatischen Stab vom Rauminhalt  $F l = V$  (in ccm) wird innerhalb der Proportionalitätsgrenze die Arbeit der Formänderung

$$A = \frac{\sigma^2}{2E} F l = \frac{\sigma^2}{2E} V = \frac{P \sigma}{2E} l = \frac{1}{2} P \lambda,$$

wenn  $\lambda$  die Verlängerung oder Verkürzung des Stabes bedeutet,

Besteht, wie unter 3. ausgeführt,  $\lambda$  aus einer elastischen (federnden) Verlängerung  $\lambda_1$  und einer bleibenden Verlängerung  $\lambda_2$ , so ist nach F. Grashof die Arbeit der Längenänderung  $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$  für den prismatischen Stab

$$A = P \left( \frac{1}{2} \lambda_1 + \lambda_2 \right),$$

worin  $\vartheta$  zwischen 0,75 und 1 liegt.

## b. Winkeländerungen und Schubspannungen.

1. Aendern unter der Einwirkung einer äußeren Kraft zwei ursprünglich winkelrecht aufeinander stehende Flächenteilchen eines Körpers ihren rechten Winkel um  $\gamma$  (in Bogenmaß gemessen), so ist die Aenderung  $\gamma$  auch gleich der Strecke, um die sich zwei um 1 voneinander abstehende parallele Flächenteilchen gegeneinander verschoben haben. Die **Schiebung** oder Winkeländerung  $\gamma$  ist stets die Folge einer paarweise auftretenden **Schubspannung**  $\tau$  in den beiden winkelrecht aufeinander stehenden Flächenteilchen.

$$\text{Das Verhältnis } \frac{\text{Schiebung}}{\text{Schubspannung}} = \frac{\gamma}{\tau} = \beta = \frac{1}{G}$$

heißt die **Schubzahl** (in qcm/kg) und der umgekehrte Wert  $G = 1 : \beta$  das **Gleitmaß** oder das Schubelastizitätsmaß (in kg/qcm).

Die Schubzahl  $\beta$  ist demnach die Strecke in cm, um die sich zwei um 1 cm voneinander abstehende Flächenteilchen unter der Einwirkung der Schubspannung von 1 kg/qcm gegeneinander verschieben, oder der in Bogenmaß gemessene Winkel, um den sich der rechte Winkel zweier ursprünglich winkelrecht aufeinander stehenden Flächenteilchen bei 1 kg/qcm Schubspannung ändert.

2. Zwischen der Dehnungszahl  $\alpha$  und der Schubzahl  $\beta$  sowie zwischen dem Elastizitätsmaß  $E$  und dem Gleitmaß  $G$  bestehen die folgenden Beziehungen:

$$\beta = \frac{2(m+1)}{m} \alpha \quad \text{und} \quad G = \frac{m}{2(m+1)} E,$$

daher für  $m = 10/3$  (vgl. S. 502):

$$\beta = 2,6 \alpha \quad \text{und} \quad G = 5/13 E = 0,385 E.$$

3. **Schubfestigkeit**  $K_s$  (in kg/qcm) ist die Schubspannung, bei der sich zwei gegeneinander verschobene Querschnitt-Ebenen eines Stabes trennen ( $K_s = \mu_1 K_z$ ).

$\tau_p$  (in kg/qcm) ist die Schubspannung, die der Proportionalitätsgrenze  $\sigma_p$  (s. S. 503) entspricht.

Lediglich praktische Bedeutung haben: die **Biegungsfestigkeit**  $K_b = \mu_0 K_z$  (in kg/qcm) als die rechnungsmäßige größte Normalspannung, bei der der Bruch eines gebogenen, und die **Drehungsfestigkeit**  $K_d$  (in kg/qcm) als die rechnungsmäßige größte Schubspannung, bei der der Bruch eines gedrehten Körpers eintritt.

## c. Zulässige Spannung und Sicherheit gegen Bruch.

Die **zulässige Spannung** ( $k_z$  für Zug,  $k$  für Druck,  $k_b$  für Biegung,  $k_s$  für Schub,  $k_d$  für Drehung) ist die Spannung, bis zu der ein Körper durch äußere Kräfte auf eine der verschiedenen Arten der Festigkeit beansprucht werden darf. Die zulässige Spannung liegt gewöhnlich unterhalb der Proportionalitätsgrenze und der Elastizitätsgrenze. — Weiteres s. S. 522 u. f.

( $E, G, \sigma_p, \sigma_f$  in kg/qcm gelten für Zug und Druck.)

Eisensorte	Elastizitätsmafs	Gleitmafs	Proportionalitätsgrenze	Streck- bzw. Quetschgrenze	Festigkeit für		Arbeitsvermögen	Bemerkungen
	$E = \frac{1}{\alpha}$	$G = \frac{1}{\beta}$	$\sigma_p$	$\sigma_f$	Zug	Druck		
					$K_z$	$K$	$A$	
Schweißseisen,    zur Sehnenrichtung	2 000 000	770 000	{ 1300 und mehr <sup>4)</sup>	1800 und mehr	3300 bis 4000 <sup>1)</sup>	} $\sigma_f$ mafsgebend	200 bis 700	1) Gilt für <b>Schweißseisen</b>    zur Sehnenrichtung; für Schweißseisen $\perp$ zur Sehnenrichtung ist $K_z = 2800$ bis 3500.
Flufseisen . . .	2 150 000	830 000	{ 1800 und mehr <sup>4)</sup>	1900 und mehr	3400 bis 5000		} $\sigma_f$ mafsgebend.	
Flufsstahl . . .	2 200 000	850 000	{ 2500 bis 6000 <sup>2)</sup>	2300 u. mehr; härterer Stoff ohne Streckgrenze	5000 bis 20 000	} wenn weich, so ist $\sigma_f$ mafsgebend; wenn hart, so $K \geq K_z$	Zäher Stahl 800 u. mehr	2) Nach Versuchen von Stribeck ist $E$ unabhängig von dem Grade des Härstens (s. Z. d. V. d. I. 1901 S. 77).
Federstahl, ungehärtet	2 200 000	850 000	5000 u. mehr	.	bis 10 000 und mehr		.	.
„ gehärtet	2 200 000 <sup>2)</sup>	850 000	7500 u. mehr	.	bis 17 000 und mehr	.	.	4) Ueber $\sigma_e$ s. S. 531.
Nickelstahl für Brücken . . . (Andere Spezialstähle s. S. 508.)	.	.	$\varphi = 20$ vH	3800	5600 bis 6500	.	.	<b>Werte des Völligkeitsgrades <math>\xi</math>.</b>
Stahlgufs <sup>3)</sup> . .	2 150 000	830 000	2000 u. mehr	{ 2100 u. mehr	{ 3500 bis 7000 u. mehr	wie bei Flufsstahl	Zäher Stahlgufs 700 u. mehr	( $A = \xi K_z \frac{\varphi}{100}$ s. S. 505).
Gufseisen . . .	750 000 bis 1 050 000	290 000 bis 400 000	} $\sigma_p$ und $\sigma_f$ nicht vorhanden.		{ 1200 bis 2400	7000 bis 8500	8 bis 14	Schweißseisen, 0,7 bis 0,8, Flufseisen, zähes . 0,63, Flufsstahl (für Maschinenteile) . . 0,6 bis 0,75, Stahlgufs, zäher . . 0,7.
			} Für Zug: $\varepsilon = \frac{1}{1250000} \sigma^{1,1}$ ; für Druck: $\varepsilon = \frac{1}{1180000} \sigma^{1,05}$ .					

## Hochwertige Spezialstähle, insbesondere für den Kraftwagen- und Luftschiffbau.

Die Werte von  $K_z$  und  $\sigma_e$  sind hier ausnahmsweise in kg/qmm angegeben.

(Die eingeklammerten Zahlen bedeuten gewährleistete Mindestwerte.)

Marke	Nähere Bezeichnung	Zugfestigkeit $K_z$	Elastizitätsgrenze $\sigma_e$	Dehnung $\varphi$ vH	Einschnürung $\psi$ vH	Verwendungszweck und Bemerkungen
-------	--------------------	------------------------	----------------------------------	-------------------------	---------------------------	-------------------------------------

### 1. Kohlenstoffstähle.

Fried. Krupp A.-G., Essen.

A 7 J	Automobilstahl . . . . .	54 bis 58 (50)	33 bis 37	30 (28)	68	} Achsen, Achsschenkel, Pleuelstangen, Kurbelachsen, Wellen usw. v. mäfsiger Beanspruchung Wie vor, jedoch bei hoher Beanspruchung; C 46 O u. F 48 O besonders für Kurbelachsen Zahnräder, die grossem Verschleifs unterliegen, aber nicht an der Oberfläche gehärtet werden sollen
A 9 J	" " " " " " " "	63 " 66 (60)	36 " 40	26 bis 28 (22)	63 bis 65	
A 12 P	" " " " " " " "	56 bis 63	26 " 28	22 bis 24	40	
C 46 O	Spezialstahl . . . . .	81 bis 87 (70)	62 bis 66 (50)	20 (15)	59 bis 62	
B 46 J	" " " " " " " "	73 " 81 (70)	46 " 57 (43)	22 bis 26 (18)	51 " 56	
F 48 O	" " " " " " " "	92 " 96 (80)	80 " 82 (60)	18 (14)	54 " 61	
B 56 J	" " " " " " " "	88 " 93 (85)	55 " 59 (50)	16 bis 22 (15)	48 " 54	
A 4 J	Automobil-Einsatzmaterial { geglüht . . . . . in Wasser gehärtet	47 bis 49 (44 bis 50) 52 bis 67	30 bis 33 38 " 40	33 " 35 (28) 19 bis 27	69 " 72 50 " 72	} Einsatzmaterial für mäfsige Beanspruchung (Zahnräder, Achsschenkel, Steuerungsteile)
A 2 O	" " " " " " " " { geglüht . . . . . i. W. gehärtet	40 bis 43 (37 bis 44) 54 bis 59	22 " 25 35 " 40	38 bis 41 (35) 25 bis 30	72 " 75 61 " 66	
B 76 M	Spezialfederstahl { geglüht . . . . . i. W. gehärtet	83 " 96 140 " 158	52 " 58 127 " 143	18 " 20 7 " 9	37 " 39 32 " 42	} Federn für Lastwagen Federn für Tourenwagen
F 64 D	" " " " " " " " { geglüht . . . . . i. W. gehärtet	115 175 bis 180	— 145	7,5 3,5	—	

Gebr. Böhler & Co. A.-G., Berlin.

V D	Spezialstahl, geglüht . . . . .	140 bis 150	100 bis 110	10 bis 8	50 bis 40	} Für ausserordentlich hoch beanspruchte Teile, insbesondere für Luftschiffbau Einsatzhärtung für mäfsig beanspruchte Teile
	" " " " " " " " zäh vergütet . . . . .	140 " 150	120 " 130	12 " 10	60 " 50	
	" " " " " " " " hart " " " " " " " "	150 " 100	130 " 140	10 " 6	50 " 40	
W	Auto-Einsatzstahl, roh . . . . .	40	25	25	60	}
	" " " " " " " " gehärtet . . . . .	75	—	9	45	

Berg. Stahl-Industrie G. m. b. H., Remscheid.

H S M	Automobilstahl, leicht geglüht. . . . .	50 bis 60	$\sigma_f = 35$	25	40 bis 45	} Maschinenstahl für mäfsig beanspruchte Teile
-------	-----------------------------------------	-----------	-----------------	----	-----------	------------------------------------------------

**Krefelder Stahlwerk A.-G., Krefeld.**

A W	Auto weich, gegläht . . . . .	40 bis 45	25 bis 30	25 bis 22	—	} Für Einsatzhärtung Naturhart oder vergütet zu verwenden
	„ gehärtet . . . . .	45 „ 50	30 „ 35	22 „ 19	—	
A H	„ hart, gegläht . . . . .	70 „ 80	60 „ 70	18 „ 15	—	
	„ vergütet . . . . .	85 „ 95	70 „ 80	14 „ 12	—	

**2. Nickelstahl.**

**Fried. Krupp A.-G., Essen.**

E 120 O	Nickel-Einsatzmaterial, gegläht .	57 bis 50 (52 bis 60)	42 bis 49 (38)	30 (25)	73 bis 75	} Einsatzmaterial für hohe Beanspruchung, bei besonders zähem Kern (Zahnräder, Achsschenkel, Steuerungsteile)
	„ i.W. gehärtet . . . . .	76 bis 79	60	19 bis 21	57	
E 112 O	„ gegläht . . . . .	48 bis 52 (45 bis 55)	35 bis 38 (32)	30 bis 25 (26)	72 bis 75	
	„ i.W. gehärtet . . . . .	68 bis 71	50	16 bis 24	62	

**Gehr. Böhler & Co. A.-G., Berlin.**

			$\sigma_p$				
5 N	geglüht . . . . .	80	45	16	55	} Geglüht oder veredelt zu verwenden, für weniger hoch beanspruchte Teile (Achsen, Kurbelwellen, Triebwellen, Stangen, naturharte Zahnräder, Propeller-naben, Hebel, Rahmenteile usw.)	
	zäh vergütet . . . . .	75 bis 85	50 bis 60	16 bis 13	60 bis 50		
	hart . . . . .	105 „ 120	75 „ 85	10 „ 6	45 „ 35		
4 N	geglüht „ . . . . .	75	40	16	55		
	zäh vergütet . . . . .	70 bis 80	45 bis 55	16 bis 13	60 bis 50		
	hart „ . . . . .	100 „ 115	70 „ 80	10 „ 6	45 „ 35		
3 N	geglüht „ . . . . .	70	35	16	55		
	zäh vergütet . . . . .	65 bis 75	35 bis 50	16 bis 13	60 bis 50		
	hart „ . . . . .	95 „ 110	65 „ 75	10 „ 6	45 „ 35		
E N A	geglüht „ . . . . .	50	25	25	55		
	zäh vergütet . . . . .	55 bis 65	35 bis 40	28 bis 22	75 bis 60		
	hart „ . . . . .	85 „ 95	60 „ 70	13 „ 9	50 „ 40		
3 Nw	geglüht . . . . .	50	30	25	70		} Einsatzhärtung, für Teile mit Oberflächenhärte und großer Zähigkeit (Zahnräder, Kettenräder, Daumenwellen, Schneckenwellen, Zapfen, Bolzen usw.)
	gehärtet . . . . .	100	—	7	40		
E N A	roh . . . . .	55	30	20	50		
	gehärtet . . . . .	90	—	10	45		
Böhler	} hochlegierter Nickelstahl mit kleiner Wärmedehnung, oxydationssicher	65	35	38	60	Ventile für Explosionsmotoren	
☆ 25 N							
Böhler							
☆ 5 Nw		60	35	20	60	Saugventile	

Festigkeitszahlen für hochwertige Spezialstähle.

5 Marke	Nähere Bezeichnung	Zugfestigkeit $K_z$	Elastizitäts- grenze	Dehnung $\varphi$ vH	Ein- schränkung $\psi$ vH	Verwendungszweck und Bemerkungen
------------	--------------------	------------------------	-------------------------	-------------------------	---------------------------------	-------------------------------------

**Berg. Stahl-Industrie G. m. b. H., Remscheid.**

			$\sigma_f$			
HBN und HBNv	geglüht . . . . .	60	40	20	50 bis 60 55 " 60	} Hochwertiger Konstruktionsstahl für Maschinen und Kraftwagen (Marke HBNv f. Kurbelwellen) Zum Einsetzen und vergütet geeignet Für Ventilkegel und in hoher Temperatur arbeitende Teile
	vergütet . . . . .	75 bis 85	55 bis 65	22 bis 16		
E53	geglüht . . . . .	55	35	25	} 55 " 60	
	vergütet . . . . .	70 bis 80	50 bis 55	22 bis 18		
HBNN	(bis 40 vH Ni) geglüht . . . .	60 " 70	—	40 " 30	50 " 60	

**Krefelder Stahlwerke A.-G., Krefeld.**

			$\sigma_e$			
NH3	3 vH Ni-Stahl, geglüht . . . . .	75 bis 75	60 bis 70	18 bis 15	—	} Naturhart oder vergütet zu verwenden
	" vergütet . . . . .	90 " 100	75 " 85	14 " 10	—	
	" gehärtet . . . . .	100 " 125	75 " 85	10 " 7	—	
NH5	5 vH Ni-Stahl, geglüht . . . . .	70 " 85	65 " 70	20 " 16	—	
	" vergütet . . . . .	90 " 100	80 " 90	15 " 12	—	
	" gehärtet . . . . .	130 " 150	—	9 " 6	—	
NW3	3 vH Ni-Stahl, geglüht . . . . .	55 " 60	45 bis 50	25 " 20	—	} Für Einsatzhärtung
	gehärtet . . . . .	70 " 80	50 " 60	18 " 12	—	
NW5	5 vH Ni-Stahl, geglüht . . . . .	60 " 70	50 " 60	22 " 18	—	
	" gehärtet . . . . .	80 " 100	70 " 80	12 " 8	—	

**3. Chrom-Nickel-Stahl.**

Fried. Krupp A.-G., Essen.

EF600	in Oel gehärtet und angelassen . . . . .	83 bis 88 (75)	71 bis 77 (65)	22 bis 20 (18)	67 bis 65	} Achsen, Achsschenkel, Pleuelstangen, Kurbelachsen, Wellen usw. von höchster Beanspruchung	
EF360		111 bis 104	106 bis 106 (55)	13 bis 8	56 " 40		
EF330	" " " " " " " " . . . . .	73 bis 82 (70)	56 bis 65 (55)	21 bis 18 (15)	67 " 61		
	" " " " " " " " . . . . .	100 bis 105	104 bis 134	11 bis 8	56 " 50		
EF580	geglüht . . . . .	88 bis 95 (80)	71 bis 76 (60)	17 bis 19 (12)	62 " 60		} Einsatzmaterial für höchste Beanspruchung (Zahnräder, Achsschenkel, (Steuerungsteile)
	gehärtet . . . . .	63 " 70 (65)	50 " 58 (50)	29 " 23 (20)	75 " 74		
EF400	" " " " " " " " . . . . .	101 bis 138	82 bis 130	11 bis 9	55 " 59		
	" " " " " " " " . . . . .	65 bis 68 (60)	48 bis 55 (40)	18 bis 20 (17)	63 " 66		

Gebr. Böhler & Co. A.-G., Berlin.

		$\sigma_p$			
P A	geglüht . . . . .	80	50	15	55
	zäh vergütet . . . . .	80 bis 100	70 bis 80	15 bis 12	60 bis 50
N C H	hart . . . . .	120 „ 135	85 „ 95	10 „ 6	50 „ 40
	geglüht „ . . . . .	70	35	18	55
	zäh vergütet . . . . .	70 bis 80	40 bis 50	20 bis 16	60 bis 55
	hart „ . . . . .	100 „ 120	55 „ 65	12 „ 8	50 „ 40
P P A	geglüht . . . . .	75	40	15	60
N C E	gehärtet . . . . .	130	—	6	45
	geglüht . . . . .	65	35	20	60
	gehärtet . . . . .	120	—	6	40

Geglüht oder vergütet zu verwenden für höchst beanspruchte Teile (Achsen, Wellen, Stangen, besonders für naturharte Zahnräder, Propellernaben, Hebel, Rahmenteile usw.)

Für Einsatzhärtung. Teile von hoher Festigkeit und Härte, wie Wechsehzahnräder

Berg. Stahl-Industrie G. m. b. H., Remscheid.

		$\sigma_f$			
E 724	geglüht . . . . .	> 60	> 45	> 22	60 bis 65
	vergütet . . . . .	> 80	> 70	22 bis 18	60 „ 65
E 726	in Oel gehärtet . . . . .	100 bis 120	—	12 „ 8	40 „ 50
	geglüht . . . . .	80	60	13 „ 10	55 „ 60
	in Oel gehärtet . . . . .	150 bis 170	—	8 „ 6	35 „ 40
H B N C	vergütet . . . . .	85 „ 100	75 bis 85	15 „ 12	50 „ 55
H B N C v	„ . . . . .	oder 90 bis 110	oder > 80	oder 15 bis 10	oder 40 bis 50
	hoch vergütet . . . . .	90 bis 100	75 bis 85	15 bis 12	55 bis 50
		120 „ 140	90 „ 100	10 „ 8	45 „ 35

Einheits-Konstruktionsstahl, für Einsatz und Vergütung geeignet (Zahnräder)

Für höchst beanspruchte eingesetzte Teile

Spezialstahl für Kurbelwellen  
Kurbelwellen für Kraftwagen-Boots- und Luftfahrzeugmotoren

Krefelder Stahlwerke A.-G., Krefeld.

		$\sigma_e$			
Z K	geglüht . . . . .	75 bis 80	70 bis 75	14 bis 16	—
	vergütet . . . . .	95 „ 110	85 „ 95	10 „ 12	—
Z K natur-	gehärtet . . . . .	130 „ 150	—	5 „ 8	—
	geglüht . . . . .	80 „ 90	60 bis 70	13 „ 12	—
	vergütet . . . . .	100 „ 120	80 „ 90	12 „ 10	—
hart {	gehärtet . . . . .	150 „ 180	—	6 „ 3	—
Z R	geglüht . . . . .	55 „ 60	45 bis 55	23 „ 20	—
	gehärtet . . . . .	80 „ 90	65 „ 75	20 „ 15	—
K B	geglüht . . . . .	65 „ 75	50 „ 55	20 „ 15	—
	vergütet . . . . .	80 „ 100	65 „ 80	18 „ 13	—
	gehärtet . . . . .	100 „ 120	70 „ 80	10 „ 6	—
Z R H	geglüht . . . . .	70 „ 80	80 „ 70	18 „ 14	—
	vergütet . . . . .	90 „ 110	60 „ 90	12 „ 8	—
	gehärtet . . . . .	140 „ 160	—	6 „ 4	—

Naturhart oder vergütet zu verwenden

Für Einsatzhärtung

Festigkeitszahlen für hochwertige Spezialstähle.

Marke	Nähere Bezeichnung	Zugfestigkeit	Elastizitäts- grenze	Dehnung	Ein- schnürung	Verwendungszweck und Bemerkungen
		$K_z$	$\sigma_p$	$\varphi$ vH	$\psi$ vH	

#### 4. Mangan-Silicium-Stahl.

Gebr. Böhler & Co. A.-G., Berlin.

M S	geglüht . . . . .	65	30	16	45	} Für weniger hoch beanspruchte Teile (Achsen, Kurbelwellen, Turbinenwellen, Stangen usw.)
	zäh vergütet . . . . .	70 bis 80	45 bis 50	16 bis 13	55 bis 45	
	hart „ . . . . .	85 „ 95	55 „ 65	12 „ 8	40 „ 30	

Krefelder Stahlwerke A.-G., Krefeld.

M S	geglüht . . . . .	65 bis 80	$\sigma_e$ 50 bis 60	18 bis 16	—
	vergütet . . . . .	80 „ 100	70 „ 80	16 „ 14	—

#### 5. Wolframstahl.

Fried. Krupp A.-G., Essen.

151 bis 173	113 bis 123	5 bis 6	22 bis 27	Blattfedern 90 . 13 mm
-------------	-------------	---------	-----------	------------------------

Gebr. Böhler & Co. A.-G., Berlin. (Wolframtiegelstahl.)

WII G43 WII G45	75 bis 90	$\sigma_p$ > 50*	> 12*	—	} Gewehrläufe
	85 „ 100	> 60*	> 12*	—	

#### 6. Chrom-Silicium-Federstahl (Gebr. Böhler & Co. A.-G., Berlin).

geglüht . . . . .	95	55	14	50
federhart . . . . .	140	—	7	—

#### 7. Vanadiumstahl.\*\*)

Die durch den Gehalt an Va herbeigeführte Steigerung von  $K_z$  beträgt bei 0,7 vH Va, unabhängig vom C-Gehalt, 5 bis 8 kg/qmm, gleichzeitig steigt  $\varphi$  um 2 „ 3 vH.

Die Einschnürung  $\psi$  wächst bei 0,7 vH Va und

1 vH C von  $\psi = 14,5$  auf 42,3 | 0,7 vH C von  $\psi = 20$  auf 40 | 0,55 vH C von  $\psi = 30$  auf 42,7 | 0,15 vH C von  $\psi = 65$  auf 84,7.

Durch Härten steigt die Festigkeit von  $K_z = 58$  auf 98 (bei  $\varphi = 9,6$ ,  $\psi = 44$ ), während sie durch Ausglühen auf 36 zurückgeht.

#### 8. Titaneisen und -Stahl.

Ueber die Erhöhung von  $K_z$  und  $\varphi$  des Eisens und Stahls durch Titangehalt s. Z. d. V. d. I. 1908 S. 897.

Die **Sicherheit gegen Bruch**  $\mathcal{S}$  ist das Verhältnis der Festigkeit zur zulässigen Spannung; für Zugbeanspruchungen ist also die Sicherheit  $\mathcal{S} = K_z : k_z$ , für Druckbeanspruchungen  $\mathcal{S} = K : k$  usw. Man spricht von einer  $\mathcal{S}$ -fachen Sicherheit gegen Bruch.

## B. Elastizitäts- und Festigkeitszahlen.

Alle Zahlenangaben beziehen sich auf **kg** und **qcm**. — Weitere Angaben über einzelne Baustoffe s. 5. Abschn., Stoffkunde, u. 6. Abschn., Maschinenteile.

### a. Eisen und Stahl.

Werte von  $E$ ,  $G$ ,  $K_z$ ,  $K$ ,  $A$  s. die Tafeln S. 507 u. S. 508.

**Scherfestigkeit**  $K_s = \mu_1 K_z$ . Gufseisen  $\mu_1 = 1,02$  bis  $1,17$ , i. M.  $= 1,10$ ; Schweißseisen in Stäben  $\perp$  z. F.  $\mu_1 = 0,78$  bis  $0,82$ , in Blechen  $\mu_1 = 0,87$  längs,  $\mu_1 = 0,84$  quer; für Flufseisen in Stäben  $\perp$  z. F.  $\mu_1 = 0,84$  bis  $0,87$ .

Anforderungen an die Festigkeit, Dehnung und Einschnürung von Eisen und Stahl mit Rücksicht auf den Verwendungszweck des Metalles, s. ferner 5. Abschn., Stoffkunde, u. 6. Abschn., Maschinenteile.

**Einfluss der Temperatur.** Für **Schweißseisen** ist

f. d. Temperatur  $t = 100^0$   $200^0$   $300^0$   $400^0$   $500^0$   $600^0$   $700^0$   $800^0$   
 die Zugfestigkeit  $= 104$   $112$   $116$   $96$   $76$   $42$   $25$   $15$   
 in vH der Zugfestigkeit  $K_z$  bei  $t = +20^0$ .

Für **Flufseisen** ist nach Versuchen von Martens und Rauh\*), wobei im angelieferten Zustande:  $K_z = 4100$ ,  $\varphi = 26,9$  vH,  $\psi = 48,3$  vH, geglüht . . . . .  $K_z = 3850$ ,  $\varphi = 30,4$  vH,  $\psi = 58,6$  vH,

für die Temperatur . . . $t =$	$-20^0$	$+20^0$	$100^0$	$200^0$	$300^0$	$400^0$	$500^0$	$600^0$
Zugfestigkeit . . . $K_z =$	4100	3850	3950	5100	4750	3300	1900	1070
Elastizitätsmaß $E:1000 =$	2070	2070	2010	1950	1880	1790	1510	1340
Dehnung . . . . . $\varphi =$	37	37	22	19	23	45	66	99
Einschnürung . . . . . $\psi =$	57	58	51	41	23	56	78	90,5

$K_z \min = 3800$  für  $t = 50^0$ ;  $K_z \max = 5150$  für  $t = 240^0$ ;  $\varphi \min = 19$  vH für  $t = 160^0$ ;  
 $\psi \min = 23$  vH für  $t = 300^0$  (**Blaubruchigkeit** des Flufseisens).

Für hochwertiges **Gufseisen** (mit  $K_z = 2350$ ) ist nach C. Bach bei  
 $t = 300^0$   $400^0$   $500^0$   $570^0$

die Zugfestigkeit  $= 99$   $92$   $76$   $52$  vH der Zugfestigkeit  $K_z$  bei  $200^0$ .

Für **Stahlgufs\*\*)** fand C. Bach (bei einem vH-Gehalt von 0,18 C, 0,36 Mn, 0,28 Si, zusammen 0,29 an S, P, As, Cu) folgende Werte bei  $\sim 40$  Minuten Belastungsdauer

\*) S. Mitteilungen aus den Königl. Techn. Versuchsanstalten zu Berlin, 1890 Heft IV S. 159 u. f.; ferner A. Ledebur, Z. d. V. d. I. 1896 S. 565 u. f. Weitere Versuche von C. Bach s. Z. d. V. d. I. 1904 S. 1300.

\*\*) S. Z. d. V. d. I. 1903 S. 1762; 1904 S. 385.

für die Temperatur . . . $t =$	$+ 20^0$	$100^0$	$200^0$	$300^0$	$400^0$	$500^0$
Zugfestigkeit . . . . . $K_z =$	4165	4567	5253	5052	4043	2565
Streckgrenze . . . . . $\sigma_f =$	2375	2156	2186	1911	1384	.
Dehnung . . . . . $\varphi =$	28	16	18	25	36	64
Einschnürung . . . . . $\psi =$	57	46	41	48	63	81

Bei Stahlgufs anderer Zusammensetzung ergaben sich noch erheblich grössere Verschiedenheiten, insbesondere der Dehnung, z. B.

$$\varphi_{200} = \frac{1}{3,3} \varphi_{20}$$

### b. Kupfer und Kupferlegierungen.

Metallsorté	Elastizitäts- mafs	Proportio- nalitäts- grenze	Zug- festig- keit	Deh- nung	Ein- schnü- rung	Arbeits- vermögen
	$E = \frac{1}{\alpha}$ kg/qcm	$\sigma_p$ kg/qcm	$K_z$ kg/qcm	$\varphi$ vH	$\psi$ vH	$A$ cmkg/ccm
Kupferblech, gewalzt <sup>1)</sup>	(1 150 000)	. 5)	2000 bis 2300 <sup>5)</sup>	35—38	45—50	711 ( $\xi = 0,65$ bis 0,7)
Messing, gegossen . . . . .	800 000 <sup>2)</sup>	650	1500	13	17,5	23 <sup>4)</sup>
Rotgufs . . . . .	900 000 <sup>3)</sup>	900	2000	6—20	10,52	.
Geschützbronze . . . . .	1 100 000 <sup>3)</sup>	300	3000	.	.	.
„ verdichtet . . . . .	1 100 000 <sup>3)</sup>	900	3200	.	.	.
Phosphorbronze . . . . .	.	.	4000	.	.	.
Manganbronze (4 vH), gewalzt } . . . . .	1 200 000	260	2900	41	68	$\sigma_f = 1360$
Manganbronze (15 vH), gegossen } . . . . .	940 000	770	3570	34	44	$\sigma_f = 1400$
Deltametall s. S. 515 . . . . .	.	.	.	.	.	.
Oerlikoner Bronze } Nr. A, überschmiedet } . . . . .	.	2800	4400 bis 5600 <sup>6)</sup>	15—25	.	.

1) **Kupfer.** Feuerbüchsen-Hartkupfer (geglüht)  $K_z > 2300$ ,  $\varphi > 38$ ,  $\psi > 45$ . Sonder-Feuerbüchsenkupfer und Sonder-Stehbolzenkupfer (geglüht)  $K_z > 2700$ ,  $\varphi > 35$ ,  $\psi > 60$ . Dsgl. „extra gehärtet“ für Stehbolzen  $K_z > 4000$ ,  $\varphi = 4$ ,  $\psi = 60$ . Sonderkupfer, nicht über 5 mm stark, für Zentrifugen usw. (nach der Bearbeitung geglüht)

$K_z = 2700$ ,  $\varphi > 35$ ,  $\psi > 60$ ,  
(hartgewalzt)  $K_z = 3200$ ,  $\varphi > 12$ ,  $\psi > 50$ .

2) Genauer ist  $\varepsilon = \sigma^{1,085} : 947\ 000$  für die erste,  
 $\varepsilon = \sigma : 802\ 000$  (bis  $\sigma = 650$ ) für wiederholte Beanspruchung.

3) Genauer ist  $\varepsilon = \sigma^{1,028} : 734\ 000$  für die erste,  
 $\varepsilon = \sigma : 900\ 000$  (bis  $\sigma = 900$ ) für wiederholte Beanspruchung.

4)  $A = 115$  für  $K_z = 1650$ ,  $\varphi = 8,4$ ,  $\psi = 13,5$ ,  
 $A = 466$  für  $K_z = 2700$ ,  $\varphi = 20,5$ ,  $\psi = 23,2$ .

$\xi$  i. M. = 0,8.

5) **Kupfer.** Für gehämmertes Kupfer  $K_z = 2700$ , für gezogenes Kupfer  $K_z = 3150$  für elektrolytisch gewonnenes Kupfer  $K_z = 3800$ .  $K_z$  wird durch fortgesetztes Hämmern bis um 50 vH grösser, dabei  $\varphi$  um 80 vH kleiner.

$\sigma_e$  nahezu = 0; steigt bei wiederholt stark überangestregtem Kupfer bis auf 600—1000  
 $\sigma_p$  nahezu = 0; „ „ „ „ „ „ „ „ bis auf 600; als-  
dann ist  $E = 1\,150\,000$ .

Für weiches Kupfer fand C. Bach etwa  $\varepsilon = \sigma^{1,008} : 2\,200\,000$  für die erste Beanspruchung,  $\varepsilon = \sigma^{1,074} : 1\,900\,000$  für wiederholte Beanspruchung.

\*) Ueber die Festigkeit verschiedener **Bronzen** s. Z. d. B. 1885 S. 204.

**Deltametall** (Schmelzpunkt 900 bis 1000°, spez. Gew. 7,8 bis 8,5).

$$E = 1\,040\,000 \text{ bis } 1\,080\,000.$$

Legierung		$K_z$	$\varphi$	$\psi$
I	Rohguß	5200 bis 6100	6 bis 13	11 bis 15
	gewalzt	6800 bis 7000	19 bis 23	22 bis 29
II	Rohguß	4300 bis 4800	16 bis 23	48 bis 54
	gepreßt	5500 bis 6600	15 bis 21	42 bis 48
III	Rohguß	3600 bis 4000	23 bis 43	32 bis 37
	geschmiedet	4300 bis 4700	31 bis 40	32 bis 53

Deltametall mit  $K_z = 7330$  gewalzt hat  $K_z = 7660$  gepreßt.

**Muntz-Metall** gewalzt  $K_z = 5050$ , gepreßt 5460.

**Monel-Metall** (60 Ni, 40 Cu). Nach amerik. Normen: geschmiedet  $K_z = 5630$ ,  $\sigma_e = 3500$ ,  $\varphi = 10$ ; gegossen  $K_z = 4100$ ,  $\sigma_e = 2450$ .

**Stahlbronze** (von Fried. Krupp, 1902).

weich  $K_z = 5100$ ,  $\varphi = 33$ ,  $\psi = 32$ ,  
hart 5800, 16, 18,  
Marke L.D. 7400, 19, 19.

Einfluß des **Pressens** (nach dem Dickschen Verfahren) bei Messing:

Kupfergehalt vH	$\varphi$ vH	$K_z$ (kg/qcm)		$K_z$ (kg/qcm)	
		gewalzt	gepreßt	gewalzt	gepreßt
60	49	344°	372°	267°	254°
58	41	405°	425°	282°	273°
55	32	479°	523°	352°	313°

### Einfluß der Temperatur.

**Kupferblech** bei 50° 100° 150° 200° 250° 285° 367° 451° 556°  
 $K_z = 98$  95 91 85 79 75 66 51 33 vH

der Festigkeit bei etwa 10°. Nach Versuchen von Stribeck mit Stehbolzenkupfer nimmt  $K_z$  bei längerer Belastungsdauer (bis 30 st) mit wachsender Temperatur rascher ab als bei der gewöhnlichen Belastungsdauer; zwischen 300 und 400° beträgt  $K_z$  nur die Hälfte des Wertes für gewöhnliche Belastungsdauer. Ähnliches gilt für  $\varphi$  und  $\psi$ .

**Bronze** (91,4 Cu, 2,8 Zn, 5,5 Sn) mit  $K_z = 2400$ ,  $\varphi = 36$ ,  $\psi = 52$  (Kaiserl. Werft, Kiel) hat nach C. Bach

bei 100° 200° 300° 400° 500°  
noch  $K_z = 101$  94 57 26 18 vH  
 $\varphi = 98$  96 32 0 0 vH  
 $\psi = 91$  93 31 0 0 vH

der Zugfestigkeit  $K_z$ , Dehnung  $\varphi$  und Quersammenziehung  $\psi$  bei 20°.

Diese Bronze, die als eine sehr gute zu bezeichnen ist, kann daher bei Ventilgehäusen, Rohrstücken u. dgl. für Temperaturen erheblich über 200° (z. B. bei mäfsig überhitztem Dampf von 260°) nicht angewendet werden.

**Durana-Gulsmetall\*** (58,7 Cu, 39,6 Zn, 1,0 Sn, 0,4 Pb, 0,34 Fe) der Dürerer Metallwerke A.-G. Für langdauernde Belastung ergab sich

für die Temperatur $t =$	24°	95°	148°	170°	214°	320°	420°	542°
Zugfestigkeit . . $K_z =$	4080	3450	3140	2800	1800	650	200	50
Streckgrenze . . $\sigma_f =$	1800	1720	1700	1640	1250	450	160	.
Dehnung . . . $\varphi =$	32	27	44	50	62	61	39	30
Einschnürung . . $\psi =$	36	33	50	51	52	53	40	42

Für kurze Versuchsdauer:

für die Temperatur $t =$	22°	93°	174°	207°	259°	311°	363°	414°	470°
Zugfestigkeit . . $K_z =$	4080	3720	3300	3120	2820	1850	1220	750	284
Dehnung . . . $\varphi =$	32	29	38	41	47	54	55	57	53
Einschnürung . . $\psi =$	36	33	46	48	50	50	57	52	50

### Rübelbronze.\*\*)

Marke B weich; gegossene Stäbe.

Marke H, geschmiedete Stäbe.

für $t = 200^\circ$	400°	500°	für $t = 200^\circ$	400°	500°
$K_z = 4368$	3424	2735	$K_z = 4414$	4046	3328
$\varphi = 28,0$	25,2	19,3.	$\varphi = 32,3$	31,5	31,8.

## c. Andere Metalle und Stoffe.

**Aluminium,\*\*\*)** rein (98,5 bis 99 vH Al)

gegossen:  $E = 675\,000$ ,  $G = 260\,000$ ,  $K_z = 930$  bis  $1000$ ,  $\varphi = 8$  bis  $13$ ;  
gewalzt oder geschmiedet, 0,7 cm stark: längs  $E = 726\,000$ ,  $K_z = 1500$ ,  
 $\sigma_p = 480$ ,  $\varphi = 5$ ; quer  $E = 690\,000$ ,  $K_z = 1400$ ,  $\sigma_p = 440$ ,  $\varphi = 6$ .

Aluminium-Bronze mit 10 vH Al:  $E = 1\,200\,000$ , gegossen  $K_z = 6200$ ,  
 $\varphi = 0,5$  vH, gewalzt  $K_z = 5100$ ,  $\varphi = 0,4$  vH. Aluminium-Bronze mit  
5 vH Al: gewalzt, 1,2 bis 1,6 cm dick,  $E = 1\,200\,000$ ,  $K_z = 4300$ ,  
 $\varphi = 50$  vH.

Aluminium-Messing (gegossen) mit 3 vH Al:  $K_z = 6000$ ,  $\varphi = 7,5$  vH

„ „ „ 1 vH Al:  $K_z = 4000$ ,  $\varphi = 50$  vH.

\*) Nach Stribeck, s. Z. d. V. d. I. 1904 S. 897.

\*\*\*) Z. ö. I. u. A. V. 1908 S. 356. Rübelbronze liefert „Allgemeines Deutsches Metallwerk G. m. b. H.“, Oberschöneweide b. Berlin.

\*\*\*) Im wesentlichen nach Tetmajer.

**Magnesium:**

$K_z = 2320$ ,  $K = 2720$ ,  $K_b = 1600$ ,  $\sigma_p =$  nicht vorhanden.

**Magnalium** (mit 2 bis 23 vH Magnesium, 98 bis 77 vH Aluminium, 2,4 bis 2,57 spez. Gew., 600 bis 700° Schmelzpunkt): gegossen in Schalen  $K_z = 3000$  bis 4500, in Sand  $K_z = 1200$  bis 2100, gewalzt 2000 bis 2500 bei  $\varphi = 5$  bis 10, geprefst 3700 bis 5000.

**Zink**, gewalzt, bei 16°:\*) Gehalt an Cd 0,03 bis 0,91 vH, Pb 0,02 bis 0,81 vH. Blechdicke 1,6 bis 3 mm.  $E = 872\,000$  bis 1 200 000, i. M. 960 000,  $K_z = 2050$  bis 2570, i. M. 2350,  $\varphi = 12$  bis 38,  $\psi = 23$  bis 56.

Der Einfluss der **Belastungsdauer** ist hier besonders groß; es fand sich

$$K_z = \frac{3225}{1 + 0,2392 \sqrt{t}},$$

wo  $t$  die Dauer der Belastung in Minuten. — Für  $t = 0$  (plötzliche Belastung) ist  $K_z = 3225$ .

**Zinn:**  $E = 400\,000$ ,  $K_z = 350$ .

**Blei**, weich, gewalzt oder gegossen:  $E = 50\,000$ ,  $K_z = 125$ ,  $\sigma_f = 50$  bis 150 (für Druck, je nach der Höhe des Versuchskörpers,  $h : d = 2$  bis 0,1).

**Blei**, hart (Hartblei):  $K_z = 300$ ,  $\sigma_f = 300$  (für Druck)  $h : d = 1$ .

**Weißmetall**,\*\*) 90 Pb, 10 Sb:  $\sigma_f = 153$ ,  $K_z = 500$ ,  $E_z = 267\,000$ ,  $\varphi = 0,8$ ,  $\psi = 1,5$ ; Druck  $\sigma_f = 218$ ,  $K = 1190$ ,  $E = 273\,000$ ;  $K_b = 840$ ;  $K_s = 360$ .

85 Pb, 15 Sb:  $\sigma_f = 145$ ,  $K_z = 450$ ,  $E_z = 270\,000$ ,  $\varphi = 1,2$ ,  $\psi = 2,4$ ; Druck  $\sigma_f = 168$ ,  $K = 1180$ ,  $E = 286\,000$ ,  $K_b = 730$ ,  $K_s = 340$ .

80 Pb, 15 Sb, 5 Sn:  $\sigma_f = 128$ ,  $K_z = 400$ ,  $E_z = 275\,000$ ,  $\varphi = 0,5$ ; Druck  $\sigma_f = 160$ ,  $K = 1100$ ,  $E = 297\,000$ ,  $K_b = 760$ ,  $K_s = 300$ .

**Metallzement** der Granitos Kunststeinwerke G. m. b. H., Charlottenburg. (Spez. Gew. 1,9, Schmelzpunkt 120°):  $K = 1000$ .

**Glas:**  $E = 700\,000$ .  $K_z = 250$ . Für geblasenes Glas  $K_b = 375$ , für Rohglas  $K_b = 200 + 160(1,5 - s)^2$ , wo  $s$  die Glasdicke in cm.

**Papier:**  $K_z = 40$  bis 180, Papierstoff (in geleimten Lagen)  $K = 1000$ .

**d. Hölzer.**

(Nach J. Bauschinger, L. Tetmajer und Gahns.)

Die Festigkeitszahlen sind wesentlich abhängig vom Feuchtigkeitsgehalte: Die Festigkeit nimmt mit wachsender Feuchtigkeit erheblich ab; mit zunehmender Lagerungszeit vergrößert sich die Druckfestigkeit bedeutend.  $E$  ist für Druck nahezu unveränderlich. — Die folgenden Angaben beziehen sich auf den ganzen Querschnitt (Kernholz und Splintholz zusammen).

\*) Nach E. Rasch, Dingl. Journ. 1907 S. 54.

\*\*) Nach Goodman, Dingl. Journ. 1906 S. 718.

Art der Beanspruchung	Feuchtigkeitsgehalt	Elastizitätsmafs <i>E</i>	Proportionalitätsgrenze $\sigma_p$	Festigkeit <i>K</i>	Feuchtigkeitsgehalt	Elastizitätsmafs <i>E</i>	Proportionalitätsgrenze $\sigma_p$	Festigkeit <i>K</i>
	vH	kg/qcm	kg/qcm	kg/qcm	vH	kg/qcm	kg/qcm	kg/qcm
	<b>Kiefer</b>				<b>Eiche</b>			
Zug (parallel	13	90000	.	790	.	103000	475	965
Druck) zurFaser	18	96000	155	280	.	103000	150	345
Biegung <sup>1)</sup>	23	108000	200	470	24	100000	215	600
Schub <sup>2)</sup>	25	.	.	45	.	.	.	75
	<b>Fichte</b>				<b>Buche</b>			
Zug (parallel	16	92000	.	750	.	180000	580	1340
Druck) zurFaser	19	99000	150	245	.	169000	100	320
Biegung <sup>1)</sup>	29	111000	230	420	17	128000	240	670
Schub <sup>2)</sup>	38	.	.	40	.	.	.	85
	<b>Hartholz (Tallowwood)<sup>3)</sup></b>							
Zug (parallel	.	225000	.	1000	.	.	.	.
Druck) zurFaser	.	213000	.	638	.	.	.	.
Biegung <sup>1)</sup>	16	201500	357	1145	.	.	.	.
Schub <sup>2)</sup>	.	.	.	105	.	.	.	.

<sup>1)</sup> Der Stammkern liegt in der Querschnittsmitte.

<sup>2)</sup> Abscherung parallel zur Faserrichtung in einer durch die Stammachse gehenden Ebene.  $K_s$  für das Kernholz = 0,75  $K_s$  für den ganzen Querschnitt.

<sup>3)</sup> S. Dingl. Journ. 1907, S. 193.

Nach Tetmajer ist, wenn  $\mu_1 = K_s : K_z$ , für Nadelholz  $\mu_1 = 0,104$ , nach Winkler für Nadelholz  $\mu_1 = 0,064$  (|| z. F.),  $\mu_1 = 0,032$  ( $\perp$  z. F.), für Eichenholz  $\mu_1 = 0,084$  (|| z. F.),  $\mu_1 = 0,027$  ( $\perp$  z. F.).

**e. Steine\*) und Bindemittel.**

Baustoff	Festigkeit, bezogen auf die Druckfestigkeit <i>K</i> ,		
	für Zug	Biegung	Schub
Steine . . . . .	$K_z = \frac{1}{26} K$	$K_b = \frac{1}{6} K$	$K_s = \frac{1}{13} K$
Zementmörtel . . . . .	$K_z = \frac{1}{10}$ bis $\frac{1}{6} K$	$K_b = \frac{1}{4} K$	$K_s = \frac{1}{6} K$
Kalkmörtel . . . . .	$K_z = \frac{1}{8} K$	.	.
Beton . . . . .	$K_z = \frac{1}{12}$ bis $\frac{1}{10} K$	.	$K_s > K_z$

Baustoff	Druckfestigkeit <i>K</i> kg/qcm	Baustoff	Druckfestigkeit <i>K</i> kg/qcm
Granite: <sup>1)</sup>			
sehr feste	1200—2000	Syenit . . . . .	800—2000
polierbare		Porphyry . . . . .	500—2000
festen <sup>2)</sup>	800—1200	Basalt . . . . .	1000—2000
wenig feste, wenig od. nicht polierbare	450—800	Basaltlava . . . . .	300—1500

<sup>1)</sup> Nach der preuss. Minist.-Bestimmung v. 31. Januar 1910.

<sup>2)</sup> C. Bach fand beispielsweise für feinkörnigen blauen **Granit**:  $K = 1006$ ,  $K_b = 84$ ,  $K_s = 78$ ,  $K_z = 45$ .

\*) Ausführlichere Angaben über die Festigkeit natürlicher Gesteine s. Hugo Koch, Die natürlichen Bausteine Deutschlands; Berlin 1892, Verlag der Deutschen Bauzeitung.

Baustoff	Druckfestigkeit $K$ kg/qcm	Baustoff	Druckfestigkeit $K$ kg/qcm
Kalksteine: 1)		Klinker-Ziegelsteine .	300—900
Marmor . . . . .	500—1800	Mittelbrand- } Ziegel-	200—300
Dichter Kalk . . . . .	200—1600	Schwachbrand- } steine <sup>3)</sup>	150—200
Poriger Kalk . . . . .	200—600	Ziegelmauerwerk . . . . .	140
Tonschiefer (Bruchstein)	600—1700	Porige Vollsteine . . . . .	150
Sandsteine: 1)		Korkstein <sup>4)</sup> . . . . .	17
sehr feste . . . . .	1500—2000	„ „ $K_b =$	7,2
feste . . . . .	1000—1500	Zementmörtel 1:3	
mittelfeste . . . . .	600—1000	langsam bindend	
wenig feste . . . . .	200—600	nach 7 Tagen . . . . .	120
Tuff: 1)		(1 Luft, 6 Wasser)	
feste . . . . .	300—1500	nach 28 Tagen . . . . .	250
wenig feste . . . . .	200—300	(1 L., 6 W., 21 L.)	
Zement-Kiesbeton <sup>2)</sup> .	60—350	nach 28 Tagen . . . . .	200
Kunstsandstein . . . . .	450	(1 L., 27 W.)	
„ $K_s =$	47	Asbestzement <sup>5)</sup> nach	
Hochofenschlacke, ge-		28 Tagen	
tempert . . . . .	1000—2500	unter Wasser erhärtet	47
		an der Luft „	85
		guter Kalkmörtel, 28	
		Tage . . . . .	15

1) Nach der preufs. Minist.-Bestimmung vom 31. 1. 10. Die Zahlen gelten für Beanspruchung senkrecht zur Lagerfläche.

2) In Würfelform, je nach Zusammensetzung, 28 Tage alt. Ueber die Druckfestigkeit mit zunehmendem Alter s. Beton u. Eisen 1909 S. 129.

3)  $K_z : K$  nach Hartig = 1:14 bis 1:15.

4) von Grünzweig & Hartmann in Ludwigshafen a. Rh.

5) der Asbestzementwerke, G. m. b. H., Hamburg.  $K_z : K = 1:4$ .

Das **Elastizitätsmaß** der Steine und Mörtel hängt in hohem Grade von der Spannung und (bei letzteren) von der Erhärtungszeit ab. Setzt man nach S. 503  $\epsilon = \alpha_0 \sigma^n$ , so ist nach C. Bach\*) für

	$\frac{1}{\alpha_0}$	$n$	Beton (Druck):	$\frac{1}{\alpha_0}$	$n$
Granit (Zug) . . . . .	240 000	1,40	1 Zem., 2 1/2 Sand, 5 Kies	298 000	1,145
„ (Druck) . . . . .	300 000	1,12	1 „ 5 „ 6 „	280 000	1,137
reinen Zement (Druck) . . . . .	250 000	1,09	1 „ 5 „ 10 „	217 000	1,157
Zementmörtel 1:1 1/2 (Druck)	356 000	1,11	1 „ 2 1/2 „ 5 Sch. 1)	457 000	1,157
„ 1:3 „	315 000	1,15	1 „ 3 „ 6 „	380 000	1,161
„ 1:4 1/2 „	230 000	1,17	1 „ 5 „ 10 „	367 000	1,207

1) Sch. = Kalksteinschotter.

Die Dehnungszahl bei der Spannung  $\sigma$  beträgt

$$\alpha_\sigma = \frac{1}{E_\sigma} = \frac{d\epsilon}{d\sigma} = \alpha_0 n \sigma^{n-1},$$

\*) S. Z. d. V. d. I. 1897 S. 241.

die mittlere Dehnungszahl für die Spannungsgrenzen 0 und  $\sigma$

$$\alpha = \frac{1}{E} = \frac{\varepsilon}{\sigma} = \alpha_0 \sigma^{n-1};$$

so ist z. B. für **Granit** das Elastizitätsmaß bei  $\sigma = 45$  kg/qcm Druck  $E_\sigma = 530\,400$ , im Mittel zwischen  $\sigma = 0$  und 45:  $E = 594\,000$ ; für **Zementmörtel** (1:4 $\frac{1}{2}$ ) bei  $\sigma = 30$  kg/qcm Druck  $E_\sigma = 480\,000$ , im Mittel zwischen  $\sigma = 0$  und 30:  $E = 562\,000$ .

**Sandstein** zeigt starke Veränderlichkeit von  $\alpha_\sigma$  und  $E$ ; z. B. fand C. Bach für Zug bei  $k = 0$  bis 4,2  $E = 93\,700$ , bei  $k = 4,2$  bis 8,3  $E = 46\,000$ , bei  $k = 8,3$  bis 12,3  $E = 29\,250$ , bei  $k = 12,3$  bis 16,4  $E = 21\,000$  i. M.\*)

Bei **Portlandzementmörtel** ergeben sich nach C. Bach für einen Sandzusatz von 0, 1,5, 3 u. 4,5 R.-T. (zu 1 R.-T. Zement) zwischen 0 u. 40 kg/qcm Druck durchschn.  $E = 211\,000, 281\,000, 232\,000, 159\,000$ . (Die spezifischen Gewichte waren dabei 2,065, 2,117, 2,04, 1,91.) Der Sandzusatz vermindert daher zunächst die Elastizität, weiterer Zusatz vermehrt sie wieder.

**Beton** aus 1 R.-T. Portland-Zement, 2 $\frac{1}{2}$  R.-T. Sand, 5 R.-T. Kies, 77 Tage alt, hat nach Druckversuchen von C. Bach\*\*)

für $\sigma = 0$ bis 7,9	$E = 306\,000$	$\sigma = 23,7$ bis 31,6	$E = 212\,000$
7,9 „ 15,8	256 000	31,6 „ 39,5	194 000
15,8 „ 23,7	226 000		

Weitere Angaben s. S. 519 unten.

Die Werte  $E$  sind Mittelwerte für die angegebenen Druckgrenzen.

Nach den preuß. „Bestimmungen f. d. Ausführung von Konstruktionen aus Eisenbeton bei Hochbauten“ vom 24. 5. 1907 ist bei Verbundkonstruktionen  $E$  für Beton (Druck)  $= \frac{1}{15} E$  für Eisen anzunehmen, sofern nicht ein anderer Wert nachgewiesen wird; das ergibt  $E_{\text{Beton}} = \frac{1}{15} \cdot 2\,150\,000 = 143\,000$ . Für Straßen- und Eisenbahnbrücken ist nach Bestimmungen der Königl. Eisenbahn-Direktion Berlin  $E_{\text{Beton}} = \frac{1}{10} E_{\text{Eisen}} (= 215\,000)$  anzunehmen. Dieser Wert findet sich auch anderwärts.

Die schweizer Betonbestimmungen schreiben  $\frac{1}{20}$  vor.

Versuche über  $E$  bei Zug von Wayss und Freytag (1901)\*\*\*) lehren, daß die meist übliche Annahme:  $E_{\text{Zug}} = \frac{1}{9}$  bis  $\frac{1}{25} E_{\text{Druck}}$ , & M.  $= \frac{1}{16} E_{\text{Druck}}$ , nicht zutrifft. Danach ist  $E_{\text{Zug}} : E_{\text{Druck}} = 0,88$  bis 0,73 für  $\sigma = 3$  bis 6 kg/qcm.

Die österreichischen Betonbestimmungen setzen  $E_{\text{Zug}} = 0,4 E_{\text{Druck}}$ .

Gleitmaß für Beton  $G = 80\,000$  bis 90 000.

**Ziegel** (mit  $K = 284, K_z = 20$ ) haben nach E. Hartig etwa  $E = 93\,000$ , Klinker (Mergelklinker mit  $K = 780, K_z = 52$ )  $E = 210\,000$ . †)

Nach der preussischen Ministerialbestimmung vom 21. 1. 1909 ist für Ziegel  $E = \frac{1}{25} E_{\text{Fluß Eisen}} = 86\,000$ .

Nach Versuchen an Gewölben ††) ist das mittlere Elastizitätsmaß  $E$  für die Spannungsgrenzen 0 und  $\sigma_p$

für Bruchstein	Ziegelstein	Stampfbeton	Moniergewölbe
$E = 60\,400$	27 800	246 000	333 500.

\*) Weiteres s. Z. d. V. d. I. 1900 S. 1169. — \*\*) S. Z. d. V. d. I. 1896 S. 1391. — \*\*\*) S. E. Mörsch, Der Eisenbetonbau, 1906 S. 25 u. f. — †) S. Civ.-Ing. 1893 S. 323. — ††) S. Bericht des Gewölbe-Ausschusses des österr. Ing.- u. Arch.-Vereins in Wien, auch Z. ö. I. u. A. V. 1895.

## f. Zugorgane.

Die Zugfestigkeit der **Drähte** ist abhängig vom Drahtdurchmesser. Sind  $c$  und  $K_0$  Unveränderliche, so ist für den Drahtdurchmesser  $d$  in mm die Zugfestigkeit in kg/qcm  $K_z = \frac{c}{d} + K_0$ .

( $K_0$  bedeutet demnach die Zugfestigkeit des Stoffes für  $d = \infty$ .)

Werte von  $c$  und  $K_0$  nach Karmarsch.

Drahtsorte	ungeglüht		geglüht		Drahtsorte	ungeglüht		geglüht	
	$c$	$K_0$	$c$	$K_0$		$c$	$K_0$	$c$	$K_0$
Bester Eisendraht <sup>1)</sup>	1590	6370	380	3310	Messingdraht <sup>1)</sup>	1020	5480	700	2870
Gewönl. Eisendraht	2290	4580	640	2870	Harter Bleidraht	0	220	.	.
Stahldraht	2670	6370	380	5730	Weicher Bleidraht	0	170	.	.
Zinkdraht	220	1270	0	5730	Platindraht	1210	2230	960	1850
Kupferdraht	960	3500	0	2360	Bronzedraht	1860	5030	.	.

1) Klaviersaitendraht.

Vom Drahtdurchmesser unabhängige, mittlere Werte der Zugfestigkeit  $K_z$  enthält die folgende Tafel.

Stoff	Elastizitäts- maß für Zug $E = 1 : \alpha$ kg/qcm	Prop- grenze für Zug $\sigma_p$ kg/qcm	Zugfestigkeit $K_z$ kg/qcm	Bemerkungen
Eisen- draht	.	4200	5600 (bis 7000)	Für einmal geflochtene (Drahtspiral-) Seile $E_1 = 0,6 E$ ,
{ blank gezogen	.	2000	4000 <sup>1)</sup>	für doppelt geflochtene (üb- liche) Seile
{ geglüht	2000000	5200	6500	$E_1 = 0,6^2 E$ ,
Bessemer- draht	.	2250	4000—6000	für dreifach geflochtene Seile (mehrere Litzen zu einem Strang, mehrere Stränge zu einem Seil — Kabelleile)
{ blank	.	10000	9000—19000 <sup>2)</sup>	$E_1 = 0,6^3 E$ ,
{ geglüht	2150000	.	1900	worin $E$ das Elastizitätsmaß des betr. Drahtes ist. <sup>4)</sup>
Niegelstahldraht	2150000	10000	9000—19000 <sup>2)</sup>	$\varphi = 1 \text{ vH}$
Zinkdraht	150000	.	1900	$\varphi = 72 \text{ vH}$
Kupferdraht	1300000	1200	4000	
Bronzedraht	.	.	4600—7100	
Siliziumbronzedraht	.	.	6500—8500	
Doppelbronzedraht	.	.	7600	
Phosphor- bronzedraht	.	.	14000	
{ blank	.	.	6300	
{ geglüht	.	.	bis 9840	
Deltametalldraht	.	.	5000—6100	bei $460^0 K_z = 160$
Messingdraht	1000000	1300	2300—2700	
Aluminiumdraht (kalt geschmiedet)	.	.	6500	
Alum.-Bronzedraht (10 vH) gegossen <sup>6)</sup>	.	.	3300—3700	$\varphi = 6 \text{ vH}$
Magnaliumdraht	.	.	220 hart	$G = 26250$
3leidraht	70000	.	170 weich	
Lederriemen, neu	1250	160	250—450 <sup>3)</sup>	Leder für Zug: $\varepsilon = \frac{1}{415} \sigma, 7$ , falls $\sigma = 3,9$ bis 27,2
„ gebraucht	2250	.		
Manila- und Schleifs- hanfseile	6000 bis 15000 (i. M. 7500 <sup>5)</sup> )		1200 bis 1350 neu <sup>5)</sup> 500 alt <sup>5)</sup>	
Drahtseile	s. o. bei Eisen- u. Stahldraht.		.	

1) Verzinkter, geglähter Flußeisendraht für Telegraphenzwecke  $K_z = 4000$  bis 4300.  
 2) Zur Kraftübertragung für landwirtschaftliche Maschinen wird zu Drahtseilen Stahldraht von  $K_z = 25\ 300$  verwendet; s. Z. d. B. 1886 S. 371. — Für sogen. Pflugsstahldraht ist  $K_z = 18\ 000$ .

Verzinkter Telegraphendraht  $K_z = 13\ 500$ . — Flußstahldraht zu Förderseilen (namentlich bei Menschenförderung)  $K_z = 11\ 500$  bis 13 000, u. Umst. bis 20 000 gewählt.

Verzinnter Saitenstahldraht  $K_z = 17\ 300$  bis 22 000. A. Riedinger, Augsburg, liefert Stahlkabel mit  $K_z = 22\ 000$  des Drahtes bei 0,2 bis 0,37 mm Dicke.

3) Bei schnellem Zerreißen. Für monatelange Belastung sinkt  $K_z$  bis auf das  $\frac{2}{3}$ -fache herab.

Zugfestigkeit  $K_z$  anderer Riemen nach Thomae, Z. d. V. d. I. 1901 S. 353: Schlangengerader (100 mm breit, sehr dünn) 500; Chromleder (Mitte der Bauchseite, Längsrichtung) 600 bis 900 (gegen 300 bis 400 bei lohgerem Leder); Ramierriemen 820; gewebte Baumwollriemen 360, genähte dsgl. 450 bis 520; Balatriemen 450; Kameelhaarriemen (Kette Kameelhaar, Einschlag Baumwolle) 400 kg/qcm.

4) Werte von  $K_z$  für Drahtseile s. auch 6. Abschn., Maschinenteile.

5) Bezogen auf den tatsächl. Querschnitt der Litzen  $= 0,66 \frac{\pi d^2}{4}$ , wo  $d$  der Seildurchmesser. Bezieht man  $K_z$  auf den Querschnitt  $\frac{\pi d^2}{4}$ , so ergeben sich Werte  $= \frac{2}{3}$  der angegebenen.

6) Draht aus anderen Aluminium-Legierungen (nach Moedebeck). Werte von  $K_z$ : Wolframium 3000, Chromaluminium 4500, Nickelaluminium 4000, Viktoria-Aluminium (Cu, Sn, Al) [Partinium], gegossen, 1500. Aluman (10 Zn, 2 Cu, 88 Al), kalt geschmiedet, 3000.

## C. Zulässige Spannungen.

### a. Zulässige Spannungen für den Maschinenbau.

Erklärung des Begriffes der zulässigen Spannung s. S. 506.

In nachstehender Tafel\*) gelten die zulässigen Spannungen unter I, wenn die Belastung eine ruhende ist.

Die zulässigen Spannungen unter II gelten, wenn die Belastung beliebig oft wechselt, derart, daß die durch sie hervorgerufenen Spannungen abwechselnd von null bis zu einem größten Werte stetig wachsen und dann wieder auf null zurücksinken (z. B. wiederholte Dehnung, wiederholte Biegung, wiederholte Drehung nach einer Richtung hin).

Die zulässigen Spannungen unter III gelten, wenn die Belastung beliebig oft wechselt, derart, daß die durch sie hervorgerufenen Spannungen abwechselnd von einem größten negativen Werte stetig wachsen bis zu einem größten positiven, absolut gleich großen Werte, dann wieder abnehmen (z. B. wiederholte Biegung und wiederholte Drehung nach entgegengesetzten Richtungen hin). Der Wechsel der Beanspruchung kann auch durch Aenderung der Temperatur bewirkt werden.

Für die zwischenliegenden Arten der Belastung können dazwischenliegende, den Spannungsgrenzen entsprechende Werte genommen werden.

Wenn Bauteile gegen die Wirkung bewegter Massen widerstandsfähig zu machen sind, so ist dafür eine besondere Rechnung anzustellen

\*) Vrgl. C. Bach, Die Maschinen-Elemente, 10. Aufl. S. 55.

und u. Umst. die eigentümliche Beanspruchung (Stöße) durch Verminderung der zulässigen Spannungen schätzungsweise zu berücksichtigen.

Gegen die Wirkung bewegter Massen sowie gegen die Einwirkung von Spannungen, die durch stark wechselnde Belastungen oder durch starke Wärmeschwankungen veranlaßt werden, empfiehlt sich die Wahl eines Stoffes mit ausreichend großem Arbeitsvermögen.

### Zulässige Spannungen in kg/qcm, nach C. Bach.

Art der Festigkeit und Belastung		Schweiß-eisen <sup>1)</sup>	Fluß-eisen <sup>2)</sup>		Fluß-stahl <sup>2)</sup>		Stahlgufs		Gufseisen	Kupfer-blech gewalzt
			von	bis	von	bis	von	bis		
<b>Zug</b> $k_z$	I	900	900	1200	1200	1500	600	900	300	600 <sup>5)</sup>
	II	600	600	800	800	1000	400	600	200	300
	III	300	300	400	400	500	200	300	100	.
<b>Druck</b> $k$	I	900	900	1200	1200	1500	900	1200	900	.
	II	600	600	800	800	1000	600	900	600	.
<b>Biegung</b> $k_b$	I	900	900	1200	1200	1500	750	1050	.	.
	II	600	600	800	800	1000	500	700	.	.)
	III	300	300	400	400	500	250	350	.	.
<b>Schub</b> $k_s$	I	720	720	960	960	1200	480	840	300	.
	II	480	480	640	640	800	320	560	200	.
	III	240	240	320	320	400	160	280	100	.
<b>Drehung</b> $k_d$	I	360	600	840	900	1200	480	840	.	.
	II	240	400	560	600	800	320	560	.	.)
	III	120	200	280	300	400	160	280	.	.

1) Für **vorzügliches Schweiß-eisen** können die angegebenen zulässigen Spannungen um Beträge bis zu einem Drittel höher genommen werden, sofern die hierdurch zugelassenen größeren Formänderungen in ihrer Gesamtheit mit dem Zwecke des Bauteiles vereinbar sind. Wo zu befürchten steht, daß die Gesamtformänderung die mit Rücksicht auf den Zweck des Bauteiles als zulässig erachtete Grenze überschreitet, ist von dieser auszugehen.

2) Die höheren Werte sind nur bei durchaus zuverlässigem Stoff anzuwenden (vgl. S. 507). — Für **Draht** gelten, entsprechend der größeren Zugfestigkeit, größere Werte für  $k_z$ , u. zw.  $k_z = \frac{1}{3} K_z$  bis  $\frac{1}{5} K_z$ . Höhere Werte sind auch zulässig bei Verwendung von Spezialstählen von höherer Festigkeit (vgl. S. 508).

3) Für **bearbeitetes Gufseisen** (vgl. S. 542) setze man die zulässige **Biegungs-spannung**

$$k_b = \mu k_z \sqrt{\frac{e}{z_0}}, \text{ worin}$$

$\mu = 1,20$  bis  $1,33$ , und für den Balkenquerschnitt:

$e$  den Abstand der am stärksten gespannten Faser von der Nullachse,

$z_0$  den Abstand des Schwerpunktes der auf der einen Seite der Nullachse gelegenen Querschnittfläche von der Nullachse bezeichnet.

Versuche ergaben für den rechteckigen Querschnitt  $k_b = 1,7 k_z$ , für den kreisförmigen Querschnitt  $k_b = 2,05 k_z$ , für den I-förmigen Querschnitt  $k_b = 1,45 k_z$ .

Für **vorzügliches Gufseisen** in Formen, die Gewähr für geringe Gufsspannungen und vollkommene Dichtheit bieten, können die für  $k_b$  gegebenen Werte um Beträge bis zu einem Viertel höher genommen werden.

Für **Rohguß** ergab sich  $k_b = 1,4k_z$  bzw.  $k_b = 1,7k_z$  und  $k_b = 1,2k_z$  bei den vorstehend bezeichneten Querschnitten.

- 4) Die zulässige **Drehungsspannung**  $k_d$  des **bearbeiteten Gußeisens** setze man für den kreisförmigen Querschnitt . . . . .  $k_d = (\text{reichlich}) k_z$ ,  
 „ „ kreisringförmigen und hohlelliptischen Querschnitt  $k_d = 0,8k_z$  bis  $k_z$ ,  
 „ „ elliptischen Querschnitt . . . . .  $k_d = k_z$  bis  $1,25k_z$ ,  
 „ „ quadratischen Querschnitt . . . . .  $k_d = 1,4k_z$ ,  
 „ „ rechteckigen, dreieckigen und trapezförmigen Querschnitt . . . . .  $k_d = 1,4k_z$  bis  $1,6k_z$ ,  
 „ „ hohlrechteckigen Querschnitt . . . . .  $k_d = k_z$  bis  $1,25k_z$ ,  
 „ „ I-, C-, +-, L-förmigen Querschnitt . . . . .  $k_d = 1,4k_z$  bis  $1,8k_z$ .

Der Einfluß der Gußhaut ist hier geringer als bei der Biegungsspannung.

Die zulässige **Zugspannung**  $k_z$  für Gußeisen s. in Tafel S. 523.

- 5) Bei Windkesseln großer Feuerspritzen sei  $k_z \leq 800$ , bei Zentrifugen  $k_z = 500$ .

Für sehr guten gehärteten **Federstahl** ist nach C. Bach im Falle I  $k_b = 7500$ ,  $k_d = 6000$ , im Falle II  $k_b = 5000$ ,  $k_d = 4000$  zu setzen. Bei Anwendung von Spezialstahl finden sich bei zylindrischen Schraubenfedern Werte  $k_d = 10000$  und mehr. Nach Wöhler wähle man für gehärtete Eisenbahnfedern i. M.  $k_b = 6500$  kg/qcm, wobei ein Spielen zwischen 6500 und 8600 zulässig; Stambke empfiehlt  $k_b = 5500$  bis 5800 kg/qcm unter Zugrundelegung der ruhigen Last.

**b. Zulässige Spannungen für den Hochbau (in kg/qcm).**

**I. Metalle.**

**I. Preussische Bestimmungen über die bei Hochbauten anzunehmende Beanspruchung der Baustoffe vom 31. Januar 1910.**

Metall	Zug $k_z$	Druck $k$	Biegung $k_b$	Schub $k_s$	Lochleibungsdruck
Flußeisen in Trägern zur Unterstützung von Decken und Treppen Als Stützlänge ist die Entfernung zwischen den Auflagermitten anzunehmen.	1200	1200	1200	1000 <sup>1)</sup>	2000 <sup>1)</sup>
Flußeisen in Stützen . . . . .	1200	1200	1200	1000	2000
Flußeisen in Stützen bei genauer Berechnung der unter den ungünstigsten Umständen auftretenden Kantenpressung . . . . . Berechnung auf Knicken mit 5-facher Sicherheit (Formel $J_{\min} = 2,33 P l^3$ ; s. S. 535). Als Knicklänge gilt die ganze Systemlänge, bei übereinanderstehenden, allseitig durch Deckenträger ausgesteiften Stützen die Geschosshöhe.	1400	1400	1400	1000	2000
Flußeisen in Dächern, Fachwerkwänden, Trägern zur Unterstützung von Wänden, Kranbahnträgern, wenn die Querschnittgröße durch Eigenlast, Nutzlast und Schneeeindruck allein bedingt ist . . . . .	1200	1200	1200	1000	2000

Metall	Zug	Druck	Bie-	Schub	Loch-
	$k_z$	$k$	gung	$k_s$	lei-
			$k_b$		bungs-
					druck
Flufseisen in denselben Bauteilen, wenn die größte Spannung bei gleichzeitiger ungünstigster Wirkung von Eigenlast, Nutzlast, Schneedruck und Winddruck von 150 kg/qm eintritt . . . . .	1400	1400	1400	1000	2000
Ausnahmsweise darf bei Dächern, wenn für eine den strengsten Anforderungen genügende Durchbildung, Berechnung und Ausführung volle Sicherheit gegeben ist, für den vorstehenden Fall die Spannung betragen bis . . . . .	1600	1600	1600	.	.
Für Träger zur Unterstützung von Wänden gilt die Entfernung der Auflagermitten als Stützweite.					
Druckglieder sind auf Knicken mit 4-facher Sicherheit (Formel $J_{\min} = 1,82 P l^3$ ; s. S. 535) zu berechnen; als Knicklänge gilt die Systemlänge.					
Flufseisen in Ankeren . . . . .	800	.	.	.	.
Flufseisenstäbe in Bauteilen aus Eisenbeton, insbesondere bei Beanspruchung der Bauteile auf Biegung <sup>2)</sup> . . . . .	1000	1000	.	.	.
Für Schweifseisen sind die für Flufseisen angegebenen Werte um 10 vH zu ermäßigen. Noch weiter herabzusetzen ist die Beanspruchung von altem, wieder zur Verwendung gelangendem Eisen je nach seiner Beschaffenheit.					
Gufseisen in Auflagern . . . . .	.	1000	.	.	.
Gufseisen in Säulen . . . . .	.	500	250	200	.
Berechnung der gufseisernen Säulen auf Knicken mit 6- bis 8-facher Sicherheit nach der Formel $J_{\min} = 6 \text{ bis } 8 P l^3$ (s. S. 535).					
Stahlformgufs . . . . .	.	.	1200	.	.
Schmiedestahl . . . . .	1400	1400	1400	.	.
Zinkblech . . . . .	200	200	150	.	.

1) Für Niete und gedrehte Schraubenbolzen. Bei gewöhnlichen Schraubenbolzen  $k_s = 750$ , Lochleibungsdruck  $k = 1500$ .

2) Preussischer Ministerial-Erlaß (Eisenbetonbestimmungen) vom 24. Mai 1907.

II. Zulässige Spannungen des Eisens bei Brücken gemäß preuß. Minist.-Erlaß vom 1. Mai 1903 s. Abschn. Statik der Baukonstruktionen. S. 71.

**III.** Ueber die zulässigen Spannungen des Schweiß- und Flußeisens für **wiederholte** Zug- und Druckbeanspruchungen mit Rücksicht auf Stöße, Zuschlag- und Nebenspannungen s. S. 530 u. f.

**2. Hölzer.**

Die **fett** gedruckten Zahlen sind vom preussischen Ministerium d. öffentl. Arb. vorgeschrieben (Erl. v. 31. Januar 1910).

Die oberen Grenzwerte dürfen keinesfalls überschritten werden.

Holzart	Zug $k_z$	Druck $k$	Biegung $k_b$	Schub $k_s$	
				zur Faser	⊥ zur Faser
Eichenholz <sup>1)</sup>	<b>100—120</b>	<b>80—100</b>	<b>100—120</b>	<b>15—20</b>	<b>80—90</b>
Kiefernholz (astfrei)	<b>100—120</b>	<b>60—80</b>	<b>100—120</b>	<b>10—15</b>	<b>60—70</b>
Tannenholz	60	50	.	.	.
Eschenholz	100—120	66	.	.	.
Hartholz(Tallowood)	200	160	200	.	30

<sup>1)</sup> Auch für Buchenholz anwendbar.

Bei Bauten für vorübergehende Zwecke (Ausstellungshallen u. dgl.) dürfen die Zahlen um 50 vH erhöht werden. Stützen sind auf Knicken mit 6- bis 10-facher Sicherheit ( $J_{\min} = 60 P^2$  bis  $100 P^2$ ) zu berechnen. Die untere Grenze von  $J$  gilt nur für vorübergehende Bauten.

**3. Steine, Mauerwerk und andere Baustoffe.**

**I. Vorschrift des preuss. Ministeriums d. öffentl. Arb. vom 31. Januar 1910.**

Natürliche Bausteine	Auflagersteine	Pfeiler u. Gewölbe	Sehr schlanke Pfeiler u. Säulen
		⊗ = 10—15	⊗ = 15—20
Granit . . . $k =$	<b>60—90</b>	<b>45—60</b>	<b>25—30</b>
Sandstein . . . $k =$	<b>30—50</b>	<b>25—30</b>	<b>15—20</b>
Kalkstein u. Marmor } $k =$	<b>30—40</b>	<b>20—30</b>	<b>12—15</b>

Die Sicherheitsmaße ⊗ sind vorgeschrieben, die fett gedruckten Druckspannungen  $k$  ebenfalls, sofern besondere Festigkeitsnachweise nicht erbracht sind. Sind solche erbracht, so werden gegebenenfalls höhere Werte von  $k$  bis zu den angegebenen Grenzen empfohlen.

Mauerwerk	Druck $k$ kg/qcm	Mauerwerk	Druck $k$ kg/qcm
Ziegelmauerwerk in Kalkmörtel 1:3 . . . . .	bis 7	Mauerwerk aus Schwemmsteinen von $k > 20$ kg/qcm	bis 3
Mauerwerk in Hartbrandsteinen in Kalkzementmörtel 1 Z. : 2 K. : 6—8 S.	12—15	Mauerwerk aus Kalksandsteinen in Kalkmörtel 1:3	„ 7
Klinkermauerwerk in Zementmörtel 1:3 . . . . .	20—30	Dsgl. in Kalkzementmörtel 1 Z. : 2 K. : 6—8 S. . . . .	12—15
Mauerwerk aus porigen Ziegeln . . . . .	3—6	Bruchsteinmauerwerk in Kalkmörtel . . . . .	bis 5
		Fundamentmauerwerk aus Schüttbeton . . . . .	6—8
		Stampfbeton . . . . .	10—15

Guter Baugrund  $k = 3$  bis  $4$  kg/qcm. Höhere Beanspruchung ist besonders zu begründen.

Im besonderen werden (nicht amtlich) folgende Druckbeanspruchungen für den Baugrund empfohlen (s. auch III. Bd. S. 229 u. f.):

Feiner Sand, nicht fest gelagert . . . . .	$k = 1,5$ bis $2,5$ kg/qcm
Sehr fester, dichter Sand . . . . .	6,5 „ 7,5 „
Trockener, festgelagerter kiesiger Baugrund ohne Ton . . . . .	2,5 „ 5,0 „
Lehmiger Boden mit 30 bis 70 vH Sand . . . . .	0,8 „ 1,6 „
Fester Ton, mit feinem Sand gemengt . . . . .	4,0 „ 5,0 „
Harter Mergel . . . . .	5,4 „ 8,7 „
Fester, schiefriger und feiner Schotter . . . . .	6,5 „ 8,7 „
Sandstein, der in der Hand zerbröckelt . . . . .	1,6 „ 1,9 „
Fester Fels . . . . .	9 „ 20 „

II. Schaper\*) macht für Brücken die Druckspannung der Lagersteine abhängig von der Spannweite  $l$  und empfiehlt für die Zwischenlage aus Mörtelgufs zwischen Eisenlager und Stein, unabhängig von dem Baustoffe des Lagersteins bei  $l = 10$  m  $k = 20$ , bei  $l = 100$  m  $k = 50$  kg/qcm mit geradliniger Zwischenschaltung, gleichmäßige Druckverteilung vorausgesetzt (Kantenpressungen 20 vH höher); für die Untermauerung des Auflagersteines, Beton (I Z, 0,7 Trafs, 3 S., 7 K.) mit  $K = 150$  nach 28,  $K = 210$  nach 100 Tagen bei  $l = 10$  m  $k = 10$ , bei  $l = 100$  m  $k = 40$  kg/qcm. (Kantenpressungen 20 vH höher.)

III. Beton für Verbundbauten, nach der preufs. Ministerialbestimmung vom 24. Mai 1907:

bei Beanspruchung auf Biegung  $k = \frac{1}{6} K$ ,  $k_z = \frac{2}{3} K_z$ , wenn  $K_z$  versuchsmäßig nachgewiesen ist, oder  $k_z \geq 0,1 K$  bei fehlendem Nachweise von  $K_z$ ; bei Beanspruchung auf achsialen Druck  $k = 0,1 K$ . Ferner die zulässige Schub- und Haftspannung  $\tau = 4,5$  kg/qcm bei fehlendem Nachweise der Schubfestigkeit  $K_s$ , oder  $= 0,2 K_s$  bei nachgewiesener Schubfestigkeit  $K_s$ .

Glas  $k = 25$ . Für geblasenes Glas ist  $k_b = 125$  kg/qcm, für Rohglas (von  $s = 0,5$  bis  $1,5$  cm Dicke) ist nach Schwingung  $k_b = \frac{1}{3} [200 + 160 (1,5 s)^2]$  kg/qcm.

Rampfpfähle s. III. Bd. S. 226 u. f.

Bestimmungen über die Beanspruchung der bei Schornsteinen verwendeten Stoffe (Min.-Erl. v. 30. April 1902) s. Abschn. Kraftmaschinen, Dampfkessel.

## II. FESTIGKEIT GERADER STÄBE.

Bemerkung. Wo nicht ausdrücklich anders bemerkt, ist stets das Hookesche Gesetz (S. 503) als gültig angenommen.

### A. Zug- und Druckfestigkeit.

1. Die Belastung  $P$  in kg, die ein auf Zug oder Druck beanspruchter prismatischer Stab vom Querschnitte  $F$  qcm mit Sicherheit tragen kann, ist  $P = F k_z$  oder  $P = F k$ , wenn  $k_z$  die zulässige Zugspannung,  $k$  die zulässige Druckspannung in kg/qcm bedeutet.

\*) Z. d. B. 1909 S. 663.

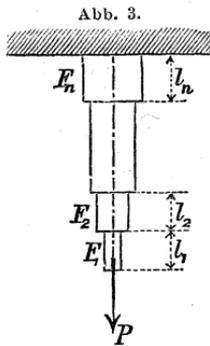
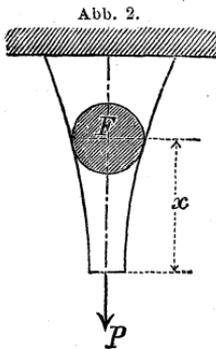
Ist der Stab von veränderlichem Querschnitte, so ist für die Berechnung der Tragkraft der kleinste Querschnitt maßgebend.

Gedrückte Stäbe, deren Länge im Verhältnis zu den Abmessungen des Querschnittes bedeutend ist, sind auf **Knickfestigkeit** zu berechnen; näheres s. S. 533 u. f.

Die bei der Spannung  $\sigma$  oder der Belastung  $P$  eintretende **elastische Verlängerung** oder **Verkürzung**  $\lambda$  eines prismatischen Stabes von der ursprünglichen Länge  $l$  beträgt [ $\lambda : l = \varepsilon$  s. S. 502]

$$\lambda = \frac{\sigma}{E} l, \text{ oder } \lambda = \frac{Pl}{FE},$$

wenn  $E$  das (als unveränderlich angenommene) Elastizitätsmaß für Zug bzw. Druck bezeichnet. Ueber die bei der elastischen Längenänderung verrichtete **Arbeit** s. S. 505, unter **7.**



**2.** Die Form eines Stabes von **gleichem Widerstande** gegen Zug und Druck (Abb. 2) mit Rücksicht auf das Eigengewicht ist, wenn die Schwerachse des Stabes in die Richtung der angreifenden Kraft  $P$  fällt, bestimmt durch die Gleichung

$$F = \frac{P}{k} e^{\frac{\gamma}{k} x}, \text{ oder}$$

$$\lg F = \lg \frac{P}{k} + 0,4343 \frac{\gamma}{k} x,$$

worin

$F$  den veränderlichen Querschnitt des Stabes in dem beliebigen

Abstände  $x$  cm vom belasteten Ende in qcm,

$P$  die am Stabende wirkende Belastung in kg,

$k$  die zulässige Zug- oder Druckspannung in kg/qcm,

$\gamma$  das Eigengewicht des Stabes in kg/ccm,

$e$  die Grundzahl der natürlichen Logarithmen (s. S. 48) bezeichnet.

Bezeichnet ferner für die aus prismatischen Teilen von verschiedenen Querschnitten zusammengesetzte **Annäherungsform** des Stabes von gleichem Widerstande gegen Zug und Druck (Abb. 3)

$l_n$  die Länge des  $n^{\text{ten}}$  prismatischen Stabteiles, vom belasteten Ende an gerechnet, in cm,

$F_n$  den Querschnitt dieses Teiles in qcm, so gilt die Gleichung

$$F_n = \frac{Pk_{n-1}}{(k - \gamma l_1)(k - \gamma l_2) \dots (k - \gamma l_n)}.$$

Die bei der Längenänderung des Stabes von gleichem Widerstande gegen Zug oder Druck verrichtete **Arbeit** ist in cmkg

$$A = \frac{P}{\gamma} \frac{k^2}{2E} \left( e^{\frac{\gamma}{k} x} - 1 \right);$$

ist  $l$  die Stablänge, so beträgt die **elastische Verlängerung** des Stabes

$$\lambda = \frac{k l}{E}$$

### 3. Druck auf Körper mit gewölbter Oberfläche.\* (Hertz'sche Gleichungen.)

a) **Zwei Kugeln.** Beim zentrischen Druck zweier Kugeln, deren Halbmesser  $= r_1$  und  $r_2$  cm und deren Dehnungszahlen  $= \alpha_1$  und  $\alpha_2$ , ergibt sich, wenn  $P$  die Druckkraft bedeutet und für beide Kugeln das Verhältnis  $m = \varepsilon : \varepsilon_Q$  (s. S. 502)  $= 10/3$  angenommen wird, der Halbmesser der kreisförmigen Druckfläche (in cm) aus

$$a^3 = 0,68 P \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}}; \text{ die größte Druckspannung in der Mitte der Druckfläche (in kg/qcm)}$$

$$\sigma_{\max} = 1,5 \frac{P}{\pi a^2} \quad \text{aus} \quad \sigma^3_{\max} = 0,235 \frac{P \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)^2}{(\alpha_1 + \alpha_2)^2};$$

die Strecke (in cm), um die sich unter der Last  $P$  die Kugeln einander nähern, aus

$$y^3 = 0,46 P^2 (\alpha_1 + \alpha_2)^2 \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right).$$

Für  $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{E}$ , also für gleich elastische Kugeln ergibt sich:

$$a^3 = 1,36 \frac{P}{E \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)},$$

$$\sigma^3_{\max} = 0,059 P E^2 \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)^2, \quad y^3 = 1,84 \frac{P^2}{E^2} \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right).$$

Für zwei gleich große Kugeln vom Halbmesser  $r$

$$a^3 = 0,68 \frac{Pr}{E} = 0,34 \frac{Pd}{E}, \quad \sigma^3_{\max} = 0,235 \frac{PE^2}{4r^2} = 0,94 \frac{PE^2}{d^2},$$

$$y^3 = 3,68 \frac{P^2}{E^2 r} = 7,36 \frac{P^2}{E^2 d}.$$

b) **Kugel und ebene Platte.** Für  $r_1 = r$ ,  $r_2 = \infty$  gehen die ersten beiden Gruppen von Gleichungen über in:

$$a^3 = 0,68 Pr (\alpha_1 + \alpha_2), \quad \text{bzw.} \quad a^3 = 1,36 \frac{Pr}{E},$$

$$\sigma^3_{\max} = \frac{0,235 P}{r^2 (\alpha_1 + \alpha_2)^2}, \quad \text{,,} \quad \sigma^3_{\max} = 0,059 \frac{PE^2}{r^2},$$

$$y^3 = \frac{0,46 P^2 (\alpha_1 + \alpha_2)^2}{r}, \quad \text{,,} \quad y^3 = 1,84 \frac{P^2}{Er}.$$

\* Nach C. Bach, Elastizität und Festigkeit, 5. Aufl. 1905, S. 172. — Versuche von Striebeck s. Z. d. V. d. I. 1907 S. 1500.

Aus der zweiten Gleichung rechts folgt  $P = 4 cr^2 = cd^2$ , wo  $c$  eine nur von der Art des Stoffes abhängige Unveränderliche  $= 0,45 \frac{\sigma_{\max}^3}{E^2}$  ist.

c) **Zwei Kreiszyylinder.** Sind  $r_1$  und  $r_2$  die Halbmesser der Grundflächen,  $l$  die Höhe der Zylinder (in cm), so ergibt sich die Breite der rechteckigen Druckfläche (in cm) aus

$$\left(\frac{b}{4}\right)^2 = 0,29 \frac{P}{l} \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}}, \quad \sigma_{\max}^2 = \left(\frac{4}{\pi} \frac{P}{bl}\right)^2 = 0,35 \frac{P}{l} \frac{1}{\alpha_1 + \alpha_2} \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right).$$

Für  $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{E}$ , also für gleich elastische Zylinder ergibt sich

$$\left(\frac{b}{4}\right)^2 = 0,58 \frac{P}{El} \frac{1}{\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}}, \quad \sigma_{\max}^2 = 0,175 \frac{PE}{l} \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right).$$

Für zwei gleich große Zylinder, deren Halbmesser  $= r$ ,

$$\left(\frac{b}{4}\right)^2 = 0,29 \frac{Pr}{El}, \quad \sigma_{\max}^2 = 0,35 \frac{PE}{lr}.$$

d) **Kreiszyylinder und ebene Platte.** Für  $r_1 = r$ ,  $r_2 = \infty$  ergibt sich aus vorstehenden Gleichungen:

$$\left(\frac{b}{4}\right)^2 = 0,29 \frac{Pr}{l} (\alpha_1 + \alpha_2), \quad \text{bzw.} \quad \left(\frac{b}{4}\right)^2 = 0,58 \frac{Pr}{El},$$

$$\sigma_{\max}^2 = 0,35 \frac{P}{lr(\alpha_1 + \alpha_2)}, \quad \text{,,} \quad \sigma_{\max}^2 = 0,175 \frac{PE}{lr}.$$

Aus der zweiten Gleichung rechts folgt  $P = 2clr = cd$ , wo  $c$  eine nur von der Art des Stoffes abhängige Unveränderliche  $= 2,86 \frac{\sigma_{\max}^2}{E}$  ist.

e) Wegen der zum Teil unzutreffenden Voraussetzungen der Hertzschen Theorie (u. a. sind die Zugspannungen in Ebenen quer zur Druckrichtung nicht berücksichtigt) sind die Werte der Unveränderlichen  $c$  in allen Fällen durch **Versuche** zu ermitteln; weiteres hierüber s. 6. Abschn. Maschinenteile, G. Lager.

#### 4. Wahl der zulässigen Zug- und Druckspannung.

Für Bauteile, die eine im wesentlichen **ruhende** Belastung haben, sind die Werte von  $k_z$  und  $k$  auf S. 522 u. 524 angegeben.

Bei stark **wechselnder** Belastung, namentlich bei eisernen Brücken mit veränderlicher Verkehrslast, sind die zulässigen Spannungen mit Rücksicht auf die Ergebnisse der Wöhlerschen Dauerversuche zu wählen. Diese Ergebnisse sind folgende:

1) Wiederholte Beanspruchung eines Stabes führt den Bruch bei einer geringeren Spannung herbei als bei dem Werte  $K_z$  bzw.  $K$  für ruhende Last.

2) Die Anzahl der zum Bruche erforderlichen Beanspruchungen ist um so größer, je kleiner die größte Spannung (bei unveränderlicher kleinster Spannung) ist, oder je größer die kleinste Spannung (bei unveränderlicher größter Spannung) ist.

3) Die größte Spannung, bei der selbst nach unbegrenzt vielen Belastungswechseln ein Bruch nicht eintritt (**Arbeitsfestigkeit**), ist um so größer, je größer die kleinste Spannung ist.

Hiernach ist es angemessen, die Größe der zulässigen Spannung abhängig zu machen von den Grenzen der Spannkraft. Bei Brücken sind außerdem die Wirkung von Stößen der Verkehrslast zu berücksichtigen.

Insbesondere für **eiserne Stäbe** (bei Brückenträgern) ergibt sich folgende Querschnittbestimmung. Es bezeichne

$F$  in qcm den (kleinsten) Querschnitt eines Stabes,

$S_0$  in kg die durch das Eigengewicht allein in dem Stabe hervorgerufene Spannkraft,

$S_1$  in kg die durch die ungünstigste Verkehrslast allein hervorgerufene Spannkraft, die auf derselben Seite von null liegt wie  $S_0$ ,

$S_2$  in kg die durch die ungünstigste Verkehrslast allein hervorgerufene Spannkraft, die auf der entgegengesetzten Seite von null liegt wie  $S_0$  (wenn also  $S_0$  und  $S_1$  den Stab auf Zug beanspruchen, so ist  $S_2$  ein Druck und umgekehrt),

$\sigma_e$  die Elastizitätsgrenze in kg/qcm (vgl. S. 504); für Schweifeseisen ist  $\sigma_e = 1600$ , für Flufeseisen  $\sigma_e = 2000$  kg/qcm, für Brücken-Nickelstahl  $\sigma_e$  etwa = 3000 kg/qcm;

$k$  die zulässige Zug- oder Druck-Spannung bei ruhender Verkehrslast in kg/qcm,

$\zeta$  die Stoßzahl der Verkehrslast (s. S. 532),

$\mu$  eine Zahl, welche die Neben- und Zuschlagspannungen berücksichtigt (s. S. 532),

$S_{\min}$  und  $S_{\max}$  in kg die kleinste und die größte Spannkraft des Stabes durch das Eigengewicht und durch die mit der entsprechenden Stoßzahl multiplizierte Verkehrslast.

Bei der Berechnung von **Blechträgern** treten an die Stelle der Spannkraft  $S_0, S_1, S_2, S_{\min}, S_{\max}$  die entsprechenden Biegemomente  $M$  oder  $\mathfrak{M}$  (in cmkg) und an die Stelle von  $F$  das Widerstandsmoment  $W$  (in cm<sup>3</sup>).

$\alpha$ ) Formeln von Th. Landsberg.\*)

Annahmen: Stoßzahl  $\zeta = 1,5$ ;  $\sigma_{\min} + \zeta(\sigma_{\max} - \sigma_{\min}) = \frac{2}{3}\sigma_e$ .

1) Für **nur gezogene oder nur gedrückte Stäbe**

$$F = \frac{S_0}{1050} + \frac{S_1}{700} \quad \Bigg| \quad F = \frac{S_0}{1350} + \frac{S_1}{900}$$

Schweifeseisen  Flufeseisen

2) Für **gezogene und gedrückte Stäbe**, falls

$$S_2 > \frac{2}{3} S_0 \quad \text{und} \quad S_2 - S_1 < \frac{4}{3} S_0 \quad \text{ist,}$$

$$F = \frac{S_0}{1575} + \frac{S_1}{700} + \frac{S_2}{2100} \quad \Bigg| \quad F = \frac{S_0}{2000} + \frac{S_1}{900} + \frac{S_2}{2700}$$

Schweifeseisen  Flufeseisen

3) Für **gezogene und gedrückte** Stäbe, falls

$$S_2 > \frac{2}{3} S_0 \text{ und } S_2 - S_1 > \frac{4}{3} S_0 \text{ ist,}$$

$$F = - \overset{\text{Schweißseisen}}{\frac{S_0}{1575} + \frac{S_1}{2100} + \frac{S_2}{700}} \cdot \left| \quad F = - \overset{\text{Flußseisen}}{\frac{S_0}{2000} + \frac{S_1}{2700} + \frac{S_2}{900}} \cdot \right.$$

β) Formeln von Häseler.

Allgemein ist 
$$F = \frac{S_0 + S_1}{k}$$

Ist der Stab **nur auf Zug oder nur auf Druck** (ohne Knickgefahr) beansprucht, so setze man

$$k = \frac{\sigma_e S_0 + S_1}{\mu S_0 + \zeta S_1}$$

Ist dagegen der Stab kurz hintereinander **Zug- und Druckbeanspruchungen** (ohne Knickgefahr) unterworfen, so empfiehlt sich

$$k = \frac{\sigma_e S_0 + S_1}{\mu S_0 + \zeta S_1} \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{S_{\min}}{S_{\max}} \right)$$

Nach H. Müller-Breslau ersetze man in dieser Formel den Faktor  $\frac{1}{2}$  durch  $\frac{1}{3}$ .

**Stoßzahl ζ.** Gerber empfiehlt ζ = 1,5; Winkler für Eisenbahnbrücken ζ = 1,3, für Straßenbrücken ζ = 1,2; Häseler nimmt ζ mit der Stützweite veränderlich an und empfiehlt

für $l = 5$	10	15	20	40	60	80	100	150 m
$\zeta = 1,7$	1,6	1,5	1,3	1,3	1,25	1,2	1,2	1,2

**Werte von μ bei Balkenträgern auf zwei Stützen.**

Art der Träger	Neben- spannung	Zusatz- spannung	Zuschlag für etwaige Mehr- belastung	demnach  μ =
Blechträger . . . . .	10	30	20	1,6
<b>Fachwerkträger:</b>				
Knotenpunkte starr . . . . .	40	30	20	1,9
Knotenpunkte gelenkig . . . . .	15	15	20	1,5

Die in den **preussischen Vorschriften für die Berechnung eiserner Brücken** (Minist.-Erl. vom 1. Mai 1903) bestimmten zulässigen Spannungen s. Abschn.: Statik der Baukonstruktionen.

Für **Maschinenteile** ist der Einfluss stark wechselnder Belastung auf die zulässige Spannung in den Angaben von C. Bach auf S. 522 bis 524 berücksichtigt.

## B. Knickfestigkeit.

Gedrückte Stäbe, deren Länge im Vergleich zu ihren Querschnittsabmessungen groß ist, sind gegen Knicken widerstandsfähig zu gestalten.

Wenn auch die Belastung zentrisch ist, d. h. im Schwerpunkte der Endflächen angreift, so tritt doch, da die Stabachse nicht genau geradlinig und der Stoff nicht vollkommen gleichartig ist, eine Ausbiegung des Stabes ein, die zunächst unbestimmbar bleibt.

### 1. Eulersche Formeln.

Bezeichnet

$l$  die Länge des auf Knicken beanspruchten Stabes in cm,

$J$  das kleinste äquatoriale Trägheitsmoment des gefährlichen Stab-Querschnittes  $a$  (s. Abb. 4 bis 7) in  $\text{cm}^4$ ,

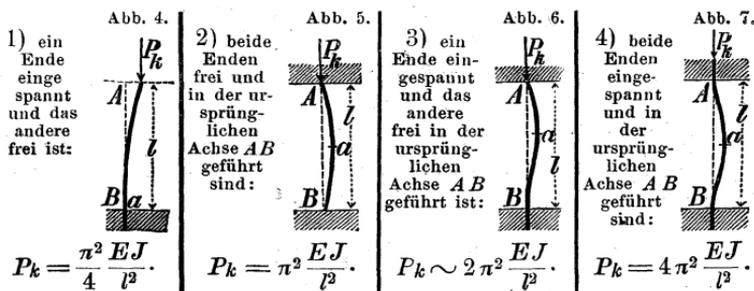
$F$  den kleinsten Querschnitt des Stabes in  $\text{qcm}$ ,

$k$  die zulässige Druckspannung des Stoffes in  $\text{kg/qcm}$ ,

$E$  das Elastizitätsmaß des Stoffes in  $\text{kg/qcm}$  (s. S. 503, 513 u. f.),

so ist nach L. Euler je nach der Befestigungsweise der Stabenden

die Knickbelastung  $P_k$  (in kg), wenn



Für  $\pi^2$  darf angenähert 10 gesetzt werden.

Nach Versuchen von J. Bauschinger\*) sind die Werte von  $P_k$  die Grenzbelastungen, bei denen die von vornherein vorhandene, mit allmählich wachsender Belastung des Stabes entsprechend zunehmende Durchbiegung fast plötzlich jeden meßbaren Wert überschreitet.

Nach denselben Versuchen sind die Eulerschen Formeln nur dann anwendbar, wenn die mittlere Knickspannung  $K_k = P_k : F$  (s. u.) die Elastizitätsgrenze  $\sigma_e$  nicht überschreitet. (Vgl. hierzu ferner die Angaben von Kirsch und von Tetmajer S. 535 u. f.)

Die an der 150 t-Pressen der Universität Göttingen\*\*) angestellten Versuche haben die Richtigkeit der Eulerschen Formeln für sehr schlanke Stäbe unterhalb der Proportionalitätsgrenze bestätigt. Für dicke Stäbe gilt eine ähnliche Formel. Durch exzentrischen Kraftangriff wird die Knickfestigkeit bei schlanken Stäben nicht wesentlich, bei dicken Stäben sehr stark beeinflusst.

\*) Vgl. Z. d. B. 1886 S. 353 u. f. Ueber die Bedeutung der Eulerschen Formeln s. auch: Zimmermann, Z. d. B. 1886 S. 217 u. f.; Kriemler, Z. d. B. 1901 S. 238.

\*\*) Z. d. V. d. I. 1910 S. 329.

Die **zulässige Belastung** (Tragfähigkeit) des auf Knicken beanspruchten Stabes beträgt (in kg) nur

$$P = P_k : \mathfrak{S},$$

wenn  $\mathfrak{S}$  den Sicherheitsgrad gegen Knicken bedeutet. Ergibt sich jedoch (bei kleinen Stablängen  $l$ ) die zulässige Druckbelastung

$$P_0 = k F$$

kleiner als  $P$ , so ist die Tragfähigkeit des Stabes  $= P_0$ .

Bei Querschnitt-Ermittlungen auf Grund der Eulerschen Formeln ist daher stets zu untersuchen, ob die zulässige Druckspannung  $k$  für den gewählten Querschnitt nicht überschritten ist.

In den meisten Fällen ist der **Befestigungsfall 2)** (s. Abb. 5) für die Rechnung vorzusetzen, da auf vollkommene Einspannung eines Stabendes nur selten zu rechnen ist. Durch Einführung des Trägheitshalbmessers  $i$  (in cm), bestimmt durch die Gleichung  $J = F i^2$  (s. S. 231), erhält man für Fall 2) auch den Ausdruck

$$P_k = \frac{\pi^2 E F i^2}{l^2},$$

woraus die beim Bruche des Stabes vorhandene **mittlere Knickspannung**  $K_k$ , wenn das Verhältnis  $l:i$  mit  $x$  bezeichnet wird, sich ergibt zu

$$K_k = \frac{P_k}{F} = \pi^2 E \left( \frac{i}{l} \right)^2 = \frac{\pi^2 E}{x^2}.$$

Die **zulässige Knickspannung**  $\sigma_k = \frac{\pi^2 E}{x^2 \mathfrak{S}}$ .

Die **Grenzlänge**  $l_0$  (in cm) ist die Stablänge, bei der die Tragfähigkeit für Druck und Knicken die gleiche ist; sie bestimmt sich aus der Bedingung  $\sigma k = k$ , und zwar ergibt sich die verhältnismäßige Grenzlänge

$$x_0 = \frac{l_0}{i} = \pi \sqrt{\frac{E}{\mathfrak{S} k}},$$

und bei gleicher Sicherheit gegen Druck und Knicken, wenn  $K$  die Druckfestigkeit bezeichnet,

$$x_0 = \frac{l_0}{i} = \pi \sqrt{\frac{E}{K}}.$$

In folgender Tafel sind für die wichtigsten Baustoffe die bei Hochbauten üblichen Werte des Sicherheitsgrades  $\mathfrak{S}$  gegen Knicken, die erforderlichen kleinsten Trägheitsmomente  $J$  des Stabquerschnittes sowie die Grenzlängen  $l_0$  für den Belastungsfall 2, S. 533 angegeben.

Im folgenden bezeichnet

$P$  die zulässige Belastung in **kg**,  $P_1$  dieselbe in **t**,

$l$  die Stablänge in **m**,

$b$  die kleinere Rechteckseite } des Stabquerschnittes in **m**.

$d$  den Kreisdurchmesser }

Bezeichnungen	Gufeisen	Schweisseisen	Flusseisen	Flussstahl	(Kiefern-) Holz
Druckfestigkeit $K$ . kg/qcm	7500	3750	4400	6250	280
Zuläss. Druckspannung $k$ „	500	1080	1200	1400	60
Elastizitätsmaß $E$ „	1 000 000	2 000 000	2 150 000	2 200 000	100 000
Sicherheitsgrad gegen Knicken } $\mathcal{E}$ . . .	8*)	5	5**)	5	(6 --) 10
Erforderliches kleinstes äquat. Trägheitsmoment des gefährl. Querschnittes in cm <sup>4</sup>	$J = \frac{Pl^2}{125} = 8 P_1 l^2$	$\frac{Pl^2}{400} = 2,5 P_1 l^2$	$\frac{Pl^2}{430} = 2,33 P_1 l^2$	$\frac{Pl^2}{445} = 2,24 P_1 l^2$	$\frac{Pl^2}{(17-10)} = \frac{Pl^2}{60-100} = P_1 l^2$
<b>Vrh. Grenzlänge</b> $x_0 = l_0 : i =$	50	60,6	59,4	55,6	40,5
für das Rechteck ( $i = b/\sqrt{12}$ ); $l_0 : b =$	14,4	17,5	17,2	16,0	11,7
„ die Kreisfläche ( $i = 1/4 d$ ); $l_0 : d =$	12,5	15,2	14,9	13,9	10,1
„ den Kreisring mit kleinem $d$ ( $i = d/\sqrt{12}$ ) } $l_0 : d =$	17,6	21,4	21,1	19,7	.

Für Steinprismen quadratischen Querschnitts beträgt die verhältnismäßige Grenzlänge nach Tetmajer  $x_0 = 52$ ; für gefügtes Mauerwerk liegen Versuchswerte nicht vor.

Der auf Knicken berechnete Querschnitt braucht nur bei  $\alpha$  (Abb. 5) vorhanden zu sein; an den Enden genügt der der zulässigen Druckspannung  $k$  entsprechende Querschnitt; das Gesetz der Abnahme des Querschnittes nach den Enden hin hat nur geringen Einfluss auf die Tragfähigkeit des Stabes.

Für die Belastungsfälle 1), 3) und 4) (S. 533) ist das erforderliche Trägheitsmoment  $J$  4-mal, bzw.  $1/2$ -mal und  $1/4$ -mal so groß als vorstehend angegeben. Die Grenzlänge  $l_0$  ist dabei  $1/2$ -mal, bzw. 1,41-mal und 2-mal so groß als die Tabellenwerte.

Nach Versuchen von B. Kirsch\*\*\*) mit 20 mm dicken Puddeleisenstangen ist das Verhältnis der Knicklasten in den Fällen 2), 3) und 4) nicht = 1:2:4, sondern veränderlich je nach der Schlankkeitsziffer  $l : i = x$ , und zwar für  $x = 100$  (wobei etwa die Gültigkeit der Eulerschen Formel beginnt) etwa nur 1:1,05:1,13 und für  $x = 200$  immer erst 1:1,78:3. Ist  $x < 100$ , so erhöht die Einspannung den Knickwiderstand nur unerheblich (vgl. unter 2).

Der Belastungsfall 2) setzt Spitzenlagerung des Stabes voraus. In der Praxis handelt es sich aber meist um **Flächenlagerung**, die eine erhebliche Einspannwirkung ergibt und nach v. Emperger†) durch Verminderung der Knicklänge  $l$  bis auf 0,7  $l$  (Verdopplung der Tragfähigkeit) berücksichtigt werden kann.

\*) Vgl. S. 525. Die Berliner Baupolizei verlangt für **gufseiserne Säulen**  $\mathcal{E} = 8$  bei genau zentraler Belastung. Erfolgt jedoch, wie meist, der Angriff eines Teiles der Lasten (z. B. durch Träger auf Säulen-Konsolen) exzentrisch, so sind die exzentrisch angreifenden Lasten mit 50 vH Zuschlag, sowohl bei Berechnung auf Knicken als auf Druck einzuführen, oder es ist die Säule — bei bekannter Größe der Last-Exzentrizität — auf zusammengesetzte Festigkeit (Druck und Biegung) zu berechnen, wobei die Veränderlichkeit der Nutzlast zu berücksichtigen ist.

\*\*) Druckglieder aufeiserner Fachwerksysteme sind nach den preufs. Ministerialbestimmungen vom 31. Januar 1910 mit vierfacher Sicherheit zu berechnen, entsprechend der Formel  $J = \frac{Pl^2}{550} = 1,82 P_1 l^2$  (vgl. S. 525).

\*\*\*) S. Z. d. V. d. I. 1905 S. 907.

†) Vgl. Z. d. V. d. I. 1898 S. 1114.

**2. Tetmajersche Formeln.** Nach Versuchen von Tetmajer\*) ist die Eulersche Formel 2) (bei Spitzenlagerung) nur anwendbar, wenn  $x = l: i \geq 80$  (Gufseisen), 112 (Schweisseisen), 105 (Flufseisen), 90 (Flufstahl), 100 (Holz).

Für kleinere Stablängen, als den vorstehenden Werten von  $x$  entsprechend, ergibt sich die Knickspannung beim Bruche (in kg/qcm)

$$K_k = P_k: F = K(1 - ax + bx^2),$$

worin  $K$ ,  $a$  und  $b$  Unveränderliche bedeuten, und zwar ist (bei Spitzenlagerung)

Stoff	$K$	$a$	$b$	Grenzen für $x$	
				min	max
Gufseisen . . . . .	7760	0,01546	0,00007	5	80
Schweisseisen . . . . .	3030	0,00426	0	10	112
Flufseisen . . . . .	3100	0,00368	0	10	105
Flufstahl**) . . . . .	3350	0,00185	0	.	90
Holz . . . . .	293	0,00662	0	1,8	100

Für einen Stab von bekanntem Querschnitt ist der Sicherheitsgrad gegen Knicken  $\mathcal{S} = K_k: \sigma$ , wo  $K_k$  den vorstehend bezeichneten Wert und  $\sigma$  die Druckspannung ( $= P: F$ ) in kg/qcm bedeuten.

Zur Querschnitt-Ermittlung dient die Gleichung

$$F(1 - ax + bx^2) = \frac{\mathcal{S}P}{K},$$

woraus die Abmessungen versuchsweise zu berechnen sind.

**Geneigte Stäbe** verhalten sich wie einfache Walzprofile, falls die Nietabstände nicht größer sind als das 7-fache der gefasteten Platten- und Winkelleisendicke und die Schwächung der Stabquerschnitte durch Nietlöcher nicht mehr als 12 vH beträgt.

**3. Johnson und Ostenfeld\*\*\*)** setzen für **Schweis-** und **Flufseisen** die zulässige Knickspannung

$$\sigma_k = \sigma(1 - cx^2),$$

worin  $\sigma$  die zulässige Druckspannung in kg/qcm,

$$x = l: i,$$

und  $c$  eine Unveränderliche ist, die auf Grund der Tetmajerschen Versuche zu 1:30 000 bestimmt wurde.

Setzt man  $F = \xi i^2$ , mithin  $J = F i^2 = \xi i^4$ , wobei der Wert von  $\xi$  nur abhängig ist von der Form des Stabquerschnittes, so erhält man den erforderlichen Querschnitt gegen Knicken (in qcm):

$$F = F_0 + \frac{1}{3} \xi l^2,$$

wenn  $F_0$  den erforderlichen Querschnitt gegen Druck ( $= P: k$ ) in qcm und  $l$  die Stablänge in m bezeichnet. Diese Formel ist gültig,

\*) Vrgl. Z. d. V. d. I. 1896 S. 1404.

\*\*) Nach Versuchen von A. Gefsner ist für Mannesmann-Stahlrohrsäulen  $K = 3350$ ,  $a = 0.0043$ ,  $E = 2\,023\,400$ ,  $x < 82$ . Mit **Beton gefüllte Rohre** zeigen eine Zunahme der Knicklast um  $P = 220 F - O$ , wo  $F$  der Querschnitt und  $O$  die Mantelfläche der Betonfläche in qcm,  $P$  in kg. (Beton u. Eisen 1908 S. 333.)

\*\*\*) S. Z. d. V. d. I. 1898 S. 1462; 1902 S. 1858.

falls  $F < 2 F_0$ ; ergibt sich  $F > 2 F_0$ , so benutze man die Eulersche Formel (S. 533).

Die Größe  $\xi$  ändert sich nur langsam mit der Querschnittgröße; in die Formel sind zunächst folgende Näherungswerte einzusetzen:

Querschnitt	$\xi$	Querschnitt	$\xi$	Querschnitt	$\xi$
L, gleichschenkl. . . . .	6,0	1, $b = 2 h$ . . . . .	7,5	JL, 1 cm lichter Abstand . . .	6,0
L, $b : h = 2 : 3$ . . . . .	7,0	1, $b = h$ . . . . .	5,0	dsgl., Abstand so, daß $J_x = J_y$	1,2
dsgl. 1 : 2 . . . . .	11,0	I . . . . .	10,0	4 Quadranteisen ohne	
( $b$ u. $h$ Schenkellängen)		C . . . . .	7,0	Zwischenlagen . . . . .	1,3
1, $b = 2 h$ . . . . .	7,5	4 Winkeleisen,			
		1 cm l. Abstd.	4,0		

Nach vorläufiger Bestimmung von  $F$  und  $J$  ist mit dem genaueren Werte von  $\xi$  die Rechnung zu wiederholen.

Ferner ist genau: für das Quadrat  $\xi = 12$ , für das Rechteck  $b h$   $\xi = 12 \frac{h}{b}$  ( $h > b$ ), für den Kreis  $\xi = 4 \pi$ , für den Kreisring vom mittleren Halbmesser  $\rho$  und der Dicke  $\delta$ , wenn  $\delta : \rho = 0,05, 0,1, 0,15, 0,2$ :  $\xi = 0,63, 1,25, 1,87, 2,50$ .

**4. Naviersche oder Schwarz-Rankinesche Formel.**

$$\text{Zulässige Knickspannung } \sigma_k = \frac{\sigma}{1 + \mu x^2},$$

worin  $\sigma_k$ ,  $\sigma$ ,  $x$  die Bedeutung unter 3. haben und  $\mu$  eine — sehr verschieden angegebene — Unveränderliche bezeichnet, und zwar ist nach Tetmajers Versuchen für

- Gufseisen ( $x = 20-150$ )  $\mu = 0,00070$
- Schweisseisen ( $x = 20-250$ )  $\mu = 0,00016$
- Flusseisen ( $x = 20-250$ )  $\mu = 0,00014$
- Holz ( $x = 20-200$ )  $\mu = 0,00023$

für schmiedbare Konstruktionseisen i. M.  $\mu = 0,00015$ .

Nach Scharowski dagegen setze man für Gufseisen  $\mu = 0,0002$ , für Schweisseisen  $\mu = 0,0001$ .

Die Formel entspricht der Beanspruchung des Stabes auf Druck und Biegung durch eine exzentrisch angreifende Achsialkraft (vgl. S. 592 u. 598). Dabei bedeutet  $\mu$  den Ausdruck

$$\frac{e p}{l^2},$$

wo  $p$  die unbestimmte Exzentrizität der Last und  $e$  das halbe Querschnittsmaß in der Biegungsebene ist. Nach Krohn\*) ist  $\mu = \frac{k}{8 E}$ ; das ergibt für Schweisseisen und Flusseisen  $\mu = 0,00007$ , Gufseisen  $\mu = 0,00011$ .

**5. Zeichnerisches Verfahren von L. Vianello, für beliebige Belastungen des Stabes durch Achsialkräfte sowie für veränderlichen Stabquerschnitt (z. B. für Druckglieder eines Fachwerkträgers).\*\*)**

Zu einer beliebig gewählten elastischen Linie als Grundlinie berechne man die Biegemomente für eine Anzahl von Punkten des Stabes, wobei auch das Moment der in den Befestigungspunkten angreifend zu denkenden Querkraft [ $Q = (\sum P f) : l$ ] zu berücksichtigen ist, und zeichne die Momentenfläche. Nach dem Mohrschen Verfahren (S. 550) konstruiere man nun die elastische Linie als die zur Momentenfläche als Be-

\*) Vgl. Z. d. B. 1885 S. 400.

\*\*) S. Z. d. V. d. I. 1898 S. 1436. — Die Eulerschen Formeln für Stäbe, die in bestimmten Punkten ihrer Länge festgehalten sind, s. Wittenbauer, Z. d. V. d. I. 1902 S. 501; für Stäbe, die außerdem noch in beliebigen Punkten belastet sind. Z. d. V. d. I. 1903 S. 245.

lastungsfläche gehörige Seillinie mit der Polweite  $EJ$ . Ist  $G$  die Fläche der Grundlinie,  $B$  die Fläche der ermittelten elastischen Linie, so ist die Sicherheit des Stabes gegen Knicken  $\mathfrak{S} = G : B$ . Verkleinert man in diesem Verhältnisse die Ordinaten der elastischen Linie, so erhält man eine genauere Grundlinie, mit der das Verfahren zu wiederholen ist, falls die Abweichung von der zuerst gewählten Grundlinie erheblich war.

Für eine gleichmäßig über die Länge  $l$  verteilte Achsialkraft (z. B. **Eigengewicht**) ist bei dem prismatischen Stabe die Knickbelastung

$$\text{im Befestigungsfall 1) (S. 533): } P_k = 3,2 \frac{\pi^2 EJ}{4 l^2},$$

$$\text{„ „ 2) : } P_k = 1,9 \pi^2 \frac{EJ}{l^2},$$

oder gleich der Knickbelastung eines prismatischen Stabes, der nur an den Enden belastet ist und die Länge  $l_1 = 0,56 l$  bzw.  $l_1 = 0,73 l$  hat. Im Falle 2) liegt der gefährliche Querschnitt  $a$  im Abstände  $0,45 l$  vom unteren Stabende.

**6.** Ueber die Knickfestigkeit gerader Stäbe mit **elastischer Querstützung** s. H. Zimmermann, Z. d. B. 1906 S. 251.\*)

**7.** Ueber die Knickfestigkeit **gegliederter Stützen** s. Engesser, Z. d. B. 1889 S. 483.

### C. Schubfestigkeit.

Ergeben die auf einen Stab wirkenden äußeren Kräfte für den in Betracht kommenden Querschnitt  $F$  (s. Abb. 8) eine in dessen Ebene,

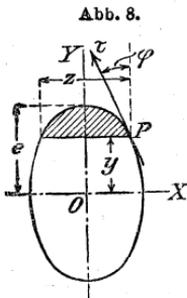


Abb. 8.

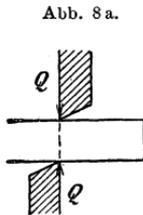


Abb. 8a.

u. zw. in die Richtung der Symmetrieachse  $OY$  fallende und die Stabachse winkelrecht schneidende Kraft (Schubkraft, Querkraft)  $Q$ , so wird der Querschnitt auf Schubfestigkeit beansprucht.

Diese Beanspruchung tritt nie allein auf, sondern ist stets von einem Biegemoment begleitet. Sieht man hiervon ab, fallen also Schubkraft  $Q$  und die gleichgroße Stützkraft genau in eine Ebene (Abb. 8a), so kann gleichmäßige Verteilung der Schubkraft auf den Querschnitt und parallele Richtung aller Schubspannungen angenommen werden, so daß dann

$$\tau = \frac{Q}{F}.$$

Im allgemeinen ergibt diese Formel zu kleine Werte für die größte Schubspannung des Querschnittes. Bei Anwesenheit auch nur des kleinsten Biegemomentes (wenn also die beiden Kräfte  $Q$  nicht genau zusammenfallen) verteilt sich die Schubkraft ungleichmäßig

\*) Vrgl. ferner Z. d. B. 1909 S. 206, sowie H. Zimmermann, Die Knickfestigkeit der Druckgurte offener Brücken, Berlin 1910.

über den Querschnitt, u. zw. ist die im Punkte  $P$  durch die Schubkraft  $Q$  hervorgerufene **Schubspannung**  $\tau$  (s. S. 506), die nicht nur in der Ebene des Querschnittes, sondern auch winkelrecht zum Querschnitt auftritt, nach beiden Richtungen bei den Bezeichnungen der Abb. 8:

$$\tau = \frac{Q S_y}{J z \cos \varphi}, \text{ und es muß sein } \tau_{\max} \leq k_s.$$

Hierin ist  $J$  das Trägheitsmoment des ganzen Querschnittes, bezogen auf die zu  $Q$  winkelrecht stehende Schwerachse  $OX$ , und

$$S_y = \int_y^e y z \, dy$$

das statische Moment des gestrichelten Querschnitteteiles, bezogen auf dieselbe Achse  $OX$ .

Die zur Symmetrieachse  $OY$  und zur Richtung von  $Q$  parallele Seitenspannung von  $\tau$  ist

$$\tau_y = \tau \cos \varphi = \frac{Q S_y}{J z}. \quad \tau = 0 \text{ für } y = e.$$

Für einen **rechteckigen Querschnitt**  $bh$  (Abb. 9) ist

Abb. 9.

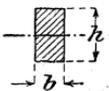


Abb. 10.

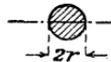


Abb. 11.

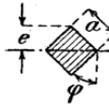
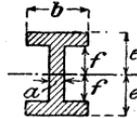


Abb. 12.



$$\tau = \frac{3}{2} \frac{Q}{bh} \left[ 1 - \left( \frac{2y}{h} \right)^2 \right]; \quad \tau_{\max} = \frac{3}{2} \frac{Q}{bh} = \frac{3}{2} \frac{Q}{F} \text{ für } y = 0.$$

Für einen **Kreis** mit dem Halbmesser  $r$  (Abb. 10) ist

$$\tau = \frac{4}{3} \frac{Q}{\pi r^2} \sqrt{1 - \left( \frac{y}{r} \right)^2}; \quad \tau_{\max} = \frac{4}{3} \frac{Q}{\pi r^2} = \frac{4}{3} \frac{Q}{F} \text{ für } y = 0.$$

Für einen **Kreisring**, wenn die Wandstärke verhältnismäßig klein gegen den lichten Durchmesser, ist für die Mitte ( $y = 0$ )

$$\tau_{\max} = 2 \frac{Q}{F}.$$

Für ein **übereck liegendes Quadrat** (Abb. 11) ist

$$\tau = \frac{Q \sqrt{2}}{a^2} \left[ 1 + \frac{y \sqrt{2}}{a} - 4 \left( \frac{y}{a} \right)^2 \right]$$

und

$$\tau_{\max} = \frac{9}{4 \sqrt{2}} \frac{Q}{a^2} = 1,591 \frac{Q}{F} \text{ für } y = \frac{e}{4}.$$

Für einen **I-förmigen Querschnitt** (Abb. 12) ist für  $y = 0$

$$\tau_{\max} = \frac{3}{4} \frac{Q}{a} \frac{b e^2 - (b - a) f^2}{b e^3 - (b - a) f^3}.$$

### D. Biegungsfestigkeit.

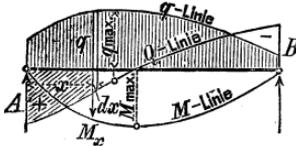
#### a. Allgemeines über die äußeren Kräfte gerader Träger.

Unter der Voraussetzung, daß alle äußeren Kräfte, also auch die Auflagerdrücke (Stützkkräfte, Reaktionen)  $A$  und  $B$  (vgl. S. 177 u. f.), winkelrecht zur Schwerachse des wagerechten Balkens angreifen (d. h., daß äußere Kräfte in die Richtung der Balkenachse nicht vorkommen), bezeichnet man mit:

**Querkraft**  $Q$  eines Querschnittes (Transversal-, Schub-, Vertikal-kraft) die der Mittelkraft aller links vom Querschnitte wirkenden äußeren Kräfte gleiche und parallele Kraft; sie ist positiv, wenn sie aufwärts (also für den rechten Trägerteil abwärts) wirkt;

**Biegemoment**  $M$  eines Querschnittes das Moment der Mittelkraft oder (s. S. 169) die algebraische Summe der Momente aller links von dem Querschnitte wirkenden äußeren Kräfte, bezogen auf den Schwerpunkt des Querschnitts;  $M$  ist positiv, wenn rechtsdrehend (oder für den rechten Trägerteil linksdrehend).

Abb. 13.



1. Der Träger habe eine **stetige Belastung**  $q$  in kg/cm (Abb. 13). Wählt man die Längsrichtung des Trägers als  $x$ -Achse, so ist für einen beliebigen Träger-Querschnitt ( $x$ )

$$Q = A - \int q dx; \quad dQ = -q dx; \quad \text{also} \quad \frac{dQ}{dx} = -q \quad . \quad \text{I.}$$

$$dM = Q dx; \quad \text{also} \quad \frac{dM}{dx} = Q \quad . \quad . \quad . \quad \text{II.}$$

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = \frac{dQ}{dx} = -q \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{III}$$

Trägt man also von einer wagerechten Geraden aus unter jedem Querschnitte die zugehörigen Werte  $Q$  und  $M$  als Ordinaten auf, so gelten für die erhaltenen  $Q$ - und  $M$ -Linien die Beziehungen:

1. Die trigonom. Tangente (Neigung) der  $Q$ -Linie bei  $x$  ist  $= -q$ .
2. Die trigonom. Tangente (Neigung) der  $M$ -Linie bei  $x$  ist  $= Q$ .
3.  $M_x = \int_0^x Q dx = [Q\text{-Fläche}]_0^x$  (nach Gleichung II).

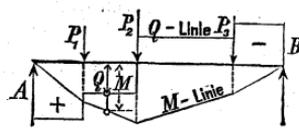
Aus 1. folgt: Die Querkraft  $Q$  ist ein Maximum in jedem Querschnitte, für den  $q=0$ ; die  $Q$ -Linie hat einen Wendepunkt da, wo  $q = \text{max}$ .

Aus 2. folgt: Ein (relatives)  $M_{\text{max}}$  tritt in jedem Querschnitt ein, für den die Querkraft  $Q=0$  ist oder von  $+$  in  $-$  übergeht.

Aus 3. folgt:  $M$  wird **null** in jedem Querschnitt, für den die  $Q$ -Fläche (bestehend aus  $+$ - und  $-$ -Teilen) gleich null wird.

2. Wirken nur **Einzelkräfte**  $P_1, P_2$  usw. auf den Träger (Abb. 14), so ist auf der Länge zwischen zwei benachbarten Einzelkräften die Querkraft  $Q$  unveränderlich und das Biegemoment  $M$ , bezogen auf  $x$ , vom ersten Grade. Die  $Q$ -Linie eines solchen Trägers ist eine Staffellinie, die  $M$ -Linie ein Vieleck.

Abb. 14.

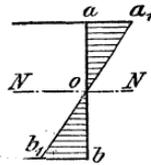


3. Die Querkraft  $Q$  erzeugt Schubspannungen  $\tau$  in der Querschnittebene (vgl. S. 394 u. 538) und gleich große Schubspannungen in Ebenen parallel zur Balkenachse, das Moment  $M$  Normalspannungen  $\sigma$  winkelrecht zum Querschnitt.

### b. Spannungen.

Bei der Biegung eines Balkens behalten nur die Fasern einer einzigen, durch die Balkenachse gehenden Schicht, der **Nullschicht** (neutralen Faserschicht  $NN$ , Abb. 15), ihre ursprüngliche Länge; diese Schicht schneidet jeden zur Schwerachse winkelrechten Querschnitt in der **Nulllinie** (neutralen Achse). Die Nulllinie geht durch den Schwerpunkt des Querschnittes, ist gerade und trennt die gedehnten Fasern so von den verkürzten, daß die Zug- und Druckspannungen proportional der Entfernung von ihr zunehmen. Dabei ist das Hookesche Gesetz (S. 503) als zutreffend vorausgesetzt, also angenommen, daß die ursprünglich ebenen Querschnitte des Balkens nach der Biegung eben verbleiben.

Abb. 15.



Für den Querschnitt  $a b$  (Abb. 15) ergibt sich also als Linie der Spannungen und Dehnungen die Gerade  $a_1 o b_1$ , die die Querschnittlinie in der Nulllinie (in  $o$ ) schneidet.  $a a_1$  und  $b b_1$  sind die größten Spannungen des Querschnittes; das Dreieck  $o a a_1$  stellt etwa Druckspannungen (Zusammendrückungen), das Dreieck  $o b b_1$  Zugspannungen (Dehnungen) dar.

Sind die Dehnungen des Stoffes den Spannungen nicht proportional und außerdem für Zug und Druck verschieden (z. B. bei Gußeisen, Steinen, Zement und Beton), so ist die Lage der Nulllinie veränderlich; sie erfährt nach der Seite der geringeren Dehnung, der größeren Festigkeit, hin eine Abweichung von der Schwerachse, die mit zunehmendem Biegemomente wächst, andererseits aber auch abhängig ist von den Unveränderlichen des Dehnungsgesetzes  $\varepsilon = \alpha_0 \sigma^n$  (s. S. 503).\*) Die Nullschicht hat demnach in der Längsrichtung des Trägers eine von dessen Achse abweichende Lage und Krümmung.

Den allgemeinen Fall der Spannungsverteilung und der Dehnungen für einen Querschnitt  $a b$  stellt hiernach Abb. 16 dar. Die Nulllinie  $nn$  liegt außerhalb der Schwerachse  $o o$  des Querschnittes; die Linie der Dehnungen  $dnz$  ist, da der Querschnitt eben bleibt, eine Gerade, dagegen setzt sich die Linie der Spannungen  $a_1 n b_1$  aus zwei Kurven  $\varepsilon = \alpha_0 \sigma^n$  mit verschiedenen Unver-

\*) Für den rechteckigen Querschnitt haben R. Latowski und L. Geusen (s. Z. d. V. d. I. 1897 S. 941 u. 1898 S. 463) die Nulllinie und Spannungsverteilung angegeben. Eine fernere Arbeit hierüber s. Z. ö. I. u. A. V. 1903 S. 286 u. 1904 Nr. 11. Die Grundzüge einer allgemeinen Theorie auf Grund des Dehnungsgesetzes  $\varepsilon = \alpha_0 \sigma^n$  mit Berücksichtigung verschiedener Unveränderlichen für Zug und Druck s. C. Bach: Elastizität und Festigkeit, 5. Aufl. S. 224.

änderlichen zusammen.  $a_2 b_2$  würde die dem Hooke'schen Gesetz entsprechende Spannungslinie sein. Ersetzt man die Kurve  $na_1$  durch die Gerade  $na_3$ , die Kurve  $nb_1$  durch die Gerade  $nb_3$  derart, daß Fläche  $naa_1 = \Delta naa_3$  und Fläche  $nb b_1 = \Delta nb b_3$ , so erhält man eine angenähert richtige Spannungsverteilung, wie sie namentlich der Berechnung von Eisenbetonkonstruktionen häufig zugrunde gelegt wird.

Bei den vorstehend genannten Baustoffen nehmen die Spannungen weniger zu als die Dehnungen; deshalb ergibt sich  $\sigma_{\max}$  bei jenen stets kleiner als auf Grund des Hooke'schen Gesetzes.

Die für diese Stoffe aus Biegungsversuchen mittels der Gleichung V auf S. 543 bestimmte Biegezugfestigkeit (die scheinbare Zugfestigkeit) nähert sich der (wirklichen) Zugfestigkeit umso mehr, je mehr der Abstand  $z_0$  des Schwerpunktes der auf der einen Seite der wagerechten Schwerlinie liegenden Querschnittsfläche dem Werte  $e$  gleichkommt; sie überschreitet die Zugfestigkeit umso mehr, je mehr sich der Stoff nach der wagerechten Schwerlinie zusammendrängt.

Bei rechteckigem Querschnitte beträgt nach L. Geusen u. a.\*) das Verhältnis  $\mu_0$  der Biegezugfestigkeit  $K_b$  zur wirklichen Zugfestigkeit  $K_z$

für Gußeisen, Granit und Kalkstein	$\mu_0 = 2,$
„ Sandstein . . . . .	$\mu_0 = 3,$
„ Beton . . . . .	$\mu_0 = 2,2.$

Für diese Stoffe nimmt man dementsprechend  $k_b = \mu_0 k_z$ . (Für Gußeisen vgl. S. 523, wobei  $\mu_0 = \mu \sqrt{e : z_0}$ .)

Je zwei Schubspannungen, die eine Kante eines beliebigen kleinen, würfelförmigen Körperteilchens winkelrecht schneiden, sind gleich groß und haben gegen die Kante übereinstimmende Richtung (vgl. S. 538).

**Bemerkung.** Nachstehende Verfahren der Spannungsermittlung gelten annähernd auch für **gekrümmte Stäbe**, u. zw. um so genauer, je größer der Krümmungshalbmesser im Verhältnis zur Querschnittshöhe ist.

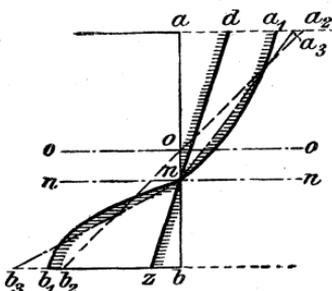
### 1. Die Momentenebene geht durch eine Hauptachse des Querschnittes.

In diesem Falle fällt die Nulllinie mit der anderen Hauptachse des Querschnittes zusammen.

#### 1. Normalspannungen.

- Es sei  $\sigma$  die Normalspannung einer Faser in kg/qcm,  
 $y$  der Abstand der Faser von der Nulllinie in cm,  
 $\sigma_1$  die Normalspannung für  $y = 1$  cm, also  $\sigma_1 = \sigma : y$ ,  
 $e_1$  und  $e_2$  der Abstand der entferntesten gezogenen bzw. gedrückten Faser (Randfaser) in cm,  
 $e$  allgemein der größere dieser beiden Abstände,  
 $k_z$  die zulässige Zugspannung in kg/qcm,  
 $k$  die zulässige Druckspannung in kg/qcm,  
 $k_b$  die zulässige Biegezugspannung in kg/qcm,  
 $J$  das Trägheitsmoment des Querschnittes, bezogen auf die Nulllinie, in cm<sup>4</sup>.

Abb. 16.



\*) Z. d. V. d. I. 1898 S. 463.

Als dann gelten die **Grundgleichungen**

$$\sigma_1 = \frac{M}{J} = \frac{\text{Biegemoment}}{\text{Trägheitsmoment}}, \text{ also } \sigma = \frac{M}{J} y \dots \text{IV.}$$

Damit die zulässigen Grenzspannungen nicht überschritten werden, muß sein

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{J} e_1 < k_z \quad \text{und} \quad \sigma_{\min} = \frac{M}{J} e_2 < k.$$

Die Werte  $J: e_1 = W_1$  und  $J: e_2 = W_2$  werden die **Widerstandsmomente** des Querschnittes für die Zug- bzw. die Druckseite genannt. Hiernach erhält man die allgemeinen **Festigkeitsbedingungen**

$$\frac{M}{W_1} \leq k_z; \quad \frac{M}{W_2} \leq k.$$

Ist  $k_z$  von  $k$  verschieden, so sind beide Formeln zu benutzen. Ist die Nulllinie eine Symmetrie-Achse des Querschnittes ( $e_1 = e_2$ ), so folgt  $W_1 = W_2$ , und es ist die dem kleineren der beiden  $k$ -Werte entsprechende Formel maßgebend.

Sind die zulässige Zug-, Druck- und Biegungsspannung einander gleich,  $k_z = k = k_b$  (wie z. B. bei Schweifeseisen, Flusseisen, Flusstahl), und nennt man  $J: e = W$  das Widerstandsmoment schlechthin (wobei der kleinere der beiden Werte  $W_1$  und  $W_2$  gemeint ist), so gelten die Festigkeitsgleichungen

$$\begin{array}{l} \text{für Spannungsberechnung:} \\ \text{für Querschnittsberechnung:} \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \sigma_{\max} = M: W \\ W = M: k_b \end{array} \right\} \dots \text{V.}$$

(Tafel der  $W$  für verschiedene Querschnitte s. S. 551 u. f.)

Der **gefährliche Querschnitt** (Bruchquerschnitt) eines Trägers, der dessen Berechnung zugrunde zu legen ist, ergibt sich nach Gleichung V aus der Bedingung

$$M: W (= \sigma_{\max}) = \max.$$

Für **Träger gleichen Querschnittes** ist  $W$  unveränderlich, also der gefährliche Querschnitt der, worin  $M$  seinen Höchstwert erreicht, d. h., bei dem die Querkraft  $Q = \frac{dM}{dx} = 0$  ist oder von  $+$  in  $-$  übergeht (Vrgl. S. 580.) Für solche Träger auf zwei Stützen hat man zur Querschnittsermittlung folgendes

**Rechnungsverfahren.** 1) **Bestimmung der Auflagerdrücke:** Die algebraische Summe der Produkte aus sämtlichen Lasten und den Abständen ihrer Angriffspunkte (bei Streckenlasten der Schwerpunkte) vom Auflager  $B$ , geteilt durch die Freilänge  $l$ , ergibt den Auflagerdruck  $A$ . Der Auflagerdruck  $B$  wird entsprechend wie  $A$  oder als Unterschied der Gesamtbelastung und des Auflagerdruckes  $A$  gefunden.

2) Addiert man, von dem einen Trägerende ausgehend, die aufeinanderfolgenden Belastungen so weit, bis sich der zugehörige Auflagerdruck ergibt oder (bei Einzellasten) überschritten wird, so liegt an dieser Stelle der **gefährliche Querschnitt**. Streckenlasten betrachtet man hierbei als die Summe von Einzellasten über den Einheiten (d. h. über den einzelnen cm) der Freilänge.

3) Multipliziert man den Auflagerdruck  $A$  (oder  $B$ ) (in kg) mit der Strecke von  $A$  (bzw.  $B$ ) bis zum gefährlichen Querschnitt (in cm) und zieht davon die Summe der Produkte aus den auf dieser Strecke wirkenden Lasten (in kg) und den Abständen ihrer Angriffspunkte (bei Streckenlasten der Schwerpunkte) vom gefährlichen Querschnitt (in cm) ab, so erhält man  $M_{\max}$  (in cmkg), das, durch  $k_b$  (in kg/qcm) geteilt, das **erforderliche Widerstandsmoment**  $W$  (in cm<sup>3</sup>) ergibt.

Die Tafel auf S. 564 u. f. gibt die Berechnung der Träger für die häufigeren Belastungsfälle.

**Träger von gleichem Widerstande gegen Biegung** (s. S. 580) haben für jeden Querschnitt denselben Wert von  $\sigma_{\max}$ ; hierzu ist also nach Gleichung V die Bedingung zu erfüllen

$$\sigma_{\max} = M : W = \text{unveränderlich,}$$

d. h.  $M$  und  $W$  müssen sich für die ganze Trägerlänge nach demselben Gesetz ändern.

## 2. Schubspannungen.

Die Schubkraft auf die Längeneinheit des Trägers, im Abstände  $y$  von der Nullschicht, ist nach S. 538 (Abb. 8) in kg/cm

$$T_y = \tau_y z = \frac{Q S_y}{J} \quad \dots \dots \dots \text{VI.}$$

Weiteres für die wichtigsten Querschnitte ist auf S. 539 angegeben

## 3. Hauptspannungen.

Die in einem Flächenteilchen des Stabquerschnittes gleichzeitig auftretende Normalspannung  $\sigma$  und Schubspannung  $\tau$  ergeben nach jeder Richtung in der Biegungsebene eine bestimmte Normalspannung; trägt man alle diese Spannungen von dem Flächenteilchen aus auf ihren Richtungen ab, so liegen die Endpunkte auf der **Spannungselipse**, von der zwei zugeordnete Durchmesser die Richtungen von  $\sigma$  und  $\tau$  haben. Die Halbachsen der Spannungselipse,  $\sigma_{\max}$  und  $\sigma_{\min}$ , sind die **Hauptspannungen**. Entsprechend ergeben sich aus der Dehnung  $\varepsilon$  und der Schiebung  $\gamma$  die **Dehnungselipse** und ihre Halbachsen, die **Hauptdehnungen**  $\varepsilon_{\max}$  und  $\varepsilon_{\min}$ .

Die Richtungen der Halbachsen dieser beiden Ellipsen stimmen (bei durchaus gleichartigen Körpern) zwar überein, dagegen stehen infolge der Querkontraktion  $\varepsilon_q$  die Größen  $\varepsilon_{\max}$  und  $\sigma_{\max}$  selbst nicht zueinander in der einfachen Beziehung  $\varepsilon = \alpha \sigma$ .

Denkt man sich die Hauptdehnungen  $\varepsilon_{\max}$  und  $\varepsilon_{\min}$  entstanden durch Wirkung zweier Spannungen  $\sigma'_{\max}$ ,  $\sigma'_{\min}$  gemäß der Gleichung  $\varepsilon = \alpha \sigma$ , so heißen  $\sigma'_{\max}$ ,  $\sigma'_{\min}$  die **idealen Hauptspannungen** (nach C. Bach die größte [Zug- und Druck-] Anstrengung des Punktes).

Von den Hauptspannungen  $\sigma_{\max}$ ,  $\sigma_{\min}$  bringt jede in ihrer eigenen Richtung eine achsiale, in der Richtung der anderen (auf ihr winkelrecht stehenden) Hauptspannung eine Quer-Längenänderung hervor;  $\sigma_{\max}$  und  $\sigma_{\min}$  lassen sich daher ersetzen durch die idealen Hauptspannungen  $\sigma'_{\max}$  und  $\sigma'_{\min}$ , von denen jede in ihrer Richtung allein die Formänderung bewirkt, die  $\sigma_{\max}$  und  $\sigma_{\min}$  zusammen bewirken würden.

Die **Hauptspannungen** des Querschnittsteilchens ergeben sich aus der herrschenden Normalspannung  $\sigma$  und Schubspannung  $\tau$  zu

$$\sigma_{\min}^{\max} = \frac{1}{2} \sigma \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}.$$

Mit Rücksicht auf das doppelte Vorzeichen ist  $\sigma_{\max}$  stets eine Zug-,  $\sigma_{\min}$  stets eine Druckspannung.

Der Winkel  $\psi$ , unter dem  $\sigma_{\min}^{\max}$  gegen die Balkenachse geneigt ist, ergibt sich aus der Gleichung

$$\operatorname{tg} 2\psi = \mp \frac{2\tau}{\sigma}.$$

Die Richtungen der Hauptspannungen stehen daher winkelrecht aufeinander.

Für  $\tau = 0$  (z. B. für die von der Nulllinie entferntesten Querschnittsteile eines Trägers) wird  $\psi = 0$  und  $\sigma_{\max} = \sigma$ ,  $\sigma_{\min} = 0$ , d. h., die größte Dehnung findet in der Richtung der Balkenachse statt.

Für  $\sigma = 0$  (z. B. für die Nulllinie des Querschnittes) wird  $\psi = \mp 45^\circ$  und  $\sigma_{\max} = +\tau$ ,  $\sigma_{\min} = -\tau$ , d. h., Schubspannungen allein erzeugen Hauptspannungen, die unter Winkeln von  $45^\circ$  gegen die Balkenachse geneigt sind.

Die **idealen Hauptspannungen** (größten Beanspruchungen) des Querschnittsteilchens sind

$$\sigma_{\min}^{\max} = \frac{m-1}{2m} \sigma \pm \frac{m+1}{2m} \sqrt{\sigma^2 + 4(\alpha_0 \tau)^2},$$

hierin bedeutet  $m = \frac{10}{3}$  das Verhältnis  $\varepsilon : \varepsilon_q$  (näheres s. S. 502),

$\alpha_0 = k_z \cdot \frac{m+1}{m} k_s$  (für Zug) oder  $\alpha_0 = k \cdot \frac{m+1}{m} k_s$  (für Druck) das Beanspruchungs-Verhältnis. Bei durchaus gleichartigen Körpern ist  $\alpha_0 = 1$ ; sonst ist  $\alpha_0$  mittels der Tafel auf S. 523 zu bestimmen.

Für  $m = \frac{10}{3}$  wird

$$\sigma_{\min}^{\max} = 0,35 \sigma \pm 0,65 \sqrt{\sigma^2 + 4(\alpha_0 \tau)^2},$$

worin  $\alpha_0 = \frac{k_z}{1,3 k_s}$ , bzw.  $\alpha_0 = \frac{k}{1,3 k_s}$ .

Zur Berechnung von  $\sigma_{\min}^{\max}$  kann die Tafel auf S. 605 u. f. benutzt werden.

## 2. Beliebige Momentenebene.

(Unsymmetrische Belastung.)

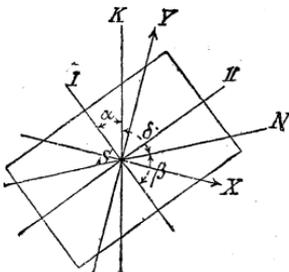
Als **Kraftlinie**  $SK$  werde die Schnittlinie der durch die Träger-Schwerachse gehenden Momentenebene mit der Querschnittsebene bezeichnet; ferner seien (Abb. 17)

$J_x$  und  $J_y$  die Trägheitsmomente für zwei beliebige, sich rechtwinklig schneidende Schwerachsen  $SX, SY$ ,

$J_{\max} = J_I$ ,  $J_{\min} = J_{II}$  die Hauptträgheitsmomente,

$\alpha$  der Winkel zwischen Kraftlinie  $SK$  und erster Hauptachse  $SI$  } (für  $J_{\max}$ ),  
 $\beta$  der Winkel zwischen Nulllinie  $SN$  }  
 $\delta$  der Winkel zwischen Kraftlinie  $SK$  und Nulllinie  $SN$ .

Abb. 17.



### 1. Beziehungen zwischen Kraftlinie und Nulllinie.

Kraftlinie und Nulllinie bilden zwei zugeordnete Achsen des Querschnittes (für die das Zentrifugalmoment  $= 0$  ist). Daher läßt sich die eine der beiden Linien aus der gegebenen anderen mit dem Trägheitskreise leicht finden; vgl. S. 235, Abb. 90. Sind die Hauptachsen des Querschnittes gegeben, so findet man die Nulllinie auch ohne Trägheitskreis nach dem nachstehenden zeichnerischen Verfahren (s. u. 2.). Rechnerisch ergibt sich  $\beta$  aus der Beziehung

$$\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta = J_I : J_{II}.$$

### 2. Spannungsermittlung.

$\alpha$ ) Gegeben die Hauptachsen  $SI$  mit  $J_{\max} = J_I$  und  $SII$  mit  $J_{\min} = J_{II}$ .

**Rechnerisches Verfahren** (vgl. Abb. 18). Ist

$M_1 = M \sin \alpha =$  Seitenmoment von  $M$ , winkelrecht zu  $SI$ ,

$M_2 = M \cos \alpha =$  Seitenmoment von  $M$ , winkelrecht zu  $SII$ ,

so ist die Spannung in einem beliebigen Punkte mit den Koordinaten  $x$ , parallel zu  $SI$ , und  $y$ , parallel zu  $SII$ :

$$\sigma = \frac{M_1}{J_I} y + \frac{M_2}{J_{II}} x.$$

$\sigma_{\max}$  ergibt sich, wenn man für  $x, y$  die Koordinaten des am weitesten von der zugehörigen Nulllinie gelegenen Randpunktes des Querschnittes einsetzt, wobei die Nulllinie im allgemeinen vorher zeichnerisch nach Abb. 19 oder 20 bestimmt werden muß.

Für Querschnitte, deren Umhüllung ein Rechteck ist, z. B. **I**- und **L**-Profile ergibt sich hiernach einfach

$$\sigma_{\max} = \frac{M_1}{W_1} + \frac{M_2}{W_2} = M \left( \frac{\sin \alpha}{W_1} + \frac{\cos \alpha}{W_2} \right) = \frac{M}{W'},$$

wobei  $W_1$  und  $W_2$  die Widerstandsmomente, bezogen auf die Hauptachsen und den am weitesten von diesen gelegenen Randpunkt sind.

Den Ausdruck

$$\begin{aligned} W' &= \frac{1}{\frac{\sin \alpha}{W_1} + \frac{\cos \alpha}{W_2}} \\ &= \frac{W_1 W_2}{W_1 \cos \alpha + W_2 \sin \alpha} \end{aligned}$$

nennt man die **Widerstandsgröße** des Querschnitts für die Kraftebene  $M$  (oder für die zugehörige Nulllinie). Einfache Konstruktion von  $W'$  s. S. 548.

**Zeichnerisches Verfahren** (nach R. Land\*) s. Abb. 19.

Abb. 18.

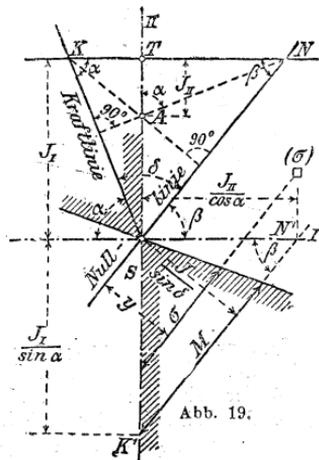
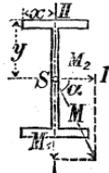


Abb. 19.

\* S. Z. d. B. 1893 S. 465.

$SK$  sei die Kraftlinie; auf Achse  $SII$  trage  $ST = J_I$ ,  $TA = J_{II}$  (also  $SA = J_I - J_{II}$ ) ab, so schneiden sich die Geraden  $KTN$  (parallel zu  $SI$ ) und  $AN$  (winkelrecht zu  $SK$ ) in einem Punkte  $N$  der Nulllinie, die zugleich winkelrecht zu  $KA$  steht. (Denn es ist  $TN = J_{II} \operatorname{tg} \alpha = J_I \operatorname{tg} \beta$ .)

**Spannungsfläche.** Trage auf  $SI$  (Abb. 19)  $SN' = AN = J_{II} : \cos \alpha$  (oder  $SK' = SK = J_I : \sin \alpha$  auf  $SII$ ), ferner auf der durch  $N'$  (oder  $K'$ ) gelegten Parallelen  $K'N'$  zu  $SN$  an beliebiger Stelle den Wert  $M$  ab, so begrenzen die von  $S$  ausgehenden Strahlen nach den Endpunkten von  $M$  die Spannungsfläche mit Ordinaten  $\sigma$ , parallel zu  $SN$ , aus der  $\sigma_{\max}$  und  $\sigma_{\min}$  sofort zu entnehmen sind.  $M$  hat von  $S$  den Abstand  $J : \sin \delta = J : \sin (\alpha + \beta)$ , worin  $J = J_I \cos^2 \beta + J_{II} \sin^2 \beta$  das Trägheitsmoment, bezogen auf die Nulllinie  $SN$  ist. Der Maßstab für diese Strecken  $\sigma$  folgt daher aus der allgemeinen Formel

$$\sigma = \left( M : \frac{J}{\sin \delta} \right) y,$$

wenn man hierin anstatt der Buchstaben den Maßstab ihrer zeichnerischen Darstellung setzt.

**Beispiel.** Für die Maßstäbe: Längen ( $y$ ): 1 cm = 2 cm Wirklichkeit, Momente ( $M$ ): 1 cm = 5000 cmkg, Trägheitsmomente ( $J$ ): 1 cm = 100 cm<sup>4</sup> wird der Maßstab der Spannungen ( $\sigma$ ):

$$1 \text{ cm} = \frac{5000 \text{ cmkg} \cdot 2 \text{ cm}}{100 \text{ cm}^4} = 100 \text{ kg/qcm.}$$

$\beta$ ) Gegeben der **Trägheitskreis** (bestimmt aus  $J_x$ ,  $J_y$  und  $J_{xy}$ , für zwei beliebige, winkelrechte Schwerachsen  $SX$ ,  $SY$ , vgl. S. 235), s. Abb. 20. Die Nulllinie ist die der Kraftlinie  $SK$  zugeordnete Achse  $SN$ , bestimmt durch die Sehne  $KTN$ . Das auf  $NS$  bezogene Trägheitsmoment ist nach S. 235  $J = NG$ . Da  $\angle NOK = 2NSK = 2\delta$ , so ist  $\angle KNO = \frac{1}{2}(180^\circ - 2\delta) = 90^\circ - \delta$ , also  $\angle NTG = \delta$  und  $TN = J' = J : \sin \delta$ . Bedeutet  $y$  den Abstand eines Querschnittpunktes von der Nulllinie, so ist die Spannung in diesem Punkte\*)

$$\sigma = \frac{M}{J'} y \text{ und } \sigma_{\max} = \frac{M}{J'} e = \frac{M}{J : \sin \delta} e,$$

wobei  $e = y_{\max}$ .

**Spannungsfläche.** Zieht man im Abstände  $J' = TN$  von der Nulllinie eine Parallele zu  $SN$ , trägt auf dieser die Strecke  $M$  auf, so begrenzen die von  $S$  ausgehenden beiden Strahlen nach den Endpunkten von  $M$  die Spannungsfläche mit Ordinaten  $\sigma$ , parallel zu  $SN$ , deren Maßstab wie vorstehend unter  $\alpha$ ) bestimmt wird.

**Bemerkung.** Kann sich ein Träger infolge äußerer Anordnung benachbarter Bauteile nur nach bestimmter Richtung durchbiegen, so ist hierdurch die Lage der Nulllinie  $SN$ , winkelrecht zur Biegeebene, sowie die Strecke  $TN$  aus dem Trägheitskreise gegeben, und umgekehrt ist die Lage der wirkenden Momentenebene (beeinflußt durch die seitlichen Widerstände) bestimmt.

\*) S. R. Land, Die Ermittlung der Spannungsverteilung usw., Z. f. B. 1892 S. 554, auch als Sonderdruck erschienen bei With. Ernst & Sohn, Berlin.

Die **Widerstandsgröße**  $W'$  für die Nulllinie  $SN$  (vgl.  $\alpha$ ) ist hiernach

$$W' = \frac{J'}{e} = \frac{J}{e \sin \delta} = \frac{W}{\sin \delta'}$$

wenn  $W (= J : e)$ , entsprechend S. 543, das Widerstandsmoment für die Nulllinie  $SN$  bezeichnet.

Es ist also allgemein

$$\sigma_{\max} = \frac{\text{Biegemoment}}{\text{Widerstandsgröße}} = \frac{M}{W'} = \frac{M}{W \cdot \sin \delta} \quad \text{Va.}$$

Formel V auf S. 543 ist hiervon der Sonderfall für  $\delta = 90^\circ$ , d. h. für die Hauptachsen.

Für Querschnitte, deren Umhüllung ein Rechteck ist, z. B. **I-** und **E-**Profile, ergibt sich  $W'$  für eine beliebige Lage des Querschnittes zu der lotrechten Kraftlinie einfach nach Abb. 21, indem man die auf die beiden Hauptachsen bezogenen Widerstandsmomente  $W_1 = S_1$  (winkelrecht zu  $S1$ ) und  $W_2 = S_2$  (winkelrecht zu  $SII$ ) nach beliebigem Maßstabe (z. B. 1 cm = 20 cm<sup>3</sup>) aufträgt und den Schnittpunkt  $c$  der lotrechten Kraftlinie mit der Geraden 12 bestimmt. Dann ist  $W' = Sc$  (im Maßstabe von  $W_1$  und  $W_2$ ) und  $\sigma_{\max} = M : W'$ .

Nach R. Land bezeichnet man die Linie 12 als einen Teil der  $W'$ -Grenze, die durch Auftragen jeder Widerstandsgröße von  $S$  aus auf der zugehörigen Kraftlinie entsteht und die sich hier als Rhombus darstellt. Die durch die  $W'$ -Grenze bestimmte Fläche heißt die polarsymmetrische  $W'$ -Fläche.\*) Ueber ihre Form und ihre Beziehung zum Kern s. S. 596.

### 3. Querschnittbestimmung.

$\alpha$ ) Für die häufig angewendeten **I-** und **E-Walzprofile** läßt sich nach der in 2.,  $\alpha$ ) (S. 546) gegebenen Gleichung für  $\sigma_{\max}$ , wenn man dafür  $k_b$  setzt, nachstehendes Verfahren ableiten, wobei die Richtung der Kraftlinie (Momentenebene) und die Lagen der Hauptachsen gegeben seien. Man zerlege das gegebene Moment  $M$  in die Seitenmomente  $M_1$  winkelrecht zur ersten Hauptachse  $S1$  und  $M_2$  winkelrecht zur zweiten Hauptachse  $SII$  (vgl. Abb. 18, S. 546); dann ist das erforderliche Widerstandsmoment

$$W_1 = (M_1 + u M_2) : k_b, \text{ worin } u = W_1 : W_2.$$

Man setze also für ein schätzungsweise passendes Profil aus den Walzprofilafeln (s. 5. Abschn.) die zugehörige Verhältniszahl  $u$  ein, bestimme nach vorstehender Formel den Wert  $W_1$  und setze die zu dem nächst passenden Profil gehörige Verhältniszahl  $W_1 : W_2 = u$  von neuem in die Formel, um den genaueren, mindestens erforderlichen Wert  $W_1$  zu erhalten. Mittelwerte für die erste Schätzung sind

$$\text{für I-Profile } u = 9, \quad \text{für E-Profile } u = 7,$$

für mittlere Differdinger I-Profile  $u = 3$  bis 5.

**Beispiel:** Ein **I-Träger** hat durch ein einseitiges Gewölbe einen wagerechten Schub aufzunehmen; es seien folgende Größtwerte der Seitenmomente  $M$  für die Trägermitte berechnet:  $M_1 = 150\,000$  cmkg (in lotrechter Ebene),  $M_2 = 105\,000$  cmkg (in wagerechter Ebene). Für  $k_b = 1200$  kg/qcm ist nach vorstehender Formel

$$W_1 = (150\,000 + 9 \cdot 105\,000) : 1200 = 912 \text{ cm}^3.$$

\*) Ueber Eigenschaften und Anwendung dieser Fläche für beliebige Querschnitte s. Z. d. V. d. I. 1898 S. 445.

Am nächsten liegt das Normal-Profil Nr. 34 mit  $W_1 = 922 \text{ cm}^3$ , für das  $u = W_1 : W_2 = 9,40$  ist; also wird genauer:  $W_1 = (150\,000 + 9,40 \cdot 105\,000) : 1200 = 948 \text{ cm}^3$ , d. h., I Nr. 34 genügt nicht als Trägerquerschnitt; es ist zu wählen I Nr. 36 mit  $W = 1088 \text{ cm}^3$ .

β) Für den **rechteckigen** Querschnitt  $hb$  ist  $u = h : b$ , und man erhält  $h^3 = 6u(M_1 + uM_2) : kb; b = h : u$ .

Bei den Normalprofilen für Bauhölzer (s. 5. Abschn., Stoffkunde) liegt  $u$  zwischen 1 und 1,43; bei größter Abweichung vom Quadrat ist für starke Querschnitte (von  $18 \cdot 24 \text{ cm}$  ab)  $u = 1,3$ , für mittelstarke  $u = 1,4$ . Rechnungsverfahren wie unter α).

γ) Zeichnerische Bestimmung des Querschnittes von **Z-Walzprofilen** s. Z. d. B. 1904 S. 69.

### c. Elastische Formänderungen gerader Träger.

Als Anfangspunkt der rechtwinkligen Koordinaten werde ein Trägerauflager, bei Freitragern das freie Trägerende gewählt. Die  $x$ -Achse sei die ursprünglich gerade Achse des Trägers.

#### 1. Elastische Formänderung durch Biegemomente.

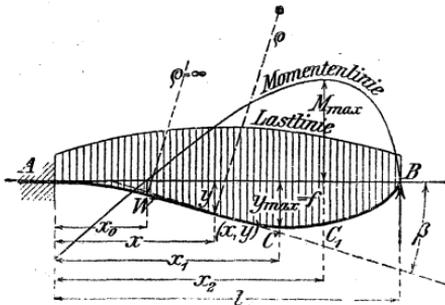
1. Die gegenseitige **Verdrehung** zweier parallelen Träger-Querschnitte  $x_1$  und  $x_2$  durch das **Biegemoment**  $M$  ist zwischen  $x_1$  und  $x_2$  bei unveränderlichem Trägheitsmomente  $J$  des Trägerquerschnitts:

$$\beta = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\rho} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{M dx}{EJ} = \frac{1}{EJ} \int_{x_1}^{x_2} M dx = \frac{1}{EJ} \cdot [\text{Momentenfläche}]_{x_1}^{x_2}$$

$E$  s. S. 503, 513 u. f. Ist  $J$  veränderlich, so tritt in die vorstehende Formel für  $J$  ein beliebiger fester Wert  $J_c$  (zweckmäßig der größte der vorhandenen  $J$ -Werte) ein und an Stelle der gegebenen Momentenfläche eine verzerrte, deren Ordinaten  $M' = M \frac{J_c}{J}$  sind.

2. Die **elastische Linie** (Biegungslinie, Kurve  $ACC_1B$  in Abb. 22)

Abb. 22.



ist die durch die angreifenden Kräfte gebogene (ursprünglich gerade) Achse des Trägers; für ihren Krümmungshalbmesser  $\rho$  gilt die Formel

$$\rho = \frac{EJ}{M} \dots \text{VII.}$$

Die Trägerachse ( $AB$ ) erfährt bei der Biegung meist nur kleine Neigungen  $\beta$ , so daß in der allgemeinen Formel für  $\rho$  (S. 95)  $ds \sim dx$  (oder  $\cos \beta \sim 1$ ,  $\sin \beta \sim \beta$ ) gesetzt werden

darf. Hiermit ergibt sich die **Differentialgleichung der elastischen Linie**  $ACC_1B$ :

$$\pm \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M}{EJ} = \frac{1}{\rho} \dots \text{VIII.}$$

Das  $+$ -Zeichen gilt, wenn mit wachsendem  $x$  die Tangente des Neigungswinkels der Tangente im Punkte  $xy$  an die elastische Linie gegen die  $x$ -Achse zunimmt, wenn also die elastische Linie gegen die  $x$ -Achse konvex liegt; das  $-$ -Zeichen im anderen Falle.

Durch einmalige Integration ergibt sich hieraus  $dy : dx$ , d. h. die Tangente des Biegungswinkels  $\beta$  im Punkte  $(xy)$  ( $\text{tg } \beta$  in Abb. 22); durch zweimalige Integration die Gleichung der elastischen Linie, wobei die Integrations-Konstanten durch die jeweiligen Auflagerbedingungen des Trägers gegeben sind. Für ein festes oder ein wagrecht gleitendes Auflager ( $B$  in Abb. 22) ist  $y = 0$ , und für ein eingespanntes Trägerende ( $A$  in Abb. 22) ist  $dy : dx = \text{tg } \beta = 0$ . **Wendepunkte** (nach S. 96, Punkt  $W$  entspr.  $x_0$  in Abb. 22) der elastischen Linie finden sich für Querschnitte, in denen  $M = 0$  (d. h.  $\rho = \infty$ ) ist. Die größte **Durchbiegung**  $f$  des Trägers (in  $C$  Abb. 22, entspr.  $x_1$ ) ist aus der Bedingung  $y = \max$  zu ermitteln. (Davon zu unterscheiden ist der Querschnitt des größten Biegemomentes [ $C_1$  in Abb. 22, entspr.  $x_2$ ], der sich aus der Bedingung  $M = EJ \frac{d^2 y}{dx^2} = \max$  ergibt.) Die Bedingung dafür, daß die elastische Linie ein **Kreis** sei, ist

$$\frac{\rho}{E} = \frac{J}{M} = \text{unveränderlich.}$$

Dieses rechnerische Verfahren ist nur für einfache Belastungsfälle zweckmäßig. — Gleichung elastischer Linien für bestimmte Belastungsfälle s. S. 564 u. f.

**3. Verfahren von Mohr** für allgemeinere Belastungsfälle.\*) Die Durchbiegung  $y$  bei einem Querschnitte  $C$  ist gleich dem  $(1 : EJ)$ -fachen Werte des Momentes für  $C$ , das durch die gegebene  $M$ -Fläche als neue Belastungsfläche des Trägers erzeugt wird. Ist  $J$  veränderlich, so wird, wie vorstehend unter 1.,  $J$  durch  $J_C$  und die  $M$ -Fläche durch die verzerrte  $M'$ -Fläche ersetzt. — Die elastische Linie kann hiernach, als Momentenlinie aufgefaßt, auch zeichnerisch als **Seillinie** gefunden werden, u. zw. für die vorhin erwähnte neue Belastungsfläche und die Polweite  $EJ$  bzw.  $EJ_C$ .

**4. Arbeit der Biegung.** Durch das Biegemoment  $M$  erfährt das Teilchen  $dx$  des Stabes eine Drehung um  $d\beta = \frac{dx}{\rho} = \frac{M dx}{EJ}$ , gemessen als Bogen für den Halbmesser 1 (s. unter 1); mithin ist die Arbeit, die bei dieser Drehung verrichtet wird,  $dA = \frac{1}{2} M d\beta$ , und

$$A = \frac{1}{2} \int_0^l M d\beta = \frac{1}{2} \int_0^l M \frac{dx}{\rho} = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M^2 dx}{EJ} \quad \dots \text{IX.}$$

Bei Einzellasten ist die Integration für die verschiedenen Strecken von  $l$  einzeln auszuführen.

Hiernach ist für die auf S. 564 u. f. angegebenen Belastungsfälle  $A$  zu ermitteln. Man erhält z. B.

$$\begin{array}{l|l} \text{für Fall 1.} & A = \frac{1}{2} Pf, \\ \text{für Fall 7.} & A = \frac{1}{6} Pf, \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} \text{für Fall 8. u. 12.} \\ \text{für Fall 14.} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} A = \frac{8}{25} Pf, \\ A = \frac{17}{42} Pf \text{ usw.} \end{array}$$

\*) S. Mohr, Abhandl. a. d. Gebiete der Technischen Mechanik. 1906. Wilh. Ernst u. Sohn.

## 2. Elastische Formänderung durch die Schubkräfte.\*)

Der Gleitwinkel zweier um  $dx$  voneinander entfernten Querschnitte durch die Wirkung der Schubkraft  $Q$  beträgt für Walz- und Blechträger, alleinige und gleiche Verteilung der Schubspannungen auf den Trägersteg vorausgesetzt, annähernd

$$\gamma = \frac{Q}{F'G} = \frac{dM}{F'G dx},$$

worin  $F'$  den Stegquerschnitt in qcm und  $G$  das Gleitmaß in kg/qcm bezeichnet.

Für andere Querschnitte ist statt  $F'$  der genaue Ausdruck  $\frac{Q}{\int \tau^2 df}$  zu setzen, worin das Integral über den ganzen Querschnitt zu nehmen ist.

Demnach ist die Durchbiegung des Trägers infolge der Schubkräfte im Abstände  $x$  vom Auflager:

$$y = \int_0^x \gamma dx = \int_0^x \frac{dM}{F'G} = \frac{M_x - M_0}{F'G},$$

wo  $M_0$  das Biegemoment über der Stütze bedeutet.

Für  $M_0 = 0$ , also für den einfachen Träger auf zwei Stützen, ist

$$y = \frac{M_x}{F'G} \dots \dots \dots X.$$

d. h. die durch die Schubkräfte erzeugte elastische Linie ist die Seillinie, die zu der gegebenen Belastungsfläche des Trägers mit der Polweite  $F'G$  gehört.

Ist der Stegquerschnitt  $F'$  veränderlich, so kann das unter 1. angegebene Mohrsche Verfahren sinngemäß (statt  $J$  setze  $F'$ , statt Momentenfläche Belastungsfläche) Anwendung finden.

Durch den Einfluss der Schubkräfte, den man meist vernachlässigt, wird die Durchbiegung eines Trägers um etwa **8 bis 12 vH** vergrößert. Umgekehrt ergibt sich das Elastizitätsmaß  $E$ , aus Biegeversuchen berechnet, zu klein, wenn der Einfluss der Schubkräfte nicht berücksichtigt wird.\*\*)

Die **Arbeit der Formänderung** des Trägers durch die Schubkräfte ist

$$A_1 = \frac{1}{2} \int_0^l Q \gamma dx = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{Q^2 dx}{F'G} \dots \dots \dots XI.$$

## d. Trägheits- und Widerstandsmomente.

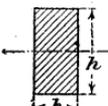
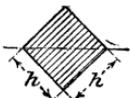
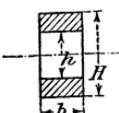
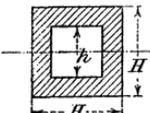
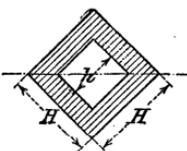
Erklärung und allgemeine Gesetze über Trägheitsmomente s. S. 233 u. f.; zeichnerische Bestimmung der Trägheitsmomente s. S. 235 u. f.; Bestimmung der Trägheitsmomente mittels Pendelversuches s. S. 225.

\*) S. R. Land, Einfluss der Schubkräfte usw. Z. f. B. 1894 S. 611 u. f. (Auch als Sonderdruck zu beziehen von Willh. Ernst u. Sohn.)

\*\*) S. Z. d. V. d. I. 1888 S. 222 u. f.

### Aequatoriale Trägheitsmomente und Widerstandsmomente der üblichsten Querschnittsformen.

Bei den **unsymmetrischen** Querschnitten Nr. 7 und 12 ist nur das **kleinere** (maßgebende) der beiden Widerstandsmomente  $W_1$  und  $W_2$  angegeben (vgl. S. 543). — Trägheits- und Widerstandsmomente der deutschen **Normalprofile für Walzisen** s. im 5. Abschn., Stoffkunde. Trägheitsmomente für **Blechträger-Querschnitte** s. III. Bd., Abschn.: Brückenbau. Trägheits- und Widerstandsmomente für Profile **breitfüßiger Eisenbahnschienen** s. III. Bd., Abschn.: Eisenbahnwesen.

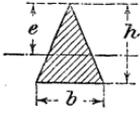
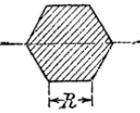
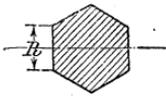
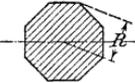
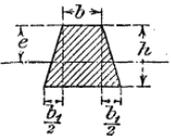
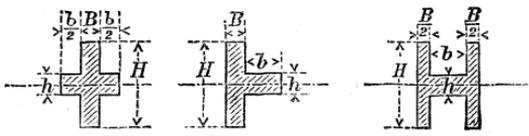
Nr.	Querschnitt	Trägheitsmoment	Widerstandsmoment
1*)		$J = \frac{b h^3}{12}$	$W = \frac{b h^2}{6}$
2**)		$J = \frac{h^4}{12}$	$W = \frac{h^3}{6}$
3**)		$J = \frac{h^4}{12}$	$W = \frac{\sqrt{2}}{12} h^3$ $= 0,1179 h^3$ ***)
4		$J = \frac{b}{12} (H^3 - h^3)$	$W = \frac{b}{6} \frac{H^3 - h^3}{H}$
5†)		$J = \frac{H^4 - h^4}{12}$	$W = \frac{1}{6} \frac{H^4 - h^4}{H}$
6†)		$J = \frac{H^4 - h^4}{12}$	$W = \frac{\sqrt{2}}{12} \frac{H^4 - h^4}{H}$ $= 0,1179 \frac{H^4 - h^4}{H}$

\*) Ausführliche Tafel s. S. 560 u. f.

\*\*\*) Ausführliche Tafel s. S. 559.

\*\*\*) Schneidet man die obere und die untere Ecke wagerecht ab, so wird  $W$  größer; die beiderseitige Verkürzung um je  $\frac{1}{18}$  der Diagonale ergibt  $W_{\max} = 0,1242 h^3$ .

†) Hierzu kann die Tafel S. 559 benutzt werden.

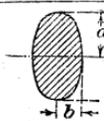
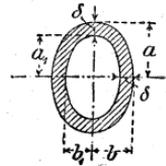
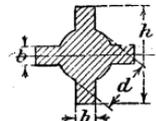
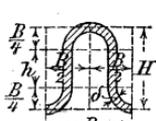
Nr.	Querschnitt	Trägheitsmoment	Widerstandsmoment
7		$J = \frac{bh^3}{36}$ $e = \frac{2}{3}h$	$W = \frac{bh^2}{24}$
8		$J = \frac{5\sqrt{3}}{16}R^4$ $= 0,5413 R^4$	$W = \frac{5}{8}R^3$
9			$W = 0,5413 R^3$
10		$J = \frac{1 + 2\sqrt{2}}{6}R^4$ $= 0,6381 R^4$	$W = 0,6906 R^3^*)$
11	<p><b>Regelmäßiges Vieleck.</b></p> <p><math>F</math> ist der Flächeninhalt, <math>a</math> die Seite, <math>R</math> der Halbmesser des umliegenden, <math>r</math> der des einliegenden Kreises. Beliebige Achse durch den Mittelpunkt. (Weiteres s. S. 134.)</p>	$J = \frac{F}{24}(6R^2 - a^2)$ $= \frac{F}{48}(12r^2 + a^2)$ $J \sim \frac{FR^2}{4}$	$W \sim \frac{FR}{4}$
12		$J = \frac{6b^2 + 6bb_1 + b_1^2}{36(2b + b_1)}h^3$ $e = \frac{1}{3} \frac{3b + 2b_1}{2b + b_1}h$	$W = \frac{6b^2 + 6bb_1 + b_1^2}{12(3b + 2b_1)}h^2$
13			$J = \frac{BH^3 + bh^3}{12}$ $W = \frac{BH^3 + bh^3}{6H}$

\*) In bezug auf eine Diagonale ist  $W = 0,6331 R^3$ .

Nr.	Querschnitt	Trägheitsmoment	Widerstandsmoment
14		$J = \frac{BH^3 - bh^3}{12}$	$W = \frac{BH^3 - bh^3}{6H}$
15		$J = \frac{1}{3} (Be_1^3 - bh^3 + ae_2^3)$	$e_1 = \frac{1}{2} \frac{aH^2 + bd^2}{aH + bd}$ $e_2 = H - e_1$
16		$J = \frac{1}{3} (Be_1^3 - B_1h^3 + be_2^3 - b_1h_1^3)$	$e_1 = \frac{1}{2} \frac{aH^2 + B_1d^2 + b_1d_1(2H - d_1)}{aH + B_1d + b_1d_1}$
17*)		$J = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi r^4}{4}$ $= 0,0491 d^4$ $= 0,7854 r^4$ $= F \left( \frac{r}{2} \right)^2 = \frac{F}{4} r^2$ $J \sim 0,05 d^4$	$W = \frac{\pi d^3}{32} = \frac{\pi r^3}{4}$ $= 0,0982 d^3$ $= 0,7854 r^3$ $= \frac{F}{4} r$ $W \sim 0,1 d^3$
18**)	 $d_m = \frac{1}{2} (D + d)$ $s = \frac{1}{2} (D - d)$	$J = \frac{\pi}{64} (D^4 - d^4)$ $= \frac{\pi}{4} (R^4 - r^4)$ $= \frac{1}{4} F (R^2 + r^2)$ $J \sim 0,05 (D^4 - d^4)$	$W = \frac{\pi}{32} \frac{D^4 - d^4}{D}$ $= \frac{\pi}{4} \frac{R^4 - r^4}{R}$ $W \sim 0,8 d_m^3 s,$ wenn $s: d_m$ sehr klein.
19		$J = r^4 \left( \frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi} \right)$ $= 0,1098 r^4$	$W_2 = 0,1908 r^3$ $W_1 = 0,2587 r^3$ $e_1 = 0,4244 r$
20		$J = 0,1098 (R^4 - r^4) - 0,283 R^2 r^2 (R - r)$ $\frac{R + r}{R + r}$ $J \sim 0,3 \delta r_1^3,$ wenn $\delta: r_1$ sehr klein	$e_1 = \frac{4}{3\pi} \frac{R^2 + Rr + r^2}{R + r}$ $e_2 = R - e_1$

\*) Ausführliche Tafel s. S. 556.

\*\*) Ausführliche Tafel s. S. 557.

Nr.	Querschnitt	Trägheitsmoment	Widerstandsmoment
21		$J = \frac{\pi a^3 b}{4} = 0,7854 a^3 b$	$W = \frac{\pi a^2 b}{4} = 0,7854 a^2 b$
22		$J = \frac{\pi}{4} (a^3 b - a_1^3 b_1)$ $\sim \frac{\pi}{4} a^2 (a + 3b) \delta$	$W \sim \frac{\pi}{4} a (a + 3b) \delta$
J und W auf die Achse 2b bezogen			
23		$J = \frac{1}{12} \left[ \frac{3\pi}{16} d^4 + b(h^3 - d^3) + b^3(h - d) \right]$	$W = \frac{1}{6h} \left[ \frac{3\pi}{16} d^4 + b(h^3 - d^3) + b^3(h - d) \right]$
24		$J = \frac{\delta}{4} \left( \frac{\pi B^3}{16} + B^2 h + \frac{\pi B h^2}{2} + \frac{2}{3} h^3 \right)$ worin $h = H - \frac{1}{2} B$	$W = \frac{2J}{H + \delta}$
Trägerwellblech.			
25		$J = \frac{64}{105} (b_1 h_1^3 - b_2 h_2^3)$ , worin $h_1 = \frac{1}{2}(H + \delta)$   $b_1 = \frac{1}{4}(B + 2,6 \delta)$ $h_2 = \frac{1}{2}(H - \delta)$   $b_2 = \frac{1}{4}(B - 2,6 \delta)$	$W = \frac{2J}{H + \delta}$
Flaches Wellblech. (Welle aus Parabelbogen.)			

Weitere Angaben für Wellbleche s. 5. Abschn., Stoffkunde.

Nach R. F. Mayer\*) ist für alle Wellbleche (24 u. 25)

$$J = \eta \delta H^3,$$

worin  $\eta$  eine von dem Verhältnis  $n = B : H$  abhängige Zahl ist, die aus folgender Tafel zu entnehmen ist. (Geradlinige Zwischenschaltung zulässig.)

n	η	n	η	n	η	n	η	n	η	n	η	n	η
0,3	0,20792	0,9	0,28180	1,5	0,34571	2,1	0,40173	2,6	0,45025	3,1	0,50307	3,6	0,55895
0,4	0,22101	1,0	0,29310	1,6	0,35553	2,2	0,41101	2,7	0,46051	3,2	0,51404	3,7	0,57041
0,5	0,23377	1,1	0,30412	1,7	0,36512	2,3	0,42051	2,8	0,47094	3,3	0,52511	3,8	0,58195
0,6	0,24622	1,2	0,31489	1,8	0,37451	2,4	0,43023	2,9	0,48151	3,4	0,53630	3,9	0,59357
0,7	0,25837	1,3	0,32540	1,9	0,38370	2,5	0,44014	3,0	0,49222	3,5	0,54758	4,0	0,60526
0,8	0,27023	1,4	0,33568	2,0	0,39270								

\*) Siehe L. v. Tetmajer, Angew. Elast.- u. Festigkeitsl. 3. Aufl. 1905 S. 133.



## 1. Kreisförmiger Querschnitt.

 $J = \text{äquatoriales Trägheitsmoment, } W = \text{Widerstandsmoment.}$ 

$d$	$J = \frac{\pi d^4}{64}$	$W = \frac{\pi d^3}{32}$	$d$	$J = \frac{\pi d^4}{64}$	$W = \frac{\pi d^3}{32}$	$d$	$J = \frac{\pi d^4}{64}$	$W = \frac{\pi d^3}{32}$
1	0,0491	0,0982	51	332086	13023	101	5108055	101150
2	0,7854	0,7854	52	358908	13804	102	5313378	104184
3	3,976	2,651	53	387323	14616	103	5524830	107278
4	12,57	6,283	54	417393	15459	104	5742532	110433
5	30,68	12,27	55	449180	16334	105	5966604	113650
6	63,62	21,21	56	482750	17241	106	6197171	116928
7	117,9	33,67	57	518166	18181	107	6434357	120268
8	201,1	50,27	58	555497	19155	108	6678287	123672
9	322,1	71,57	59	594810	20163	109	6929087	127139
10	490,9	98,17	60	636172	21206	110	7186886	130671
11	718,7	130,7	61	679651	22284	111	7451813	134267
12	1018	169,6	62	725332	23398	112	7723997	137929
13	1402	215,7	63	773272	24548	113	8003571	141650
14	1886	269,4	64	823550	25736	114	8290666	145450
15	2485	331,3	65	876240	26961	115	8585417	149312
16	3217	402,1	66	931420	28225	116	8887958	153241
17	4100	482,3	67	989166	29527	117	9198425	157238
18	5153	572,6	68	1049556	30869	118	9516956	161304
19	6397	673,4	69	1112660	32251	119	9843689	165440
20	7854	785,4	70	1178588	33674	120	10178763	169646
21	9547	909,2	71	1247393	35138	121	10522320	173923
22	11499	1045	72	1319167	36644	122	10874501	178271
23	13737	1194	73	1393995	38192	123	11235450	182690
24	16286	1357	74	1471963	39783	124	11605311	187182
25	19175	1534	75	1553156	41417	125	11984229	191748
26	22432	1726	76	1637662	43096	126	12372350	196387
27	26087	1932	77	1725571	44820	127	12769824	201100
28	30172	2155	78	1816972	46589	128	13176799	205887
29	34719	2394	79	1911967	48404	129	13593424	210751
30	39761	2651	80	2010619	50265	130	14019852	215690
31	45333	2925	81	2113051	52174	131	14456235	220706
32	51472	3217	82	2219347	54130	132	14902727	225799
33	58214	3528	83	2329605	56135	133	15359483	230970
34	65597	3859	84	2443920	58189	134	15826658	236219
35	73662	4209	85	2562392	60292	135	16204411	241547
36	82448	4580	86	2685120	62445	136	16792899	246954
37	91998	4973	87	2812205	64648	137	17292282	252442
38	102354	5387	88	2943748	66903	138	17802721	258010
39	113501	5824	89	3079853	69210	139	18324378	263660
40	125664	6283	90	3220623	71569	140	18857416	269392
41	138709	6766	91	3366165	73982	141	19401999	275206
42	152745	7274	92	3516586	76448	142	19958294	281103
43	167820	7806	93	3671992	78968	143	20526466	287083
44	183984	8363	94	3832492	81542	144	21106684	293148
45	201289	8946	95	3998198	84173	145	21699116	299298
46	219787	9556	96	4169220	86859	146	22303933	305533
47	239531	10193	97	4345671	89601	147	22921307	311855
48	260576	10857	98	4527664	92401	148	23551409	318265
49	282979	11550	99	4715315	95259	149	24194414	324757
50	306796	12272	100	4908738	98175	150	24850496	331340

Bemerkung. Betrag der Wert der ersten Dezimale 5 oder mehr, so wurde der Einer um eine Einheit erhöht.

## 2. Kreisringförmiger Querschnitt. \*)



$F$  Querschnitt,  $J$  Trägheitsmoment,  $W$  Widerstandsmoment.

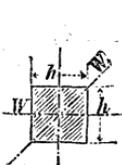
Die Gewichte  $g$  (in kg/m) beziehen sich auf glatte, gußeisenerne Rohre (Säulen); 1 cbm Gußeisen wiegt 7250 kg. Für Schweisseisen sind die Werte  $g$  mit 1,076, für Flußeisen mit 1,083, für gewalzten und gegossenen Flußstahl mit 1,084 zu multiplizieren.

$D$ mm	$\delta$ mm	$F$ cm <sup>2</sup>	$J$ cm <sup>4</sup>	$W$ cm <sup>3</sup>	$g$ kg/m	$D$ mm	$\delta$ mm	$F$ cm <sup>2</sup>	$J$ cm <sup>4</sup>	$W$ cm <sup>3</sup>	$g$ kg/m
80	10	22,0	137	34,2	16,0	160	14	64,2	1727	216	46,5
	12	25,6	153	38,2	18,6		16	72,4	1899	237	52,5
	14	29,0	165	41,2	21,0		18	80,3	2056	257	58,2
90	10	25,1	204	45,3	18,2	20	88,0	2200	275	63,8	
	12	29,4	229	50,9	21,3	22	95,4	2329	291	69,2	
	14	33,4	250	55,6	24,2	24	103	2445	306	74,3	
	16	37,2	267	59,3	27,0	14	68,6	2104	244	49,7	
100	10	28,3	291	58,2	20,5	16	77,4	2320	273	56,1	
	12	33,2	327	65,4	24,1	18	85,9	2517	296	62,4	
	14	37,8	359	71,8	27,4	20	94,3	2699	318	68,3	
	16	42,2	385	77,0	30,6	22	102	2863	337	74,2	
	18	46,4	409	81,8	33,6	24	110	3013	354	79,8	
110	10	31,4	397	72,2	22,8	14	73,0	2534	282	52,9	
	12	36,9	450	81,8	26,8	16	82,4	2798	311	59,7	
	14	42,2	497	90,4	30,6	18	91,6	3042	338	66,4	
	16	47,3	537	97,6	34,2	20	101	3268	363	72,9	
	18	52,0	572	104	37,7	22	109	3475	386	79,2	
120	10	34,6	527	87,8	25,1	24	118	3663	407	85,3	
	12	40,7	601	100	29,5	14	77,4	3017	318	56,1	
	14	46,6	666	111	33,8	16	87,5	3338	351	63,4	
	16	52,3	724	121	37,9	18	97,3	3636	383	70,5	
	18	57,7	773	129	41,8	20	107	3914	413	77,4	
	20	62,8	817	136	45,5	22	116	4168	439	84,2	
130	10	37,7	683	105	27,3	24	125	4401	463	90,8	
	12	44,5	782	120	32,3	16	92,5	3944	394	67,1	
	14	51,0	871	134	37,0	18	103	4303	430	74,6	
	16	57,3	949	146	41,5	20	113	4638	464	82,0	
	18	62,3	1019	157	45,9	22	123	4948	495	89,2	
	20	69,1	1080	166	50,1	24	133	5344	534	96,2	
140	12	48,3	997	142	35,0	26	142	5499	556	103,0	
	14	55,4	1114	159	40,2	28	151	5743	574	109,7	
	16	62,3	1218	174	45,2	30	160	5968	597	116,1	
	18	68,9	1311	187	50,0	16	97,5	4619	440	70,7	
	20	75,4	1395	199	54,7	18	109	5047	481	78,7	
150	12	52,0	1248	166	37,7	20	119	5448	519	86,6	
	14	59,8	1347	180	43,4	22	130	5819	554	94,2	
	16	67,4	1534	205	48,9	24	140	6166	587	101,6	
	18	74,7	1656	221	54,1	26	150	6488	618	109,0	
	20	81,7	1766	235	59,2	28	160	6786	646	116,1	
	22	88,6	1866	249	64,2	30	170	7062	673	123,0	
	24	95,0	1955	261	68,9						

\*) Aus F. Boerner, Statische Tafeln usw. Berlin. 3. Aufl. 1910. Wilhelm Ernst & Sohn.

D	$\delta$	F'	J	W	g	D	$\delta$	F'	J	W	g	
mm	mm	cm <sup>2</sup>	cm <sup>4</sup>	cm <sup>3</sup>	kg/m	mm	mm	cm <sup>2</sup>	cm <sup>4</sup>	cm <sup>3</sup>	kg/m	
220	16	103	5342	486	74,3	290	18	154	14289	986	111,5	
	18	114	5873	534	82,8		22	185	16743	1155	134,3	
	20	126	6346	577	91,1		26	216	18970	1308	156,3	
	22	137	6839	622	99,2		30	245	20983	1447	177,6	
	24	148	7203	655	107,2		34	273	22798	1573	198,2	
	26	158	7589	690	114,9		300	20	176	17330	1155	127,5
	28	169	7949	723	122,5			24	208	19966	1331	150,9
	30	179	8282	753	129,8			28	239	22363	1491	173,5
230	16	109	6207	540	78,0	32		269	24535	1636	195,3	
	18	120	6630	577	86,9	36		299	26479	1765	216,5	
	20	132	7341	638	95,6	40		327	28262	1884	236,9	
	22	144	7862	684	104,3	320	20	188	21302	1331	136,7	
	24	155	8351	726	112,6		24	223	24558	1535	161,8	
	26	167	8809	766	120,8		28	257	27580	1724	186,3	
	28	178	9238	803	128,8		32	290	30390	1900	209,9	
	240	30	189	9637	838		136,7	36	321	32905	2057	232,9
18		126	7785	649	91,0		40	352	35186	2199	255,1	
20		138	8434	703	100,2	340	20	201	25838	1520	145,8	
22		151	9042	753	109,3		24	239	29912	1759	172,8	
24		163	9546	796	118,1		28	274	33665	1980	198,9	
26		175	10154	846	126,7		32	310	37115	2183	224,5	
28		186	10659	888	135,2		36	344	40277	2369	249,3	
30		198	11133	928	143,5		40	377	43165	2539	273,3	
250	18	131	8880	710	95,1	360	20	214	30977	1721	154,9	
	22	158	10334	827	114,3		24	253	35935	1996	183,6	
	26	183	11633	931	132,7		28	292	40526	2251	211,7	
	30	207	12778	1022	150,3		32	330	44773	2487	239,0	
	260	34	231	13790	1103		167,3	36	366	48680	2704	265,6
		18	137	10073	775		99,2	40	402	52276	2904	291,5
22		164	11746	904	119,3	44	437	55582	3088	316,7		
26		191	13243	1019	138,5	380	20	226	36756	1935	164,0	
30		217	14577	1121	157,2		24	270	42718	2248	194,6	
34		241	15691	1207	175,0		28	308	48262	2540	224,5	
270		18	143	11369	842		103,3	32	346	53400	2811	253,6
		22	171	13286	984		124,3	36	383	58379	3073	282,1
	26	199	15000	1111	144,5		40	418	62593	3294	309,8	
	30	226	16539	1225	164,0	44	453	66671	3509	336,8		
	34	252	17914	1327	182,8	400	20	239	43210	2160	173,1	
	280	18	148	12774	912		107,4	24	284	50306	2515	205,5
		22	178	14947	1068		129,3	28	336	56917	2846	237,2
		26	207	16909	1208		150,4	32	370	63103	3156	268,3
30		236	18674	1334	170,8		36	412	68852	3443	298,5	
290		34	263	20257	1447		190,5	40	452	74195	3710	327,7
		18	154	14289	986	111,5	44	492	79154	3958	356,8	
		22	185	16743	1155	134,3	48	531	83744	4187	384,8	
		26	216	18970	1308	156,3						
	30	245	20983	1447	177,6							
	34	273	22798	1573	198,2							

## 3. Quadratischer Querschnitt.



$$J = \frac{h^4}{12} = \text{Trägheitsmoment für alle Schwerachsen.}$$

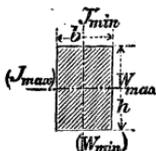
$$W = \frac{h^3}{6} = \text{Widerstandsmoment für eine Schwerachse parallel den Seiten.}$$

$$W_1 = \frac{\sqrt{2}}{12} h^3 = 0,117851130 h^3 = \text{Widerstandsmoment für eine Diagonale.}$$

(Vgl. hierzu Fußnote S. 552.)

$h$	$J$	$W$	$W_1$	$h$	$J$	$W$	$W_1$
1	0,0833	0,1667	0,1179	31	76960	4965,2	3510,9
2	1,3333	1,3333	0,9428	32	87381	5461,3	3861,7
3	6,7500	4,5000	3,1820	33	98827	5989,5	4235,2
4	21,333	10,667	7,5425	34	111361	6550,7	4632,0
5	52,083	20,833	14,731	35	125052	7145,8	5052,8
6	108,00	36,000	25,456	36	139968	7776,0	5498,4
7	200,08	57,167	40,423	37	156180	8442,2	5969,5
8	341,33	85,333	60,340	38	173761	9145,3	6466,7
9	546,75	121,50	85,913	39	192787	9886,5	6990,7
10	833,33	166,67	117,85	40	213333	10667	7542,5
11	1220,1	221,83	156,86	41	235480	11487	8122,3
12	1728,0	288,00	203,64	42	259308	12348	8731,3
13	2380,1	366,17	258,92	43	284900	13251	9369,9
14	3201,3	457,33	323,38	44	312341	14197	10039
15	4218,8	562,50	397,74	45	341719	15188	10739
16	5461,3	682,67	482,71	46	373121	16223	11471
17	6960,1	818,83	579,00	47	406640	17304	12236
18	8748,0	972,00	687,30	48	442368	18432	13033
19	10860	1143,2	808,33	49	480400	19608	13865
20	13333	1333,3	942,81	50	520833	20833	14731
21	16207	1543,5	1091,4	51	563767	22109	15633
22	19521	1774,7	1254,9	52	609301	23435	16571
23	23320	2027,8	1433,9	53	657540	24813	17545
24	27648	2304,0	1629,2	54	708588	26244	18557
25	32552	2604,2	1841,4	55	762552	27729	19607
26	38081	2929,3	2071,3	56	819541	29269	20696
27	44287	3280,5	2319,6	57	879667	30866	21825
28	51221	3658,7	2587,0	58	943041	32519	22994
29	58940	4064,8	2874,2	59	1009780	34230	24204
30	67500	4500,0	3182,0	60	1080000	36000	25456

## 4. Rechteckiger Querschnitt.



$$J_{\min} = \frac{b^3 h}{12}$$

$$W_{\max} = \frac{b h^2}{6}$$

**Bemerkung.**  $J_{\max} = \frac{b h^3}{12}$  ergibt sich aus  $W_{\max}$  der Tafel durch Multiplikation mit  $\frac{h}{2}$ ;  
 $W_{\min} = \frac{b^2 h}{6}$  ergibt sich aus  $J_{\min}$  der Tafel durch Division mit  $\frac{b}{2}$ .

Quer- schnitt	h	b	J <sub>min.</sub>	W <sub>max.</sub>	Quer- schnitt		J <sub>min.</sub>	W <sub>max.</sub>	Quer- schnitt		J <sub>min.</sub>	W <sub>max.</sub>
					h	b			h	b		
1	1	1	0,0833	0,1667	8	2	5,3333	21,3333	11	6	198,00	121,00
2	1	2	0,1667	0,6667	8	4	42,667	42,667	11	8	469,33	161,33
3	1	3	0,2500	1,5000	8	6	144,00	64,000	11	10	916,67	201,67
4	1	4	0,3333	2,6667	9	1	0,7500	13,500	12	1	1,0000	24,000
5	1	5	0,4167	4,1667	9	3	20,250	40,500	12	3	27,000	72,000
6	1	6	0,5000	6,0000	10	5	93,750	67,500	12	5	125,00	120,00
7	1	7	0,5833	8,1667	10	7	257,25	94,500	12	7	343,00	168,00
8	1	8	0,6667	10,667	11	9	546,75	121,50	12	9	729,00	216,00
9	1	9	0,7500	12,000	11	1	0,8333	16,667	12	11	1331,0	264,00
10	1	10	0,8333	16,667	12	3	22,500	50,000	13	1	1,0833	28,167
11	1	11	0,9167	20,167	13	5	104,17	83,3333	13	3	29,250	84,500
12	1	12	1,0000	12,000	13	7	285,83	116,67	13	5	135,42	140,83
13	1	13	1,0833	14,167	13	9	607,50	150,00	13	7	371,58	197,17
14	1	14	1,1667	16,167	13	11	7,3333	40,3333	13	9	789,75	253,50
15	1	15	1,2500	18,750	13	13	58,667	80,667	13	11	1441,9	309,83
16	1	16	1,3333	21,3333	13	15	114,58	100,83	13	13	2380,1	366,17

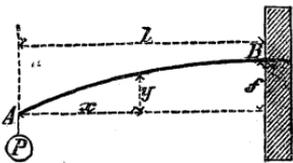
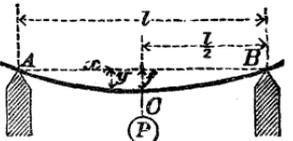
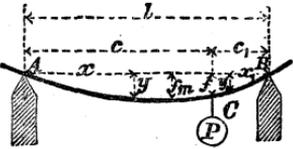
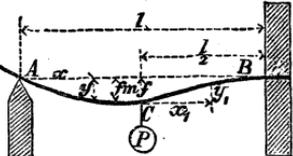
Querschnitt		$J_{min.}$	$W_{max.}$	Querschnitt		$J_{min.}$	$W_{max.}$	Querschnitt		$J_{min.}$	$W_{max.}$
$h$	$b$			$h$	$b$			$h$	$b$		
14	1	1,1667	32,667	16	14	3658,7	597,33	19	5	197,92	300,83
	2	9,3333	65,333		15	4500,0	640,00		6	342,00	361,00
	3	31,500	98,000		16	5461,3	682,67		7	543,08	421,17
	4	74,667	130,67	17	1	1,4167	48,167		8	810,67	481,33
	5	145,83	163,33		2	11,333	96,333		9	1154,3	541,50
	6	252,00	196,00		3	38,250	144,50		10	1583,3	601,67
	7	400,17	228,67		4	90,667	192,67		11	2107,4	661,83
	8	597,33	261,33		5	177,08	240,83		12	2736,0	722,00
	9	850,50	294,00		6	306,00	289,00		13	3478,6	782,17
	10	1166,7	326,67		7	485,92	337,17		14	4344,7	842,33
	11	1552,8	359,33		8	725,33	385,33		15	5343,8	902,50
	12	2016,0	392,00		9	1032,8	433,50		16	6485,3	962,67
	13	2563,2	424,67		10	1416,7	481,67		17	7778,9	1022,8
	14	3201,3	457,33		11	1885,6	529,83		18	9234,0	1083,0
15	1	1,2500	37,500	12	2448,0	578,00	19	10860	1143,2		
	2	10,000	75,000	13	3112,4	626,17	20	1	1,6667	66,667	
	3	33,750	112,50	14	3887,3	674,33		2	13,333	133,33	
	4	80,000	150,00	15	4781,3	722,50		3	45,000	200,00	
	5	156,25	187,50	16	5802,7	770,67		4	106,67	266,67	
	6	270,00	225,00	17	6960,1	818,83		5	208,33	333,33	
	7	428,75	262,50	18	1	1,5000		54,000	6	360,00	400,00
	8	640,00	300,00		2	12,000		108,00	7	571,67	466,67
	9	911,25	337,50		3	40,500		162,00	8	853,33	533,33
	10	1250,0	375,00		4	96,000		216,00	9	1215,0	600,00
	11	1663,8	412,50		5	187,50		270,00	10	1666,7	666,67
	12	2160,0	450,00		6	324,00		324,00	11	2218,3	733,33
	13	2746,3	487,50		7	514,50		378,00	12	2880,0	800,00
	14	3430,0	525,00		8	768,00		432,00	13	3661,7	866,67
	15	4218,8	562,50		9	1093,5		486,00	14	4573,3	933,33
16	1	1,3333	42,667		10	1500,0		540,00	15	5625,0	1000,0
	2	10,667	85,333		11	1996,5	594,00	16	6826,7	1066,7	
	3	36,000	128,00	12	2592,0	648,00	17	8188,3	1133,3		
	4	85,333	170,67	13	3295,5	702,00	18	9720,0	1200,0		
	5	166,67	213,33	14	4116,0	756,00	19	11432	1266,7		
	6	288,00	256,00	15	5062,5	810,00	20	13333	1333,3		
	7	457,33	298,67	16	6144,0	864,00	21	1	1,7500	73,500	
	8	682,67	341,33	17	7369,5	918,00		2	14,000	147,00	
	9	972,00	384,00	18	8748,0	972,00		3	47,250	220,50	
	10	1333,3	426,67	19	1	1,5833		60,167	4	112,00	294,00
	11	1774,7	469,33		2	12,667		120,33	5	218,75	367,50
	12	2304,0	512,00		3	42,750		180,50	6	378,00	441,00
	13	2929,3	554,67		4	101,33		240,67	7	600,25	514,50

Querschnitt		$J_{min.}$	$W_{max.}$	Querschnitt		$J_{min.}$	$W_{max.}$	Querschnitt		$J_{min.}$	$W_{max.}$
$h$	$b$			$h$	$b$			$h$	$b$		
21	8	896,00	588,00	23	7	657,42	617,17	25	2	16,667	208,33
	9	1275,8	661,50		8	981,33	705,37		3	56,250	312,50
	10	1750,0	735,00		9	1397,3	793,50		4	133,33	416,67
	11	2329,3	808,50		10	1916,7	881,67		5	260,42	520,83
	12	3024,0	882,00		11	2551,1	969,83		6	450,00	625,00
	13	3844,8	955,50		12	3312,0	1058,0		7	714,58	729,17
	14	4802,0	1029,0		13	4210,9	1146,2		8	1066,7	833,33
	15	5906,3	1102,5		14	5259,3	1234,3		9	1518,8	937,50
	16	7168,0	1176,0		15	6468,8	1322,5		10	2083,3	1041,7
	17	8597,8	1249,5		16	7850,7	1410,7		11	2772,9	1145,8
	18	10206	1323,0		17	9416,6	1498,8		12	3600,0	1250,0
19	12003	1396,5	18	11178	1587,0	13	4577,1	1354,2			
20	14000	1470,0	19	13146	1675,2	14	5716,7	1458,3			
21	16207	1543,5	20	15333	1763,3	15	7031,3	1562,5			
22	1	1,8333	80,667	24	21	17750	1851,5	26	16	8533,3	1666,7
	2	14,667	161,33		22	20409	1939,7		17	10235	1770,8
	3	49,500	242,00		23	23320	2027,8		18	12150	1875,0
	4	117,33	322,67		1	2,0000	96,000		19	14290	1979,2
	5	229,17	403,33		2	16,000	192,00		20	16667	2083,3
	6	396,00	484,00		3	54,000	288,00		21	19294	2187,5
	7	628,83	564,67		4	128,000	384,00		22	22183	2291,7
	8	938,67	645,33		5	250,000	480,00		23	25348	2395,8
	9	1336,5	726,00		6	432,000	576,00		24	28800	2500,0
	10	1833,3	806,67		7	686,000	672,00		25	32552	2604,2
	11	2440,2	887,33		8	1024,0	768,00		1	2,1667	112,67
12	3168,0	968,00	9	1458,0	864,00	2	17,333	225,33			
13	4027,8	1048,7	10	2000,0	960,00	3	58,500	338,00			
14	5030,7	1129,3	11	2662,0	1056,0	4	138,67	450,67			
15	6187,5	1210,0	12	3456,0	1152,0	5	270,83	563,33			
16	7509,3	1290,7	13	4394,0	1248,0	6	468,00	676,00			
17	9007,2	1371,3	14	5488,0	1344,0	7	743,17	788,67			
18	10692	1452,0	15	6750,0	1440,0	8	1109,3	901,33			
19	12575	1532,7	16	8192,0	1536,0	9	1579,5	1014,0			
20	14667	1613,3	17	9826,0	1632,0	10	2166,7	1126,7			
21	16979	1694,0	18	11664	1728,0	11	2883,8	1239,3			
22	19521	1774,7	19	13718	1824,0	12	3744,0	1352,0			
23	1	1,9167	88,167	25	20	16000	1920,0	13	4760,2	1464,7	
	2	15,333	176,33		21	18522	2016,0	14	5945,3	1577,3	
	3	51,750	264,50		22	21296	2112,0	15	7312,5	1690,0	
	4	122,67	352,67		23	24334	2208,0	16	8874,7	1802,7	
	5	239,58	440,83		24	27648	2304,0	17	10645	1915,3	
	6	414,00	529,00		1	2,0833	104,17	18	12636	2028,0	
								19	14861	2140,7	

Querschnitt		$J_{min.}$	$W_{max.}$	Querschnitt		$J_{min.}$	$W_{max.}$	Querschnitt		$J_{min.}$	$W_{max.}$
$h$	$b$			$h$	$b$			$h$	$b$		
26	20	17333	2253,3	28	7	800,33	914,67	29	20	19333	2803,3
	21	20066	2366,0		8	1194,7	1045,3		21	22381	2943,5
	22	23071	2478,7		9	1701,0	1176,0		22	25733	3083,7
	23	26362	2591,3		10	2333,3	1306,7		23	29404	3223,8
	24	29952	2704,0		11	3105,7	1437,3		24	33408	3364,0
	25	33854	2816,7		12	4032,0	1568,0		25	37760	3504,2
	26	38081	2929,3	13	5126,3	1698,7	26	42475	3644,3		
				14	6402,7	1829,3	27	47567	3784,5		
	1	2,2500	121,50	15	7875,0	1960,0	28	53051	3924,7		
	2	18,000	243,00	16	9557,3	2090,7	29	58940	4064,8		
	3	60,750	364,50	17	11464	2221,3	30	1	2,5000	150,00	
	4	144,00	486,00	18	13608	2352,0		2	20,000	300,00	
	5	281,25	607,50	19	16004	2482,7		3	67,500	450,00	
	6	486,00	729,00	20	18667	2613,3		4	160,00	600,00	
	7	771,75	850,50	21	21609	2744,0		5	312,50	750,00	
	8	1152,0	972,00	22	24845	2874,7		6	540,00	900,00	
	9	1640,3	1093,5	23	28390	3005,3		7	857,50	1050,0	
	10	2250,0	1215,0	24	32256	3136,0		8	1280,0	1200,0	
	11	2994,8	1336,5	25	36458	3266,7		9	1822,5	1350,0	
	12	3888,0	1458,0	26	41011	3397,3		10	2500,0	1500,0	
27	13	4943,3	1579,5	27	45927	3528,0	11	3327,5	1650,0		
	14	6174,0	1701,0	28	51221	3658,7	12	4320,0	1800,0		
	15	7593,8	1822,5	29	1	2,4167	140,17	13	5492,5	1950,0	
	16	9216,0	1944,0		2	19,333	280,33	14	6860,0	2100,0	
	17	11054	2065,5		3	65,250	420,50	15	8437,5	2250,0	
	18	13122	2187,0		4	154,67	560,67	16	10240	2400,0	
	19	15433	2308,5		5	302,08	700,83	17	12283	2550,0	
	20	18000	2430,0		6	522,00	841,00	18	14580	2700,0	
	21	20837	2551,5		7	828,92	981,17	19	17148	2850,0	
	22	23958	2673,0		8	1237,3	1121,3	20	20000	3000,0	
23	27376	2794,5	9		1761,8	1261,5	21	23153	3150,0		
24	31104	2916,0	10		2416,7	1401,7	22	26620	3300,0		
	25	35156	3037,5	11	3216,6	1541,8	23	30418	3450,0		
	26	39546	3159,0	12	4176,0	1682,0	24	34560	3600,0		
	27	44287	3280,5	13	5309,4	1822,2	25	39063	3750,0		
28	1	2,3333	130,67	14	6631,3	1962,3	26	43940	3900,0		
	2	18,667	261,33	15	8156,3	2102,5	27	49208	4050,0		
	3	63,000	392,00	16	9898,7	2242,7	28	54880	4200,0		
	4	149,33	522,67	17	11873	2382,8	29	60973	4350,0		
	5	291,67	653,33	18	14094	2523,0	30	67500	4500,0		
	6	504,00	784,00	19	16576	2663,2					

## e. Träger mit unveränder-

Die Freilängen  $l$ , Durchbiegungen  $f$ , Trägerhöhen  $h$ , Koordinaten  $x$  und  $y$  und die sonstigen lässige Biegungsspannung  $k_b$  (s. S. 506, 522 u. f.) und das Elastizitätsmaß  $E$  des Querschnittes für die wagerechte Schwerachse in  $\text{cm}^4$  und das  
Arbeit der Biegung

Nr.	Belastungsfall	Auflagerdrücke $A, B$ Biegemoment $M$	Tragkraft $P$ Erforderl. Widerstandsmoment $W$
1.		$B = P.$ $M = Px.$ $M_{\max} = Pl.$	$P = \frac{k_b W}{l}.$ $W = \frac{Pl}{k_b}.$
2.		$A = B = \frac{P}{2}.$ $M = \frac{Px}{2}.$ $M_{\max} = \frac{Pl}{4}.$	$P = 4 \frac{k_b W}{l}.$ $W = \frac{Pl}{4 k_b}.$
3.		$A = \frac{P c_1}{l}; B = \frac{P c_2}{l}.$ Für AC: $M = \frac{P c_1 x}{l};$ für BC: $M = \frac{P c_2 x_1}{l}.$ $M_{\max} = \frac{P c c_1}{l}.$	$P = k_b W \frac{l}{c c_1}.$ $W = \frac{P c c_1}{l k_b}.$
4.		$A = \frac{5}{16} P; B = \frac{11}{16} P.$ Für AC: $M = \frac{5}{16} Px;$ für C: $M = \frac{5}{32} Pl;$ für BC: $M = Pl \left( \frac{5}{32} - \frac{11}{16} \frac{x_1}{l} \right).$ $M_{\max} = \frac{3 Pl}{16}.$	$P = \frac{16 k_b W}{3 l}.$ $W = \frac{3 Pl}{16 k_b}.$

Vgl. auch Fall 25, S. 576.

\*) Die Formeln für die Auflagerdrücke und die Biegemomente gelten auch für Träger mit veränderlichem Querschnitt.

Für die Berechnung eingemauerter Träger ist der Sicherheit halber stets ein Freiauflegen anzunehmen; es sind hierbei also die Fälle Nr. 4 (S. 564 u. 565), 5, 9 (S. 566 u. 567) und 10 (S. 568 u. 569) nicht zu benutzen.

**lichem Querschnitt.\*)**

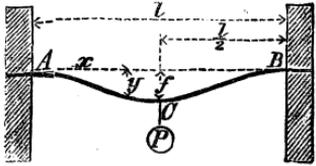
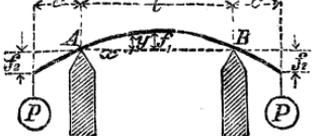
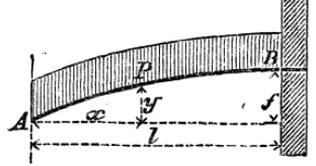
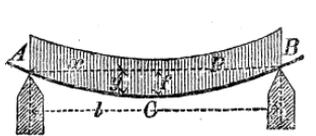
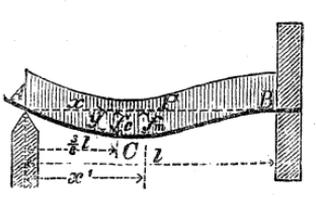
Längen-Abmessungen sind in cm, die äußeren Kräfte  $A, B, P, Q$  usw. in kg, die zu-Trägerstoffes (s. S. 503, 513 u. f.) in kg/qcm, das Trägheitsmoment  $J$  des Träger-zu  $J$  gehörige Widerstandsmoment  $W$  in cm<sup>3</sup> auszudrücken.

s. S. 550 u. 551.

Gleichung der elastischen Linie	Durchbiegung $f^{**}$ )	Bemerkungen
$y = \frac{Pl^3}{2EJ} \left( \frac{x}{l} - \frac{1}{3} \frac{x^3}{l^3} \right).$ $\operatorname{tg} \beta = \frac{dy}{dx} = \frac{Pl^2}{2EJ} \left( \frac{1}{l} - \frac{x^2}{l^3} \right).$ $\operatorname{tg} \beta(x=0) = \frac{Pl^2}{2EJ} = \frac{3f}{2l}.$	$f = \frac{Pl^3}{EJ} \frac{1}{3}$ $= \frac{2}{3} \frac{k_b l^2}{E h}$	Freitragler.  Gefährlicher Querschnitt bei $B$ .
$y = \frac{Pl^3}{16EJ} \left( \frac{x}{l} - \frac{4}{3} \frac{x^3}{l^3} \right).$	$f = \frac{Pl^3}{EJ} \frac{1}{48}$ $= \frac{1}{6} \frac{k_b l^2}{E h}$	Frei aufliegender Träger.  Gefährlicher Querschnitt in der Mitte.
$y = \frac{P}{EJ} \frac{c^2 c_1^2}{6l} \left( 2 \frac{x}{c} + \frac{x}{c_1} - \frac{x^3}{c^2 c_1} \right),$ $y_1 = \frac{P}{EJ} \frac{c_1^2 c^2}{6l} \left( 2 \frac{x_1}{c_1} + \frac{x_1}{c} - \frac{x_1^3}{c_1^2 c} \right).$	$f = \frac{P}{EJ} \frac{l^3 c^2 c_1^2}{3 l^2 l^2};$ $f_{\max} \text{ für}$ $x = c \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{2c_1}{3c}},$ wenn $c > c_1$ ; $x_1 = c_1 \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{2c}{3c_1}},$ wenn $c < c_1$ .	Frei aufliegender Träger.  Gefährlicher Querschnitt bei $C$ .
$y = \frac{Pl^3}{EJ} \frac{1}{32} \left( \frac{x}{l} - \frac{5}{3} \frac{x^3}{l^3} \right),$ $y_1 = \frac{Pl^3}{EJ} \frac{1}{32} \left( \frac{1}{4} \frac{x_1}{l} + \frac{5}{2} \frac{x_1^2}{l^2} - \frac{11}{3} \frac{x_1^3}{l^3} \right).$	$f = \frac{P}{EJ} \frac{7l^3}{768};$ für $x = l \sqrt[1]{5}$ ist $f_{\max} = \sqrt[1]{5} \frac{Pl^3}{48EJ}$	Halb eingespannter Träger.  Gefährlicher Querschnitt bei $B$ .  Wendepunkt bei $x_1 = \frac{5}{12} l$ .

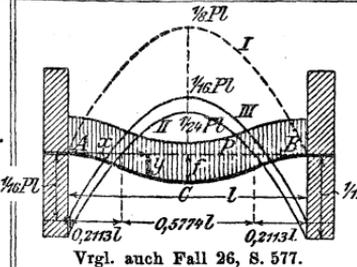
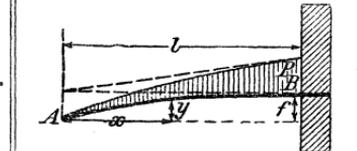
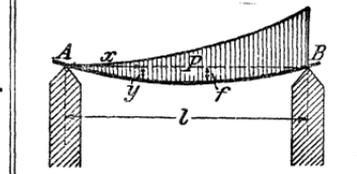
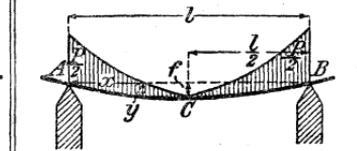
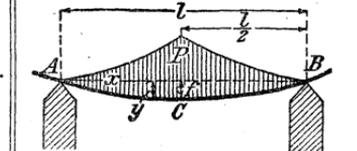
\*\*) Mit  $f$  ist die Durchbiegung im Angriffspunkte der Einzellast  $P$ , mit  $f_{\max}$  (oder  $f_m$ ) die größte Durchbiegung bezeichnet worden, falls  $f$  nicht damit übereinstimmt. — Die durch  $k_b$  ausgedrückten Werte von  $f$  gelten nur für homogene Balkenquerschnitte mit wagerechter Symmetrieachse. — Ueber die Vergrößerung von  $f$  (und von  $y$ ) durch den Einfluss der Schubkräfte s. S. 551.

Für schwierigere Belastungsfälle empfiehlt sich „Das analytisch-graphische Verfahren zur Bestimmung der Durchbiegung zwei- und dreifach gestützter Träger“ von M. Klofs, Berlin 1902, A. Seydel.

Nr.	Belastungsfall	Auflagerdrücke $A, B$ Biegemoment $M$	Tragkraft $P$ Erforderl. Widerstandsmoment $W$
5.	 <p>Vrgl. auch Sonderfall 26, S. 577.</p>	$A = B = \frac{P}{2}$ <p>Für <math>AC</math>: <math>M = \frac{Pl}{2} \left( \frac{x}{l} - \frac{1}{4} \right)</math>                      für <math>CB</math>: <math>M = \frac{Pl}{2} \left( \frac{x}{l} - \frac{3}{4} \right)</math>  <math display="block">M_{\max} = \frac{Pl}{8}</math></p>	$P = 8 \frac{kbW}{l}$ $W = \frac{Pl}{8kb}$
6.	 <p>Dieselben Formeln gelten, wenn <math>A, B</math> die Lastpunkte und die Enden des Trägers gestützt sind.</p>	$A = B = P.$ <p>Für <math>AB</math>:  <math display="block">M = Pc = \text{konst.}</math></p>	$P = \frac{kbW}{c}$ $W = \frac{Pc}{kb}$
7.		$B = P.$ $M = \frac{Px^2}{2l}$ $M_{\max} = \frac{Pl}{2}$	$P = 2 \frac{kbW}{l}$ $W = \frac{Pl}{2kb}$
8.		$A = B = \frac{P}{2}$ $M = \frac{Px}{2} \left( 1 - \frac{x}{l} \right)$ $M_{\max} = \frac{Pl}{8}$	$P = 8 \frac{kbW}{l}$ $W = \frac{Pl}{8kb}$
9.	 <p>Vrgl. auch Fall 25, S. 576.</p>	$A = \frac{3}{8} P; \quad B = \frac{5}{8} P.$ $M = \frac{Px}{2} \left( \frac{3}{4} - \frac{x}{l} \right)$ $M_{\max} = \frac{Pl}{8}$ <p>(absolutes Maximum).  <math display="block">M_C = \frac{9}{128} Pl</math>                     (relatives Maximum).                      bei <math>x = \frac{3}{8} l</math>.</p>	$P = 8 \frac{kbW}{l}$ <p>(Tragkraft nicht größer als im Falle 8.)</p> $W = \frac{Pl}{8kb}$

Gleichung der elastischen Linie	Durchbiegung $f$	Bemerkungen
$y = \frac{P}{EJ} \frac{l^3}{16} \left( \frac{x^2}{l^2} - \frac{4}{3} \frac{x^3}{l^3} \right).$	$f = \frac{P}{EJ} \frac{l^3}{192}$ $= \frac{1}{12} \frac{k_b}{E} \frac{l^3}{h}$	Eingespannter Träger. Gefährliche Querschnitte bei A, B und C. Wendepunkte bei $x = 1/4 l$ und $x = 3/4 l$ .
$y = f_1 - [\rho - \sqrt{\rho^2 - (1/2 l - x)^2}],$ worin $\rho = \frac{EJ}{Pc} =$ unveränderlich. Die elastische Linie zwischen A und B ist ein Kreisbogen mit dem Halbmesser $\rho$ .	$f_1$ in der Mitte der Stützweite: $f_1 = \frac{P}{EJ} \frac{l^3 c}{8 l}$ $= \frac{1}{4} \frac{k_b}{E} \frac{l^2}{h} = \frac{l^2}{8 \rho}$ $f_2 = \frac{P}{EJ} \frac{c^3}{3} \left( c + \frac{3l}{2} \right).$	Frei aufliegender*) Träger mit Kragstücken. Gefährlicher Querschnitt an einer beliebigen Stelle zwischen A und B.
$y = \frac{P}{EJ} \frac{l^3}{6} \left( \frac{x}{l} - \frac{1}{4} \frac{x^4}{l^4} \right).$	$f = \frac{P}{EJ} \frac{l^3}{8}$ $= \frac{1}{2} \frac{k_b}{E} \frac{l^2}{h}$	Freitragender. Gefährlicher Querschnitt bei B.
$y = \frac{P}{EJ} \frac{l^3}{24} \left( \frac{x}{l} - 2 \frac{x^3}{l^3} + \frac{x^4}{l^4} \right).$ $\text{tg } \tau(x=0) = \frac{P}{EJ} \frac{l^2}{24} = 3,2 \frac{f}{l}.$	$f = \frac{P}{EJ} \frac{5 l^3}{384}$ $= \frac{5}{24} \frac{k_b}{E} \frac{l^2}{h}$	Frei aufliegender Träger. Gefährlicher Querschnitt in der Mitte.
$y = \frac{P}{EJ} \frac{l^3}{48} \left( \frac{x}{l} - 3 \frac{x^3}{l^3} + 2 \frac{x^4}{l^4} \right).$	$f_{\max} = \frac{P}{EJ} \frac{l^3}{185},$ worin $\frac{1}{185} = \frac{78 + 110 \sqrt{33}}{2 \cdot 16^4}$ $f_C = \frac{175}{85} \frac{P}{EJ} l^3$ $= \frac{P}{EJ} \frac{l^3}{187}.$	Halb eingespannter Träger. Gefährlicher Querschnitt bei B. Durchbiegung $f_{\max}$ bei $x' = 1/16 l (1 + \sqrt{33}) = 0,4215 l$ . Wendepunkt bei $x = 3/4 l$ . $M_C$ bei $x = 3/8 l$ .

\*) Fehlt das Kragstück bei A, so findet sich  $f_{\max}$  im Abstände  $0,578 l$  von A, u. zw. ist  $f_{\max} = 0,064 \frac{P}{EJ} l^3 c$ , die Durchbiegung im Lastpunkte  $f_2 = \frac{P}{EJ} \frac{c^2}{3} (c + l)$ .

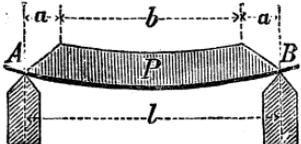
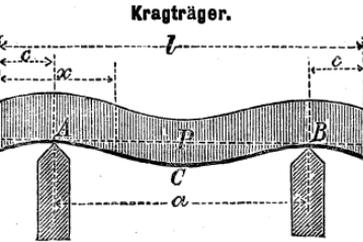
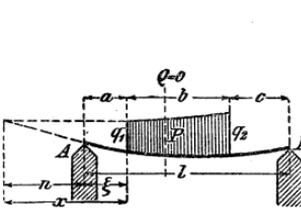
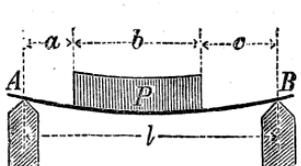
Nr.	Belastungsfall	Auflagerdrücke $A, B$ Biegemoment $M$	Tragkraft $P$ Erforderl. Widerstandsmoment $W$
10.	 <p>Vrgl. auch Fall 26, S. 577.</p>	$A = B = \frac{P}{2}.$ $M = \frac{Pl}{2} \left( \frac{1}{6} - \frac{x}{l} + \frac{x^2}{l^2} \right).$ $M_{\max} = \frac{1}{12} Pl$ (absolutes Maximum). $M_C = \frac{1}{24} Pl$ (relatives Maximum).	$P = 12 \frac{k_b W}{l}.$ $W = \frac{Pl}{12 k_b}.$
11.		$B = P.$ $M = \frac{P}{3} \frac{x^3}{l^2}.$ $M_{\max} = \frac{Pl}{3}.$	$P = 3 \frac{k_b W}{l}.$ $W = \frac{Pl}{3 k_b}.$
12.		$A = \frac{1}{3} P; \quad B = \frac{2}{3} P.$ $M = \frac{P}{3} x \left( 1 - \frac{x^2}{l^2} \right).$ $M_{\max} = \frac{2}{9\sqrt{3}} Pl$ $= 0,128 Pl.$	$P = \frac{9\sqrt{3}}{2} \frac{k_b W}{l}$ $= 7,794 \frac{k_b W}{l}.$ $W = \frac{Pl}{7,794 k_b}.$
13.		$A = B = \frac{P}{2}.$ $M = Px \left( \frac{1}{2} - \frac{x}{l} + \frac{2x^2}{3l^2} \right).$ $M_{\max} = \frac{Pl}{12}.$	$P = 12 \frac{k_b W}{l}.$ $W = \frac{Pl}{12 k_b}.$
14.		$A = B = \frac{P}{2}.$ $M = Px \left( \frac{1}{2} - \frac{2}{3} \frac{x^2}{l^2} \right).$ $M_{\max} = \frac{Pl}{6}.$	$P = 6 \frac{k_b W}{l}.$ $W = \frac{Pl}{6 k_b}.$

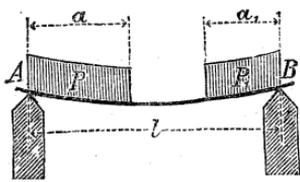
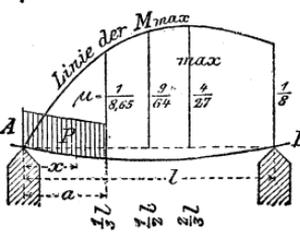
\*) Ist die Lastbegrenzung im Falle 14 statt eines Dreieckes eine Parabel, deren Scheitel über Trägermitte liegt, so ist

$$P = 6,4 \frac{k_b W}{l} \quad \text{und} \quad W = \frac{5}{32} \frac{Pl}{k_b}.$$

Gleichung der elastischen Linie	Durchbiegung $f$	Bemerkungen
$y = \frac{P}{EJ} \frac{l^3}{24} \left( \frac{x^2}{l^2} - 2 \frac{x^3}{l^3} + \frac{x^4}{l^4} \right).$ <p>Erklärung der Abbildung für Nr. 10.                      Parabel I: Momentenlinie für freie Auflagerung in A und B. (Fall 8, S. 566).                      Parabel II: dsgl. für feste Einspannung in A und B. (Fall 10, S. 568).                      Parabel III: dsgl. für die dem kleinsten <math>M_{\max}</math> entsprechende Art der Einspannung in A und B; hierfür ist <math>M_A = M_B = M_C = \frac{1}{16} Pl</math>.</p>	$f = \frac{P}{EJ} \frac{l^3}{384}$ $= \frac{1}{16} \frac{k_b}{E} \frac{l^2}{h}.$	Eingespannter Träger.  Gefährlicher Querschnitt bei A und B.  Wendepunkte für $x = \frac{1}{2} l (1 \pm \sqrt{1/3})$ , also bei $x_1 = 0,7887 l$ und $x_2 = 0,2113 l$ .
$y = \frac{P}{EJ} \frac{l^3}{12} \left( \frac{x}{l} - \frac{1}{5} \frac{x^5}{l^5} \right).$	$f = \frac{P}{EJ} \frac{l^3}{15}$ $= \frac{2}{5} \frac{k_b}{E} \frac{l^2}{h}.$	Freitragender.  Gefährlicher Querschnitt bei B.
$y = \frac{P}{EJ} \frac{l^3}{180} \left( 7 \frac{x}{l} - 10 \frac{x^3}{l^3} + 3 \frac{x^5}{l^5} \right).$	Größte Durchbiegung für $x = l \sqrt{1 - \sqrt{8/15}} = 0,5193 l$ . $f = \frac{Pl^3}{EJ} \frac{2 + 5 \sqrt{8/15}}{225} \cdot \sqrt{1 - \sqrt{8/15}} = 0,01304 \frac{Pl^3}{EJ}.$	Frei aufliegender Träger.  Gefährlicher Querschnitt für $x = \frac{l}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3} l \sqrt{3} = 0,5774 l$ .
$y = \frac{P}{EJ} \frac{l^3}{12} \left( \frac{3}{8} \frac{x}{l} - \frac{x^3}{l^3} + \frac{x^4}{l^4} - \frac{2}{5} \frac{x^5}{l^5} \right).$	$f = \frac{P}{EJ} \frac{3l^3}{320}$ $= \frac{9}{40} \frac{k_b}{E} \frac{l^2}{h}.$	Frei aufliegender Träger.  Gefährlicher Querschnitt in der Mitte.
$y = \frac{P}{EJ} \frac{l^3}{12} \left( \frac{5}{8} \frac{x}{l} - \frac{x^3}{l^3} + \frac{2}{5} \frac{x^5}{l^5} \right).$	$f = \frac{P}{EJ} \frac{l^3}{60}$ $= \frac{1}{5} \frac{k_b}{E} \frac{l^2}{h}.$	Frei aufliegender Träger.  Gefährlicher Querschnitt in der Mitte.

\*) Da die Werte von  $M_{\max}$  und  $f$  für den Fall 12 mit den entsprechenden Werten für den Fall 8 (s. S. 566 u. 567) fast genau übereinstimmen, so können bei Ermittlung von  $M_{\max}$  und  $f$  derartige „Dreiecklasten“ und „Trapezlasten“ (parallele Seiten des Lastfeldes winkelrecht zur Trägerrichtung) für gewöhnliche Fälle als gleichmäßig verteilte Lasten angesehen werden. Die Auflagerdrücke hingegen weichen bis um  $1/6$  der Gesamtlast von den nach Fall 8 ermittelten Werten ab.

Nr.	Belastungsfall	Auflagerdrücke A, B	Größtes Biegemoment $M_{\max} = Wkb$
15.		$A = B = \frac{P}{2}$ <p>Für <math>b = 0</math> s. Fall 14 (S. 568).</p>	$Wkb = \frac{8a^2 + 3b(4a + b)}{24(a + b)} P$
16.	<p style="text-align: center;"><b>Kragträger.</b></p>  <p style="text-align: center;">Gefährliche Querschnitte in A, B und C.</p> <p style="text-align: center;">Wendepunkte für</p> $x = \frac{l}{2} \pm \sqrt{\frac{P}{4} - cl}$ <p style="text-align: center;"><math>M_A = M_B</math> mit entgegengesetztem Vorzeichen wie <math>M_C</math>.</p>	$A = B = \frac{P}{2}$	<p>Für <math>A, B</math>:</p> $M_x = \frac{Px}{2} \left(1 - \frac{c}{x} - \frac{x}{l}\right)$ <p>für <math>x \geq c</math>:</p> $M_x = -\frac{Px^2}{2l}$ <p>Die absoluten Größtwerte <math>M_A = M_B = \frac{Pc}{2l}</math> und (für die Trägermitte) <math>M_C = \frac{P}{2} \left(\frac{l}{4} - c\right)</math> sind gleich für <math>c = (\sqrt{1/2} - 1/2)l = 0,207l</math>, u. zw <math>M_A = M_C = M_{\max} = 0,021447 Pl \sim 1/47 Pl</math> dies ist (für die verschiedenen Werte von c das relativ kleinste <math>M_{\max}</math>, so daß alsdann</p> $W = \frac{Pl}{47k_b} \quad \text{und} \quad P = 47 \frac{k_b W}{l}$ <p>d. h., die Tragkraft ist fast 6-mal so groß als im Falle 8 (S. 566), wenn <math>a = 0,586l</math>.</p>
17. *)	  <p style="text-align: center;"><math>P = \frac{q_1 + q_2}{2} b</math>; <math>n = \frac{q_1 b}{q_2 - q_1}</math></p>	$A = \frac{P}{l} \cdot \left(c + \frac{b}{3} \frac{q_2 + 2q_1}{q_2 + q_1}\right);$ $B = P - A.$ <p><math>M_{\max}</math> für <math>Q = 0</math>.</p> <p>Dabei ist:</p> $A = \frac{q_1 \lambda \xi}{2n} = q_1 \frac{x^2 - n^2}{2n}$ <p>Für <math>q_1 = q_2</math> ist:</p> $A = \frac{P(2c + b)}{2l};$ $B = \frac{P(2a + b)}{2l}$ <p>Ist außerdem <math>a = c</math>, so ist:</p> $A = B = \frac{P}{2}$	$Wkb = \frac{1}{3} A \cdot \left(3a + 2\xi - \frac{\xi n}{\lambda}\right)$ <p>worin:</p> $\lambda = x + n,$ $\xi = x - n;$ $x = \sqrt{n^2 + \frac{2nA}{q_1}}$ <p>Für <math>q_1 = q_2</math> ist:</p> $Wkb = A \left(a + \frac{bA}{2P}\right)$ <p>Ist außerdem <math>a = c</math>, so ist:</p> $Wkb = \frac{P}{2} \left(\frac{l}{2} - \frac{b}{4}\right)$

Nr.	Belastungsfall	Auflagerdrücke $A, B$	Größtes Biegemoment $M_{\max} = Wkb$
18. )		$A = \frac{P(2l - a) + P_1 a_1}{2l};$ $B = \frac{P_1(2l - a_1) + Pa}{2l}.$ <p>Ist <math>P = P_1, a = a_1</math> und <math>l - 2a = b</math>, so ist  <math>A = B = P</math> und  <math>Wkb = \frac{1}{2} Pa = \frac{1}{4} P(l - b).</math></p>	<p>Für <math>A &lt; P</math>:  <math>Wkb = \frac{A^2 a}{2P};</math></p> <p>für <math>B &lt; P_1</math>:  <math>Wkb = \frac{B^2 a_1}{2P_1}.</math></p>
19. )		$A = \frac{P(2l - a)}{2l};$ $B = \frac{Pa}{2l}.$ <p><math>M_{\max}</math> für  <math>x = a \left(1 - \frac{a}{2l}\right)</math>  <math>&lt; a.</math></p>	$M_{\max} = Wkb$ $= \frac{P}{2} a \left(1 - \frac{a}{2l}\right)^2$ $= \mu Pl,$ <p>worin</p> $\mu = \frac{1}{2} \frac{a}{l} \left(1 - \frac{a}{2l}\right)^2.$ <p><math>\mu_{\max} = \frac{4}{27}</math> für  <math>a = \frac{2}{3} l;</math>  dann ist <math>x = \frac{4}{9} l.</math></p>

20. Krangleisträger. (Abb. 23.)

2 gleiche Lasten  $P$  im unveränderlichen Abstände  $a$ ;  $x$  veränderlich, u. zw. zwischen 0 und  $\frac{1}{2} l$ .

Die Formeln gelten nur, falls beide Lasten  $P$  auf der Länge  $l$  stehen.

Abb. 23.

$$A = P \left(1 - \frac{2x}{l} + \frac{a}{l}\right);$$

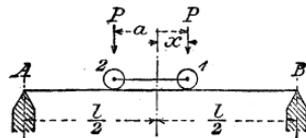
$$B = P \left(1 + \frac{2x}{l} - \frac{a}{l}\right).$$

$$M_1 = \frac{Pl}{2} \left(1 - \frac{a}{l} + \frac{2xa}{l^2} - \frac{4x^2}{l^2}\right);$$

$$M_2 = \frac{Pl}{2} \left(1 - \frac{a}{l} - \frac{2a^2}{l^2} + \frac{2x^3 a}{l^2} - \frac{4x^2}{l^2}\right).$$

$M_1$  max für  $x = \frac{1}{4} a.$       ( $M_2$  max für  $x = \frac{3}{4} a.$ )

$$M_{\max} = \frac{Pl}{2} \left(1 - \frac{a}{2l}\right)^2 = \frac{P}{2l} \left(l - \frac{a}{2}\right)^2.$$



\*) Ausführliche Tafeln der im Hochbau oft vorkommenden Belastungsfälle 17, 18, 19 und ähnlicher s. R. Labes, Tafeln zur Bestimmung der Querschnitte gewalzter eiserner Träger usw. Berlin 1893. Wilhelm Ernst & Sohn. — Den allgemeinen Fall 17 s. Z. d. B. 1909 S. 560.

Für  $x=0$  (oder  $x=a$ ) ist

$$M_1 \text{ (oder } M_2) = \frac{Pl}{2} \left(1 - \frac{a}{l}\right); \quad M_2 \text{ (oder } M_1) = \frac{Pl}{2} \left(1 - \frac{a}{l} - \frac{2a^2}{l^2}\right).$$

Für  $x = \frac{a}{2}$  ist  $M_1 = M_2 = \frac{Pl}{2} \left(1 - \frac{a}{l}\right).$

$a:l$	$A_{max}$	$M_1_{max}$	$M_2$ für $x=1/4 a$	Bemerkung
0	2,0 <i>P</i>	0,50000 <i>Pl</i>	0,50000 <i>Pl</i>	Ist
0,1	1,9 „	0,45125 „	0,44025 „	$a:l > 2 - \sqrt{2} = 0,586,$ so ist der absolute Größtwerth von $M_1$ stets $= \frac{1}{4} Pl,$ wobei die Last 1 in Trägermitte steht.
0,2	1,8 „	0,40500 „	0,38500 „	
0,3	1,7 „	0,36125 „	0,31625 „	
0,4	1,6 „	0,32000 „	0,24000 „	
0,5	1,5 „	0,28125 „	0,15625 „	
0,586	1,414 „	0,25000 „	0,07850 „	
0,667	1,333 „	(0,22222 „)	0	

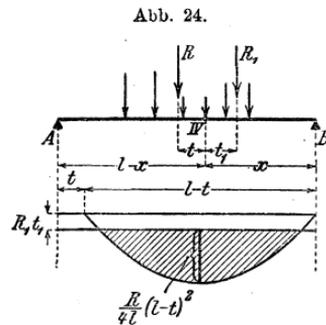
Zeichnerische Bestimmung der Momente für den allgemeinen Belastungsfall.\*) Das Moment unter der beliebigen Last IV der fahrenden Lastengruppe in Abb. 24 ist

$$M_x = \frac{R}{l} \{ (l-t) - x \} x - R_1 t_1,$$

darin ist  $R$  die Resultierende aller Kräfte der Lastengruppe,  $R_1$  diejenige der rechts von IV liegenden Kräfte.

Das erste Glied der Gleichung ergibt eine Parabel, deren Länge  $= (l-t)$  und deren Bogenhöhe  $= \frac{R}{4l} \{ l-t \}^2$ .

Das zweite Glied stellt eine Gerade, parallel zur Abszissenachse, dar.



Die schraffierte Fläche in Abb. 24 gibt den Verlauf der Maximalmomente unter der Last IV der fahrenden Lastengruppe an und ist so lange gültig, als letztere in ihrer Gesamtheit sich zwischen den beiden Auflagern  $A$  und  $B$  bewegt. Was für die Momente unter dem Kraftangriff von IV gilt, gilt auch für die Momente unter jeder der übrigen Lasten, woraus zu schließen ist, dass die Maximalmomente des ganzen Trägers sich zusammensetzen aus einzelnen Parabelbögen, deren Abmessungen leicht durch die allgemeine Gleichung für  $M_x$  bestimmt werden können.

Sonderfälle:

1. Der Träger werde befahren von zwei gleichen Lasten  $P$ ,  $P$  im Abstände  $a$ : Konstruktion zweier Parabeln, deren Länge  $\left(l - \frac{a}{2}\right)$

\*) Nach W. L. Andree, Die Statik des Kranbaues, 1908 S. 1 u. f.

und deren Bogenhöhe  $\frac{P}{2l} \left\{ l - \frac{a}{2} \right\}^2$  (Abb. 25), der tiefste Punkt der Kurve liegt um  $\frac{1}{4}a$  aus der Mitte. Ist  $a$  größer als  $\frac{1}{2}l$ , so erzeugt die Last  $P$  allein in der Herzspitze noch den Scheitelbogen einer Parabel von der Höhe  $\frac{Pl}{4}$  und der Länge  $l$ . Ein gewisser Grenzfall tritt ein bei  $b = 0,586 l$ , wo die Ordinate  $\frac{P}{2l} \left\{ l - \frac{a}{2} \right\}^2$  im Abstände  $\frac{1}{4}a$  aus der Mitte sich auf  $\frac{Pl}{4}$  vermindert.

Abb. 25.

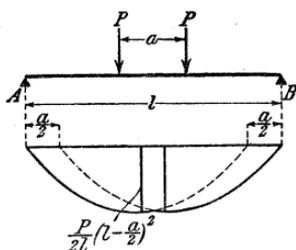
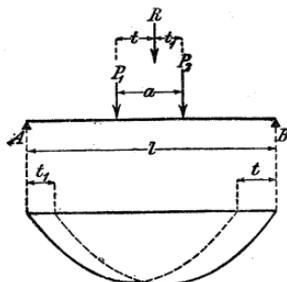


Abb. 25 a.



2. Der Träger werde befahren von zwei ungleichen Lasten  $P_1$  und  $P_2$ . Konstruktion zweier Parabeln, deren eine, vom linken Auflager ausgehend, die Länge  $(l - t)$  und die Bogenhöhe  $\frac{R}{4l} \left\{ l - t \right\}^2$  hat, während die andere, vom rechten Auflager ausgehend, die Länge  $(l - t_1)$  und die Bogenhöhe  $\frac{R}{4l} \left\{ l - t_1 \right\}^2$  besitzt (Abb. 25a).

Hierin ist  $R = P_1 + P_2$ , und die Werte  $t$  und  $t_1$  betragen

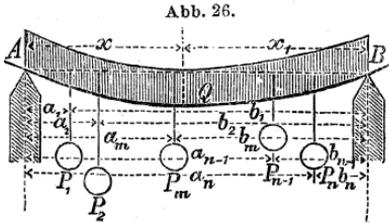
$$t = \frac{P_2 a}{R} \quad \text{und} \quad t_1 = \frac{P_1 a}{R}.$$

**Mehrfache Belastung.** Ist ein Träger durch mehrere der auf S. 564 bis 571 aufgeführten Belastungen gleichzeitig beansprucht, so addieren sich die Biegemomente sowie die Ordinaten der elastischen Linien der einzelnen Belastungsfälle; aus den Summen sind die Werte von  $M_{\max} = Wkb$  und  $f_{\max}$  nebst den zugehörigen Werten von  $x$  zu ermitteln. In Nr. 21 bis 26 sind einige häufiger vorkommende Fälle mehrfacher Belastung behandelt.

21. Fall 3 mehrfach, außerdem Fall 8. (Abb. 26.) Die Auflagerdrücke sind

$$A = \sum \left( \frac{Pb}{l} \right) + \frac{Q}{2}, \quad B = \sum \left( \frac{Pa}{l} \right) + \frac{Q}{2}.$$

Ist  $\sum_1^{m-1} P + \frac{Q}{l} a_{m-1} < A$  und gleichzeitig  $\sum_1^{m-1} P + \frac{Q}{l} a_m > A$ ,



so liegt der gefährliche Querschnitt zwischen  $P_{m-1}$  und  $P_m$ ; sein Abstand vom Auflager A ist bestimmt durch die Formel

$$x = \left( A - \sum_1^{m-1} P \right) : \frac{Q}{l};$$

es wird

$$M_{\max} = Wkb = \sum_1^{m-1} P a + \frac{Q}{2l} x^2.$$

Ist  $\sum_1^{m-1} P + \frac{Q}{l} a_m < A < \sum_1^m P + \frac{Q}{l} a_m$ , so liegt der gefährliche

Querschnitt in  $P_m$ , d. h., es ist  $x = a_m$ , und es wird

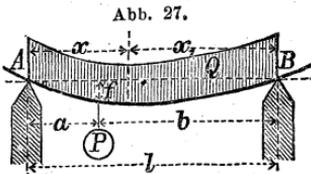
$$M_{\max} = Wkb = \sum_1^{m-1} P a + P'_m a_m + \frac{Q}{l} a_m^2,$$

worin 
$$P'_m = A - \left[ \sum_1^{m-1} P + \frac{Q}{l} a_m \right].$$

Ist (in Abb. 26)  $Q=0$ , so fällt der gefährliche Querschnitt in den Angriffspunkt der Einzellast  $P_m$ , wenn

$$\sum_1^{m-1} P < \sum \left( \frac{Pb}{l} \right) < \sum_1^m P; \text{ es wird } M_{\max} = Wkb = \sum_1^{m-1} P a + P'_m a_m,$$

worin 
$$P'_m = \sum \left( \frac{Pb}{l} \right) - \sum_1^{m-1} P.$$



22. Fall 3 und 8 zugleich (Abb. 27).  
Es sei  $a < b$ .

$$A = P \frac{b}{l} + \frac{Q}{2},$$

$$B = P \frac{a}{l} + \frac{Q}{2}.$$

Bezeichnet  $x_1$  den Abstand des gefährlichen Querschnittes vom Auflager B, so ist, wenn

$$\alpha) \quad \frac{P}{Q} < \frac{b-a}{2a};$$

$$x_1 = \frac{Bl}{Q} = \frac{P}{Q} a + \frac{l}{2},$$

$$M_{\max} = Wkb = B \frac{x_1}{2} = \frac{B^2 l}{2Q}.$$

$$\beta) \quad \frac{P}{Q} > \frac{b-a}{2a};$$

$$x_1 = b,$$

$$M_{\max} = Wkb = \left( P + \frac{Q}{2} \right) \frac{ab}{l}.$$

Durchbiegung im Angriffspunkte von  $P$ :

$$f = \left( P + \frac{l^2 + ab}{8ab} Q \right) \frac{a^2 b^2}{3 E J l}$$

Im Sonderfälle  $a = b = 1/2 l$  [Fall 2 und 8 zugleich] wird

$$A = B = 1/2 (P + Q), \quad M_{\max} = W k b = 1/8 (2P + Q) l$$

$$x_1 = 1/2 l \text{ und } f_{\max} = \frac{(P + 1/8 Q) l^3}{E J 48}$$

23. Fall 8 nebst Streckenlast (Abb. 28).

$$A = \frac{P}{2} + P_1 \left( 1 - \frac{a}{2l} \right),$$

$$B = \frac{P}{2} + P_1 \frac{a}{2l} = P + P_1 - A.$$

Wenn  $\frac{P}{P_1} < \frac{a}{l - 2a}$ , so ist der Abstand des gefährlichen Querschnittes vom Auflager  $A$

$$x = \frac{A}{\frac{P}{l} + \frac{P_1}{a}} \text{ und } M_{\max} = W k b = A \frac{x}{2} = \frac{A^2 a l}{2(Pa + P_1 l)}$$

Wenn  $\frac{P}{P_1} = \frac{a}{l - 2a}$ , so liegt der gefährliche Querschnitt in  $C$  (also  $x = a$ ), und es ist  $M_{\max} = W k b = 1/2 A a = 1/2 B b$ .

Wenn  $\frac{P}{P_1} > \frac{a}{l - 2a}$ , so ist der Abstand des gefährlichen Querschnittes vom Auflager  $B$

$$x_1 = \frac{B l}{P} = \frac{l}{2} + \frac{P_1}{P} \frac{a}{2} \text{ und } M_{\max} = W k b = B \frac{x_1}{2} = \frac{B^2 l}{2P}$$

Im Sonderfälle  $a = b = 1/2 l$  und  $P_1 = 1/2 P$  wird

$$A = 1/8 P \text{ und } B = 5/8 P, \text{ ferner } x = 1/16 l \text{ und } M_{\max} = W k b = A \frac{x}{2} = \frac{49}{256} P l$$

24. Frei aufliegender Träger, durch  $n$  gleiche Einzellasten  $P$  belastet, die in  $n - 1$  gleichen Abständen  $c$  angreifen (Abb. 29).

$$A = \frac{nP}{l} \left( b + \frac{n-1}{2} c \right),$$

$$B = \frac{nP}{l} \left( a + \frac{n-1}{2} c \right).$$

Der gefährliche Querschnitt liegt im Angriffspunkte der  $m$ ten Last, wenn

$$P > (mP - A) > 0,$$

so daß  $M_{\max} = W k b = A a + (m - 1) (A - 1/2 m P) c$ .

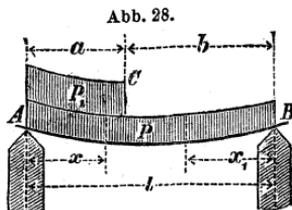
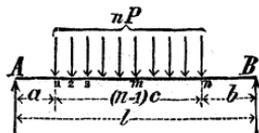


Abb. 28.

Abb. 29.



Für den **Sonderfall**  $a = b$  wird  $A = B = \frac{1}{2}nP$ . Teilen hierbei die Angriffspunkte der  $n$  Kräfte  $P$  die Freilänge  $l$  in  $n_1 = n + 1$  gleiche Teile von der Länge  $(l : n_1) = a = b$ , so ist,

wenn  $n_1$  eine gerade Zahl:  $M_{\max} = Wk_b = \frac{n_1}{8} Pl$ ,

wenn  $n_1$  eine ungerade Zahl:  $M_{\max} = Wk_b = \frac{n_1^2 - 1}{8n_1} Pl$ .

- Es wird für  $n_1 = 3$  (Belastung in den Drittpunkten) . . .  $Wk_b = \frac{1}{3} Pl$ ,  
 „  $n_1 = 4$  ( „ „ „ Viertelpunkten) . . .  $Wk_b = \frac{1}{2} Pl$ ,  
 „  $n_1 = 5$  ( „ „ „ Fünftelpunkten) . . .  $Wk_b = \frac{3}{5} Pl$ ,  
 „  $n_1 = 6$  ( „ „ „ Sechstelpunkten) . . .  $Wk_b = \frac{3}{4} Pl$ ,  
 „  $n_1 = 7$  ( „ „ „ Siebentelpunkten) . . .  $Wk_b = \frac{6}{7} Pl$ .

**25. Fall 9 und verallgemeinerter Fall 4 zugleich** (Abb. 30).

$$A = P \frac{b^2(3a + 2b)}{2l^3} + \frac{3}{8} Q, \quad B = P \frac{(2a^2 + 6ab + 3b^2)a}{2l^3} + \frac{5}{8} Q;$$

Stützenmoment  $M_B = P \frac{ab(2a + b)}{2l^2} + Q \frac{l}{8}$ ,

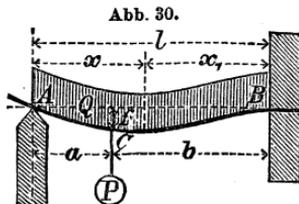
Moment in C  $M_C = P \frac{ab^2(3a + 2b)}{2l^3} + Q \frac{(3b - a)a}{8l}$ .

$M_{\max}$  ergibt sich für  $x = \frac{Al}{Q}$ , falls dieser Wert  $< a$ , und zwar ist dann

$$M_{a \max} = \frac{A^2}{2Q} l.$$

Die Bedingung für  $x < a$  ist

$$\frac{P}{Q} < \frac{l^2}{4b^2} \frac{5a - 3b}{3a + 2b}.$$



Andererseits ergibt sich  $M_{\max}$  für  $x = \frac{A - P}{Q} l$ , falls dieser Wert  $> a$  (oder  $x_1 < b$ ), u. zw. ist dann

$$M_{b \max} = \frac{B^2}{2Q} l - M_B = Pa + \frac{(A - P)^2}{2Q} l.$$

Die Bedingung für  $x > a$  ( $x_1 < b$ ) ist

$$\frac{P}{Q} < \frac{l^2(3b - 5a)}{4a(2a^2 + 6ab + 3b^2)}.$$

Zur Querschnittberechnung dient das absolut grösste der drei Momente  $M_B$ ,  $M_C$  und  $M_{a \max}$  (oder  $M_{b \max}$ ).

Durchbiegung im Angriffspunkte der Einzellast P:

$$f = \frac{P}{EJ} \frac{a^2 b^3 (4a + 3b)}{12 l^3} + \frac{Q}{EJ} \frac{ab^2 (3a + b)}{48 l}.$$

26. Fall 10 und verallgemeinerter Fall 5 zugleich (Abb. 31).

$$a < b.$$

$$A = P \frac{(3a + b)b^2}{l^3} + \frac{Q}{2};$$

$$B = P \frac{(a + 3b)a^2}{l^3} + \frac{Q}{2};$$

$$M_{\max} = M_A = Wkb = P \frac{ab^2}{l^2} + \frac{Ql}{12}.$$

Gefährlicher Querschnitt in A.

Durchbiegung

im Angriffspunkte von P:  $f = \frac{1}{EJ} \left( P \frac{a^3 b^3}{3l^3} + Q \frac{a^2 b^2}{24l} \right).$

Für den Sonderfall  $Q = 0$  ist die größte Durchbiegung  $f_{\max} = \frac{P}{EJ} \frac{2a^2 b^3}{3(a + 3b)^2}$   
 im Abstände  $\xi_1$  von B, u. zw. ist  $\xi_1 = \frac{2b}{a + 3b} l$ , wogegen die Durchbiegung im  
 Angriffspunkte von P nur beträgt  $f = \frac{P}{EJ} \frac{a^3 b^3}{3l^3}.$

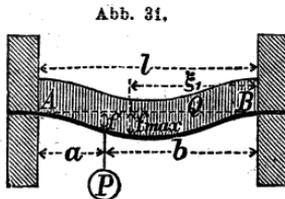


Abb. 31.

f. Querschnitt-Ermittlung für Walzträger mit Rücksicht auf Durchbiegung.

Die Durchbiegung  $f$  eines Trägers soll zur möglichststen Beschränkung der dynamischen Wirkungen und zur Sicherung eines guten Auflagers auch unter der größten Last meist einen bestimmten Bruchteil der Freilänge  $l$  nicht überschreiten; im Hochbau nimmt man erfahrungsgemäß  $f \geq \frac{1}{600}$  bis  $\frac{1}{400}$ , i. M.  $\frac{1}{500} l$ ,\*) im Brückenbau gewöhnlich  $f \geq \frac{1}{1000} l$ .

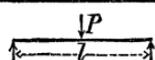
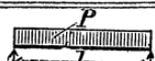
Bei Flusseisen-Trägern mit  $E = 2150000$  kg/qcm, von beliebigem, aber überall gleichem Querschnitt ist in den am häufigsten vorkommenden Belastungsfällen 2 (S. 564) und 8 (S. 566) stets  $f \geq \frac{1}{500} l$  bzw.  $\frac{1}{1000} l$ , sofern der für die zulässige Spannung  $k_b$  berechnete Trägerquerschnitt eine Höhe  $h$  besitzt, deren Verhältnis zur Freilänge  $l$  größer ist als der Wert  $\zeta$  in nachstehender Tafel.

Liefert die allgemeine Formel  $M = Wkb$  einen Träger von geringerer Höhe als  $\zeta l$ , so ist mit Rücksicht auf die Durchbiegung  $f$  der Trägerquerschnitt aus der aus Spalte 6 der Tafel S. 564, 565 u. f. sich ergebenden Formel

$$J = cPl^3$$

zu berechnen, worin  $J$  das Trägheitsmoment des Querschnitts in  $\text{cm}^4$ ,  $P$  die Last in  $\text{t}$ ,  $l$  die Freilänge in  $\text{m}$  bezeichnet und der Zahlenwert  $c$  (entsprechend  $f$  und  $k_b$ ) der folgenden Tafel zu entnehmen ist.

\*) Die Berliner Baupolizei beschränkt neuerdings den Nachweis dieser Durchbiegung auf solche Träger von über 7 m Länge, die das Gebäude in der Längs- und Querrichtung aussteifen und an Stelle der sonst vorhandenen Längs- und Querwände treten.

Größte Durchbiegung		$f = 1/500 l$			$f = 1/1000 l$			
		750	1000	1200	750	1000	1200	
Zulässige Spannung $k_b$		750	1000	1200	750	1000	1200	
Fall 2, S. 564.		$1 : \zeta = l : h =$	34,4	25,8	21,5	17,2	12,9	10,8
		$c =$	48,4			96,9		
Fall 8, S. 566.		$1 : \zeta = l : h =$	27,5	20,6	17,2	13,8	10,3	8,6
		$c =$	30,3*)			60,6		

Ist z. B. für einen über die Freilänge  $l = 7,5$  m gleichmäßig belasteten Flusseisen-Hochbauträger die für  $k_b = 1200$  sich ergebende Querschnittshöhe kleiner als  $1/172 \cdot 7,5 = 43,6$  cm, so ist der Querschnitt besser aus der Formel  $J = 30,3 P l^2$  zu berechnen. (Vergl. ferner die Beispiele 2 und 3 auf S. 579 u. f.)

Für andere Belastungsfälle als Fall 8 und 2 berechne man  $J$  nach Fall 8 und multipliziere den erhaltenen Wert mit einem Koeffizienten  $\varrho$ , der beträgt

für Fall 1	$\varrho = \frac{128}{5}$	für Fall 10	$\varrho = \frac{1}{5}$
„ „ 2	$\varrho = \frac{8}{5}$	„ „ 7	$\varrho = \frac{48}{5}$
„ „ 9	$\varrho = \frac{384}{925}$		

### g. Beispiele.

Bemerkung: In den nachstehenden Beispielen sind für die Träger gewalzte deutsche Normal-I-Profile und Flusseisen mit  $k_b = 1200$  kg/qcm vorausgesetzt.

Beispiel 1. Ein Freitragler von 1,50 m Freilänge ist nach Abb. 32 belastet mit  $900 + 450 + 800 + 150 = 2300$  kg. Das Träger-Eigengewicht werde vernachlässigt.

In C ist erforderlich:

$$W = \frac{800 \cdot 50 + (0,5 : 1,5) \cdot 900 \cdot 25}{1200} = 40 \text{ cm}^3,$$

$$\text{in B: } W = \frac{800 \cdot 150 + 150 \cdot 30 + 900 \cdot \frac{1}{2} \cdot 150 + 450 \cdot \frac{1}{8} \cdot 100}{1200} = \frac{207000}{1200} = 173 \text{ cm}^3.$$

Für AC wird gewählt I Nr. 11 mit  $W = 43,3$  cm<sup>3</sup>. — Für BC kann je nach Umständen gewählt werden:

2 I Nr. 15 mit  $W = 2 \cdot 98 = 196$  cm<sup>3</sup>, oder 1 I Nr. 20 mit  $W = 214$  cm<sup>3</sup>, oder 3 I Nr. 13 mit  $W = 3 \cdot 67 = 201$  cm<sup>3</sup>, oder (nach Abb. 33) 2 I Nr. 14 und 1 I Nr. 11 mit

Abb. 32.

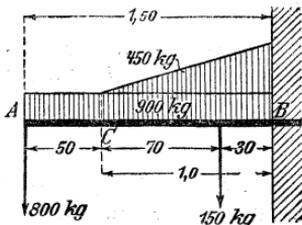
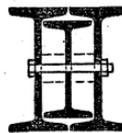
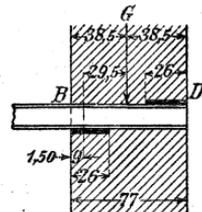


Abb. 33.



2 I Nr. 14  
+ 1 I Nr. 11.

Abb. 34.



$W = 2 \cdot 81,7 + 11/14 \cdot 43,3 = 197$  cm<sup>3</sup>. [Da das schwächere I Nr. 11 sich hierbei nur ebensoviele durchbiegen kann wie die beiden stärkeren I Nr. 14, mithin das schwächere

\*) Eine Tabelle der Werte  $J = 30,3 P l^2$  für  $P = 1$  t und  $l = 100$  bis 1500 cm findet sich in F. Boerner, Stat. Tabellen usw., 3. Aufl. 1910 S. 60.

I-Eisen nicht voll beansprucht wird, so ist sein  $W = 48,3 \text{ cm}^3$  im Verhältnis der Profilhöhen vermindert eingeführt.]

Die Gesamtlast 2300 kg greift im Abstände  $\frac{207000}{2300} = 90 \text{ cm}$  vor der Kante  $B$  an.

Da eine Bewegung des Trägers ausgeschlossen sein soll, so muß 1) das Drehbestreben des Trägers durch das Moment einer genügenden Gegenlast (durch das sogen. Stabilitätsmoment, vgl. S. 179) aufgehoben werden und 2) ein für die Last und Gegenlast genügendes Träger-Auflager vorhanden sein. Nimmt man die Drehachse auf  $\frac{1}{3}$  der Plattenbreite ( $26:3 = \text{rd. } 9 \text{ cm}$ ) von der Kippkante  $B$  an\*), so ist das Lastmoment (Kippmoment)

$$M = 207000 + 9 \cdot 2300 = 227700 \text{ cmkg.}$$

Wirkt die Gegenlast am Hebelarme  $38,5 - 9 = 29,5 \text{ cm}$ , so ist der Nachweis einer Gegenlast  $G > 227700 : 29,5 = 7720 \text{ kg}$  erforderlich.

Die 26 cm breite und 39 cm lange Unterlagplatte bei  $B$  (Abb. 34) beansprucht das sie unterstützende Hartbrandsteinmauerwerk in Kalkzementmörtel im Mittel mit

$$k = \frac{2300 + 7720}{26 \cdot 39} = 10 \text{ kg/qcm,}$$

was nach Tafel 3., S. 526, zulässig ist. Deckplatte bei  $D$  26.29 cm (zur besseren Druckverteilung auf das Mauerwerk).

Richtiger ist es, die beiden Platten entsprechend den bei  $B$  und  $D$  auftretenden Kantenpressungen zu bemessen. Wählt man beide Platten 39 cm lang und ihre Breite so, daß sie mindestens zusammen die Wanddicke 77 cm ausmachen, so sind die Kantenpressungen

$$\text{bei } B \quad k_1 = \frac{7720}{77 \cdot 39} + \frac{2 \cdot 2300}{77 \cdot 39} \cdot \left(2 + \frac{3 \cdot 90}{77}\right) \\ = 2,57 + 8,43 = 11,00 \text{ kg/qcm,}$$

$$\text{bei } D \quad k_2 = -\frac{7720}{77 \cdot 39} + \frac{2 \cdot 2300}{77 \cdot 39} \left(1 + \frac{3 \cdot 90}{77}\right) \\ = -2,57 + 6,90 = 4,33 \text{ kg/qcm.}$$

Die kleinsten Plattenbreiten ergeben sich

$$\text{für Platte } B \text{ zu } \frac{11,0}{11,0 + 4,33} \cdot 77 = 55 \text{ cm,}$$

$$\text{„ „ } D \text{ „ } 77 - 55 = 22 \text{ cm.}$$

Da die Kantenpressung bei  $B$  nicht besonders hoch ist, so dürfte eine geringere Breite (40 bis 45 cm) der Platte  $B$  zulässig sein.

**Beispiel 2.** Gewalzte Träger einer massiven Decke von ungewöhnlicher Stützweite. Freilänge = 10,5 m; Teilung = 1,95 m. Deckeneigengewicht (einschl. Träger) = 400 kg/qm; Nutzlast = 250 kg/qm. Es liegt der Belastungsfall 8, S. 566, vor. Belastung

$$P = (10,5 \cdot 1,95) \text{ qm} \cdot 650 \text{ kg/qm} = 13325 \text{ kg.}$$

Erforderlich ohne Rücksicht auf die Durchbiegung

$$W = \frac{13325 \cdot 1050}{8 \cdot 1200} = 1399 \text{ cm}^3,$$

so daß I Nr. 40 mit  $W = 1459 \text{ cm}^3$  noch genügen würde. Soll aber die größte Durchbiegung kleiner sein als  $\frac{1}{500}$  der Freilänge, also  $f < 1050 : 500 = 2,1 \text{ cm}$ , so ist nach S. 578 I Nr. 40 zu schwach, denn die Höhe  $h = 40 \text{ cm}$  ist kleiner als  $\zeta l = 1050 : 17,2 = 61 \text{ cm}$ . Daher ist in diesem Falle erforderlich ein Trägheitsmoment

$$J = 30,3 \cdot 13,3 \cdot 10,5^2 = 44435 \text{ cm}^4;$$

gewählt I Nr. 45 mit  $J = 45888 \text{ cm}^4$ . Nach S. 567 wird für I Nr. 47 $\frac{1}{2}$

$$f = \frac{5}{384} \frac{13325 \cdot 1050^3}{2150000 \cdot 45888} = 2,0 \text{ cm;}$$

hiervon ist eine Durchbiegung  $\frac{400}{650} \cdot 2,0 = 1,2 \text{ cm}$  beständig vorhanden.

\*) Es empfiehlt sich, auch bei Berechnung des Trägerquerschnittes eine ähnliche Annahme zu machen, das Biegemoment also zu 227700 cmkg anzunehmen.

Unterlagplatten 26.26 cm genügen für  $\frac{1}{2} \cdot 13\,325 = 6660$  kg Auflagerdruck.

**Beispiel 3.** Die beiden Träger eines 1 m breiten **Laufsteges** (im Bühnenraume eines Theaters) liegen 12 m frei.

Größte zufällige Last in Brückenmitte: Eine Beleuchtungsvorrichtung mit 3 Mann zur Bedienung, zusammen höchstens 450 kg; hiervon kommen auf jeden der beiden Träger  $\frac{1}{2} \cdot 450 = 225$  kg.

Eigengewicht des Steges für 1 m:

1) Träger (geschätzt) $2.42 =$	84 kg
2) Bohlenbelag, 4 cm st., 1,0.1,0.0,04 = 0,04 cbm zu 650 kg/cbm =	26 „
3) Geländer, Befestigungsschrauben usw., rd.	8 „
	zusammen 118 kg

Auf jeden Träger entfällt an Eigengewicht  $12,0 \cdot \frac{118}{2} = \dots \dots \dots 708$  kg.

Erforderlich ohne Rücksicht auf die Durchbiegung [vgl. den Sonderfall 22 auf S. 575]

$$W = \frac{(\frac{1}{2} \cdot 708 + 225) \cdot 1200}{4 \cdot 1200} = 146 \text{ cm}^3,$$

so daß I Nr. 18 mit  $W = 161 \text{ cm}^3$  reichlich genügen würde. Soll aber die größte Durchbiegung kleiner sein als  $\frac{1}{500}$  der Freilänge, also  $f < 2,4$  cm, so ist nach S. 578 erforderlich:

$$J = (30,3 \cdot 0,708 + 48,4 \cdot 0,225) \cdot 12,0^2 = 4657 \text{ cm}^4;$$

es ist also zu wählen I Nr. 25 mit  $J = 4954 \text{ cm}^4$ .

Die Durchbiegung hierbei wird  $f = \frac{1200 \cdot 4657}{500 \cdot 4954} = \text{rd. } 2,3$  cm;

hiervon ist eine Durchbiegung  $\frac{\frac{5}{8} \cdot 708}{\frac{5}{8} \cdot 708 + 225} \cdot 2,3 = 1,5$  cm beständig vorhanden.

Für I Nr. 18 würde die größte Durchbiegung geworden sein

$$f = \frac{1200 \cdot 4657}{500 \cdot 1444} = 7,8 \text{ cm.}$$

**Beispiel 4.** Die **Holzbalken** der Decke eines Wohnzimmers liegen 7,0 m frei. Auf 1 m Belastungsbreite entfallen  $7,0 \cdot 1,0 \cdot 500 = 3500$  kg; hierfür ist erforderlich ( $k_b = 100 \text{ kg/qcm}$ )

$$W = \frac{3500 \cdot 700}{8 \cdot 100} = 3063 \text{ cm}^3.$$

Nach Tafel S. 563 hat ein Balken von 26.30 cm Querschnitt ein  $W = 3900 \text{ cm}^3$ , er würde also für eine Balkenteilung  $t = 3900 : 3063 = 1,3$  m genügen. (Ueber 1 m Teilung geht man indessen nicht.)

## h. Träger von gleichem Widerstande gegen Biegung.

Sind bei einem Träger die größten Werte der Biegungsspannung

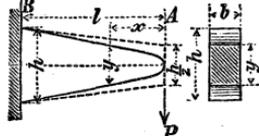
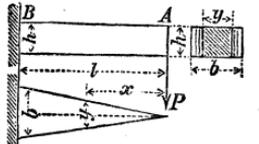
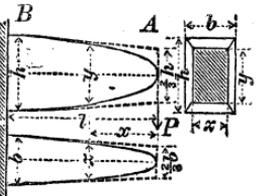
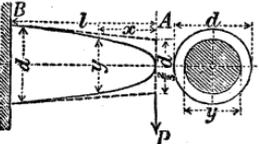
$$\sigma_{\max} (= k_b) = M : W$$

in jedem Querschnitte gleich, so nennt man den Träger von gleichem Widerstande gegen Biegung (vgl. S. 544). Für solche Träger sind im folgenden einige brauchbare Formen angegeben.

Die punktierten Linien des Längsschnittes geben dessen durch Tangenten **angenäherte Form** an.

In den Fällen 5, 9, 10 und 11 kann, ähnlich wie in 1, die  $x$ -Achse auch als Symmetrieachse des Längsschnittes angenommen werden.

Ein Träger, der nur durch ein auf die Länge  $l$  **unveränderliches Biegemoment** beansprucht wird (s. S. 566, Fall 6), muß bei gleichem Widerstande überall denselben Querschnitt haben.

Längs- und Querschnitt des Trägers	Querschnitte	Begrenzung des Längs-schnittes	Formeln zur Berechnung der Querschnitt-Abmessungen
<b>Die Last <math>P</math> greift am Ende des Trägers an.</b>			
<p>1 a).</p>  <p>1 b).</p> 	<p>Rechtecke von gleicher Breite <math>b</math> und veränderlicher Höhe <math>y</math>.</p>	<p>1 a). Obere Begrenzung: Gerade; untere Begrenzung: Gemeine Parabel.</p> <p>1 b). Gemeine Parabel. (Vgl. S.104.)</p>	$y^2 = \frac{6P}{bkb} x.$ $h = \sqrt{\frac{6Pl}{bkb}}.$ <p>Durchbiegung in <math>A</math>: <math display="block">f = \frac{8P}{bE} \left(\frac{l}{h}\right)^3.</math></p>
<p>2.</p>  <p>[Elastische Linie ein Kreisbogen.]</p>	<p>Rechtecke von gleicher Höhe <math>h</math> und veränderlicher Breite <math>y</math>.</p>	<p>Gerade Linie.</p>	$y = \frac{6P}{h^2 kb} x.$ $b = \frac{6Pl}{h^2 kb}.$ <p>Durchbiegung in <math>A</math>: <math display="block">f = \frac{6P}{bE} \left(\frac{l}{h}\right)^3.</math></p>
<p>3.</p> 	<p>Aehnliche Rechtecke von der Höhe <math>y</math> und der Breite <math>z</math>; Verhältnis der Seiten: <math>z : y = \alpha</math>.</p>	<p>Kubische Parabel*)</p>	$y^3 = \frac{6P}{\alpha kb} x.$ $z = \alpha y.$ $h = \sqrt[3]{\frac{6Pl}{\alpha kb}}.$ $b = \alpha h.$
<p>4.</p> 	<p>Kreise vom Durchmesser <math>y</math>.</p>	<p>Kubische Parabel*)</p>	$y^3 = \frac{32P}{\pi kb} x.$ $d = \sqrt[3]{\frac{32Pl}{\pi kb}}$

\*) Konstruktion der kubischen Parabel (Abb. 35, S. 582) und der semikubischen Parabel (Abb. 36 S. 582). Gegeben der Scheitel  $A$ , die Achse  $AX$  und ein Punkt  $P$  der Parabel:

Längs- und Querschnitt des Trägers	Querschnitte	Begrenzung des Längs-schnittes	Formeln zur Berechnung der Querschnitt-Abmessungen
------------------------------------	--------------	--------------------------------	----------------------------------------------------

**Last  $Q$  gleichmäßig über den Träger verteilt.**

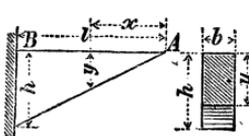
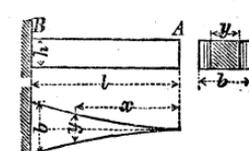
	<p>Rechtecke von gleicher Breite <math>b</math> und veränderlicher Höhe <math>y</math>.</p>	<p>Gerade Linie.</p>	$y = x \sqrt{\frac{3Q}{blkb}}$ $h = \sqrt{\frac{3Ql}{bkb}}$
<p>6.</p>  <p>[Elastische Linie ein Kreisbogen.]</p>	<p>Rechtecke von gleicher Höhe <math>h</math> und veränderlicher Breite <math>y</math>.</p>	<p>Gemeine Parabel. (Vrgl. S. 97.)</p>	$y = \frac{3Q}{lkb} \frac{x^2}{h^2}$ $b = \frac{3Ql}{kh^2}$ <p>Durchbiegung in <math>A</math>:</p> $f = \frac{3P}{bE} \left(\frac{l}{h}\right)^3$

Abb. 35. Kubische Parabel.

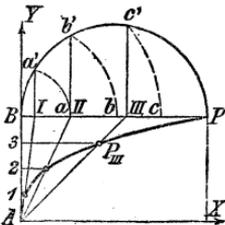


Abb. 36. Semikubische Parabel.

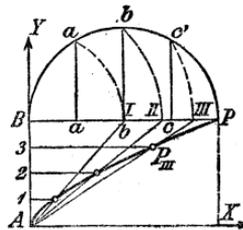
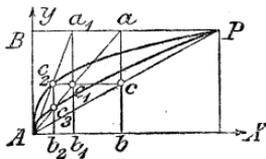


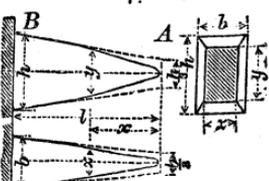
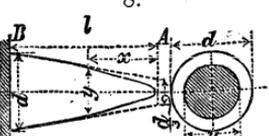
Abb. 37.



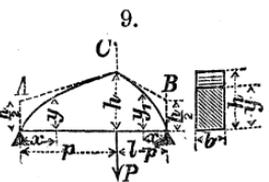
Konstruiere das Rechteck  $ABPX$ , teile  $AB$  (durch 1, 2, 3) und  $BP$  (durch  $a, b, c$ ) in gleich viele (hier vier) gleiche Teile und beschreibe über  $BP$  einen Halbkreis. Mache dann z. B. in Abb. 31 die Sehne  $Bc' = Bc$  und ziehe  $c'III$  winkelrecht zu  $BP$  (bzw. ziehe in Abb. 36  $cc'$  winkelrecht zu  $BP$  und  $BIII =$  Sehne  $Bc'$ );  $AIII$  schneidet die zu  $AX$  parallele Linie  $3P_{III}$  im Punkte  $P_{III}$  der Parabel.

Ist der Halbkreis für die Zeichnung unbequem, so verwende man Abb. 37 zur Konstruktion. Wähle  $c$  beliebig auf  $AP$ ,  $ac_1, ac_2, ac_3$  winkeligrecht zu  $AX$ ,  $cc_1c_2$  parallel zu  $XA$ ,  $c_1$  und  $c_3$  auf  $Aa$ ,  $c_2$  auf  $Aa_1$ . Alsdann ist

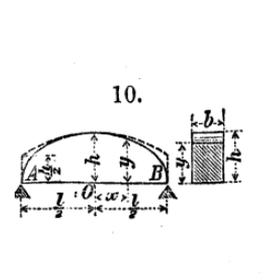
- $c_1$  ein Punkt der gemeinen Parabel,
- $c_2$  ein Punkt der kubischen Parabel,
- $c_3$  ein Punkt der semikubischen Parabel.

Längs- und Querschnitt des Trägers	Querschnitte	Begrenzung des Längs-schnittes	Formeln zur Berechnung der Querschnitt-Abmessungen
<p>7.</p> 	<p>Aehnliche Rechtecke von der Höhe <math>y</math> und der Breite <math>z</math>; Verhältnis der Seiten <math>z : y = \alpha</math>.</p>	<p>Semi-kubische Parabel. (Vrgl. die Fußnote S. 582.)</p>	$y^3 = \frac{3 Q x^2}{\alpha k b l}$ $z = \alpha y.$ $h = \sqrt[3]{\frac{3 Q l}{\alpha k b}}$ $b = \alpha h.$
<p>8.</p> 	<p>Kreise vom Durchmesser <math>y</math>.</p>	<p>Semi-kubische Parabel. (Vrgl. die Fußnote S. 582.)</p>	$y^3 = \frac{16 Q}{\pi l k b} x^2.$ $d = \sqrt[3]{\frac{16 Q l}{\pi k b}}$

Die Last  $P$  wirkt in  $C$ .

<p>9.</p> 	<p>Rechtecke von gleicher Breite <math>b</math> und veränderlicher Höhe <math>y</math>.</p>	<p>Obere Begrenzung: Zwei gemeine Parabeln. (Vrgl. S. 104.)</p>	$y^2 = \frac{6 P (l-p)}{b l k b} x.$ $y_1^2 = \frac{6 P p}{b l k b} x_1.$ $h = \sqrt{\frac{6 P (l-p) p}{b l k b}}$
---------------------------------------------------------------------------------------------	---------------------------------------------------------------------------------------------	-----------------------------------------------------------------	--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Last  $Q$  gleichmäßig über den Träger verteilt.

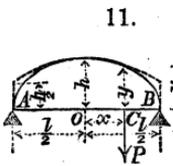
<p>10.</p> 	<p>Rechtecke von gleicher Breite <math>b</math> und veränderlicher Höhe <math>y</math>.</p>	<p>Obere Begrenzung: Ellipse. (Vrgl. S. 99.)</p>	$\left(\frac{l}{2}\right)^2 + \frac{y^2}{\frac{3 Q l}{4 b k b}} = 1.$ $h = \sqrt{\frac{3 Q l}{4 b k b}}$ <p>Durchbiegung in <math>Q</math>:</p> $f = \frac{1 Q l^3}{64 E J}$ $= \frac{3 Q}{16 b E} \left(\frac{l}{h}\right)^{3*}$
-----------------------------------------------------------------------------------------------	---------------------------------------------------------------------------------------------	--------------------------------------------------	-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

\*) Bei ausgeführten Blechträgern von nahezu gleichem Widerstande gegen Biegung ist nach R. Land

$$= \frac{1 Q l^3}{70 E J} = \frac{6 Q}{35 b E} \left(\frac{l}{h}\right)^3$$

Längs- und Querschnitt des Trägers	Querschnitte	Begrenzung des Längs-schnittes	Formeln zur Berechnung der Querschnitt-Abmessungen
------------------------------------	--------------	--------------------------------	----------------------------------------------------

**Lage des Angriffspunktes C der Last P veränderlich.**



11.

(Wandernde Einzellast.)  
Rechtecke von gleicher Breite  $b$  und veränderlicher Höhe  $y$ .

Obere Begrenzung: Ellipse. (Vrgl. S. 92.)

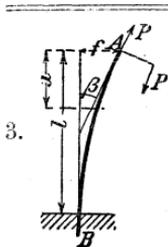
$$\frac{x^2}{\left(\frac{l}{2}\right)^2} + \frac{y^2}{\frac{3Pl}{2bkb}} = 1.$$

$$h = \sqrt{\frac{3Pl}{2bkb}}$$

**i. Träger von kleinstem Biegungswinkel am Ende und von kleinster Durchbiegung.\*)**

Belastungsfall	Bedingung			
1.	$f_{\min}$	$y = h \left(\frac{x}{l}\right)^{1/2}$ $h' = \frac{1}{2} h$	$y = b \frac{x}{l}$ $b' = 0$	$y = d \left(\frac{x}{l}\right)^{1/3}$ $d' = \frac{2}{3} d$
	$\beta_{\min}$	$y = h \left(\frac{x}{l}\right)^{1/4}$ $h' = \frac{3}{4} h$	$y = b \left(\frac{x}{l}\right)^{1/2}$ $b' = \frac{1}{2} b$	$y = d \left(\frac{x}{l}\right)^{1/6}$ $d' = \frac{5}{6} d$
2.	$f_{\min}$	$y = h \left(\frac{x}{l}\right)^{3/4}$ $h' = \frac{1}{4} h$	$y = b \left(\frac{x}{l}\right)^{3/2}$ $(b' = -\frac{1}{2} b)$	$y = d \left(\frac{x}{l}\right)^{1/2}$ $d' = \frac{1}{2} d_0$
	$\beta_{\min}$	$y = h \left(\frac{x}{l}\right)^{1/2}$ $h' = \frac{1}{2} h$	$y = b \frac{x}{l}$ $b' = 0$	$y = d \left(\frac{x}{l}\right)^{1/2}$ $d' = \frac{2}{3} d$

\*) Nach G. Kull, Dingl. Journ. 1906 S. 481.



$f_{\min}$	$y = h \left( \frac{x}{l} \right)^{1/4}$ $h' = \frac{3}{4} h$	$y = b \left( \frac{x}{l} \right)^{1/2}$ $b' = \frac{1}{2} b$	$y = d \left( \frac{x}{l} \right)^{1/6}$ $d' = \frac{5}{6} d$
$\beta_{\min}$	$\frac{y}{h} = \frac{h}{h}$ $h' = h$	$\frac{y}{b} = \frac{b}{b}$ $b' = b$	$\frac{y}{d} = \frac{d}{d}$ $d' = d$

Diese Werte gelten auch für den Träger von gleichem Widerstande gegen Biegung (vgl. S. 580).

### k. Träger auf mehreren Stützen. (Durchlaufende Träger.)

#### 1. Biegemomente über den Stützpunkten.

Bedeutet (Abb. 38)

$M_0, M_1, M_2$  die Momente über den drei beliebigen, aufeinander folgenden Stützen 0, 1, 2,

$y_0, y_1, y_2$  die Höhen der Stützpunkte 0, 1, 2 unter einer beliebigen Wagerechten, so ist

$$1) 6 EJ \left( \frac{y_1 - y_0}{l_0} + \frac{y_1 - y_2}{l_1} \right) = M_0 l_0 + 2 M_1 (l_0 + l_1) + M_2 l_1$$

$$+ \frac{\Sigma P_0 a_0 (l_0^2 - a_0^2)}{l_0} + \frac{\Sigma P_1 a_1 (l_1^2 - a_1^2)}{l_1} + \frac{1}{4} (q_0 l_0^3 + q_1 l_1^3).$$

(Dreimomentengleichung.)

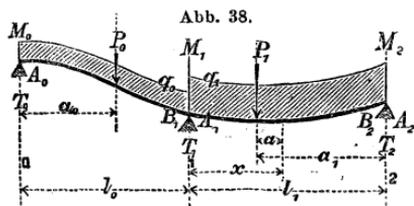
Für einen Träger, der nur durch Lasten beansprucht wird, die auf den einzelnen Strecken gleichmäßig verteilt sind, erhält man die **Clapeyronsche Gleichung**

$$2) 6 EJ \left( \frac{y_1 - y_0}{l_0} + \frac{y_1 - y_2}{l_1} \right) = M_0 l_0 + 2 M_1 (l_0 + l_1) + M_2 l_1$$

$$+ \frac{1}{4} (q_0 l_0^3 + q_1 l_1^3).$$

Liegen sämtliche Stützen gleich hoch, so geht die Gleichung 2) über in

$$3) \dots M_0 l_0 + 2 M_1 (l_0 + l_1) + M_2 l_1 = - \frac{1}{4} (q_0 l_0^3 + q_1 l_1^3).$$



Sind  $n$  Felder, also  $n + 1$  Stützen vorhanden, so lassen sich  $n - 1$  Gleichungen von der Form 1), 2) oder 3) aufstellen; es können dann aus diesen und den beiden Gleichungen, die die Befestigungen der Enden des Trägers kennzeichnen (z. B.  $M_0 = M_n = 0$  usw.), die  $n + 1$  Momente über den  $n + 1$  Stützen berechnet werden.

## 2. Stützendrücke.

1. Es seien

$A_0, A_1 \dots A_{n-1}$  die von den jeweilig rechts gelegenen Feldern herrührenden Anteile der Gesamt-Stützendrücke,

$B_1, B_2 \dots B_n$  die von den jeweilig links gelegenen Feldern herrührenden Anteile der Gesamt-Stützendrücke,

$T_0, T_1 \dots T_n$  die Gesamt-Stützendrücke, so dafs also

$$T_0 = A_0, \quad T_1 = A_1 + B_1, \quad \dots, \quad T_n = B_n \text{ ist.}$$

Das **Moment** an irgend einer Stelle in der Entfernung  $x$  von der Stütze I ist

$$M = M_1 - \frac{q_1 x^2}{2} - \sum_0^x P_1 a + A_1 x; \text{ hieraus ergibt sich für } x = l_1$$

$$A_1 = \frac{M_2 - M_1}{l_1} + \frac{q_1 l_1}{2} + \frac{\sum P_1 a_1}{l_1}.$$

Entsprechend erhält man

$$B_1 = \frac{M_0 - M_1}{l_0} + \frac{q_0 l_0}{2} + \frac{\sum P_0 a_0}{l_0};$$

mithin **Gesamt-Stützdruck** der Stütze I:

$$T_1 = \frac{q_0 l_0 + q_1 l_1}{2} - M_1 \left( \frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_0} \right) + \frac{M_2}{l_1} + \frac{M_0}{l_0} + \frac{\sum P_1 a_1}{l_1} + \frac{\sum P_0 a_0}{l_0}.$$

### Beispiel.

Träger frei aufliegend auf drei Stützen in gleichen Abständen  $l$ . Belastung des einen Feldes = 0, des anderen gleichmäßig durch  $q$  kg/cm. (Abb. 39.)

$$M_0 = M_2 = 0.$$

Nach Gleichung 3 ist daher

$$4 M_1 l = -1/4 q l^3,$$

woraus

$$M_1 = -1/16 q l^2 = -0,0625 q l^2.$$

$$T_0 = + \frac{M_1}{l} = -1/16 q l.$$

$$T_1 = \frac{q l}{2} - \frac{2 M_1}{l} = \frac{q l}{2} + 1/8 q l = 5/8 q l.$$

$$T_2 = \frac{q l}{2} + \frac{M_1}{l} = \frac{q l}{2} - 1/16 q l = 7/16 q l.$$

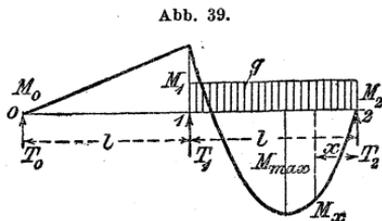


Abb. 39.

$$M_x = + T_2 x - \frac{q x^2}{2} = 7/16 q l x - 1/2 q x^2$$

$$M = 0 \text{ für } x = 0 \text{ und } x = 7/8 l.$$

$$M_{\max} \text{ für } 7/16 q l - q x = 0, \text{ also } x = 7/16 l.$$

$$M_{\max} = 1/2 (7/16)^2 q l^2 = 49/512 q l^2 = 0,0957 q l^2$$

Es ergibt sich daher die in Abb. 39 eingetragene Momentenlinie 01'2. Da  $M_{\max} > M_1$  (absol.), so ist  $M_{\max}$  für die Querschnittbestimmung maßgebend.

## Durchlaufende Träger

auf gleich hohen und gleich weit voneinander entfernten Stützen.  
Belastung gleichmäßig über den ganzen Träger verteilt.

Werte	Anzahl der Stützen							Einheiten
	3	4	5	6	7	8	9	
$T_0$	0,3750	0,4000	0,3929	0,3947	0,3942	0,3944	0,3943	$ql$
$T_1$	1,2500	1,1000	1,1428	1,1317	1,1346	1,1337	1,1340	"
$T_2$	.	.	0,9286	0,9736	0,9616	0,9649	0,9640	"
$T_3$	.	.	.	.	1,0192	1,0070	1,0103	"
$T_4$	.	.	.	.	.	.	0,9948	"
$M_1$	0,1250	0,1000	0,1071	0,1053	0,1058	0,1056	0,1057	$ql^2$
$M_2$	.	.	0,0714	0,0789	0,0769	0,0775	0,0773	"
$M_3$	.	.	.	.	0,0865	0,0845	0,0850	"
$M_4$	.	.	.	.	.	.	0,0825	"
$M_{1max}$	0,0703	0,0800	0,0772	0,0779	0,0777	0,0778	0,0777	"
$M_{2max}$	.	0,0250	0,0364	0,0332	0,0340	0,0338	0,0339	"
$M_{3max}$	.	.	.	0,0461	0,0433	0,0440	0,0438	"
$M_{4max}$	.	.	.	.	.	0,0405	0,0412	"
$x_1$	0,375	0,4000	0,3930	0,3947	0,3942	0,3944	0,3943	$l$
$x_2$	.	0,5000	0,5357	0,5264	0,5327	0,5281	0,5283	"
$x_3$	.	.	.	0,5000	0,4904	0,4930	0,4923	"
$x_4$	.	.	.	.	.	0,5000	0,5026	"
$\xi_1$	0,750	0,8000	0,7860	0,7894	0,7884	0,7887	0,7887	"
$\xi_2$ {	.	0,2760	0,2659	0,2680	0,2675	0,2680	0,2680	"
	.	0,7240	0,8055	0,7830	0,7899	0,7884	0,7890	"
$\xi_3$ {	.	.	.	0,1964	0,1960	0,1962	0,1960	"
	.	.	.	0,8036	0,7850	0,7897	0,7880	"
$\xi_4$ {	.	.	.	.	.	0,2153	0,2150	"
	.	.	.	.	.	0,7847	0,7900	"

Hierbei bezeichnen

$T_0, T_1 \dots$  die Gegendrücke der Stützen,

$M_1, M_2 \dots$  die (negativen) Momente über den Stützen,

$M_{1max}, M_{2max} \dots$  die größten Momente in den einzelnen Feldern,

$x_1, x_2 \dots$  die Entfernungen der Momente  $M_{1max} \dots$  von den nächsten links liegenden Stützen,

$\xi_1, \xi_2 \dots$  die Entfernungen der Wendepunkte der elastischen Linien von diesen Stützen,

$l$  die Länge jedes Feldes,

$q$  die Belastung f. d. Längeneinheit jedes Feldes.

Da alles in bezug auf die Mitte des Trägers symmetrisch ist, sind die Angaben nur bis zur Mitte durchgeführt.

Die Werte der  $T, M, M_{max}, x$  und  $\xi$  nähern sich mit wachsender Stützzahl den entsprechenden Werten von Fall 10 S. 568 für die Mittelfelder; für die Endfelder stimmen sie bei 3 Stützen mit Fall 9 S. 566 überein.

2. Legt man bei einem Träger von der Länge  $2l$  cm, der mit  $q$  kg/cm gleichmäßig belastet ist und durch drei (gleich hohe und gleich weit [d. h. um je  $l$  cm] voneinander entfernte) Stützen getragen wird, die **Mittelstütze tiefer** als die beiden Außenstützen, u. zw. um das Maß (in cm)

$$f = 0,0131 \frac{q l^4}{E J},$$

so wird dadurch seine Tragfähigkeit auf das 1,457-fache erhöht.

In diesem Fall erreicht die Tragfähigkeit ihren Größtwert, da das Moment über der Mittelstütze gleich ist dem größten Moment in den einzelnen Feldern:

$$M_1 = M_{1 \max} = 0,0858 q l^2 \quad T_0 = 0,4142 q l \quad T_1 = 1,1716 q l.$$

Ueber die Berechnung durchlaufender Träger mit **veränderlicher Belastung**, insbesondere auch über das zeichnerische Berechnungsverfahren, vgl. III. Bd., Abschn. Statik der Baukonstruktionen.

## E. Drehungsfestigkeit.

Der zu betrachtende Querschnitt des prismatischen Stabes wird durch ein Kräftepaar beansprucht, dessen Ebene winkelrecht zur Stabachse steht. — Es bezeichne

$M_d$  das Moment des drehenden Kräftepaares in cmkg,

$G = 1 : \beta = \frac{5}{13} E = 0,385 E$  das Gleitmaß in kg/qcm (s. S. 506),

$\tau_{\max}$  die größte im Querschnitt auftretende Schubspannung in kg/qcm,

$k_d$  die zulässige Drehungsspannung des Stoffes in kg/qcm,

$l$  die Länge des auf Verdrehung beanspruchten Stabes in cm,

$V$  seinen Rauminhalt in ccm,

$\vartheta$  den verhältnismäßigen Verdrehungswinkel zweier um 1 cm voneinander abstehenden Stabquerschnitte unter der Einwirkung von

$M_d$ , gemessen in cm als Bogen vom Halbmesser 1 cm.

Der Mittelpunkt (Nullpunkt) der Verdrehungsbogen, d. h. der Querschnittspunkt, der eine Verschiebung durch das Moment  $M_d$  nicht erfährt, in dem also die Schubspannung  $= 0$  wird, ist der Schwerpunkt des Querschnittes.

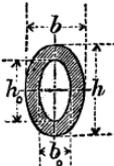
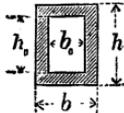
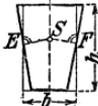
### a. Zulässiges Drehmoment.

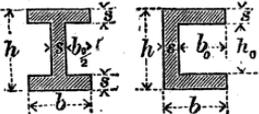
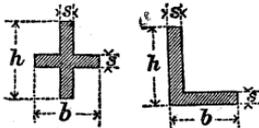
Für eine zulässige Drehungsspannung  $k_d$  des Stoffes darf das Drehmoment  $M_d$  für die wichtigsten Querschnitte die nachstehenden Werte nicht überschreiten.\*) Die Formeln 5—11 sind nur annähernd genau.\*\*)

Werte von  $k_d$  (in kg/qcm) s. S. 523.

\*) Abweichende Ergebnisse einer Untersuchung von Autenrieth über Querschnitte mit Mittelpunkt, s. Z. d. V. d. I. 1901 S. 1099.

\*\*) Genauere Untersuchungen, insbesondere über die Spannungsverteilung auf die Querschnitte auf Grund von Versuchen mit Lamellen aus Seifenlösung, s. H. Anthes, Dingl. Journ. 1907 S. 342.

Nr.	Querschnitt	Zulässiges Drehmoment	Bemerkungen
1		$M_d = \frac{\pi}{16} d^3 k_d$	$\tau_{\max}$ in den Punkten des Umfanges Im Abstände $\rho$ von der Achse ist $\tau = \frac{2\rho}{d} \tau_{\max}$
2		$M_d = \frac{\pi}{16} \frac{D^4 - d^4}{D} k_d$ $M_d \sim 1,6 \frac{d^3}{m} \delta k_d$	$\tau_{\max}$ in den Punkten des äußeren Umfanges $d_m = \frac{1}{2}(D + d)$ $\delta = \frac{1}{2}(D - d)$
3		$M_d = \frac{\pi}{16} b^2 h k_d$ ( $h > b$ )	$\tau_{\max}$ in den Endpunkten der kleinen Achse $b$ In den Endpunkten der großen Achse $h$ ist $\tau = \frac{16}{\pi} \frac{M_d}{b h^2}$
4		$M_d = \frac{\pi}{16} \frac{b^3 h - b_0^3 h_0}{b} k_d$ ( $h_0 : h = b_0 : b ; h > b$ )	$\tau_{\max}$ in den Endpunkten der kleinen Achse $b$ In den Endpunkten der großen Achse $h$ ist $\tau = \frac{16}{\pi} \frac{M_d h}{b h^3 - b_0 h_0^3}$
5		$M_d = \frac{2}{9} b^2 h k_d$ ( $h > b$ )	$\tau_{\max}$ in den Mitten der Seiten $h$ In den Mitten der Seiten $b$ ist $\tau = \frac{9}{2} \frac{M_d}{b h^2}$ In den Querschnittecken $\tau = 0$
6		$M_d = \frac{2}{9} h^3 k_d$	$\tau_{\max}$ in den Mitten der Seiten In den Querschnittecken $\tau = 0$
7		$M_d = \frac{2}{9} \frac{b^3 h - b_0^3 h_0}{b} k_d$ ( $h_0 : h = b_0 : b$ )	$\tau_{\max}$ in den Mitten der Seiten $h$ In den Querschnittecken $\tau = 0$
8		$M_d = \frac{b^3}{20} k_d$ ( $\tau_{\max}$ wie bei 7.)	<p>Die Drehungsfestigkeit des dreieckigen und trapezförmigen Querschnittes läßt sich auf den Rechteckquerschnitt von derselben Höhe zurückführen. Die in die Gleichung unter 5 einzuführende Breite <math>b</math> erhält man dabei, indem man von dem Schwerpunkt <math>S</math> des Trapezes oder Dreiecks Winkelrechte <math>SE, SF</math> auf die Seiten fällt und durch die Fußpunkte <math>EF</math> Parallelen zur Achse zieht. Diese sind die Seiten des Ersatzrechteckes.</p> 
9		$M_d = \frac{b^3}{1,09} k_d$ ( $\tau_{\max}$ wie bei 7.)	

Nr.	Querschnitt	Zulässiges Drehmoment	Bemerkungen
10		$M_d = \frac{2}{9} s^2 (h + 2b_0) kd$	Für den I-Querschnitt ist vorausgesetzt $s \geq 0,2 h$ und $b_0$ nicht erheblich größer als $s$ .
11		$M_d = \frac{2}{9} s^2 (h + b - s) kd$	Für den T-Querschnitt ist vorausgesetzt $s \geq 0,2 h$ .

Der Faktor von  $kd$  in den vorstehenden Gleichungen für  $M_d$  heißt das **Widerstandsmoment gegen Drehung** und wird mit  $W_d$  bezeichnet. Für kreisförmige und kreisähnliche Querschnitte ist (ähnlich, wie für Biegezugfestigkeit, vgl. S. 543):

$$W_d = \frac{J_p}{e},$$

worin  $J_p = J_x + J_y$  das polare Trägheitsmoment des Querschnittes (vgl. S. 233 u. f.) und  $e$  den Abstand des am weitesten von der Längs-Schwerachse (Nullachse) des Stabes entfernten Querschnittpunktes bezeichnet.

Für eckige Querschnittformen trifft dieser Satz nicht zu.

### b. Verdrehungswinkel.

Der verhältnismäßige Verdrehungswinkel, d. h. der zum Halbmesser 1 cm gehörige Verdrehungsbogen zweier 1 cm voneinander abstehenden Querschnitte, ist

$$\vartheta = \zeta \frac{J_x + J_y}{4 J_x J_y} \frac{M_d}{G} = \zeta \frac{J_p}{4 J_x J_y} \frac{M_d}{G}.$$

Der Wert  $\zeta$  hierin ist nach F. Grashof:

- $\zeta = 1$  für kreisförmige und kreisringförmige Querschnitte,
- $\zeta = 1,2$  für quadratische und elliptische Querschnitte,
- $\zeta = 1,2$  bis  $1,5$  für mehr längliche, rechteckige Querschnitte.

Der Verdrehungswinkel  $\psi$  für die ganze Stablänge  $l$  (Verdrehung der Endquerschnitte gegeneinander) beträgt

$$\psi = l\vartheta.$$

Nach Versuchen von C. Bach hat  $\vartheta$  für die wichtigsten Querschnitte die nachstehenden Werte. Diese Werte entsprechen (abweichend von Grashof) für elliptische Querschnitte  $\zeta = 1$  und für alle rechteckigen Querschnitte  $\zeta = 1,2$ .

Nr.	Querschnitt	Verhältnismäßiger Verdrehungswinkel $\vartheta$ , wenn bekannt ist		Arbeit $A$ der Drehung in cmkg
		Drehmoment $M_d$ in cmkg	Größte Schubspannung $\tau_{\max}$ in kg/qcm	
1		$\vartheta = \frac{M_d}{G J_p} = \frac{32}{\pi d^4} \frac{M_d}{G}$	$\vartheta = 2 \frac{\tau_{\max}}{G} \frac{1}{d}$	$\frac{1}{4} \frac{\tau_{\max}^2}{G} V$
2		$\vartheta = \frac{32}{\pi (D^4 - d^4)} \frac{M_d}{G}$	$\vartheta = 2 \frac{\tau_{\max}}{G} \frac{1}{D}$	$\frac{1}{4} \frac{\tau_{\max}^2}{G} \frac{D^2 + d^2}{D^2} V$
3		$\vartheta = \frac{16 b^2 + h^2}{\pi b^3 h^3} \frac{M_d}{G}$	$\vartheta = \frac{\tau_{\max}}{G} \frac{b^2 + h^2}{b h^2}$	$\frac{1}{8} \frac{\tau_{\max}^2}{G} \frac{b^2 + h^2}{h^2} V$
4		$\vartheta = 3,6 \frac{b^2 + h^2}{b^3 h^3} \frac{M_d}{G} *$	$\vartheta = 0,8 \frac{\tau_{\max}}{G} \frac{b^2 + h^2}{b h^2} *$	$\frac{4}{45} \frac{\tau_{\max}^2}{G} \frac{b^2 + h^2}{h^2} V$
5		$\vartheta = 7,2 \frac{1}{h^4} \frac{M_d}{G}$	$\vartheta = 1,6 \frac{\tau_{\max}}{G} \frac{1}{h}$	$\frac{8}{45} \frac{\tau_{\max}^2}{G} V$
6		$\vartheta = 46,2 \frac{1}{b^4} \frac{M_d}{G}$	$\vartheta = 2,31 \frac{\tau_{\max}}{G} \frac{1}{b}$	.
7		$\vartheta = 0,967 \frac{1}{b^4} \frac{M_d}{G}$	$\vartheta = 0,9 \frac{\tau_{\max}}{G} \frac{1}{b}$	.

Nach B. de Saint Venant\*\*) ist näherungsweise, und zwar auch für stark vom Rechteck und Kreise abweichende Querschnitte wie z. B. I-Profile:

$$\vartheta = 40 \frac{J_p}{F^3} \frac{M_d}{G},$$

worin  $F$  den Querschnitt in qcm bedeutet. (Der genaue Wert der Konstanten schwankt je nach der Querschnittform nur zwischen 38,5 und 42,68.)

\*) Statt des Koeffizienten 3,6 ist genauer für  $h : b = 1, 2, 4, 8$  zu setzen 3,56, 3,50, 3,35, 3,21; statt des Koeffizienten 0,8 entsprechend 0,79, 0,78, 0,74, 0,71.

\*\*) S. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences 1879.

## F. Zusammengesetzte Festigkeit.

Im folgenden bedeutet

- $l$  die Länge des Stabes in cm,
- $F$  den Querschnitt des Stabes in qcm,
- $S$  den Schwerpunkt des Stabquerschnittes,
- $J_I$  das größte äquatoriale Trägheitsmoment von  $F$  in  $\text{cm}^4$ ,
- $J_{II}$  das kleinste
- $P$  die den Stab auf Zug oder Druck beanspruchende Kraft (Achskraft) in kg,
- $Q$  die den Stab auf Abscheren beanspruchende Kraft (Querkraft) in kg,
- $M$  das Biegemoment in cmkg,
- $E$  das Elastizitätsmaß in kg/qcm (s. S. 503),
- $m$  ( $= \frac{10}{3}$ ) das Verhältnis der Längsdehnung zur Quersamziehung (vgl. S. 502).

### a. Beanspruchung durch Normalspannungen.

#### Zug (oder Druck) und Biegung.

#### I. Der Baustoff ist gegen Zug und gegen Druck widerstandsfähig.

Das Biegemoment  $M$  und die Achskraft  $P$  lassen sich auf eine Kraft  $\bar{P}$  zurückführen, die in einem Punkte  $A$  der Kraftlinie (im Abstände  $p = M : P$  vom Schwerpunkte) angreift, so daß  $M = Pp$ .

#### 1. Bestimmung der Nulllinie für den Angriffspunkt $A$ .

1) Nach Mohr, mit Benutzung der Haupt-Trägheitshalbmesser  $a$  und  $b$ : Auf den Hauptachsen des Querschnittes  $SI$  mit  $J_I$  und  $J_{II}$  mit  $J_{II}$  (Abb. 40) trage man die Strecken  $SC = b$  und  $SB = a$  ab, verbinde  $C$  mit dem Fußpunkte  $V$  des von  $A$  auf  $SII$ ,  $B$  mit dem

Abb. 40.

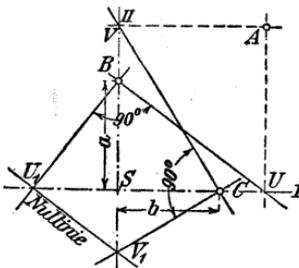
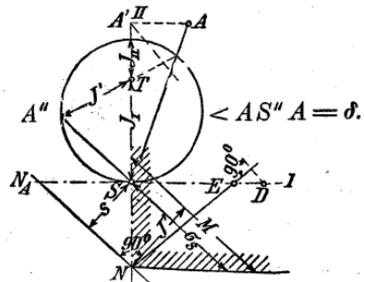


Abb. 41.

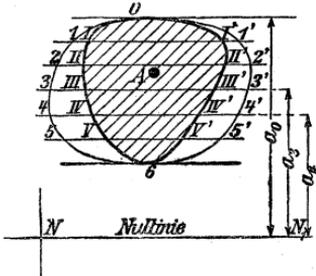


Fußpunkte  $U$  des von  $A$  auf  $SI$  gefällten Lotes, errichte in  $B$  eine Winkelrechte auf  $BU$ , in  $C$  eine Winkelrechte auf  $CV$ , so schneiden diese die Achsen  $SI$  und  $SII$  in zwei Punkten  $U_1$  und  $V_1$  der Nulllinie.

2) **Nach R. Land\***), mit Benutzung des Trägheitskreises, Abb. 41. Die Nulllinie ist parallel zu der durch den Schwerpunkt  $S$  gehenden, der Kraftlinie  $SA$  zugeordneten Achse  $SA''$  und hat von dieser den Abstand  $s = J' : Fp$ . Die Lage der Nulllinie wird zweckmäßig durch ihren Schnitt  $N$  mit einer Hauptachse bestimmt. Man zeichne den Trägheitskreis so, daß er eine durch  $S$  gehende Hauptachse berührt, z. B. die Achse  $SI$ , wobei der Trägheitshauptpunkt  $T$  auf der anderen Hauptachse  $SII$  liegt. Trage auf  $SI$  die festen Strecken  $SE = JI : n$  und  $SD = n : F$  ab, beide im Zeichnungsmaßstabe des Querschnittes, wobei  $n$  eine passend gewählte Größe dritter Ordnung (z. B.  $n = 100 \text{ cm}^3$ ). Ziehe  $AA'$  parallel  $SI$ ,  $EN$  winkelrecht zu  $DA'$ , dann ist die Nulllinie  $NN_A$  parallel  $SA''$ . — Dieses Verfahren ist besonders zweckmäßig bei der nachstehenden Spannungsermittlung unter 2.

3) Die Umkehrung der unter 1) und 2) gegebenen Verfahren liefert zu einer gegebenen Nulllinie den entsprechenden Angriffspunkt  $A$ .

Abb. 42.



Häufig genügt auch die Bestimmung mittels der sog. **wirksamen Fläche**. Diese Fläche erhält man, wenn die parallel zur Nulllinie genommenen Schnittlängen des Querschnittes auf diesen Parallelen im Verhältnis ihres Abstandes von der Nulllinie verkleinert aufgetragen und die Endpunkte verbunden werden; die am weitesten von der Nulllinie entfernte Schnittlänge bleibt dabei unverändert.

So ergibt sich für den Querschnitt 0 123 4 5 6 5' ... 0 in Abb. 42 die wirksame Fläche 0 III 6 III' 0 (gestrichelt), wenn man z. B.

III III' =  $\frac{\alpha_3}{\alpha_0} \cdot (3 \cdot 3)$ , IV IV' =  $\frac{\alpha_4}{\alpha_0} \cdot (4 \cdot 4)$  macht usw.

Der Schwerpunkt  $A$  der wirksamen Fläche (beispielsweise zeichnerisch zu ermitteln) ist dann der zur Nulllinie  $NN_1$  gehörige Angriffspunkt.

**2. Spannungsermittlung.** Die Spannung  $\sigma_s$  im Schwerpunkte ist unabhängig von der Lage des Angriffspunktes (also auch von der Größe des Momentes  $M = Pp$ ), es ist  $\sigma_s = P : F$ , mit dem Sinne von  $P$  (d. h. Druckspannung, wenn  $P$  eine Druckkraft), also  $\sigma_s$  gleich der mittleren Spannung des Querschnittes.

Die Spannungen ergeben sich zu

$$\sigma = \frac{M}{J'} y, \text{ worin, wie früher (s. S. 547) und nach Abb. 41,}$$

$J' = J : \sin^2 \delta = TA''$  und  $y$  den Abstand eines Querschnittpunktes von der vorher gezeichneten Nulllinie  $NN_A$  bedeutet. Die **zeichnerische Spannungsverteilung** kann daher ähnlich wie nach Abb. 20 (S. 547) geschehen, wobei der Nullpunkt der Spannungsfläche auf der neuen Nulllinie liegen muß. Die **Grenzspannung**  $\sigma_{\max}$  kann aus der zeichnerischen Spannungsverteilung abgegriffen werden, oder sie berechnet sich zu

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{J'} e, \text{ worin } e = y_{\max}.$$

\* Vrgl. R. Land: Die Ermittlung der Spannungsverteilung usw., Z. f. B. 1892 S. 552 u. f. (Sonderdruck zu beziehen durch Wilh. Ernst & Sohn, Berlin.)

Ohne Zeichnung der Nulllinie ergeben sich (mittels des Trägheitskreises) die Grenzspannungen  $\sigma_{\max}$  und  $\sigma_{\min}$  wie folgt:

Zeichne die der Kraftlinie  $SA$  zugeordnete Schwerachse  $SA''$ , Abb. 41 (oder  $SN$  in Abb. 20, S. 547), d. i. die Nulllinie bei Beanspruchung durch das Moment  $Pp$  allein, und nenne die beiderseits von  $SA''$  gemessenen größten Abstände eines Randpunktes von  $F$  nach der Seite von  $A$  ( $P$ ) hin  $e_1$  mit Vorzeichen von  $P$  (bei Zugkraft +, sonst -), nach der anderen Seite hin  $e_2$  mit anderem Vorzeichen, dann ist

$$\sigma_{\max} \left\{ \begin{array}{l} \sigma_s + \sigma_1 = \frac{P}{F} + \frac{M}{J'} e_1 \text{ und} \\ \sigma_s + \sigma_2 = \frac{P}{F} + \frac{M}{J'} e_2, \end{array} \right.$$

wo  $\sigma_{\max}$  der größere und  $\sigma_{\min}$  der kleinere der beiden ermittelten Werte ist.

Bestimmung der Grenzspannungen  $\sigma_{\max}$  und  $\sigma_{\min}$  mit Hilfe der Kernpunkte s. unter 5. S. 596.

**3. Beziehungen zwischen Angriffspunkt und Nulllinie.** Wandert der Angriffspunkt der Kraft  $P$  auf einer Geraden  $AA_1$ , so drehen sich die zugehörigen Nulllinien um einen Punkt  $N$ , der der Angriffspunkt für die als Nulllinie betrachtete Gerade  $AA_1$  ist, und umgekehrt. Man nennt Angriffspunkt und zugehörige Nulllinie einander zugeordnet.

**4. Der Kern des Querschnittes\*)** ist die Fläche, innerhalb deren der Angriffspunkt  $A$  der Kraft liegen muß, wenn der Querschnitt  $F$  ausschließlich Spannungen von einerlei Vorzeichen erfahren soll. Liegt  $A$  außerhalb des Kernes, so entstehen sowohl Zug- als Druckspannungen; liegt  $A$  auf der **Kerngrenze**, so ergeben sich Randspannungen bis zum Werte null, ohne daß sie das Vorzeichen wechseln. Die Kerngrenze ist daher die Linie, die der Angriffspunkt  $A$  beschreibt, wenn die Nulllinie alle möglichen den Querschnitt berührenden Lagen annimmt, oder, entsprechend 3.: Beschreibt der Angriffspunkt  $A$  die Umhüllungslinie (nicht zu verwechseln mit der Umrißlinie) des Querschnittes, so umhüllen die zugehörigen Nulllinien den Kern; jeder Ecke  $E$  der Umhüllungslinie entspricht also eine gerade Grenzlinie  $e$  des Kernes, u. zw. ist die Richtung von  $e$  zugeordnet der Richtung des Polstrahles vom Schwerpunkte  $S$  nach der Ecke  $E$ . Umgekehrt entspricht jeder Geraden  $H$  der Querschnittumhüllung eine Ecke  $h$  des Kernes, u. zw. haben  $H$  und  $Sh$  zugeordnete Richtungen.

Die **Kernpunkte** für eine Kraftlinie sind die Schnittpunkte der Kerngrenze mit der Kraftlinie. Der Abstand  $r$  (in cm) jedes Kernpunktes vom Schwerpunkte  $S$  heißt die **Kernweite** (Widerstandshalbmesser); es ist allgemein

$$r = \frac{W'}{F} = \frac{W}{F' \sin \delta},$$

wo  $W$ ,  $W'$ ,  $\delta$  und  $F$  die Bedeutung von S. 548 u. 592 haben.

\*) Theorie des Kernes auf Grund des allgemeinen Spannungsgesetzes  $\varepsilon = \alpha_0 \sigma''$  s. Engesser, Z. d. V. d. I. 1898 S. 903.

Der Kern ist hiernach polar-ähnlich der  $W$ -Fläche (s. S. 548) mit  $S$  als Pol und dem Ähnlichkeitsverhältnis 1:  $F$ .

Für eine Hauptachse des Querschnittes als Kraftlinie ist die Kernweite  $r = W : F$ .

Abb. 43.

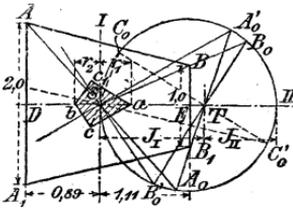


Abb. 43:  $F = 3 \text{ qcm}$ ,  $J_I = 0,963 \text{ cm}^4$ ,  $J_{II} = 0,629 \text{ cm}^4$ ,  $W_I = 0,963 : 0,89 = 1,08 \text{ cm}^3$ ,  $W_{II} = 0,629 : 1,11 = 0,57 \text{ cm}^3$ ,  $r_1 = 1,08 : 3,0 = 0,36 \text{ cm}$ ,  $r_2 = 0,87 : 3,0 = 0,29 \text{ cm}$ . Richtung von  $ac$  (parallel  $A_0'S$ ) zugeordnet  $AS$ , von  $bc$  (parallel  $S B_0'$ ) zugeordnet  $BS$ . Probe: Richtung  $Sc$  muß zugeordnet sein der Richtung  $AB$  ( $S C_0'$  parallel  $AB$ ).

Näherungsweise ist  $Sb = \frac{1}{3} SD$ ,  $Sa = \frac{1}{3} SE$ .

**Kern und geringste Kernweite  $r_{\min}$  einiger Querschnitte.**

**Quadrat** (Abb. 44).  $r_{\min} = \frac{h}{6} \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,1179 h$ .

Diagonalen des Kernes =  $\frac{1}{3} h$ .

**Rechteck** (Abb. 45).  $r_{\min} = \frac{bh}{6 \sqrt{b^2 + h^2}}$ .

Diagonalen des Kernes =  $\frac{1}{3} h$  und  $\frac{1}{3} b$ .

Abb. 44.

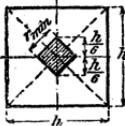


Abb. 45.

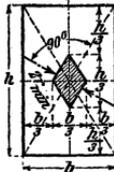


Abb. 46.

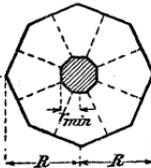


Abb. 47.

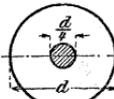
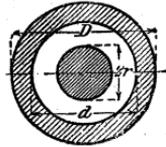


Abb. 48.



**Dreieck**, gleichschenkliges (Abb. 49).

$$r_1 = \frac{1}{6} h, \quad r_2 = \frac{1}{12} h.$$

Kern ein ähnliches Dreieck, Grundlinie =  $\frac{1}{4} b$ , Höhe =  $\frac{1}{4} h$ .

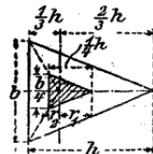
**Achteck** (Abb. 46).  $r_{\min} = 0,2256 R$ .

**Kreis** (Abb. 47).  $r = \frac{1}{8} d = \text{konst.}$

**Hohes Quadrat** (äußere Seite =  $H$ , innere Seite =  $h$ ). Kern ein Quadrat, ähnlich wie in Abb. 44.

$$r_{\min} = \frac{H}{6} \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ 1 + \left( \frac{h}{H} \right)^2 \right] = 0,1179 H \left[ 1 + \left( \frac{h}{H} \right)^2 \right].$$

Abb. 49.



**Hohles Achteck** [Halbmesser der beiden umliegenden Kreise =  $R_a$  und  $R_i$ , Wandstärke =  $0,9239 (R_a - R_i)$ ].

Kern ein Achteck, ähnlich wie in Abb. 46.

$$r_{\min} = 0,2256 R_a \left[ 1 + \left( \frac{R_i}{R_a} \right)^2 \right].$$

**Kreisring** (Abb. 48).  $r = \frac{D}{8} \left[ 1 + \left( \frac{d}{D} \right)^2 \right] = \text{konst.}$

### 5. Bestimmung der Grenzspannungen mittels der Kernpunkte.

Sind die Kernpunkte  $K'$ ,  $K''$  für eine gegebene Kraftlinie  $AS$  (Abb. 50) bekannt, so bestimmen sich die Grenzspannungen  $\sigma_{\max}$ ,  $\sigma_{\min}$  des Querschnittes (vgl. S. 593) wie folgt.

Bezeichnen  $M' = P \cdot \overline{AK'}$  und  $M'' = P \cdot \overline{AK''}$  die Momente der Kraft  $P$  (in  $A$ ), bezogen auf die Kernpunkte,  $W'$  und  $W''$  die Widerstandsgrößen für die der Kraftlinie zugeordnete Nullinie (vgl. S. 547), so ist

$$\sigma_{\max} \text{ und } \sigma_{\min} = M' : W' \text{ und } M'' : W''.$$

Bei symmetrischen Querschnitten ist stets

$$\sigma_{\max} = M' : W', \quad \sigma_{\min} = M'' : W''.$$

Für  $W'$  und  $W''$  darf nach 4. gesetzt werden  $F r'$  bzw.  $F r''$ , wenn  $r'$  und  $r''$  die Kernweiten auf der Kraftlinie bezeichnen; da ferner  $AK' = p + r'$ ,  $AK'' = p - r''$ , so erhält man auch

$$\sigma_{\max} = \left( 1 + \frac{p}{r'} \right) \frac{P}{F}, \quad \sigma_{\min} = \left( -1 + \frac{p}{r''} \right) \frac{P}{F}.$$

Die Vorzeichen von  $\sigma$  sind mit Hilfe der Nullinie zu bestimmen. In Abb. 50 ist z. B. für eine Druckkraft  $P$   $\sigma_{\max}$  (in 1) Druck,  $\sigma_{\min}$  (in 2) Zug, da 1 auf der nämlichen Seite, 2 auf der entgegengesetzten Seite der Nullinie liegt wie  $A$ .

**6. Gegenseitigkeit der Spannungen**, nach R. Land.\*) Sind  $A$  und  $B$  zwei beliebige Querschnittspunkte, so erzeugt eine Kraft  $P$  in  $A$  eine Spannung in  $B$ , die gleich ist der Spannung in  $A$ , erzeugt von  $P$  in  $B$ . (Hieraus folgen die Beziehungen unter 3.)

**7. Einflußfläche einer Spannung.**\*) Trägt man für einen beliebigen Spannungszustand die Spannungen  $\sigma$  in ihren Angriffspunkten als Längen winkelrecht zum Querschnitt auf, so bilden ihre Endpunkte eine Ebene, die sogen. **Spannungsfläche**, die durch seitliche Projektion dargestellt werden kann (Abb. 51).

Abb. 50.

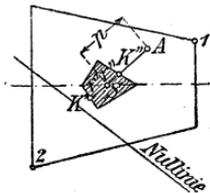
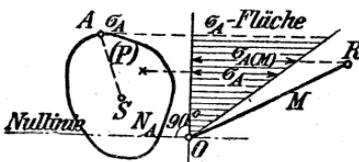


Abb. 51.



\*) S. Z. f. B. 1892 S. 564.

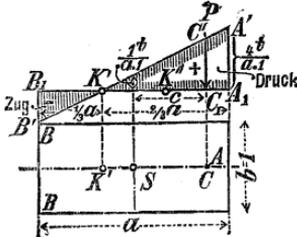
Trägt man anderseits die veränderlichen Werte  $\sigma_A$  eines festen Punktes  $A$  bei wandernder Kraft  $P=1\text{ t}$  in deren Angriffspunkten auf, so entsteht die **Einflußfläche** für  $\sigma_A$ , oder kurz die  $\sigma_A$ -Fläche. Aus 6. folgt hiernach:

Die Einflußfläche der Spannung  $\sigma_A$  ist gleich der Spannungsfläche für die feste Kraft  $P=1\text{ t}$  in  $A$ . Diese Spannungsfläche kann nach Abb. 41, S. 592, gezeichnet werden, wobei  $M=1\text{ t} \cdot SA$  ist.

Wirkung eines Momentes  $M\text{ cmt} = (M\text{ cm}) \cdot (1\text{ t})$ . Trägt man vom Nullpunkte  $O$  der  $\sigma_A$ -Fläche aus  $OR$  gleich und parallel  $M\text{ cm}$  ab (Abb. 46), so gibt die zu  $R$  gehörige Ordinate die Spannung  $\sigma_A(M)$ , erzeugt durch das Moment  $M$ . Man kann hiernach für die bloße Wirkung von Momenten die  $\sigma_A$ -Fläche parallel mit sich verschieben, so daß der Nullpunkt  $O$  auf  $S$  fällt, wobei die Spannungsfläche die Lage von Abb. 20, S. 547, erhält.

**8. Rechteck.** Die Einflußfläche einer Randspannung  $\sigma_A$  für Rechtecke von der Länge  $a$ , der Breite  $b=1\text{ m}$  kann vorteilhaft bei Mauer- und Gewölbequerschnitten benutzt werden (Abb. 52). Kraft-einheit sei  $1\text{ t}$ . Die gerade Grenzlinie  $A'K'B'$  der  $\sigma_A$ -Fläche, bezogen auf  $A_1B_1$ , geht durch den zu  $A$  gehörigen Kernpunkt  $K'$  ( $K'A_1=2/3 a$ ) und schneidet bei  $S$  die Ordinate  $\sigma_s=1\text{ t} : a \cdot 1$  und bei dem Randpunkte  $A$  die Ordinate  $4\text{ t} : a \cdot 1$  ab, die nach einem  $\sigma$ -Maßstabe aufzutragen sind.

Abb. 52.



Eine in dem beliebigen Punkte  $C$  angreifende Kraft  $P$  (in t) erzeugt alsdann eine Randspannung in  $A$ :

$$\sigma_A = + P \cdot \overline{C_1 C'}$$

Eine  $+$ -Spannung in  $A$  entsteht nur, solange  $P$  auf der Strecke  $AK' = 2/3 a$  angreift.

Rechnerisch ergibt sich für die Randspannungen (größten Kantenpressungen):

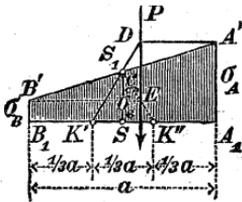
$$\sigma_A = \frac{6 M_{k'}}{a^2} \quad \text{und} \quad \sigma_B = \frac{6 M_{k''}}{a^2},$$

worin  $M_{k'}$  und  $M_{k''}$  die Momente von  $P$ , bezogen auf die Kernpunkte  $K'$  und  $K''$  sind. Greift die Kraft  $P$  in  $C$  an (auf  $AS$ , Abb. 52), und setzt man die Exzentrizität (Abweichung vom Schwerpunkte)  $SC=c$ , so ist auch

$$\left. \begin{matrix} \sigma_A \\ \sigma_B \end{matrix} \right\} = \sigma_{\max/\min} = \frac{P}{a^2} (a \pm 6c) = \frac{P}{a} \left( 1 \pm \frac{6c}{a} \right).$$

Soll der Querschnitt nur Druckspannungen erhalten, so muß  $6c : a < 1$ , also  $c < 1/6 a$  sein, d. h. die Kraft  $P$  muß im mittleren Drittel  $K'K''$  der Querschnittlänge angreifen.

Abb. 53.



Da beim Rechteckquerschnitte  $ab$

$$\frac{\sigma_A}{\sigma_S} = 1 + \frac{6c}{a} = \left(\frac{a}{6} + c\right) : \frac{a}{6},$$

so ergibt sich folgendes einfache zeichnerische Verfahren zur Ermittlung der Randspannungen (Abb. 53):

Man trägt im Schwerpunkte  $S$  die mittlere Spannung  $\sigma_s = P : a = SS_1$  winkelrecht zu  $A_1B_1$  auf, zieht  $K'S_1$  bis zum Schnitte  $D$  mit der Richtung der angreifenden Kraft  $P$ , dann  $DA'$  parallel  $B_1A_1$  und die Schlußlinie  $A'S_1B'$ , so sind die Ordinaten der Spannungslinie  $A'B'$  (gestrichelte Fläche  $A'S_1B'B_1A_1$ ) die durch  $P$  erzeugten Querschnittspannungen;  $A_1A'$  und  $B_1B'$  sind die Randspannungen.

Auch findet man  $B'$  mittels der durch den Schnittpunkt  $E$  von  $SK''$  mit  $P$  gelegten Parallelen  $EB'$  zu  $A_1B_1$ . — Das vorstehende Verfahren gilt entsprechend für eine aufserhalb des Kernpunkt-Abstandes  $K'K''$  auf der Mittellinie angreifende Kraft.

**9. Bei langen Stäben,** die eine merkliche Ausbiegung durch die lotrechte Kraft  $P$  erfahren (Abb. 54 und 55) ergibt sich

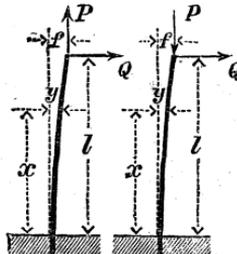
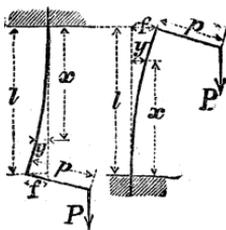
Benennung	bei exzent. Zuge (Abb. 54)	bei exzent. Drucke (Abb. 55)
Gleichung der elastischen Linie	$y = \frac{p}{\mathcal{E} \cos \omega l} (\mathcal{E} \cos \omega x - 1)$	$y = \frac{p}{\cos \omega l} (1 - \cos \omega x)$
Größte Ausbiegung	$f = p \left(1 - \frac{1}{\mathcal{E} \cos \omega l}\right)$	$f = p \left(\frac{1}{\cos \omega l} - 1\right)$
Biegemoment	$M_x = Pp \frac{\mathcal{E} \cos \omega x}{\mathcal{E} \cos \omega l}$ Für $x = l$ ist $M_{\max} = Pp$	$M_x = Pp \frac{\cos \omega x}{\cos \omega l}$ Für $x = 0$ ist $M_{\max} = \frac{Pp}{\cos \omega l}$
Größte Spannungen	$\sigma \frac{\max}{\min} = \sigma_s \left(1 \pm \frac{pF}{W}\right)$	$\sigma \frac{\max}{\min} = \sigma_s \left(1 \mp \frac{pF}{W \cos \omega l}\right)$

Abb. 54.

Abb. 55.

Abb. 56.

Abb. 57.



Die Bedeutung der Hyperbelfunktion  $\mathcal{E} \cos$  s. S. 65. Die GröÙe  $\omega$  hat den Wert.

$$\omega = \sqrt{\frac{P}{EJ}},$$

worin  $E$  das Elastizitätsmaß in  $kg/qcm$  und  $J$  (in  $cm^4$ ) das Trägheitsmoment des Querschnittes  $F$ , bezogen auf die winkelrecht zur Biegeebene stehende Schwerlinie

von  $F$ .  $W$  ist das zu  $J$  gehörige Widerstandsmoment in  $cm^3$ .

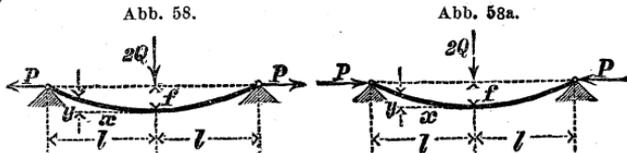
Näherungsformeln ergeben sich, wenn man in den vorstehenden Formeln setzt

$$\mathcal{E} \cos \omega l = 1 + \frac{Pl^2}{2EJ} \quad \text{und} \quad \cos \omega l = 1 - \frac{Pl^2}{2EJ}.$$

10. Statt der exzentrisch angreifenden Kraft  $P$  (unter 9.) seien eine zentrisch angreifende Achsialkraft  $P$  und eine am Stabende wirkende Querkraft  $Q$  vorhanden (Abb. 56 und 57). Bedeutung der Hyperbelfunktionen  $\text{Sin}$ ,  $\text{Cos}$  und  $\text{Tg}$  s. S. 65. GröÙe  $\omega$  wie vorstehend unter 9.

Benennung	Zugkraft $P$ (Abb. 52)	Druckkraft $P$ (Abb. 52)
Gleichung der elastischen Linie	$\frac{y}{P} \left( x - \frac{1}{\omega} \frac{\text{Sin } \omega l - \text{Sin } \omega (l-x)}{\text{Cos } \omega l} \right)$	$\frac{y}{P} \left( -x + \frac{1}{\omega} \frac{\text{Sin } \omega l - \text{Sin } \omega (l-x)}{\text{Cos } \omega l} \right)$
Größte Ausbiegung	$f = \frac{Q}{P} \left( l - \frac{\text{Tg } \omega l}{\omega} \right)$	$f = \frac{Q}{P} \left( \frac{\text{Tg } \omega l}{\omega} - l \right)$
Biegemoment	$M_x = \frac{Q}{\omega} \frac{\text{Sin } \omega (l-x)}{\text{Cos } \omega l}$ Für $x = 0$ ist $M_{\max} = \frac{Q}{\omega} \text{Tg } \omega l$	$M_x = \frac{Q}{\omega} \frac{\text{Sin } \omega (l-x)}{\text{Cos } \omega l}$ Für $x = 0$ ist $M_{\max} = \frac{Q}{\omega} \text{Tg } \omega l$
Größte Spannungen	$\sigma \frac{\max}{\min} = \frac{P}{F} \pm \frac{M_{\max}}{W}$	$\sigma \frac{\max}{\min} = -\frac{P}{F} \pm \frac{M_{\max}}{W}$

11. Stab mit gelenkigen Enden auf zwei Stützen, in der Mitte durch die Einzellast  $2Q$  belastet und außerdem durch die Achsialkraft  $\pm P$  beansprucht (Abb. 58 und 58a). Hierfür gelten ohne weiteres die Formeln unter 10.



12. Stab mit gelenkigen Enden auf zwei Stützen, durch die auf die Länge  $2l$  gleichmäßig verteilte Kraft  $2Q$  belastet und außerdem durch die Achsialkraft  $\pm P$  beansprucht. (Abb. 59 und 59a auf S. 600).

Benennung	Zugkraft $P$ (Abb. 59)	Druckkraft $P$ (Abb. 59a)
Gleichung der elastischen Linie	$y = \frac{Q}{P} \left( \frac{x^2}{2l} - \frac{1}{l\omega^2} \frac{\text{Cos } \omega x - 1}{\text{Cos } \omega l} \right)$	$y = \frac{Q}{P} \left( -\frac{x^2}{2l} + \frac{1}{l\omega^2} \frac{1 - \text{Cos } \omega x}{\text{Cos } \omega l} \right)$
Größte Ausbiegung	$f = \frac{Q}{P} \left[ \frac{l}{2} - \frac{1}{l\omega^2} \left( 1 - \frac{1}{\text{Cos } \omega l} \right) \right]$	$f = \frac{Q}{P} \left[ -\frac{l}{2} + \frac{1}{l\omega^2} \left( \frac{1}{\text{Cos } \omega l} - 1 \right) \right]^*)$
Biegemoment	$M_x = \frac{Q}{l\omega^2} \left( 1 - \frac{\text{Cos } \omega x}{\text{Cos } \omega l} \right)$ Für $x = 0$ ist $M_{\max} = \frac{Q}{l\omega^2} \left( 1 - \frac{1}{\text{Cos } \omega l} \right)$	$M_x = \frac{Q}{l\omega^2} \left( \frac{\text{Cos } \omega x}{\text{Cos } \omega l} - 1 \right)$ Für $x = 0$ ist $M_{\max} = \frac{Q}{l\omega^2} \left( \frac{1}{\text{Cos } \omega l} - 1 \right)$
Größte Spannungen	$\sigma \frac{\max}{\min} = \frac{P}{F} \pm \frac{M_{\max}}{W}$	$\sigma \frac{\max}{\min} = -\frac{P}{F} \pm \frac{M_{\max}}{W}$

\*) Nach Kayser (Z. d. B. 1910 S. 304) ist auch  $f = \frac{M_0}{P_k - P}$ , worin  $M_0 = \frac{Ql}{2}$  das Biegemoment durch  $2Q$  in Balkenmitte,  $P$  die achsiale Druckkraft und  $P_k = \frac{\pi^2 EJ}{(2l)^2}$  die Knickkraft des Stabes bedeutet.

Bemerkung. Der Wert  $M_{\max} = \frac{Q}{l\omega^2} \left(1 - \frac{1}{\cos \omega l}\right)$  nähert sich bei längeren Stäben sehr schnell dem Grenzwerte  $M_0 = \frac{Q}{l\omega^2}$ , entsprechend einer größten Biegungsspannung  $\sigma_{\max} = \frac{M_0}{W} = \frac{Q}{l} \frac{E}{P} \frac{J}{W} = q \frac{E}{P} \epsilon$ , wenn  $q$  die Belastung für 1 cm Stablänge und  $\epsilon$  den Abstand der am stärksten gezogenen Faser von der Nulllinie bedeutet.

Der Grenzwert  $\sigma_{\max}$  ist die Biegungsspannung, die der Stab erleiden würde, wenn er — ohne jede Steifigkeit — nach der parabolischen Kettenlinie frei durchhängen könnte. Diese Grenzspannung ist unabhängig von der Stützweite  $2l$ . \*)

Abb. 59.

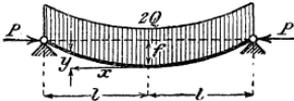
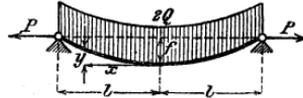


Abb. 59a.



13. Stab mit vollkommen eingespannten Enden auf zwei Stützen, in der Mitte durch die Einzellast  $2Q$  und außerdem durch eine Achsialkraft  $\pm P$  beansprucht (Abb. 59b und 59c).\*\*)

Abb. 59b.

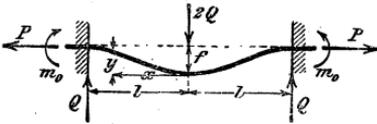
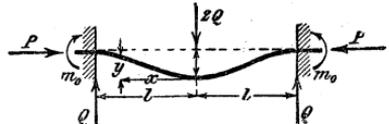


Abb. 59c.



Benennung	Zugkraft $P$ (Abb. 59 b)	Druckkraft $P$ (Abb. 59 c)
Gleichung der elastischen Linie	$y = \frac{Q}{P\omega} \cdot \left[ (\cos \omega x - 1) \mathfrak{X} \mathfrak{g} \frac{l\omega}{2} - \sin \omega x + \omega x \right]$	$y = \frac{Q}{P\omega} \cdot \left[ -(\cos \omega x - 1) \mathfrak{t} \mathfrak{g} \frac{l\omega}{2} + \sin \omega x - \omega x \right]$
Größte Ausbiegung	$f = \frac{Q}{P\omega} \left[ l\omega - 2 \mathfrak{X} \mathfrak{g} \frac{l\omega}{2} \right]$	$f = \frac{Q}{P\omega} \left[ 2 \mathfrak{t} \mathfrak{g} \frac{l\omega}{2} - l\omega \right]$
Biegungsmoment	$M_x = \frac{Q}{\omega} \left[ \mathfrak{X} \mathfrak{g} \frac{l\omega}{2} \cos \omega x - \sin \omega x \right]$ Für $x = 0$ und $x = l$ ist $M_{\max} = m_0 = \pm \frac{Q}{\omega} \mathfrak{X} \mathfrak{g} \frac{l\omega}{2}$	$M_x = \frac{Q}{\omega} \left[ \mathfrak{t} \mathfrak{g} \frac{l\omega}{2} \cos \omega x - \sin \omega x \right]$ Für $x = 0$ und $x = l$ ist $M_{\max} = m_0 = \pm \frac{Q}{\omega} \mathfrak{t} \mathfrak{g} \frac{l\omega}{2}$
Größte Spannungen	Wie unter 11.	

## II. Der Baustoff ist nur gegen Druck (nicht gegen Zug) widerstandsfähig.

Diese ungünstige Annahme wird der Sicherheit wegen bei gewöhnlichem Mauerwerk gemacht, bei dem keine Zugübertragung durch den Mörtel, sondern ein Klaffen der Fugen zu erwarten ist und das durch wagerechte Kräfte (Winddruck, Erddruck usw.) beansprucht wird. [Bei bestem Klinkermauerwerk in Zementmörtel mit  $k = 20$

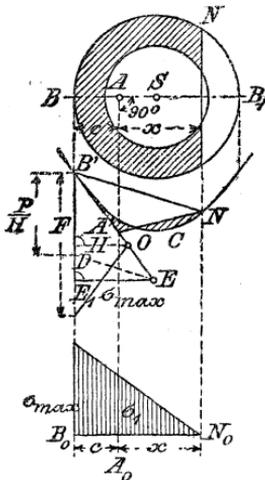
\*) S. Z. d. V. d. I. 1897 S. 855 u. f.

\*\*) J. Arnovlević, Oesterr. Wochenschr. f. ö. B. 1907 Heft 22.

bis 30 kg/qcm erscheint eine Zugbeanspruchung  $k_z$  bis 2,5 kg/qcm mitunter noch zulässig.] Man setzt hierbei voraus, dafs, sofern die Druckkraft  $P$  aufserhalb des Kernes des Querschnittes angreift, der gedrückte Teil des Querschnittes (der wirksame Querschnitt) von dem vollständig unwirksamen Teile durch eine gerade Nulllinie getrennt ist und die Druckspannungen im Verhältnis der Entfernungen von dieser Nulllinie wachsen.

Der Spannungskörper bildet einen Keil (s. Abb. 60), dessen Kante  $N_0$  die Nulllinie und dessen Höhe die grösste Randspannung  $\sigma_{max}$  ist.  $N_0$  und  $\sigma_{max}$  sind so zu bestimmen, dafs der Inhalt des Spannungskörpers =  $P$  ist und dafs seine lotrechte Schwerlinie mit  $P$  zusammenfällt.

Abb. 60.



Bezeichnet  $S_1$  das statische Moment und  $J_1$  das Trägheitsmoment des wirksamen Querschnittes  $F_1$ , bezogen auf die Nulllinie  $NN$ , so ist der Abstand des Angriffspunktes  $A$  der Kraft  $P$  von der Nulllinie

$$x = J_1 : S_1$$

und die auf der Achse  $BB_1$  gemessene Länge des wirksamen Querschnittes =  $c + J_1 : S_1$ , wenn  $c$  den Abstand des Punktes  $A$  von der nächsten Querschnittkante  $B$  bedeutet.

**Beliebiger Querschnitt.** Der Angriffspunkt  $A$  der Druckkraft  $P$  liege auf einer Hauptachse  $BSB_1$  des Querschnittes (Abb. 60). Nach dem **Verfahren von Mohr\***) zeichne man die zum gegebenen (Gesamt-) Querschnitte  $F$  als Belastungsfläche gehörige Seillinie für eine Krafrichtung winkelrecht zu  $BB_1$  mit der (beliebigen) Polweite  $H$ , ziehe  $AA'$  winkelrecht zu  $BB_1$  bis zum Schnitte  $A'$  mit der Endtangente an  $B'$  und die Gerade  $A'N$  derart, dafs das Dreieck  $B'NA'$  gleich ist der

Fläche  $B'NC$  (zwischen Seillinie und  $B'N$ ), oder dafs die beiden gestrichelten Flächen einander gleich sind. Dann ist die Gerade durch  $N$ , winkelrecht zu  $BB_1$ , die gesuchte Nulllinie. Macht man nun

$$B'D = P : H = \text{Kraft} : \text{Fläche}$$

( $H$  im Mafsstabe von  $F$  für den Kräfteplan zu messen),  $DE$  parallel  $B'N$ , so ist die Randspannung in  $B$   $\sigma_{max} = EE_1$  (winkelrecht zu  $B'D$ ), u. zw. ist  $EE_1$  zu messen wie  $P : H$ .

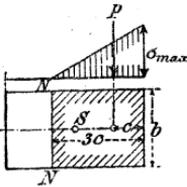
Die mittlere Spannung  $\sigma_m = P : F_1$  des wirksamen Querschnittes  $F_1$  findet sich als Spannung in dessen Schwerpunkt; der Abstand des Schwerpunktes von  $NN$  ist bekanntlich  $y = S_1 : F_1$ .  $\sigma_1$  (in Abb. 60) ist die Spannung im Angriffspunkte  $A$  der Kraft  $P$ ; man erhält

$$\sigma_1 = \frac{x}{y} \sigma_m = \frac{x}{y} \frac{P}{F_1} = \frac{Px}{S_1}$$

\* O. Mohr, Abhandl. a. d. Gebiete d. techn. Mechanik, 1906 S. 262, Wilhelm Ernst u. Sohn.

**Rechteck** (Abb. 61). Greift  $P$  auf einer Hauptachse im Abstände  $c$  von der nächsten Kante an, so verteilt sich der Druck auf die Länge  $3c$  (Nulllinie =  $NN$ ), und an der Kante ist

Abb. 61.



$$\sigma_{\max} = \frac{2P}{3bc}$$

Ferner ist (im Abstände  $1,5c$  von der Kante)  $\sigma_m = \frac{1}{2} \sigma_{\max}$  und die Spannung im Angriffspunkte von  $P$   $\sigma_1 = \frac{2}{3} \sigma_{\max}$ .

**Hohlquadrat.** S. Preufs, Z. f. Arch.- u. Ing.-W. 1903 S. 425.

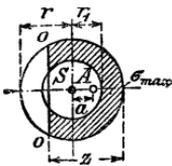
**Kreis.** Nach P. Neumann\*\*) ist angenähert

$$\sigma_{\max} = \left( 0,372 + 0,056 \frac{c}{r} \right) \frac{P}{c/r c},$$

worin  $r$  den Halbmesser des Kreises und  $c$  den kleinsten Abstand des Kraftpunktes vom Kreisumfang bedeutet.

Ferner ergibt sich nach Keck angenähert der Abstand der Nulllinie vom Umfangspunkte ( $B$ ) aus

Abb. 62.



$$\frac{c+x}{c} = 2,33 + 0,58 \left( \frac{c}{r} \right)^2.$$

**Kreisring.** (Abb. 62.) Ist  $r$  der äußere,  $r_1$  der innere Halbmesser,  $\sigma$  die mittlere Druckspannung, die die Querschnittfläche  $\pi(r^2 - r_1^2)$  durch die Druckkraft  $P$  erfahren würde,  $a$  die Abweichung der Druckkraft vom Mittelpunkte (Exzentrizität),  $z$  der Abstand der Nulllinie vom entferntesten Randpunkte,  $\sigma_{\max}$  die Pressung in letzterem, so ergeben für verschiedene Verhältnisse  $a:r$  und  $r_1:r$  die beiden folgenden Tafeln\*\*) die Lage der Nulllinie (Werte  $z:r$ ) und die größte Randpressung (Werte  $\sigma_{\max}:\sigma$ ).

1. Werte  $z:r$  (Lage der Nulllinie).

$\frac{a}{r}$	$\frac{r_1}{r}$							$\frac{a}{r}$
	0	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	
0,25	2,00	.	.	.	.	.	.	0,25
0,30	1,82	.	.	.	.	.	.	0,30
0,35	1,66	1,89	1,98	.	.	.	.	0,35
0,40	1,51	1,75	1,84	1,93	.	.	.	0,40
0,45	1,37	1,61	1,71	1,81	1,90	.	.	0,45
0,50	1,23	1,46	1,56	1,66	1,78	1,89	2,00	0,50
0,55	1,10	1,29	1,39	1,50	1,62	1,74	1,87	0,55
0,60	0,97	1,12	1,21	1,32	1,45	1,58	1,71	0,60
0,65	0,84	0,94	1,02	1,13	1,25	1,40	1,54	0,65
0,70	0,72	0,75	0,82	0,93	1,05	1,20	1,35	0,70
0,75	0,59	0,60	0,64	0,72	0,85	0,99	1,15	0,75
0,80	0,47	0,47	0,48	0,52	0,61	0,77	0,94	0,80
0,85	0,35	0,35	0,35	0,36	0,42	0,55	0,72	0,85
0,90	0,24	0,24	0,24	0,24	0,24	0,32	0,49	0,90
0,95	0,12	0,12	0,12	0,12	0,12	0,12	0,25	0,95

\*\*) S. Z. d. B. 1901 S. 371.

\*) S. Keck, Z. d. H. A. u. I. V. 1882 S. 627. Vgl. auch Z. d. V. d. I. 1902 S. 1321.

Bemerkung. Für kleinere Werte von  $a:r$  als entsprechend  $z:r=2$  und darüber liegt  $A$  im Querschnittkern.

Für folgende Werte von  $a:r$  wird  $z:r=1$ , d. h. die Nulllinie geht durch den Mittelpunkt oder die tragende Fläche des Querschnittes ist ein Halbkreis.

$\frac{r_1}{r} =$	0	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$\frac{a}{r} =$	0,589	0,631	0,654	0,682	0,713	0,743	0,786

angenähert

$$\frac{a}{r} = 0,5 + 0,25 \frac{r_1}{r}.$$

### 2. Werte $\sigma_{\max} : \sigma$ (Randspannung).

$\frac{a}{r}$	$\frac{r_1}{r} =$							$\frac{a}{r}$	
	0,0	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0		
0,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	0,00
0,05	1,20	1,16	1,15	1,13	1,12	1,11	1,10	1,10	0,05
0,10	1,40	1,32	1,29	1,27	1,24	1,22	1,20	1,20	0,10
0,15	1,60	1,48	1,44	1,40	1,37	1,33	1,30	1,30	0,15
0,20	1,80	1,64	1,59	1,54	1,49	1,44	1,40	1,40	0,20
0,25	2,00	1,80	1,73	1,67	1,61	1,55	1,50	1,50	0,25
0,30	2,23	1,96	1,88	1,81	1,73	1,66	1,60	1,60	0,30
0,35	2,48	2,12	2,04	1,94	1,85	1,77	1,70	1,70	0,35
0,40	2,76	2,29	2,20	2,07	1,98	1,88	1,80	1,80	0,40
0,45	3,11	2,51	2,39	2,23	2,10	1,99	1,90	1,90	0,45
0,50	3,55	2,80	2,61	2,42	2,26	2,10	2,00	2,00	0,50
0,55	4,15	3,14	2,89	2,67	2,42	2,26	2,17	2,17	0,55
0,60	4,96	3,58	3,24	2,92	2,64	2,42	2,26	2,26	0,60
0,65	6,00	4,34	3,80	3,30	2,92	2,64	2,42	2,42	0,65
0,70	7,48	5,40	4,65	3,86	3,33	2,95	2,64	2,64	0,70
0,75	9,93	7,26	5,97	4,81	3,93	3,33	2,89	2,89	0,75
0,80	13,87	10,05	8,80	6,53	4,93	3,96	3,27	3,27	0,80
0,85	21,08	15,55	13,32	10,43	7,16	4,50	3,77	3,77	0,85
0,90	38,25	30,80	23,80	19,85	14,60	7,13	4,71	4,71	0,90
0,95	96,10	72,20	62,20	50,20	34,60	19,80	6,72	6,72	0,95
1,00	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	1,00

Andere Hohlquerschnitte s. Landmann, Tabellen zur Bestimmung der Randspannungen von Fabriksteinen, Wiesbaden 1904, Kreidel.

### b. Beanspruchung durch Schubspannungen. (Schub und Drehung.)

Der Querschnitt des Stabes werde durch eine Schubkraft  $Q$  und durch ein Drehmoment  $M_d$  beansprucht. In einem beliebigen Teilchen des Querschnittes erzeugt  $Q$  die Schubspannung  $\tau_s$  (nach S. 538 u. f. zu ermitteln) und  $M_d$  die Schubspannung  $\tau_d$  (nach S. 588 u. f. zu ermitteln). Durch Zusammensetzung von  $\tau_s$  und  $\tau_d$  nach dem Parallelogramm erhält man die wirklich in dem Querschnittteilchen (und winkelrecht dazu) herrschende Schubspannung  $\tau$ ; es darf in keinem Punkte  $\tau > k_d$  sein.

### c. Beanspruchung durch Normal- und Schubspannungen.

Wird irgend ein Querschnittteilchen eines Stabes durch eine Normalspannung  $\sigma$  und eine Schubspannung  $\tau$  beansprucht, so sind beide

nach S. 545 zu einer idealen Hauptspannung  $\sigma_1$  zusammensetzen, u. zw. ist insbesondere für  $m = \frac{10}{3}$

$$\sigma_1 = 0,35 \sigma \pm 0,65 \sqrt{\sigma^2 + 4(\alpha_0 \tau)^2};$$

der Querschnitt ist so zu bemessen, daß für keinen Punkt

$$\sigma_1 > k_n.$$

Hierbei bedeutet  $\alpha_0 = k_n : 1,3 k_s$  das Beanspruchungs-Verhältnis, unter  $k_n$  (gleich  $k_z$ ,  $k$  oder  $k_b$ ) die zulässige Normalspannung und unter  $k_s$  (gleich  $k_s$  oder  $k_d$ ) die zulässige Schubspannung verstanden, wobei die Arten der Festigkeit zu beachten sind, auf die der Stab beansprucht wird.

### 1. Zug (oder Druck) und Schub.

Die äußeren Kräfte ergeben für den Querschnitt  $F$  eine Achsialkraft  $P$  und eine Schubkraft  $Q$ .

$P$  erzeugt eine überall gleiche Normalspannung  $\sigma = \pm P : F$ ,  $Q$  dagegen Schubspannungen, deren größte,  $\tau_{\max}$ , nach den Formeln auf S. 538 und 539 zu ermitteln ist ( $\tau_{\max}$  tritt meist in der Schwerachse auf). Die größte ideale Hauptspannung im Querschnitte wird

$$\sigma \frac{\max}{\min} = 0,35 \sigma \pm 0,65 \sqrt{\sigma^2 + 4 \alpha_0^2 \tau_{\max}^2} \leq k_z \text{ bzw. } k,$$

wenn

$$\alpha_0 = k_z : 1,3 k_s \text{ bzw. } \alpha_0 = k : 1,3 k_s.$$

### 2. Biegung und Schub.

Der Querschnitt werde beansprucht durch ein Biegemoment  $M$ , das die Normalspannungen  $\sigma$  erzeugt, und durch eine Schubkraft  $Q$ , die in der Ebene des Biegemomentes liegt und die Schubspannungen  $\tau$  erzeugt.

Es ist alsdann die oben unter **c.** gegebene Hauptgleichung mit  $\alpha_0 = k_b : 1,3 k_s$  anzuwenden, u. zw. sind für  $\sigma$  und  $\tau$  diejenigen zugehörigen Werte zu setzen, für die die ideale Hauptspannung  $\sigma_1$  am größten wird.

Bei dem **Freitrag**er von der Länge  $l$ , Fall 1. S. 564, berücksichtige man für die Spannungs-Ermittlung, wenn  $\alpha_0 = 1$ :

- 1) für den Kreis-Querschnitt mit dem Durchmesser  $d$

nur die Biegebungsbeanspruchung, falls . . .  $l \geq 0,25 d$ ,  
 nur die Schubbeanspruchung, falls . . .  $l \leq 0,25 d$ ;

- 2) für den Rechteck-Querschnitt von der Höhe  $h$  (parallel zu  $Q$ ) tritt an die Stelle von  $0,25 d$  der Wert  $0,325 h$ .

Die **Durchbiegung**  $f$  eines in der Mitte mit  $P$  belasteten Stabes (Fall 2, S. 564) beträgt mit Rücksicht auf den Einfluß der Schubkraft

für den kreisförmigen Querschnitt

für den rechteckigen Querschnitt

$$f = \frac{P}{E} \frac{l}{4 \pi d^3} \left[ \frac{1}{3} \left( \frac{l}{d} \right)^2 + 0,77 \right], \quad f = \frac{P}{E} \frac{l}{b h} \left[ 0,25 \left( \frac{l}{h} \right)^2 + 0,73 \right],$$

für den I-förmigen Querschnitt\*)

$$f = \frac{P}{E} \frac{l}{h \delta} \left[ \frac{P \delta}{24 W} + 0,65 \right],$$

worin  $h$  die Höhe,  $\delta$  die Stegdicke in cm,  $W$  das Widerstandsmoment in cm<sup>3</sup>.

(Bestimmung von  $E$  aus Biegeversuchen.)

\*) R. Land, Einfluß der Schubkräfte usw., Z. f. B. 1894 S. 611 u. f. Vgl. auch Z. d. V. d. I. 1888 S. 222 u. f.

### 3. Zug (oder Druck) und Drehung.

Hierfür gilt das vorstehend unter 1. Gesagte, wenn statt der Schubkraft  $Q$  das Drehmoment  $M_d$  und statt  $k_s$  der Wert  $k_d$  gesetzt wird.

### 4. Biegung und Drehung.

Der Querschnitt werde durch ein Biegemoment  $M$  und ein Drehmoment  $M_d$  beansprucht; die Ebene von  $M$  schneide den Querschnitt winkelrecht, die Ebene von  $M_d$  die Stabachse winkelrecht.  $M$  erzeugt in jedem Querschnitteilchen eine Normalspannung  $\sigma$ ,  $M_d$  daselbst eine Schubspannung  $\tau$ , die beide wie oben angegeben zu ermitteln sind. Es ist dann die unter 6. (S. 604) gegebene Hauptgleichung mit  $\alpha_0 = k_b \cdot 1,3 k_d$  anzuwenden, und zwar sind für  $\sigma$  und  $\tau$  diejenigen zugehörigen Werte zu setzen, für die die ideale Hauptspannung  $\sigma_1$  am größten wird.

1. Kreis- und Kreisring-Querschnitt (Abb. 63 und 64). Hier fallen die Punkte für  $\sigma_{\max}$  und  $\tau_{\max}$  zusammen.

Bedeutet  $W$  das erforderliche Widerstandsmoment, also (vgl. S. 554)

$$W = \frac{\pi d^3}{32} \quad \text{bzw.} \quad W = \frac{\pi D^3}{32} \left[ 1 - \left( \frac{d}{D} \right)^4 \right], \quad \text{Abb. 63.} \quad \text{Abb. 64.}$$

so bestimme man

$$M_i = 0,35 M + 0,65 \sqrt{M^2 + (\alpha_0 M_d)^2} = \xi M, \quad \text{und daraus} \quad W = M_i : k_b.$$

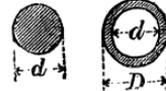


Tabelle der Werte  $\xi = 0,35 + 0,65 \sqrt{1 + \left( \frac{\alpha_0 M_d}{M} \right)^2}$  \*)

$\frac{\alpha_0 M_d}{M}$	$\xi$						
0,01	1,00003	0,26	1,02161	0,51	1,07967	0,76	1,16636
0,02	1,00013	0,27	1,02328	0,52	1,08266	0,77	1,17027
0,03	1,00029	0,28	1,02500	0,53	1,08569	0,78	1,17425
0,04	1,00052	0,29	1,02679	0,54	1,08878	0,79	1,17831
0,05	1,00081	0,3	1,02862	0,55	1,09183	0,8	1,18241
0,06	1,00118	0,31	1,03051	0,56	1,09485	0,81	1,18653
0,07	1,00160	0,32	1,03246	0,57	1,09804	0,82	1,19067
0,08	1,00208	0,33	1,03447	0,58	1,10129	0,83	1,19481
0,09	1,00263	0,34	1,03654	0,59	1,10461	0,84	1,19895
0,1	1,00324	0,35	1,03866	0,6	1,10803	0,85	1,20309
0,11	1,00390	0,36	1,04085	0,61	1,11147	0,86	1,20728
0,12	1,00464	0,37	1,04308	0,62	1,11491	0,87	1,21151
0,13	1,00544	0,38	1,04535	0,63	1,11835	0,88	1,21584
0,14	1,00632	0,39	1,04768	0,64	1,12189	0,89	1,22015
0,15	1,00727	0,4	1,05007	0,65	1,12525	0,9	1,22449
0,16	1,00828	0,41	1,05250	0,66	1,12876	0,91	1,22884
0,17	1,00933	0,42	1,05500	0,67	1,13234	0,92	1,23321
0,18	1,01045	0,43	1,05755	0,68	1,13600	0,93	1,23762
0,19	1,01164	0,44	1,06014	0,69	1,13969	0,94	1,24207
0,2	1,01287	0,45	1,06278	0,7	1,14343	0,95	1,24655
0,21	1,01417	0,46	1,06544	0,71	1,14720	0,96	1,25103
0,22	1,01553	0,47	1,06816	0,72	1,15099	0,97	1,25553
0,23	1,01697	0,48	1,07095	0,73	1,15481	0,98	1,26007
0,24	1,01846	0,49	1,07381	0,74	1,15866	0,99	1,26463
0,25	1,02001	0,5	1,07672	0,75	1,16250	1,0	1,26924

\*) Mitgeteilt von Ingenieur W. Prollius, Duisburg.

$\frac{\alpha_0 M_d}{M}$	$\xi$						
1,01	1,27386	1,56	1,55442	2,11	1,86774	2,66	2,19714
1,02	1,27850	1,57	1,55990	2,12	1,87362	2,67	2,20323
1,03	1,28314	1,58	1,56538	2,13	1,87950	2,68	2,20933
1,04	1,28782	1,59	1,57090	2,14	1,88538	2,69	2,21542
1,05	1,29250	1,6	1,57642	2,15	1,89127	2,7	2,22151
1,06	1,29722	1,61	1,58194	2,16	1,89709	2,71	2,22761
1,07	1,30196	1,62	1,58746	2,17	1,90292	2,72	2,23371
1,08	1,30672	1,63	1,59298	2,18	1,90876	2,73	2,23982
1,09	1,31150	1,64	1,59853	2,19	1,91460	2,74	2,24592
1,1	1,31630	1,65	1,60409	2,2	1,92044	2,75	2,25202
1,11	1,32110	1,66	1,60965	2,21	1,92644	2,76	2,25813
1,12	1,32592	1,67	1,61521	2,22	1,93244	2,77	2,26425
1,13	1,33078	1,68	1,62079	2,23	1,93844	2,78	2,27036
1,14	1,33566	1,69	1,62639	2,24	1,94444	2,79	2,27648
1,15	1,34058	1,7	1,63200	2,25	1,95044	2,8	2,28259
1,16	1,34550	1,71	1,63762	2,26	1,95638	2,81	2,28872
1,17	1,35043	1,72	1,64324	2,27	1,96232	2,82	2,29485
1,18	1,35537	1,73	1,64886	2,28	1,96827	2,83	2,30097
1,19	1,36033	1,74	1,65448	2,29	1,97423	2,84	2,30710
1,2	1,36533	1,75	1,66012	2,3	1,98019	2,85	2,31323
1,21	1,37055	1,76	1,66576	2,31	1,98615	2,86	2,31937
1,22	1,37539	1,77	1,67142	2,32	1,99211	2,87	2,32551
1,23	1,38043	1,78	1,67708	2,33	1,99809	2,88	2,33164
1,24	1,38547	1,79	1,68276	2,34	2,00407	2,89	2,33778
1,25	1,39051	1,8	1,68844	2,35	2,01005	2,9	2,34392
1,26	1,39559	1,81	1,69412	2,36	2,01603	2,91	2,35007
1,27	1,40068	1,82	1,69982	2,37	2,02202	2,92	2,35622
1,28	1,40580	1,83	1,70552	2,38	2,02800	2,93	2,36237
1,29	1,41092	1,84	1,71123	2,39	2,03400	2,94	2,36853
1,3	1,41608	1,85	1,71693	2,4	2,04000	2,95	2,37468
1,31	1,42125	1,86	1,72265	2,41	2,04601	2,96	2,38084
1,32	1,42643	1,87	1,72837	2,42	2,05202	2,97	2,38700
1,33	1,43162	1,88	1,73409	2,43	2,05802	2,98	2,39317
1,34	1,43682	1,89	1,73985	2,44	2,06403	2,99	2,39933
1,35	1,44202	1,9	1,74561	2,45	2,07005	3,0	2,40549
1,36	1,44722	1,91	1,75137	2,46	2,07608	3,01	2,41166
1,37	1,45246	1,92	1,75713	2,47	2,08211	3,02	2,41783
1,38	1,45772	1,93	1,76289	2,48	2,08813	3,03	2,42401
1,39	1,46300	1,94	1,76867	2,49	2,09416	3,04	2,43018
1,4	1,46831	1,95	1,77445	2,5	2,10018	3,05	2,43635
1,41	1,47363	1,96	1,78025	2,51	2,10622	3,06	2,44253
1,42	1,47895	1,97	1,78606	2,52	2,11227	3,07	2,44871
1,43	1,48427	1,98	1,79182	2,53	2,11831	3,08	2,45489
1,44	1,48959	1,99	1,79763	2,54	2,12436	3,09	2,46107
1,45	1,49491	2,0	1,80345	2,55	2,13040	3,1	2,46725
1,46	1,50027	2,01	1,80927	2,56	2,13646	3,11	2,47344
1,47	1,50563	2,02	1,81509	2,57	2,14251	3,12	2,47963
1,48	1,51101	2,03	1,82091	2,58	2,14857	3,13	2,48582
1,49	1,51641	2,04	1,82675	2,59	2,15463	3,14	2,49201
1,5	1,52181	2,05	1,83259	2,6	2,16069	3,15	2,49820
1,51	1,52723	2,06	1,83843	2,61	2,16676	3,16	2,50440
1,52	1,53265	2,07	1,84428	2,62	2,17282	3,17	2,51060
1,53	1,53809	2,08	1,85014	2,63	2,17887	3,18	2,51680
1,54	1,54353	2,09	1,85600	2,64	2,18499	3,19	2,52300
1,55	1,54898	2,1	1,86186	2,65	2,19106	3,2	2,52920

Tabelle zur Zusammensetzung von Biegungs- und Drehungsmomenten. 607

$\frac{\alpha_0 M_d}{M}$	$\xi$						
3,21	2,53541	3,66	2,81620	4,11	3,09944	4,56	3,38444
3,22	2,54162	3,67	2,82247	4,12	3,10576	4,57	3,39079
3,23	2,54782	3,68	2,82875	4,13	3,11208	4,58	3,39714
3,24	2,55403	3,69	2,83502	4,14	3,11840	4,59	3,40349
3,25	2,56024	3,7	2,84129	4,15	3,12471	4,60	3,40984
3,26	2,56646	3,71	2,84757	4,16	3,13103	4,61	3,41620
3,27	2,57267	3,72	2,85385	4,17	3,13735	4,62	3,42255
3,28	2,57889	3,73	2,86012	4,18	3,14368	4,63	3,42890
3,29	2,58510	3,74	2,86640	4,19	3,15000	4,64	3,43526
3,3	2,59132	3,75	2,87268	4,2	3,15632	4,65	3,44161
3,31	2,59754	3,76	2,87896	4,21	3,16264	4,66	3,44797
3,32	2,60377	3,77	2,88525	4,22	3,16897	4,67	3,45432
3,33	2,61000	3,78	2,89153	4,23	3,17529	4,68	3,46068
3,34	2,61622	3,79	2,89782	4,24	3,18162	4,69	3,46704
3,35	2,62245	3,8	2,90410	4,25	3,18794	4,7	3,47339
3,36	2,62868	3,81	2,91039	4,26	3,19427	4,71	3,47975
3,37	2,63491	3,82	2,91668	4,27	3,20060	4,72	3,48611
3,38	2,64116	3,83	2,92297	4,28	3,20693	4,73	3,49247
3,39	2,64739	3,84	2,92925	4,29	3,21326	4,74	3,49882
3,4	2,65362	3,85	2,93554	4,3	3,21959	4,75	3,50518
3,41	2,65986	3,86	2,94183	4,31	3,22592	4,76	3,51154
3,42	2,66610	3,87	2,94813	4,32	3,23226	4,77	3,51790
3,43	2,67234	3,88	2,95442	4,33	3,23859	4,78	3,52427
3,44	2,67858	3,89	2,96072	4,34	3,24492	4,79	3,53063
3,45	2,68482	3,9	2,96701	4,35	3,25125	4,8	3,53699
3,46	2,69106	3,91	2,97331	4,36	3,25759	4,81	3,54335
3,47	2,69731	3,92	2,97961	4,37	3,26393	4,82	3,54972
3,48	2,70355	3,93	2,98591	4,38	3,27026	4,83	3,55608
3,49	2,70980	3,94	2,99220	4,39	3,27660	4,84	3,56245
3,5	2,71604	3,95	2,99850	4,4	3,28293	4,85	3,56881
3,51	2,72229	3,96	3,00480	4,41	3,28927	4,86	3,57518
3,52	2,72854	3,97	3,01111	4,42	3,29561	4,87	3,58155
3,53	2,73480	3,98	3,01741	4,43	3,30195	4,88	3,58792
3,54	2,74105	3,99	3,02372	4,44	3,30829	4,89	3,59428
3,55	2,74730	4,0	3,03002	4,45	3,31463	4,9	3,60065
3,56	2,75356	4,01	3,03633	4,46	3,32097	4,91	3,60702
3,57	2,75982	4,02	3,04264	4,47	3,32732	4,92	3,61339
3,58	2,76608	4,03	3,04894	4,48	3,33366	4,93	3,61976
3,59	2,77234	4,04	3,05525	4,49	3,34001	4,94	3,62613
3,6	2,77860	4,05	3,06156	4,5	3,34635	4,95	3,63250
3,61	2,78487	4,06	3,06787	4,51	3,35269	4,96	3,63887
3,62	2,79113	4,07	3,07419	4,52	3,35905	4,97	3,64525
3,63	2,79740	4,08	3,08050	4,53	3,36540	4,98	3,65162
3,64	2,80366	4,09	3,08682	4,54	3,37174	4,99	3,65800
3,65	2,80993	4,1	3,09313	4,55	3,37809	5,0	3,66437

Beispiel. Es sei

$$M_d = 21\,240 \text{ cmkg}, \quad M = 29\,500 \text{ cmkg}, \quad \alpha_0 = 1.$$

Dann ist

$$\frac{\alpha_0 M_d}{M} = 0,72;$$

dem entspricht nach der Tabelle  $\xi = 1,15099$ .

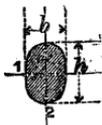
Mithin ergibt sich

$$M_i = 1,15099 \cdot 29\,500 = 33\,954,5 \text{ cmkg}.$$

2. **Elliptischer Querschnitt** (Abb. 65). Das Biegemoment  $M$  werde zerlegt in  $M_1$  mit der Achse 1 und  $M_2$  mit der Achse 2.

Die genaue Ermittlung der größten Hauptspannung ist umständlich. Zur Querschnittbestimmung genügt es indessen,  $h$  und  $b$  aus den beiden Gleichungen zu berechnen:

$$\text{Abb. 65.} \quad \frac{\pi}{32} b h^2 k b \geq M_1' = 0,35 M_1 + 0,65 \sqrt{M_1^2 + (\alpha_0 M d)^2},$$



$$\frac{\pi}{32} b^2 h k b \geq M_2'' = 0,35 M_2 + 0,65 \sqrt{M_2^2 + (\alpha_0 M d)^2},$$

worin  $\alpha_0 = kb : 1,3 kd$ .

Zur Ermittlung von  $M_1'$  und  $M_2''$  kann die Tabelle der Werte  $\xi$  auf S. 605 u. f. dienen.

Für  $M_1 = 0$  tritt die größte Spannung in den Endpunkten der Achse  $b$  ein; in allen übrigen Fällen findet sich die größte Spannung in einem Umfangspunkte zwischen 1 und 2, Abb. 65.

3. **Rechteck-Querschnitt** (Abb. 66).  $M_1$  und  $M_2$  haben dieselbe Bedeutung wie vorstehend unter 2; es gilt hier

$$\text{Abb. 66.} \quad \frac{1}{6} b h^2 k b \geq M_1' = 0,35 M_1 + 0,65 \sqrt{M_1^2 + (\frac{3}{2} \alpha_0 M d)^2},$$



$$\frac{1}{6} b^2 h k b \geq M_2'' = 0,35 M_2 + 0,65 \sqrt{M_2^2 + (\frac{3}{2} \alpha_0 M d)^2}.$$

Zur Ermittlung von  $M_1'$  und  $M_2''$  kann die Tabelle der Werte  $\xi$  auf S. 605 u. f. dienen.

Nachzurechnen ist, ob

$$\frac{M_1}{\frac{1}{6} b h^2} + \frac{M_2}{\frac{1}{6} b^2 h} \leq kb. \quad (\text{Vgl. S. 546.})$$

Für die größte Spannung gilt das unter 2. Gesagte.

## III. FESTIGKEIT EINFACH GEKRÜMMTER STÄBE.

### A. Normalspannungen.

Die Mittellinie des Stabes sei eine ebene Kurve, ihre Ebene der geometrische Ort der Hauptachse sämtlicher Stabquerschnitte sowie der Richtungslinien der äußeren Kräfte. Diese mögen für den betrachteten Querschnitt  $QQ$  eine Normalkraft und ein Biegemoment ergeben.

Es bezeichnet (Abb. 67)

- $P$  die Normalkraft im Schwerpunkte  $S$  des Querschnittes, in kg; positiv oder negativ, je nachdem sie als Zug oder Druck wirkt,
- $M$  das Biegemoment in cmkg; positiv oder negativ, je nachdem es die Krümmung verstärkt oder abschwächt,
- $F$  den Querschnitt des Stabes in qcm,

- $r$  den ursprünglichen Krümmungshalbmesser der Stab-Mittellinie im Schwerpunkte von  $Q Q$ , in cm,
- $\rho$  denselben unter der Wirkung von  $P$  und  $M$ , in cm,
- $\sigma$  die Normalspannung in kg/qcm, die durch  $P$  und  $M$  im Abstände  $y$  von der winkelrecht zur Mittelebene stehenden Hauptachse von  $Q Q$  erzeugt wird; dabei ist  $y$  positiv oder negativ, je nachdem der Abstand vom Schwerpunkte  $S$  aus vom Krümmungspunkte  $O$  weg oder nach diesem hin zu messen ist,
- $E$  das Elastizitätsmaß in kg/qcm.

Dann ist die **Normalspannung**

$$\sigma = \left( P + \frac{M}{r} \right) \frac{1}{F} + \frac{M y}{\alpha F r (r + y)},$$

worin

$$\alpha = - \frac{1}{F} \int \frac{y dF}{r + y},$$

also ein nur von Querschnitt und Krümmung abhängiger Wert ist.\*) Das Integral erstreckt sich über den ganzen Querschnitt.

Setzt man  $-r^2 \int \frac{y dF}{r + y} = \alpha F r^2 = J_0,$

so ergibt sich auch  $\sigma = \left( P + \frac{M}{r} \right) \frac{1}{F} + \frac{M r}{J_0} \frac{y}{r + y}.$

Die Spannungen wachsen also nicht, wie bei dem geraden Stabe, proportional dem Abstände der Fasern von der Schwerachse.

Ist der Krümmungshalbmesser  $r$  gegenüber  $y$  sehr groß, so wird  $J_0 = J$ , d. i. gleich dem äquatorialen Trägheitsmomente des Querschnittes (in cm<sup>4</sup>), bezogen auf die Schwerachse  $S$  winkelrecht zu  $Q Q$ .

Die Spannung  $\sigma$  ist null, wenn

$$y = - \left( 1 + \frac{P r}{M} \right) \frac{\alpha}{1 + \alpha} r;$$

die **Nullinie** geht also bei krummen Stäben nur dann durch den Schwerpunkt  $S$  des Querschnittes, wenn  $1 + \frac{P r}{M} = 0$  oder  $M = -P r$ , d. h. wenn der Querschnitt durch eine Einzellast beansprucht wird, die durch den Krümmungsmittelpunkt  $O$  geht und winkelrecht zum Querschnitte gerichtet ist.

**Schubspannung.** Durch eine aufser  $P$  und  $M$  vorhandene Schubkraft  $Q$  entstehen Schubspannungen  $\tau$ , die sich nach der Formel für  $\tau$  auf S. 539 ermitteln, wenn dort  $\alpha F (r \pm y)^2$  statt  $J$  gesetzt wird.

**Krümmungshalbmesser  $\rho$ .** Angenähert ist  $\frac{1}{\rho} = \frac{1}{r} + \frac{M}{E \alpha F r^2},$

worin  $\alpha F r^2 = J_0$ , und, wenn  $r$  gegenüber  $y$  sehr groß ist, statt  $J_0$   $J$  zu setzen ist.

Abb. 67.



\*) Ueber die Bedeutung und zeichnerische Bestimmung von  $\alpha$  s. Bantlin, Z. d. V. d. I. 1901 S. 164. Ueber die Berechnung von  $\sigma$  mit Berücksichtigung der durch die Querkraft erzeugten Normalspannungen und Formänderungen s. C. Pfeleiderer, Z. d. V. d. I. 1907 S. 209.

Bei großem  $r$  berechnen sich also Spannung  $\sigma$  und Aenderung der Krümmung nahezu wie bei geraden Stäben.

Wert  $x = \frac{J_0}{F r^2}$  für verschiedene Querschnitte:

Für das **Rechteck** (Höhe  $h = 2e$  in Richtung von  $y$  gemessen) ist

$$x = -1 + \frac{r}{h} \ln \frac{2r+h}{2r-h} = \frac{1}{3} \left(\frac{e}{r}\right)^2 + \frac{1}{5} \left(\frac{e}{r}\right)^4 + \frac{1}{7} \left(\frac{e}{r}\right)^6 + \dots$$

Für den **Kreis** (Halbmesser  $e$ ) und die **Ellipse** (Halbachse in der Stabebene  $= e$ ) ist

$$x = \frac{1}{4} \left(\frac{e}{r}\right)^2 + \frac{1}{8} \left(\frac{e}{r}\right)^4 + \frac{5}{64} \left(\frac{e}{r}\right)^6 + \dots$$

Für das symmetrische **Trapez** (Parallelseiten  $b_1$  und  $b_2$ , wobei  $b_2 < b_1$ , Höhe  $h$ , Schwerpunkt-Abstände von  $b_1$  und  $b_2$   $e_1$  und  $e_2$ ) ist

$$x = -1 + \frac{2r}{(b_1 + b_2)h} \left\{ \left[ b_2 + \frac{b_1 - b_2}{h} (e_2 + r) \right] \ln \frac{r + e_2}{r - e_1} - (b_1 - b_2) \right\}.$$

Für das gleichschenklige **Dreieck** (Grundlinie  $b$ , Höhe  $h$ ) ist

$$x = -1 + \frac{2r}{h} \left[ \left( \frac{2}{3} + \frac{r}{h} \right) \ln \frac{r + \frac{2}{3}h}{r - \frac{1}{3}h} - 1 \right].$$

Nach C. Pfeleiderer\*) ergeben sich näherungsweise die **Randspannungen**  $\sigma_a$ ,  $\sigma_i$  des Querschnittes  $Q Q$  (Abb. 67) aus

$$\sigma_a = \frac{P}{F} + \frac{M}{W} (1 - m_a), \quad \sigma_i = \frac{P}{F} - \frac{M}{W} (1 + m_i),$$

$\sigma_a$  liegt vom Krümmungsmittelpunkt des Stabes am weitesten,  $\sigma_i$  am nächsten;  $W$  bezeichnet das Widerstandsmoment des Querschnitts für die entsprechende Querschnittsseite.  $m_a$  und  $m_i$  sind aus folgender Tabelle (Bezeichnungen wie oben) zu entnehmen:

Querschnitt	$m_a$	$m_i$
<b>Kreis</b> und <b>Ellipse</b>	$\frac{0,6}{\frac{r}{e} + 0,2}$	$\frac{0,6}{\frac{r}{e} - 0,88}$
<b>Trapez</b> , gleichschenkliges. $e_2 : e_1 = \varepsilon > 1$ .	$\frac{0,6 \varepsilon - 0,14}{\frac{r}{e_1} + (\varepsilon - 1)(13 - 4\varepsilon) 0,16}$	$\frac{0,2 \varepsilon + 0,3}{\frac{r}{e_1} - 0,9 + 0,06 \varepsilon}$
<b>Rechteck</b> . $\varepsilon = 1$ . $e_1 = e_2 = \frac{1}{2}h$	$\frac{0,23}{\frac{r}{h}}$	$\frac{0,25}{\frac{r}{h} - 0,45}$
<b>Dreieck</b> , gleichschenkliges. $\varepsilon = 2$ . $2e_1 = e_2 = \frac{2}{3}h$	$\frac{1,06}{\frac{3r}{h} + 0,8}$	$\frac{0,7}{\frac{3r}{h} - 0,78}$

Ueber ein Verfahren von R. Baumann zur Bestimmung der **Formänderung** einfach gekrümmter Stäbe s. Z. d. V. d. I. 1910 S. 1675.

\*) Z. d. V. d. I. 1907 S. 1507.

## B. Normal- und Schubspannungen.\*)

Die Mittellinie des Stabes sei eine Halbkreislinie  $BAB_1$  (Abb. 68) in wagerechter Ebene, an den Endpunkten  $B$  und  $B_1$  des Durchmessers  $BB_1$  fest eingespannt; die lotrechte Belastung erfolge unmittelbar auf der Mittellinie des Stabes. (**Balkenträger.**)

In jedem Stabquerschnitte tritt dann ein Biegemoment  $M_b$  und ein Drehmoment  $M_d$  auf.

### 1. Belastung durch zwei symmetrisch angreifende Einzellasten. (Abb. 68.)

Bezeichnet

$P$  jede der beiden Einzellasten, in kg,

$r$  den Halbmesser der Stab-Mittellinie, in cm,

$\alpha$  den die Lage der Einzelkräfte in bezug auf die Symmetrielinie  $OA$  bestimmenden Zentriwinkel,

so ist im Punkte  $A$

$$\text{das Biegemoment } M_b(a) = \frac{2}{\pi} Pr \left[ \cos \alpha - \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right) \sin \alpha \right],$$

$$\text{das Drehmoment } M_d(a) = 0;$$

in den Punkten  $B$  und  $B_1$

$$\text{das Biegemoment } M_b(b) = Pr \cos \alpha,$$

$$\text{das Drehmoment } M_d(b) = \frac{2}{\pi} Pr \left[ \frac{\pi}{2} - \cos \alpha - \alpha \sin \alpha \right].$$

Zur Berechnung des Querschnittes sind  $M_b$  und  $M_d$  (in cmkg) nach S. 605 zu einem  $M_i$  zusammensetzen.  $M_i$  max ergibt sich für  $B$  und  $B_1$ .

Für den I-förmigen Querschnitt ist annähernd  $W_b = W_d$ ; das erforderliche  $W_b$  ist nahezu

$$W_b = 1,12 \frac{Pr \cos \alpha}{k_b} \text{ cm}^3,$$

also um 12 vH größer als ohne Rücksicht auf das Drehmoment.

### 2. Gleichförmig verteilte Belastung. (Abb. 69.)

Bezeichnet

$p$  die Belastung auf 1 cm Länge des Stabes, in kg,

$r$  den Halbmesser der Stab-Mittellinie, in cm,

so ist für einen beliebigen Punkt  $C$  (und  $C_1$ ),  
entsprechend dem Zentriwinkel  $\varphi$ ,

das Biegemoment

$$M_b = pr^2 \left( 1 - \frac{4}{\pi} \cos \varphi \right) = \frac{dM_d}{d\varphi},$$

das Drehmoment

$$M_d = pr^2 \left( \varphi - \frac{4}{\pi} \sin \varphi \right).$$

Abb. 68.

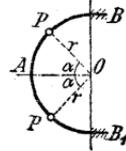
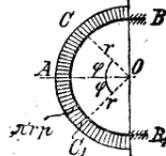


Abb. 69.



\*) Nach M. Koenen, D. B. 1885 S. 607.

Für  $\varphi = 0$  ist

$$M_b(a) = pr^2 \left(1 - \frac{4}{\pi}\right); \quad M_d(a) = 0.$$

Für  $\varphi = 90^\circ$  ist

$$M_b(b) = M_{\max} = pr^2; \quad M_d(b) = pr^2 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\right) = 0,32 pr^2$$

(als absolutes Maximum).

Für  $\varphi = 38^\circ 14'$  ergibt sich  $M_d(\min) = -0,12 pr^2$ , für  $\varphi = 65^\circ$  wiederum  $M_d = 0$ .

Größte Beanspruchung bei  $B$  und  $B_1$ . Zur Berechnung des Querschnittes sind  $M_b$  und  $M_d$  nach S. 605 zu einem  $M_i$  zusammenzusetzen.

Für den I-förmigen Querschnitt (vgl. 1.) ist annähernd das erforderliche

$$W_b = 1,12 \frac{pr^2}{k_b} \text{ cm}^3.$$

3. Für andere Belastungsfälle können mit Hilfe von 1. und 2. die Werte von  $M_b$  und  $M_d$  ermittelt werden.

## IV. FESTIGKEIT DER FEDERN.

### Allgemeines.

Federn werden als vollkommen elastisch (innerhalb der Elastizitätsgrenze  $\sigma_e$  beansprucht) und dem Hookeschen Gesetze folgend (innerhalb der Proportionalitätsgrenze  $\sigma_p$  beansprucht) vorausgesetzt.

Es bedeutet

$P$  die zulässige Belastung (Tragfähigkeit) der Feder in kg,

$f$  die Durchbiegung, entsprechend der Belastung  $P$  oder der zulässigen Spannung  $k_b$  oder  $k_d$  in cm,

$l$  die Länge der Feder in cm,

$n$  die Anzahl der Blätter oder der Windungen,

$V$  den Rauminhalt der Feder in ccm,

$k_b$  die zulässige Spannung für Biegung in kg/qcm,

$k_d$  die zulässige Spannung für die Drehung in kg/qcm.

Die Größen  $E$  und  $G$  s. S. 503 und 506; die übrigen Bezeichnungen (in cm) sind aus den Abbildungen zu entnehmen.

Die **Arbeit** in cmkg, die von einer Feder bei ihrer Durchbiegung von null bis  $f$  aufgenommen wird (die sogen. „Federungsarbeit“), ist

$$A = \frac{Pf}{2} = \frac{1}{c} \frac{k_b^2}{E} V. \quad (\text{Vgl. S. 505.})$$

Hierbei ist vorausgesetzt, daß die Kraft  $P$ , proportional der Durchbiegung der Feder, stetig von null bis  $P$  gewachsen ist.  $c$  be-

deutet einen Wert, der nur von der Form der Feder abhängt; er gibt das Verhältnis der Rauminhalte (des Stoffverbrauches) bei verschiedenen Federn gleichen Stoffes an, die bei gleicher Arbeit die gleiche Beanspruchung erfahren. — Federn gleicher Grundform und gleichen Stoffes haben daher bei gleicher Beanspruchung und gleicher Federungsarbeit gleiches Gewicht.

Die **Schwingungszeit**  $T$  (in sk) einer (gewichtlos gedachten) Feder ist gleich der eines einfachen Kreispendels, dessen Länge gleich ist der durch die Belastung  $P$  erzeugten Durchbiegung  $f$  (in m):

$$T = \pi \sqrt{\frac{f}{g}}. \quad (\text{Vrgl. S. 213.})$$

## a. Biegefedern.

### 1. Gerade Biegefedern.

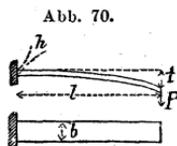
[Vrgl. Fall 1 S. 564. Tafel für  $\frac{1}{6}bh^2$  und  $\frac{1}{12}bh^3$  s. S. 560 u. f.]

#### 1. Rechteckfeder (Abb. 70).

$$P = \frac{bh^2}{6} \frac{kb}{l}; \quad J = \frac{bh^3}{12};$$

$$f = \frac{P}{EJ} \frac{l^3}{3} = 4 \frac{l^3}{bh^3} \frac{P}{E} = \frac{2}{3} \frac{l^2}{h} \frac{kb}{E};$$

$$A = \frac{Pf}{2} = \frac{1}{18} \frac{kb^3}{E} V.$$

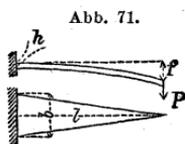


2. **Dreieckfeder** (Abb. 71). Sie bildet einen Träger von gleichem Widerstande gegen Biegung (vrgl. S. 544 und 580). Die elastische Linie ist ein Kreisbogen (s. S. 550).

$$P = \frac{bh^2}{6} \frac{kb}{l}; \quad J = \frac{bh^3}{12};$$

$$f = \frac{P}{EJ} \frac{l^3}{2} = 6 \frac{l^3}{bh^3} \frac{P}{E} = \frac{l^2}{h} \frac{kb}{E};$$

$$A = \frac{Pf}{2} = \frac{1}{6} \frac{kb^2}{E} V.$$

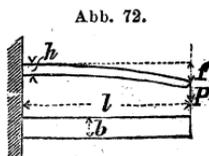


3. **Rechteckfeder, nach der kubischen Parabel zugeschräpft** (Abb. 72). Die elastische Linie ist ein Kreisbogen (s. S. 550).

$$P = \frac{bh^2}{6} \frac{kb}{l}; \quad J = \frac{bh^3}{12};$$

$$f = \frac{P}{EJ} \frac{l^3}{2} = 6 \frac{l^3}{bh^3} \frac{P}{E} = \frac{l^2}{h} \frac{kb}{E};$$

$$A = \frac{Pf}{2} = \frac{1}{9} \frac{kb^2}{E} V.$$



## 2. Zusammengesetzte Biegefedern.

Legt man mehrere der unter 1. genannten Blattfedern aufeinander, so erhält man ein Blattfederwerk. Hauptbedingungen für ein gutes Blattfederwerk sind:

- 1) dafs es möglichst einen Körper von gleichem Widerstande gegen Biegung bilde,
- 2) dafs es bei der Biegung nicht klatfe, d. h., dafs sich die Blätter nicht voneinander entfernen; die elastische Linie muß daher ein Kreisbogen sein.

Wie aus dem unter 1. Gesagten hervorgeht, erfüllt nur das erste der folgenden Federwerke diese beiden Bedingungen; die anderen Federwerke erfüllen nur die Bedingung 2).

### 1. Geschichtete Dreieckfeder.

Wenn man die Dreieckfeder (Abb. 73 I) in eine gerade Anzahl  $2n$  gleich breiter Streifen (hier acht Streifen von der Breite  $\frac{1}{2}b$ ) zerschnitten denkt und die Streifen so zusammenfügt, dafs sie den Körper Abb. 73 II bilden, so erhält man ein zweckmäßiges Blattfederwerk, das dieselbe Tragfähigkeit hat, wie die Dreieckfeder von der Fußbreite  $nb$ , wobei  $n$  die Anzahl der Blätter (der Lagen) bezeichnet. Es ist also

$$P = n \frac{b h^2}{6} \frac{k_b}{l}; \text{ mithin } n = \frac{Pl}{\frac{1}{6} b h^2 k_b}.$$

**2. Geschichtete Rechteckfeder, nach der kubischen Parabel zugeschräfft.** Anstatt die Enden der einzelnen Federlagen dreieckig zu machen, schärft man sie nach der kubischen Parabel (vgl. S. 582 und oben, unter 3.) zu, so dafs die Lagen überall gleiche Breite haben (Abb. 74).

Abb. 74.

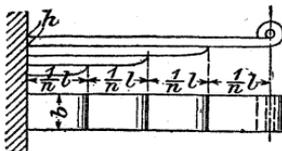


Abb. 75.

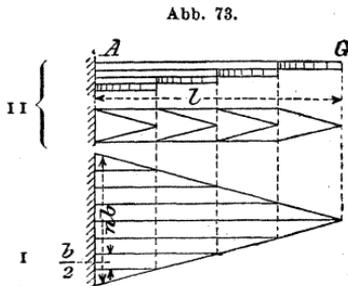
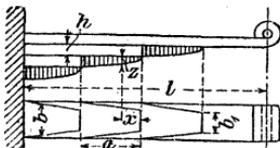


Abb. 73.

**3. Trapezfeder mit Zuschärfung.** Die Enden der einzelnen Federlagen sind trapezförmig. Dabei muß außerdem eine Zuschärfung eintreten, die sich aus folgender Formel (Bezeichnungen s. Abb. 75) ergibt:

$$z = \frac{h}{\sqrt[3]{1 + \frac{b_1}{b} \left( \frac{a}{x} - 1 \right)}}.$$

4. In der Regel sind zwei Federwerke von einer der betrachteten Formen durch den Federbund vereinigt; sie erhalten hierbei in unbelasteten Zustande

eine **kreisförmige Krümmung** mit dem Pfeil  $p_0$  (in cm). Durch die am Federbunde angreifende (ruhende) Belastung  $2P$  (in kg) verringert sich der Pfeil  $p_0$  auf  $p$  (in cm); die Durchbiegung des Federwerkes ist mithin (in cm):  $f = p_0 - p$ .

### Tragfedern der Eisenbahnfahrzeuge.

Die am Federbund angreifende Last  $2P$  (in kg) ergibt in den geneigten Gehängen je eine Zugkraft  $P \cdot \cos \alpha$ ; diese zerlegt sich in die lotrechte Kraft  $P$  und die wagerechte Kraft  $P \cdot \operatorname{tg} \alpha$ , die zusammen ein Biegemoment  $M = P(l + p \operatorname{tg} \alpha)$  hervorgerufen (s. Abb. 76, achtlagige preufs. Normalfeder für Güterwagen). Da die unter 1. angegebenen Gleichungen auch für gekrümmte Federn anwendbar sind, so ist mit den Bezeichnungen von S. 612

die Tragkraft  $2P = 2n \frac{bh^2}{6} \frac{k_b}{l + p \operatorname{tg} \alpha}$   
und die Durchbiegung

$$f = 6 \frac{P}{n b h^2} \frac{P(l + p \operatorname{tg} \alpha)}{E} = \frac{P^2 k_b}{h E}.$$

Für  $p$  kann hierin angenähert  $p_0$  gesetzt werden (genau  $p = p_0 - f$ ).

Die oberste Federlage hat außer der Biegespannung die Zugkraft  $P \operatorname{tg} \alpha$ , sowie die Querkraft  $P$  aufzunehmen, die dort eine zusätzliche Normalspannung  $\sigma = P \operatorname{tg} \alpha : bh$  bzw. eine Schubspannung  $\tau$  erzeugen, die nach S. 539 zu ermitteln ist.

Bei der Bestimmung der Anzahl  $n$  der Federlagen für ein vorhandenes Federblatt ist auf die durch die Federschwingungen während der Fahrt hervorgerufene Mehrbelastung der Feder Rücksicht zu nehmen. Es empfiehlt sich hierfür (zumal, wenn der Einfluss der Spannungen  $\sigma$  und  $\tau$  unbeachtet bleiben soll) in der vorstehenden Formel für die Tragkraft  $2P$  (ruhende Belastung)  $k_b$  niedrig, u. zw. 5800 bis 6500 kg/qcm zu wählen. (Vrgl. S. 524.)

Federbock (s. Abb. 76). Ist  $D$  die Druckkraft in der Stütze und  $Z$  die Zugkraft in der Strebe, so ergibt sich

$$D = P(1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta) \text{ und } Z = \frac{P \operatorname{tg} \alpha}{\cos \beta}.$$

### 3. Gewundene Biegefedern.

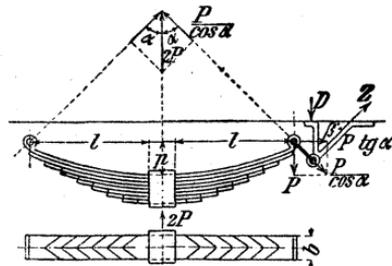
[Tafel für  $\frac{1}{6}bh^2$  und  $\frac{1}{12}bh^2$  s. S. 560 u. f.; Tafel für  $\frac{1}{32}\pi d^3$  und  $\frac{1}{64}\pi d^4$  s. S. 556.]

Die Belastung dieser Federn besteht in einem Kräftepaar  $Pr$  (oder  $\frac{P}{2} \cdot 2r$ ), mit dem die in der Federmitte oder -achse liegende Spindel beim Aufziehen der Feder gedreht oder nach dem Aufziehen festgehalten wird. Soll die Spindel selbst nicht auf Biegung beansprucht werden, so müssen in den Abb. 78 u. 79 statt der dort angegebenen Einzelkraft  $P$  am Umfange der Kraftscheibe zwei gleiche, entgegengesetzt gerichtete Kräfte  $\frac{P}{2}$  angreifend gedacht werden. Dasselbe gilt, wenn in Abb. 77 die Achse nicht auf Scherung beansprucht werden soll. Die Formeln bleiben dabei ungeändert.

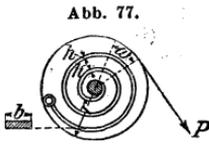
Die Federn sind am einen Ende fest eingespannt, am anderen (in Abb. 77 äußeren, in Abb. 78 u. 79 an der Kraftscheibe sitzenden) Ende dagegen frei drehbar befestigt gedacht. Das auf den gefährlichen Querschnitt wirkende Biegemoment ist stets  $= Pr$ , nicht  $2Pr$ .

$l$  ist die Länge der gestreckt gedachten Feder.

Abb. 76.



## 1. Spiralfeder mit rechteckigem Querschnitte (Abb. 77).

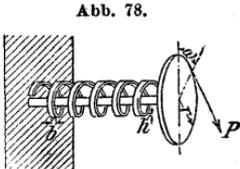


$$P = \frac{bh^2 kb}{6r}; \quad J = \frac{bh^3}{12};$$

$$f = r\omega = \frac{P}{EJ} lr^2 = 12 \frac{Plr^2}{Ebh^3} = 2 \frac{rl kb}{h E};$$

$$A = \frac{Pf}{2} = \frac{1}{6} \frac{kb^2}{E} V.$$

## 2. Schraubenfeder mit rechteckigem Querschnitte (Abb. 78).

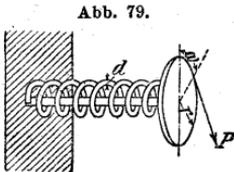


$$P = \frac{bh^2 kb}{6r}; \quad J = \frac{bh^3}{12};$$

$$f = r\omega = \frac{P}{EJ} lr^2 = 12 \frac{Plr^2}{Ebh^3} = 2 \frac{rl kb}{h E};$$

$$A = \frac{Pf}{2} = \frac{1}{6} \frac{kb^2}{E} V.$$

## 3. Schraubenfeder mit kreisförmigem Querschnitte (Abb. 79).



$$P = \frac{\pi d^3 kb}{32r}; \quad J = \frac{\pi d^4}{64};$$

$$f = r\omega = \frac{P}{EJ} lr^2 = \frac{64 Plr^2}{\pi E d^4} = 2 \frac{rl kb}{d E};$$

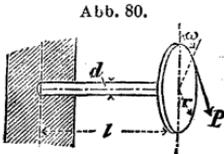
$$A = \frac{Pf}{2} = \frac{1}{8} \frac{kb^2}{E} V.$$

## b. Drehungsfedern.

## 1. Gerade Drehungsfedern.

Hier gelten sinngemäß die unter a. 3. gemachten Bemerkungen.

## 1. Gerade Drehungsfeder mit kreisförmigem Querschnitte. (Abb. 80.)



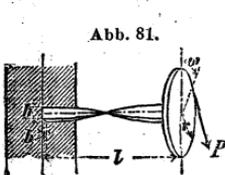
$$P = \frac{\pi d^3}{16} \frac{kd}{r} = 0,1963 \frac{d^3}{r} kd;$$

$$f = r\omega = \frac{32 r^2 l}{\pi d^4} \frac{P}{G} = 2 \frac{rl kd}{d G};$$

$$A = \frac{Pf}{2} = \frac{1}{4} \frac{kd^2}{G} V.$$

## 2. Gerade Drehungsfeder mit rechteckigem Querschnitte (Abb. 81).

Es bezeichnet  $\xi$  das Verhältnis  $b:h$ .



$$P = \frac{2}{9} b^2 h \frac{kd}{r};$$

$$f = r\omega = 3,6 r^2 l \frac{b^2 + h^2}{b^3 h^3} \frac{P}{G} = 0,8 r l \frac{b^2 + h^2}{b h^2} \frac{kd}{G};$$

$$A = \frac{Pf}{2} = \frac{4}{45} (\xi^2 + 1) \frac{kd^2}{G} V.$$

Für den quadratischen Querschnitt ( $\xi=1$ ) ist  $A$  am größten.

## 2. Gewundene Drehungsfedern.

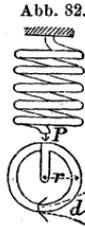
In den Abb. 82 bis 85 bedeutet  $r$  den mittleren Halbmesser, dieses Maß reicht also bis zur Mitte des Federquerschnittes.  $n$  ist die Anzahl der Windungen.

### 1. Zylindrische Schraubenfeder mit kreisförmigem Querschnitte.\*) (Abb. 82.)

$$P = \frac{\pi d^3}{16} \frac{kd}{r} = 0,1963 \frac{d^3}{r} kd;$$

$$f = \frac{64 n r^3}{d^4} \frac{P}{G} = \frac{4 \pi n r^2}{d} \frac{kd}{G};$$

$$A = \frac{Pf}{2} = \frac{1}{4} \frac{kd^2}{G} V.$$



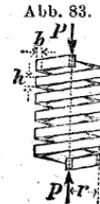
### 2. Zylindrische Schraubenfeder mit rechteckigem Querschnitte (Abb. 83). $\xi$ bezeichnet das Verhältnis $b : h$ .

$$P = \frac{2}{9} b^2 h \frac{kd}{r};$$

$$f = 7,2 \pi n r^3 \frac{b^2 + h^2}{b^3 h^3} \frac{P}{G}$$

$$= 1,6 \pi n r^2 \frac{b^2 + h^2}{b h^2} \frac{kd}{G};$$

$$A = \frac{Pf}{2} = \frac{4}{45} (\xi^2 + 1) \frac{kd^2}{G} V.$$



Für den quadratischen Querschnitt ( $\xi = 1$ ) ist  $A$  am größten.

Nach Versuchen von C. Bach mit vorzüglichem gehärteten Federstahl von  $G = 840000$  und  $K_d = 14000$  ist in der ersten Formel für  $f$  statt des Faktors 7,2 der allgemeinere Wert

$$\phi = 8,35 - 0,3 \frac{h}{b}$$

zu setzen, sofern  $h : b = 1$  bis 6 und  $h$  (bei den Versuchsfedern senkrecht zur Achse liegend)  $< 0,6 r$  ist. (Vgl. S. 591, Fußnote). Dementsprechend ist dann statt 1,6 der Wert  $\frac{2}{9} \phi$  und (in der Formel für  $A$ ) statt  $\frac{4}{45}$  der Wert  $\frac{1}{81} \phi$  zu setzen.

### 3. Kegelfeder mit kreisförmigem Querschnitte (Abb. 84.)\*\*)

$l$  ist die Länge der gestreckt gedachten Feder,  $d$  der Durchmesser des Federquerschnittes.  $r$  nimmt stetig bis auf null ab.

$$P = \frac{\pi d^3}{16} \frac{kd}{r} = 0,1963 \frac{d^3}{r} kd;$$

$$f = \frac{16 r^2 l}{\pi d^4} \frac{P}{G} = 16 n \frac{r^3}{d^4} \frac{P}{G}$$

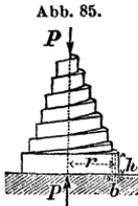
$$= \frac{r l}{d} \frac{kd}{G} = \pi n \frac{r^2}{d} \frac{kd}{G};$$

$$A = \frac{Pf}{2} = \frac{1}{8} \frac{kd^2}{G} V.$$



\*) Eine Tafel der Tragfähigkeit und Durchbiegung dieser Feder findet sich Z. d. V. d. I. 1891 S. 1398, wobei  $k_d = 4500$  kg/qcm (für guten, gehärteten Federstahl bei nicht wesentlich veränderlicher Belastung) und  $G = 750000$  kg/qcm angenommen ist.

\*\*) Ausführliche Berechnung der Kegelfedern s. V. Meyer, Z. d. V. d. I. 1900 S. 1791.

4. Kegelfeder mit rechteckigem Querschnitte (Abb. 85).  $\xi = b : h$ .

$$P = \frac{2}{9} \frac{b^2 h}{r} kd;$$

$$f = 1,8 r^2 l \frac{b^2 + h^2}{b^3 h^3} \frac{P}{G} = 1,8 \pi n r^3 \frac{b^2 + h^2}{b^3 h^3} \frac{P}{G}$$

$$= 0,4 r l \frac{b^2 + h^2}{b h^2} \frac{kd}{G} = 0,4 \pi n r^2 \frac{b^2 + h^2}{b h^2} \frac{kd}{G};$$

$$A = \frac{P f}{2} = \frac{2}{45} (\xi^3 + 1) \frac{kd^2}{G} V.$$

Für den quadratischen Querschnitt ( $\xi = 1$ ) ist  $A$  am größten.

Hinsichtlich der Koeffizienten 1,8, 0,4 und  $\frac{2}{45}$  gilt entsprechendes, wie das unter 2. auf S. 617 Gesagte. Statt 1,8 ist z. B. allgemeiner  $\frac{1}{4} \psi$  zu setzen.

5. Kegelstumpffeder gemäß 3 oder 4 mit den Halbmessern  $r$  und  $r_0$ , wobei  $r > r_0$ . Es gelten die unter 3 und 4 für die Tragfähigkeit  $P$  gegebenen Formeln gleichfalls; für die Ermittlung der Durchbiegung  $f$  ist (in den ersten und zweiten Ausdrücken von  $f$ ) statt  $r^2$  zu setzen  $r^2 + r_0^2$  und statt  $l$  oder  $\pi n r$  zu setzen  $\pi n (r + r_0)$ .

Bemerkung: Die Formeln für die gewundenen Biegungsfedern (a. 3) und für die Drehungsfedern gelten mit hinreichender Annäherung nur dann, wenn die Querschnittsmaße klein sind gegenüber dem Krümmungshalbmesser der Mittellinie und bei kleiner Ganghöhe der Schraubenlinie.

## Kegelstumpffedern der Westfälischen Stahlwerke zu Bochum.

Nr.	Gesamthöhe der Feder		Durchmesser		Querschnitts-		Größte Belastung $P$	Gewicht
	belastet $H_1$	unbelastet $H$	kleinster innerer $2r_0 - b$	größter äußerer $2r + b$	breite $h$	dicke $b$		
	mm	mm	mm	mm	mm	mm	kg	kg
1	145	210	50	170	140	13	9000	20
2	170	310	95	265	155	15	7000	45
3	180	240	54	180	145	12	6000	19,5
4	205	265	52,5	170	180	10	6000	19,8
5	160	225	54	157	145	10	5400	15,5
6	180	240	56	165	145	10	5000	17,2
7	160	230	54	165	145	10	5000	17
8	170	240	74	180	160	10	5000	19,5
9	165	255	53	165	152	8,5	5000	17,5
10	160	230	62	175	145	10	4800	17
11	100	270	60	180	145	10	4600	21
12	65	112	55	185	60	15	4500	9,8
13	145	230	45	140	130	9	4500	11
14	125	200	45	128	120	8	4500	8,5
15	145	230	55	148	130	8,5	4500	12,5
16	205	270	54	145	155	8	4000	13,5
17	140	220	53	165	130	9,5	4000	14
18	140	193	50	140	110	9	3600	7,8
19	190	245	57	152	127	9	3500	11,5
20	75	102	62	165	70	15	3500	8,5

Nr.	Gesamthöhe der Feder		Durchmesser		Querschnitts-		Größte Belastung <i>P</i> kg	Gewicht kg
	belastet <i>H</i> <sub>1</sub> mm	unbelastet <i>H</i> mm	kleinster innerer $2r_0 - b$ mm	größter äußerer $2r + b$ mm	breite <i>h</i> mm	dicke <i>b</i> mm		
21	165	255	48	145	160	7,25	3500	14,8
22	105	185	52	190	80	12	3500	13
23	100	185	50	164	95	10	3500	12,5
24	155	250	54	160	145	7,5	3500	15,3
25	150	260	52	144	140	7	3500	12
26	150	235	46	134	134	7	3400	10,2
27	115	230	18	70	105	6	3300	2,5
28	180	225	43	125	130	7,5	3200	9
29	140	240	58	157	135	7,5	3200	12
30	155	220	53	146	120	8	3000	12,2
31	75	155	55	194	70	12	3000	11
32	65	125	86	180	55	13	3000	7,2
33	110	245	62	173	100	8	3000	13
34	160	250	54	154	150	7	3000	14
35	135	250	84	165	130	7,5	3000	10,5
36	100	180	50	178	95	10	2800	11,5
37	90	185	44	180	80	10,5	2800	10,5
38	95	195	50	215	90	12	2800	18,5
39	165	273	54	150	160	6,8	2750	15
40	100	175	58	150	88	8	2700	7,8
41	110	187	43	135	100	8	2700	7,8
42	105	200	80	200	95	10	2600	14,5
43	155	240	52,5	152,5	146	7	2600	13,3
44	185	330	57	180	145	7,5	2600	25,58
45	145	240	82	165	130	7,5	2500	12,8
46	75	182	65	213	70	11,7	2500	14,5
47	120	195	54	160	110	8	2500	11,4
48	125	160	38	110	100	7	2500	5,5
49	180	240	50	132	130	6,75	2500	9,6
50	150	242	54	130	130	6	2500	10
51	165	255	53	150	130	7	2400	12,4
52	135	240	60	126	130	6	2400	8
53	120	185	54	160	105	8	2200	12
54	185	327	52	164	145	6,5	2100	16,5
55	137	265	60	145	130	6	2000	11
56	135	215	52	132	120	6	1900	7,3
57	165	296	51	149	162	5,5	1800	18
58	75	100	30	85	70	6	1750	2
59	110	195	47	140	105	6	1750	8
60	140	200	52	120	100	6	1700	6,3
61	140	220	55	132	130	6	1500	9
62	115	160	35	93	70	6	1500	3,3
63	70	125	56	137	45	9	1500	3
64	85	183	38	170	75	8	1500	9
65	155	195	30	100	110	5	1500	4,5
66	60	79	48	114	55	7	1200	2,2
67	54	100	53	90	52	4,5	700	1
68	120	158	25	80	115	3	700	2,12
69	80	120	27	70	75	3	550	1,4
70	130	220	38	120	90	6	200	5,5
71	16	30	32	70	14	4	80	0,25

Für diese 71 Nummern sind Wickeldorne vorrätig.

## V. FESTIGKEIT DER PLATTEN UND GEFÄSSE.

(Bei Benutzung sämtlicher Gleichungen ist die **Schlußbemerkung** auf S. 629 zu beachten.)

### a. Ebene Platten.

Es bezeichnet

$s$  die Dicke der Platte in cm,

$f$  ihre Durchbiegung in der Mitte in cm,

$\sigma_{\max}$  die größte auftretende Normalspannung in der Platte in kg/qcm,

$k_b$  die zulässige Biegungsspannung des Stoffes in kg/qcm,

$E$  das Elastizitätsmaß in kg/qcm.

Ferner seien  $\varphi$  und  $\psi$  Zahlen, die von F. Grashof\*) für die beiden Grenzfälle

a) die Platte liegt am Umfange frei, also unabgedichtet auf,

b) die Platte ist am Umfange fest eingespannt,

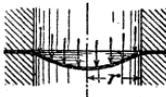
rechnerisch bestimmt worden sind nach Versuchen von C. Bach,\*\*) aber außer von der Befestigungsweise der Platte am Umfange noch von der Größe der Kraft abhängen, mit der die Platte zum Zwecke der Abdichtung gegenüber der Druckflüssigkeit angepreßt wird, von der Art der Abdichtung, von der Beschaffenheit der Oberfläche der Platte da, wo sie die Dichtung berührt, und da, wo sie sich mit ihrer anderen Seite gegen die Auflagerstelle stützt, usw.

Die Fälle 3. und 6. sind nach F. Grashof, die übrigen sämtlich nach C. Bach angegeben.

**1. Kreisförmige Platte**, durch den Flüssigkeitsdruck  $p$  kg/qcm gleichmäßig belastet (Abb. 86 und 87).

Abb. 86.

Abb. 87.



$$\sigma_{\max} = \varphi \frac{r^2}{s^3} p \leq k_b;$$

$$f = \psi \frac{r^4}{s^3} \frac{p}{E}.$$

Je nachdem die Auflagerung am Umfange sich von der in Abb. 87 dargestellten entfernt oder sich ihr nähert, ergibt sich für Gußeisen, solange  $\sigma_{\max}$  in Plattenmitte auftritt,

$$\varphi = 0,8 \text{ bis } 1,2; \quad \psi = 0,17 \text{ bis } 0,60.$$

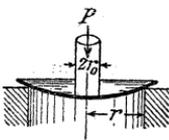
\*) F. Grashof, Theorie der Elastizität und Festigkeit; Berlin 1878.

Eine genauere Theorie sowie Näherungsformeln finden sich in: Ph. Forchheimer, Die Berechnung ebener und gekrümmter Behälterböden, Z. f. B. 1894 S. 450 u. f. Als erweiterter Sonderdruck in 2. Aufl. Berlin 1909. Wilhelm Ernst u. Sohn.

\*\*) C. Bach, Elastizität und Festigkeit, 5. Aufl.; Berlin 1905. Derselbe, Versuche über die Widerstandsfähigkeit ebener Platten; Berlin 1891 (auch Z. d. V. d. I. 1890 S. 1041 u. f.)

Für zähes Flußseisen ist  
 im Falle von Abb. 86 ( $\sigma_{\max}$  am Umfange)  $\varphi = 0,50$ , mindestens  $= 0,45$   
 " " " 87 ( $\sigma_{\max}$  in Plattenmitte)  $\varphi = 0,75$ , " "  $= 0,67$ ,  
 " " die Einspannung am Umfange so weit nachgiebig ist, daß die  
 Beanspruchungen in Plattenmitte und am Umfange gleich groß  
 ausfallen, . . . . .  $\varphi = 0,38$ , mindestens  $= 0,33$ .

Abb. 88.

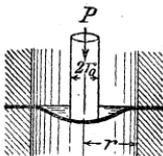


**2. Kreisförmige Platte, in der Mitte** durch die Kraft  $P$  kg **belastet** und **am Umfange frei aufliegend** (Abb. 88). Die Kraft  $P$  ist auf die Kreisfläche  $\pi r_0^2$  gleichmäßig verteilt.

$$\sigma_{\max} = \frac{3}{\pi} \varphi \left( 1 - \frac{2}{3} \frac{r_0}{r} \right) \frac{P}{s^2} \leq k_b;$$

$$f = \psi \frac{r^2}{s^3} \frac{P}{E}.$$

Abb. 89.



Dabei ist  $\varphi = 1,5$  (Gufseisen);  $\psi = 0,4$  bis  $0,5$ .

**3. Kreisförmige Platte, wie unter 2., jedoch am Umfange fest eingespannt** (Abb. 89).

$$\sigma_{\max} = \frac{1,365}{\pi} \frac{P}{s^2} \ln \frac{r}{r_0} \leq k_b;$$

$$f = \frac{0,6825}{\pi} \frac{r^2}{s^3} \frac{P}{E} = 0,22 \frac{r^2}{s^3} \frac{P}{E}.$$

**4. Elliptische Platte, am Umfange aufliegend** und durch den Flüssigkeitsdruck  $p$  kg/qcm **gleichmäßig belastet** (ähnlich wie Abb. 86 u. 87). Große Achse  $= 2a$ , kleine Achse  $= 2b$ , Achsenverhältnis  $b : a = \xi$ .

$$\sigma_{\max} = \varphi \frac{b^2}{s^2} \frac{2p}{1 + \xi^2} \leq k_b,$$

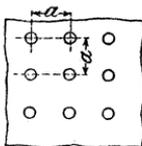
worin  $\varphi = 0,67$  bis  $1,13$  (Gufseisen, vrgl. unter 1.).

Für  $\xi = 1$  (Kreis) ergibt sich hieraus  $\sigma_{\max} = \varphi \frac{b^2}{s^2} p$  (s. unter 1.).

Weiteres s. unter 7, S. 622.

**5. Elliptische Platte, am Umfange frei aufliegend und in der Mitte mit  $P$  kg belastet.** Bezeichnungen wie unter 4.

Abb. 90.



$$\sigma_{\max} = \frac{8}{5\pi} \varphi \frac{8 + 4\xi^2 + 3\xi^4}{3 + 2\xi^2 + 3\xi^4} \xi \frac{P}{s^2} \leq k_b,$$

worin  $\varphi = 1,50$  bis  $1,67$  (Gufseisen).

Für  $\xi = 1$  (Kreis) ergibt sich hieraus  $\sigma_{\max} = \frac{3}{\pi} \varphi \frac{P}{s^2}$  (s. unter 2., wenn  $r_0 = 0$ ).

**6. Die (unbegrenzte) Platte ist durch den Druck  $p$  kg/qcm gleichmäßig belastet und in Punkten gehalten,** die sie in quadratische Felder von der Seite  $a$  teilen (Abb. 90).

Für jedes einzelne Feld ist

$$\sigma_{\max} = 0,2275 \frac{a^2}{s^2} p \leq k_b; \quad f = 0,0284 \frac{a^4}{s^3} \frac{p}{E}.$$

**7. Rechteckige Platte**, am Umfange aufliegend und durch den Flüssigkeitsdruck  $p$  kg/qcm **gleichmäßig belastet.\*)**

$a$  und  $b$  sind die Seiten der rechteckigen Platte;  $b : a = \xi$ .

Bei Annahme der Einspannung der Platte nach der Diagonale wird, wie für die Ellipse:

$$\sigma_{\max} = \varphi \frac{(1/2 b)^2}{s^2} \frac{2p}{1 + \xi^2} \leq kb;$$

mithin für  $b = a$ ,  $\xi = 1$  (quadratische Platte)

$$\sigma_{\max} = 0,25 \varphi \frac{a^2}{s^2} p \leq kb.$$

In diesen Formeln ist  $\varphi = 0,75$  bis  $1,13$  (Gufseisen, vrgl. unter I.).

Für  $b = \infty$  (zweiseitige Auflagerung der Platte) ergibt sich nach S. 568 Fall 10 und S. 566 Fall 8 der Koeffizient von  $\frac{a^2}{s^2} p$  zu  $0,50$  bis  $0,75$ , die Plattenformel 7 würde dafür  $0,5 \varphi$ , also insbesondere für Gufseisen  $0,375$  bis  $0,565$  ergeben.

Verbundplatten von der Länge  $a$  und Breite  $b$  mit winkelrecht sich kreuzenden Eiseneinlagen können, wenn  $a < 1,5 b$ , berechnet werden mit  $M_{\max} = \frac{p b^2}{12}$  (Preufs. Minist.-Bestimmung).

**Zu 4 und 7.** Nach neueren Versuchen von C. Bach\*\*) ist für **Flufseisen** die Zahl  $\varphi$  zu wählen

bei der elliptischen Platte (4)  $\varphi = 0,43$  bis  $0,55$  (max =  $0,86$ ),

„ „ rechteckigen „ (7)  $\varphi = 0,56$  „  $0,75$  („ =  $1,13$ ).

Die eingeklammerten Größtwerte, entsprechend dem Zustande freier Auflagerung (beim Balken Fall 8 S. 566), sind nur ausnahmsweise zu verwenden; meist gilt der Mittelwert ( $0,55$  bzw.  $0,75$ ), entsprechend vollkommener Einspannung (beim Balken Fall 10, S. 568). Der kleinste Wert von  $\varphi$  entspricht dem Einspannungszustande, bei dem das Biegemoment in Plattenmitte gleich ist dem am Plattenrande (entspr.  $M_{\max} = 1/16 p l^2$  beim Balken, vrgl. Fall 10, S. 569, Bem. in erster Spalte).

**Trapezplatten** sind schätzungsweise durch rechteckige zu ersetzen.

**8. Rechteckige Platte**, am Umfange frei aufliegend und **in der Mitte** durch die Kraft  $P$  kg **belastet.\*)**

$a$  und  $b$  sind die Seiten der rechteckigen Platte;  $b : a = \xi$ .

Mit derselben Annahme wie bei 7. wird:

$$\sigma_{\max} = 1,5 \varphi \frac{\xi}{1 + \xi^2} \frac{P}{s^2} \leq kb,$$

worin  $\varphi = 1,75$  bis  $2,00$  (Gufseisen).

Für  $b = a$ ,  $\xi = 1$  (quadratische Platte) erhält man

$$\sigma_{\max} = 0,75 \varphi \frac{P}{s^2} \leq kb.$$

\*) De Laharpe, Notes et formules de l'ingénieur, gibt für die Fälle 7 und 8 folgende Formeln:

$$\text{Fall 7: } \sigma_{\max} = 0,92 \frac{b^2}{s^2} \frac{p}{(1 + \xi^2)^2}; \quad f = 0,19 \frac{b^4}{s^3} \frac{p}{E(1 + \xi^2)^2}.$$

$$\text{Fall 8: } \sigma_{\max} = 2,28 \frac{\xi}{(1 + \xi^2)^2} \frac{P}{s^2}; \quad f = 0,46 \frac{b^2}{s^3} \frac{P \xi}{E(1 + \xi^2)^2}.$$

\*\*) Z. d. V. d. I. 1906 S. 1940.

Zum Vergleiche des Einflusses, den verschiedene Arten der Auflagerung der Ränder quadratischer Platten auf deren Durchbiegung ausüben, gibt Gauthier-Villars (1900) die Formel  $f = \phi \frac{15 b^4 p}{\pi^5 s^3 E}$  mit folgenden Werten von  $\phi$ .

2 Ränder frei aufliegend, 2 eingespannt	$\phi = 0,134,$
3 " " " 1 " "	$\phi = 0,212,$
4 " " " " "	$\phi = 0,310,$
2 " " " 1 " nicht aufliegend	$\phi_1 = 0,430,$
	$\phi_2 = 0,825,$
3 " " " 1 " " "	$\phi_1 = 0,602,$
	$\phi_2 = 0,915,$
2 " " " 2 " " "	$\phi_1 = 0,994,$
	$\phi_2 = 1,110.$

Hierin bedeutet  $\phi_1$  den Wert für die Plattenmitte,  $\phi_2$  den für die Mitte des vierten Randes.

### b. Ebene Zylinderböden mit Krempung.\*)

Die größte auftretende Normalspannung im Boden ist

$$\sigma_{\max} = p \left\{ \varphi \frac{\rho}{s} + \varphi_1 \left[ \frac{r - 0,5 \rho \left( 1 + \frac{\rho}{r} \right)}{s} \right]^2 \right\},$$

worin (in cm)  $s$  die Bodendicke,  $\rho$  den inneren Wölbungshalbmesser der Krempung und  $r$  den inneren Halbmesser des Bodens bzw. des anschließenden Hohlzylinders bedeutet;  $p$  ist der innere Ueberdruck in kg/qcm.

Die Werte von  $\varphi$  und  $\varphi_1$  sind für flufseiserne, in Hohlzylinder eingienietete Böden:  $\varphi = 0,5$  und  $\varphi_1 = 0,33$  bis  $0,38$  (je nach der Nachgiebigkeit des Zylinders und der Nietverbindung); für gufseiserne, angegossene Böden  $\varphi = \varphi_1 = 0,8$ .

### c. Gewölbte Böden mit Flammrohren.

(Nach C. Bach und Pfeleiderer.)

Bei einem eingienieteten Flammrohr (Abb. 91 und 92) tritt die größte Biegungsspannung  $\sigma_b$  in der Krempung auf und es wird

$$\sigma_b = 0,45 p \frac{r_a - r_i}{s^2} \left( r_a - r_i - 2e + \frac{5e^2}{h + 2e} \right).$$

Abb. 91.

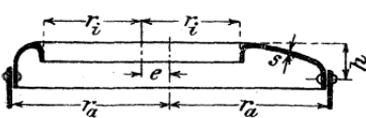
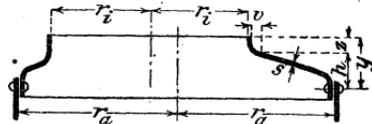


Abb. 92.



Bei Zweiflammrohrböden mit eingienieteten Flammrohren (Abb. 93 und 94) wird

$$\sigma_b = 0,22 p \frac{r_a - 1,5 r_i}{s^2} \left( r_a - r_i - 2e + \frac{5e^2}{h + 2e} \right).$$

\*) C. Bach, Z. d. V. d. I. 1897 S. 1224 u. f.

Hierin bedeutet  $p$  den inneren Ueberdruck in kg/qcm; die übrigen Bezeichnungen ergeben sich aus den Abb. 91 bis 94. Zur Ermittlung von  $h$  kann gewählt werden  $v = 1,5$  bis  $2 s$ .

Bei zähem Fluß Eisen darf hier  $\sigma_b$  Werte bis 1500 kg/qcm erreichen.

Abb. 93.

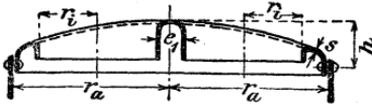
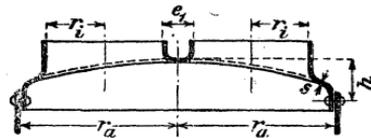


Abb. 94.



**d. Hohlzylinder. \*)**

Es bezeichnet

- $r_i$  den inneren Halbmesser in cm, }  $s = r_a - r_i = \xi 2 r_i = \xi D_i$
- $r_a$  den äußeren Halbmesser in cm, } die Wandstärke in cm,
- $k_z$  die zulässige Zugspannung des Stoffes in kg/qcm,
- $k$  die zulässige Druckspannung des Stoffes in kg/qcm,
- $m = 10/3$  das Verhältnis der Längsdehnung zur Quersammenziehung.

**I. Innerer Ueberdruck  $p_i$  in kg/qcm. Es ist**

$$r_a = r_i \sqrt{\frac{mk_z + (m-2)p_i}{mk_z - (m+1)p_i}} = r_i \sqrt{\frac{k_z + 0,4 p_i}{k_z - 1,3 p_i}} \quad \dots \quad \text{I.}$$

wobei die größte Beanspruchung an der Innenfläche des Hohlzylinders in der Richtung des Umfanges auftritt. In der Richtung der Zylinderachse ist die Beanspruchung des Stoffes (durch die Kraft  $\pi r_i^2 p_i$ ) viel kleiner; für den Fall geringer Wandstärken nur halb so groß als winkelrecht dazu.

Es sind nur solche Verhältnisse möglich, wofür  $p_i < (k_z : 1,3)$  oder  $(p_i : k_z) < 0,77$ .

Für geringe Wandstärken gilt hinreichend genau

$$s = r_i \frac{p_i}{k_z} \quad \dots \quad \text{II.}$$

**Bemerkung.** Ist der Hohlzylinder durch Vernietung oder eine andere Verbindung einzelner Teile hergestellt, so hat man auch die Widerstandsfähigkeit der Verbindung in Betracht zu ziehen.

**Beispiel.** Ein gußeiserner **Profeszylinder** von 36 cm Kolbendurchmesser und 40 cm innerer Weite soll zur Hebung einer Brückenlast von 224 t benutzt werden. Wie groß muß für  $k_z = 600$  kg/qcm die Wandstärke  $s$  sein?

Bei 36 cm Durchmesser hat die Kolbenfläche rd. 1018 qcm Inhalt, so daß die Wasserspannung  $p_i = 224\ 000 : 1018 = 220$  kg/qcm beträgt, also  $p_i : k_z = 220 : 600 = 0,367$ , d. i.  $< 0,77$ . Nach der Tafel S. 625 ist  $\xi = 0,2401$  für  $p_i = 220$  und  $k_z = 600$ , mithin die erforderliche Wandstärke  $s = 0,2401 \cdot 40 = 9,6$  cm.

Formel II würde den zu geringen Wert  $s = 20 \cdot 0,367 = 7,3$  cm ergeben.

**Berechnung der Wandstärke zylindrischer Dampfkessel mit innerem Ueberdrucke s. „Allgemeine polizeiliche Bestimmungen über**

\*) Ueber neue Untersuchungen von W. Krüger über die Anstrengung dickwandiger Hohlzylinder unter Innendruck s. Z. d. V. d. I. 1909 S. 1406.

Werte  $\xi = \frac{s}{D_i}$  zur Berechnung der Wandstärken von Rohren mit innerem Drucke. \*)

$p_i$ kg/qcm	$k_x$ in kg/qcm									
	100	140	180	200	300	400	500	600	800	1000
10	0,0467	0,0324	0,0248	0,0223	0,0146	0,0109	0,0087	0,0072	0,0054	0,0039
12	0,0572	0,0394	0,0301	0,0269	0,0176	0,0131	0,0104	0,0087	0,0065	0,0052
14	0,0681	0,0467	0,0355	0,0317	0,0207	0,0154	0,0122	0,0102	0,0076	0,0060
16	0,0795	0,0541	0,0410	0,0366	0,0238	0,0176	0,0140	0,0116	0,0087	0,0069
18	0,0915	0,0618	0,0467	0,0416	0,0269	0,0199	0,0158	0,0130	0,0097	0,0077
20	0,1040	0,0697	0,0525	0,0467	0,0301	0,0223	0,0176	0,0146	0,0109	0,0087
25	0,1383	0,0906	0,0675	0,0599	0,0383	0,0281	0,0223	0,0184	0,0137	0,0109
30	0,1775	0,1134	0,0835	0,0738	0,0467	0,0342	0,0269	0,0223	0,0165	0,0131
35	0,2231	0,1383	0,1003	0,0885	0,0554	0,0403	0,0317	0,0261	0,0193	0,0154
40	0,2773	0,1657	0,1187	0,1040	0,0644	0,0467	0,0366	0,0301	0,0223	0,0176
45	0,3431	0,1962	0,1383	0,1206	0,0738	0,0532	0,0416	0,0342	0,0252	0,0199
50	0,4258	0,2303	0,1594	0,1383	0,0835	0,0599	0,0467	0,0383	0,0281	0,0223
55	0,5345	0,2686	0,1822	0,1572	0,0936	0,0667	0,0519	0,0425	0,0311	0,0246
60	0,6871	0,3132	0,2071	0,1775	0,1040	0,0738	0,0572	0,0467	0,0342	0,0269
65	0,9256	0,3647	0,2344	0,1994	0,1150	0,0810	0,0626	0,0510	0,0373	0,0293
70	1,3856	0,4258	0,2644	0,2231	0,1264	0,0885	0,0681	0,0554	0,0403	0,0317
80		0,5929	0,3351	0,2773	0,1508	0,1040	0,0795	0,0644	0,0467	0,0366
90		0,8881	0,4258	0,3431	0,1775	0,1206	0,0915	0,0738	0,0532	0,0416
100		1,6213	0,5488	0,4258	0,2071	0,1383	0,1040	0,0835	0,0599	0,0467
110			0,7303	0,5345	0,2401	0,1572	0,1172	0,0936	0,0667	0,0519
120			1,0411	0,6871	0,2773	0,1775	0,1311	0,1040	0,0738	0,0572
130			1,7962	0,9256	0,3196	0,1994	0,1457	0,1150	0,0810	0,0626
140				1,3856	0,3685	0,2231	0,1612	0,1264	0,0885	0,0681
150				3,1056	0,4258	0,2490	0,1775	0,1383	0,0961	0,0738
160					0,4946	0,2773	0,1949	0,1508	0,1040	0,0795
180					0,6871	0,3431	0,2332	0,1775	0,1206	0,0915
200					1,0411	0,4258	0,2773	0,2071	0,1383	0,1040
220					2,1322	0,5345	0,3288	0,2401	0,1572	0,1172
240						0,6871	0,3903	0,2773	0,1775	0,1311
260						0,9256	0,4656	0,3196	0,1994	0,1457
280						1,3856	0,5607	0,3685	0,2231	0,1612
300						3,1056	0,6871	0,4258	0,2490	0,1775
320							0,8672	0,4946	0,2773	0,1949
340							1,1557	0,5792	0,3085	0,2134
360							1,7430	0,6871	0,3431	0,2332

die Anlegung von Landdampfkeseln vom 17. Dezember 1908, II. Bd., S. 78 u. f.

**Gegen Innendruck bewehrte Hohlzylinder.\*\*)** Hohlzylinder, die hohen Innendruck auszuhalten haben (Ringgeschütze), können aus hohlzylindrischen Schichten so hergestellt werden, daß vor Einwirkung des Innendruckes die äußeren Zylinder die inneren zusammendrücken. Dies geschieht durch Warmaufziehen je des äußeren Zylinders auf den kalten inneren. Dadurch wird die Widerstandsfähigkeit des Baustoffes besser ausgenutzt.

\*) Mitgeteilt von H. Fahlenkamp in Schalke i. W.

\*\*\*) Nach C. Bach, Die Maschinenelemente. 10. Aufl. 1908. S. 846.

Es sei

$f_1$  die achsiale Querschnittsfläche des Innenzylinders auf 1 cm Höhe in qcm,

$f_2$  der Querschnitt der Schrumpfringe auf 1 cm Höhe des Zylinders in qcm,

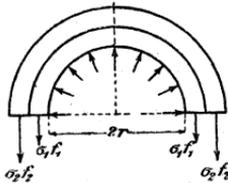
$p$  der innere Ueberdruck in kg/qcm,

$\sigma_1$  die Spannung im Hohlzylinder in kg/qcm,

$\sigma_2$  die Spannung in den Schrumpfringen in kg/qcm.

Der Durchmesser  $2r$  des Innenzylinders (Abb. 95) sei im Verhältnis zur Wandstärke  $s_1$  so groß, daß gleichmäßige Verteilung der Spannungen über die Querschnitte vorausgesetzt werden darf. Dann ergibt sich

Abb. 95.



$$f_2 = r \frac{p}{\sigma_1 \frac{f_1}{f_2} + \sigma_2}$$

Für  $\sigma_1 = 250$  (Gufseisen) und  $\sigma_2 = 1000$  (Schweißseisen) wird z. B., wenn  $f_1 = f_2$ ,  $r = 100$  cm,  $p = 75$  at

$$f_1 = f_2 = 100 \cdot \frac{75}{250 + 1000} = 6 \text{ qcm,}$$

also  $s_1 = 60$  mm.

Liegen die Schrumpfringe dicht nebeneinander, so ist auch  $s_2 = 60$  mm. Andernfalls ist  $s_2$  entsprechend größer zu wählen.

Dafs  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  in Wirklichkeit die angenommenen Werte 250 und 1000 nicht überschreiten, muß durch entsprechendes Aufziehen der Schrumpfringe oder des Schrumpfcylinders bewirkt werden. Hierzu dient folgende Rechnung:

Es sei noch

$R$  der äußere Halbmesser des Innenzylinders vor dem Aufziehen der Schrumpfringe,

$R(1 - \psi)$  der innere Halbmesser der Schrumpfringe vor ihrem Aufziehen,

$\alpha_1$  und  $\alpha_2$  die Dehnungszahlen des Baustoffes des Innenzylinders und der Schrumpfringe,

$\epsilon_1$  die spezifische Zusammendrückung des Hohlzylinders im erkalteten Zustande, jedoch vor der Einwirkung von  $p$ ,

$\epsilon_2$  die spezifische Dehnung der Schrumpfringe wie vor,

dann ist

$$\psi = \epsilon_1 + \epsilon_2$$

und

$$\psi = \alpha_2 \sigma_2 - \alpha_1 \sigma_1$$

$$\epsilon_1 = \frac{\psi}{1 + \frac{\alpha_2 f_1}{\alpha_1 f_2}}$$

**Beispiel.** Für  $\sigma_1 = 250$ ,  $\alpha_1 = 1:1\,000\,000$  (Gufseisen),  $\sigma_2 = 1000$ ,  $\alpha_2 = 1:2\,000\,000$  (Schmiedeseisen),  $f_1 = f_2$  wird

$$\psi = \frac{250}{1\,000\,000} - \frac{1000}{2\,000\,000} = \frac{1}{4000}$$

$$\text{mithin} \quad \varepsilon_1 = \frac{\frac{1}{4000}}{1 + \frac{1\,000\,000}{2\,000\,000} \cdot 1} = \frac{1}{6000}.$$

$$\varepsilon_2 = \psi - \varepsilon_1 = \frac{1}{4000} - \frac{1}{6000} = \frac{1}{12\,000}.$$

Die Druckspannung im Hohlzylinder vor Eintritt der Flüssigkeitspressung ist

$$\sigma' = \frac{\varepsilon_1}{\alpha_1} = \frac{1}{6000} : \frac{1}{1\,000\,000} = 167 \text{ kg/qcm.}$$

die Zugspannung im Schrumpfring vor Eintritt der Flüssigkeitspressung

$$\sigma'' = \frac{\varepsilon_2}{\alpha_2} = \frac{1}{12\,000} : \frac{1}{2\,000\,000} = 167 \text{ kg/qcm.}$$

$p$  veranlaßt daher für sich im Hohlzylinder ein Zugspannung von  $\sigma_1 + \sigma' = 250 + 167 = 417$ , in den Schrumpfringen eine solche von  $1000 - 167 = 833 \text{ kg/qcm.}$

Der berechnete Unterschied  $\psi$  ist sehr gering. Der Durchmesserunterschied beträgt z. B. hier nur

$$2 \cdot 1060 \cdot \frac{1}{4000} = 0,53 \text{ mm.}$$

Dieser Wert muß einen Zuschlag erfahren, der von der Oberflächenbeschaffenheit des Hohlzylinders und der Schrumpfringe abhängt. Bei zähem Baustoffe für die Schrumpfringe darf dieser Zuschlag reichlich sein, da der Baustoff eine bleibende Streckung verträgt und der Innenzylinder durch starkes Aufschrumpfen nur mehr zusammengedrückt wird, so daß bei wirksamem  $p$  seine Zugbeanspruchung nur niedriger gehalten wird.

Der Temperaturunterschied beim Warmaufziehen muß mindestens

$t = \frac{\psi}{\alpha_w}$  betragen, wobei  $\alpha_w$  der Wärmedehnungskoeffizient des Schrumpfringes ist.

Es wird z. B. für

$$\psi = \frac{1060 - 1058}{1060} = \frac{2}{1060}$$

$$t = \frac{2}{1060} : \frac{1}{80\,000} = 151^{\circ} \text{ C.}$$

Ist die Wandstärke der Hohlzylinder im Verhältnis zum Durchmesser groß, so muß die Rechnung auf die Ungleichmäßigkeit der Spannungsverteilung über die Zylinderwand eingehen.\*)

**2. Außerer Ueberdruck**  $p_a$  in kg/qcm. Wenn ein Einknicken der Wandung nicht zu erwarten steht, so ist

$$r_a = r_i \sqrt{\frac{mk}{mk - (2m - 1)p_a}} = r_i \sqrt{\frac{k}{k - 1,7 p_a}} \quad \dots \text{ III.}$$

Nach Maßgabe der Gleichung III sind nur solche Verhältnisse möglich, wofür  $p_a < (k : 1,7)$  oder  $(p_a : k) < 0,59$  ist.

\*) S. hierüber C. Bach, Elastizität u. Festigkeit, 5. Aufl. S. 557. Vgl. ferner Engineering 1909 S. 567, Zeichnerische Darstellung von Prof. Kaisers Theorie der Berechnung der Kräfte und Spannungen in Ringgeschützen, von A. Bremberg.

Für geringe Wandstärken gilt hinreichend genau

$$s = r a \frac{p a}{k} \dots \dots \dots \text{IV.}$$

Die Bemerkung unter 1. (s. o.) gilt auch hier.

Der günstige Einfluss der Zylinderböden und etwaiger Quernähte ist in den Formeln unter 1. und 2. nicht berücksichtigt. Schätzungsweise kann die Berücksichtigung durch Wahl einer höheren zulässigen Spannung erfolgen; dabei ist der Einfluss um so größer, je kürzer der Zylinder im Verhältnisse zum Durchmesser ist.

Berechnung der Wandstärke von Hohlzylindern mit äußerem Ueberdrucke, bei denen ein Eindringen der Wandung zu befürchten ist (**Dampfkessel-Flammrohre**), nach C. Bach, s. „Allgem. poliz. Bestimmungen über die Anlegung von Landdampfkesseln“ vom 17. 12. 08, II. Bd., S. 78 u. f.

**3. Ovale Hohlzylinder.\*)** Hat der auf Innen- oder Außendruck beanspruchte Hohlzylinder ovalen Querschnitt mit den Halbachsen  $a$  und  $b$  (in cm), so sind bei den Bezeichnungen der Abb. 96, wenn  $p$  den Flüssigkeitsdruck in kg/qcm bedeutet, die Biegemomente (in cmkg) in den Enden der Achsen  $2b$  und  $2a$ :

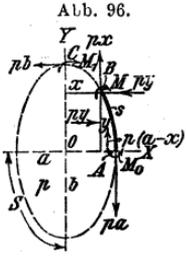


Abb. 96.

$$M_0 = \frac{p a^2}{2} - \frac{p}{2S} J_x - \frac{p}{2S} J_y,$$

$$M_1 = M_0 - \frac{p}{2} (a^2 - b^2),$$

worin  $J_x$  und  $J_y$  die Trägheitsmomente des Bogens  $AC$  in bezug auf die  $X$ -Achse bzw. auf die  $Y$ -Achse in  $\text{cm}^3$  sind und  $S$  die Länge des Bogens  $AC$  in cm ist.

Ferner ergeben sich die elastische Verschiebung  $\delta_y$  des Punktes  $C$  in der Richtung der  $Y$ -Achse und die elastische Verschiebung  $\delta_x$  des Punktes  $A$  in der Richtung der  $X$ -Achse:

$$\delta_y = \frac{1}{EJ} \int_0^S M x ds, \quad \delta_x = \frac{1}{EJ} \int_0^S M y ds,$$

worin  $E$  das Elastizitätsmaß des Baustoffes in kg/qcm,  $J$  das Trägheitsmoment der Wandung für 1 cm Länge und  $M$ , das veränderliche Biegemoment, aus der Gleichung

$$M = M_0 - \frac{p a^2}{2} + \frac{p x^2}{2} + \frac{p y^2}{2}$$

zu entnehmen ist. (Weiteres s. die in der Fußnote genannte Quelle.)

Für den korbbogenförmigen Querschnitt, bestehend aus 2 Halbkreisen und 2 geraden, tangentialen Verbindungsstücken, ergibt sich, daß z. B. bei einer Abweichung des Rohres von der kreisrunden Form um 5 vH der zulässige Flüssigkeitsdruck auf etwa  $\frac{1}{3}$  sinkt. Ist das Achsenverhältnis = 2, so beträgt der zulässige Flüssigkeitsdruck nur noch  $\frac{1}{37}$  des bei kreisrunder Form zulässigen Druckes.

\*) Nach M. Westphal, Z. d. V. d. I. 1909 S. 333.

**e. Hohlkugeln.**Bezeichnungen wie unter **d.**, S. 624.**1. Innerer Ueberdruck**  $p_i$  in kg/qcm. Es ist

$$r_a = r_i \sqrt[3]{\frac{2mk_z + 2(m-2)p_i}{2mk_z - (m+1)p_i}} = r_i \sqrt[3]{\frac{k_z + 0,4p_i}{k_z - 0,65p_i}} \quad \text{V.}$$

Nach Maßgabe dieser Gleichung sind nur solche Verhältnisse möglich, wofür  $p_i < (k_z : 0,65)$  oder  $(p_i : k_z) < 1,54$  ist.

Die größte Zugbeanspruchung tritt an der Innenfläche in der Richtung des Umfanges auf.

Für geringe Wandstärken gilt hinreichend genau

$$s = \frac{1}{2} r_i \frac{p_i}{k_z} \quad \text{VI.}$$

Bemerkung. Ist die Hohlkugel durch Verwuetung oder eine andere Verbindung einzelner Teile hergestellt, so hat man auch die Widerstandsfähigkeit der Verbindung in Betracht zu ziehen.

**2. Außerer Ueberdruck**  $p_a$  in kg/qcm. Wenn ein Einknicken der Wandung nicht zu erwarten steht, so ist

$$r_a = r_i \sqrt[3]{\frac{2mk}{2mk - 3(m-1)p_a}} = r_i \sqrt[3]{\frac{k}{k - 1,05p_a}} \quad \text{VII.}$$

Nach Maßgabe dieser Gleichung sind nur solche Verhältnisse möglich, wofür  $p_a < (k : 1,05)$  oder  $(p_a : k) < 0,95$  ist.

Für geringe Wandstärken gilt hinreichend genau

$$s = \frac{1}{2} r_a \frac{p_a}{k} \quad \text{VIII.}$$

Die Bemerkung unter **1.** (s. o.) gilt auch hier.**Bemerkung zu a bis c.**

Ebene, aus genügend zähem Stoffe bestehende **Platten**, die sich unter Einwirkung der Belastung durchgebogen haben, besitzen in diesem gewölbten Zustande eine größere Widerstandsfähigkeit als in ihrer ursprünglichen ebenen Form.

Wird eine **Platte** oder ein **Gefäß** abgenutzt, z. B. durch Abrosten usw., so ist die berechnete Wandstärke um einen der Abnutzung entsprechenden Betrag zu vergrößern. Verlangen Rücksichten auf Herstellung, Fortschaffung, Aufstellung, auf Temperaturunterschiede usw. eine größere Wandstärke, als die vorstehenden Gleichungen geliefert haben, so sind diese Rücksichten ebenfalls bestimmend.

## FÜNFTER ABSCHNITT.

## STOFFKUNDE.

## I. ALLGEMEINES.

## A. Chemische Elemente und Verbindungen.

Name	Chemische Formel	Atom- bzw. Molekular- Gewicht*)	100 Gewichtsteile der Verbindung enthalten
Aluminium . . . . .	Al	27,1	—
Tonerde . . . . .	Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	102,20	53,93 Al
Tonerdehydrat . . . . .	Al <sub>2</sub> (OH) <sub>6</sub>	156,25	34,68 Al
Kali-Alaun . . . . .	K <sub>2</sub> SO <sub>4</sub> + Al <sub>2</sub> (SO <sub>4</sub> ) <sub>3</sub> + 24 H <sub>2</sub> O	949,11	57,2 Al
Antimon . . . . .	Sb	120,2	—
Antimontrisulfid . . . . .	Sb <sub>2</sub> S <sub>3</sub>	336,61	71,43 Sb
Antimonpentasulfid . . . . .	Sb <sub>2</sub> S <sub>5</sub>	400,75	59,99 Sb
Arsen . . . . .	As	74,96	—
Arsenige Säure . . . . .	As <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	197,92	75,75 As
Arsentrisulfid (Auripigment) . . . . .	As <sub>2</sub> S <sub>3</sub>	246,73	60,91 As
Barium . . . . .	Ba	137,37	—
Bariumoxyd (Baryt) . . . . .	BaO	153,37	89,57 Ba
Bariumsuperoxyd . . . . .	BaO <sub>2</sub>	169,37	92,55 Ba O
Schwefels. Baryt (Schwerspat) . . . . .	BaSO <sub>4</sub>	233,44	65,71 Ba O
Kohlensäurer Baryt . . . . .	BaCO <sub>3</sub>	197,37	77,71 Ba O
Beryllium . . . . .	Be	9,1	—
Blei . . . . .	Pb	207,10	—
Bleioxyd . . . . .	PbO	223,10	92,32 Pb
Bleimennige . . . . .	Pb <sub>2</sub> O <sub>4</sub>	685,30	90,73 Pb
Schwefelblei (Bleiglanz) . . . . .	PbS	239,17	86,58 Pb
Schwefelsaures Blei . . . . .	PbSO <sub>4</sub>	303,17	73,57 Pb O
Chlorblei . . . . .	PbCl <sub>2</sub>	278,02	74,54 Pb
Bor . . . . .	B	11,0	—
Borsäure . . . . .	B <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	70,0	31,43 B
Brom . . . . .	Br	79,92	—
Bromsilber . . . . .	AgBr	187,3	42,55 Br
Calcium . . . . .	Ca	40,09	—
Calciumchlorid . . . . .	CaCl <sub>2</sub>	111,01	36,11 Ca
Calciumkarbid . . . . .	CaC <sub>2</sub>	64,09	62,51 Ca
Calciumoxyd (Gebr. Kalk, Aetzk.) . . . . .	CaO	56,09	71,49 Ca
Calciumoxydhydrat (gel. Kalk) . . . . .	Ca(OH) <sub>2</sub>	74,11	75,68 Ca O
Kohlensäurer Kalk (Kalkspat) . . . . .	CaCO <sub>3</sub>	100,09	56,06 Ca O
Schwefelsaurer Kalk (Anhydrit) . . . . .	CaSO <sub>4</sub>	136,16	41,21 Ca O

\*) Bezogen auf Sauerstoff = 16,00.

Name	Chemische Formel	Atom- bzw. Molekulargewicht	100 Gewichtsteile der Verbindung enthalten
Cadmium	Cd	112,40	—
Chlor	Cl	35,46	—
Chlorsilber	AgCl	143,34	24,73 Cl
Chlorwasserstoff (Salzsäure)	HCl	36,463	97,25 Cl
Chrom	Cr	52,0	—
Chromoxyd	Cr <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	152,0	68,47 Cr
Eisen	Fe	55,85	—
Eisenoxyd (Eisenglanz)	Fe <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	159,70	69,56 Fe
Schwefelsaures Eisenoxydul (Eisenvitriol)	FeSO <sub>4</sub> + 7 H <sub>2</sub> O	278,03	25,88 FeO
Fluor	F	19,0	—
Fluorcalcium (Fluorapat)	CaF <sub>2</sub>	78,09	48,70 F
Gold	Au	197,2	—
Jod	J	126,92	—
Jodsilber	AgJ	234,80	54,05 J
Kalium	K	39,10	—
Kalihydrat (Kaliumhydroxyd)	KOH	56,11	69,68 K
Chlorkalium (Sylvin)	KCl	74,56	52,48 K
Schwefelsaures Kali	K <sub>2</sub> SO <sub>4</sub>	174,27	54,08 K <sub>2</sub> O
Salpetersaures Kali (Salpeter)	KNO <sub>3</sub>	101,11	54,34 K <sub>2</sub> O
Kohlensaures Kali (Pottasche)	K <sub>2</sub> CO <sub>3</sub>	138,20	68,11 K <sub>2</sub> O
Doppeltchromsaures Kali	K <sub>2</sub> Cr <sub>2</sub> O <sub>7</sub>	294,20	31,98 K <sub>2</sub> O
Cyankalium	KCN	65,11	69,27 K
Kobalt	Co	58,97	—
Kohlenstoff	C	12,00	—
Kohlenoxyd	CO	28,00	42,86 C
Kohlensäure	CO <sub>2</sub>	44,00	27,27 C
Azetylen	C <sub>2</sub> H <sub>2</sub>	26,02	92,24 C
Kupfer	Cu	63,57	—
Kupferoxyd	CuO	79,57	79,90 Cu
Schwefelkupfer	CuS	95,64	66,64 Cu
Schwefelsaures Kupferoxyd (Kupfervitriol)	CuSO <sub>4</sub> + 5 H <sub>2</sub> O	249,74	31,87 CuO
Lithium	Li	6,94	—
Magnesium	Mg	24,32	—
Magnesiumoxyd	MgO	40,32	60,36 Mg
Schwefels. Magnesia (Bittersalz)	MgSO <sub>4</sub> + 7 H <sub>2</sub> O	246,50	16,37 MgO
Mangan	Mn	54,93	—
Mangansuperoxyd	MnO <sub>2</sub>	86,93	63,19 Mn
Schwefelmangan (Manganblende)	MnS	87,00	63,15 Mn
Natrium	Na	23,00	—
Natronhydrat (Natron)	NaOH	40,01	57,47 Na
Schwefelsaures Natron (Glaubersalz)	Na <sub>2</sub> SO <sub>4</sub>	142,07	43,68 Na <sub>2</sub> O
Kohlensaures Natron (Soda)	Na <sub>2</sub> CO <sub>3</sub>	106,00	57,96 Na <sub>2</sub> O
Salpetersaures Natron (Chilisalpeter)	NaNO <sub>3</sub>	85,01	72,83 Na <sub>2</sub> O
Borsaures Natron (Borax)	Na <sub>2</sub> B <sub>4</sub> O <sub>7</sub> + 10 H <sub>2</sub> O	382,16	16,16 Na <sub>2</sub> O
Chlornatrium (Kochsalz)	NaCl	58,46	39,4 Na

Name	Chemische Formel	Atom- bzw. Molekular- Gewicht	100 Gewichtsteile der Verbindung enthalten
Nickel . . . . .	Ni	58,68	—
Nickeloxyd . . . . .	NiO	74,68	78,58 Ni
Phosphor . . . . .	P	31,04	—
Phosphorsaurer Kalk . . . . .	Ca <sub>3</sub> P <sub>2</sub> O <sub>8</sub>	310,35	45,77 P <sub>2</sub> O <sub>5</sub>
Platin . . . . .	Pt	195,2	—
Kaliumplatinchlorid . . . . .	K <sub>2</sub> PtCl <sub>6</sub>	486,16	48,45 Pt
Quecksilber . . . . .	Hg	200,0	—
Quecksilberoxyd (Präzipitat) . . . . .	HgO	216,0	92,55 Hg
Schwefelquecksilber (Zinnober) . . . . .	HgS	232,07	86,17 Hg
Quecksilberchlorür (Kalomel) . . . . .	HgCl	235,46	84,03 Hg
Quecksilberchlorid (Sublimat) . . . . .	HgCl <sub>2</sub>	270,92	73,83 Hg
Radium . . . . .	Ra	226,4	—
Sauerstoff . . . . .	O	16,00	—
Schwefel . . . . .	S	32,07	—
Schwefelsäure . . . . .	H <sub>2</sub> SO <sub>4</sub>	98,09	32,69 S
Schwefelwasserstoff . . . . .	H <sub>2</sub> S	34,09	94,10 S
Silber . . . . .	Ag	107,88	—
Silicium . . . . .	Si	28,3	—
Kieselsäure (Quarz) . . . . .	SiO <sub>2</sub>	60,3	47,02 Si
Stickstoff . . . . .	N	14,01	—
Ammoniak . . . . .	NH <sub>3</sub>	17,03	82,27 N
Ammoniumchlorid (Salmiak) . . . . .	NH <sub>4</sub> Cl	53,50	32,84 NH <sub>3</sub>
Salpetersäure . . . . .	HNO <sub>3</sub>	63,02	25,40 N
Strontium . . . . .	Sr	87,63	—
Kohlensaurer Strontian . . . . .	SrCO <sub>3</sub>	147,63	70,18 SrO
Schwefelsaurer Strontian . . . . .	SrSO <sub>4</sub>	183,70	56,42 SrO
Tantal . . . . .	Ta	181,0	—
Wasserstoff . . . . .	H	1,008	—
Wasser . . . . .	H <sub>2</sub> O	18,016	11,19 H; 88,81 O
Wismut . . . . .	Bi	208,0	—
Wismutoxyd (Wismutoker) . . . . .	Bi <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	464,0	89,68 Bi
Schwefelwismut (Wismutglanz) . . . . .	Bi <sub>2</sub> S <sub>3</sub>	512,2	81,25 Bi
Wolfram . . . . .	W	184,0	—
Zink . . . . .	Zn	65,37	—
Zinkoxyd (Zinkweifs) . . . . .	ZnO	81,37	80,35 Zn
Kohlensaures Zinkoxyd (Zink- spat) . . . . .	ZnCO <sub>3</sub>	125,37	64,92 ZnO
Schwefelsaures Zinkoxyd (Zink- vitriol) . . . . .	ZnSO <sub>4</sub> + 7 H <sub>2</sub> O	287,55	28,31 ZnO
Schwefelzink (Zinkblende) . . . . .	ZnS	97,44	67,10 Zn
Zinn . . . . .	Sn	119,0	—
Zinnsäure (Zinnstein) . . . . .	SnO <sub>2</sub>	154,0	78,81 Sn

## B. Spezifische Gewichte.

Das **spezifische Gewicht** oder **Einheitsgewicht**  $\sigma$  eines Körpers ist das Gewicht der Volumeneinheit des Körpers.

Bei **Gasen** gilt die Angabe des spez. Gewichtes für 0° und 760 mm Quecksilberdruck und wird i. d. R. auf das Gewicht trockener Luft oder das Gewicht des Wasserstoffes bezogen. Die auf S. 638 angegebenen Zahlen sind mit 14,44 zu multiplizieren, wenn man sie auf Wasserstoff beziehen will.

Ist  $V$  (oder  $V'$ ) der Rauminhalt eines Körpers (oder Gases) in cdm (l),

$G$  (oder  $G'$ ) das Gewicht eines Körpers (oder Gases) in kg,

so ist  $G = V\sigma$  und  $G' = 0,001\ 293\ V'\sigma'$ ,

d. h., 1 cdm des Körpers wiegt  $\sigma$  kg, 1 cm des Körpers wiegt  $\sigma$  g,  
eine Körperschicht von 1 qm Fläche und 1 mm Höhe wiegt  $\sigma$  kg,  
1 cbm des Körpers wiegt 1000  $\sigma$  kg =  $\sigma$  Tonnen (t),  
1 l des Gases wiegt 0,001 293  $\sigma'$  kg = 1,293  $\sigma$  g,  
1 cbm des Gases wiegt 1,293  $\sigma'$  kg.

Das mittlere spez. Gewicht der Erde (von König, Krigar-Menzel und Richarz nach dem Jollyschen Wägungsverfahren bestimmt) ist 5,505, und hiermit das Gesamtgewicht der Erde etwa  $5960 \cdot 10^{18}$  t = 5960 Trillionen Tonnen.

Die nachfolgend angegebenen Werte von  $\sigma$  und  $\sigma'$  sind Mittelwerte oder Grenzzahlen.

### a. Spezifische Gewichte fester Körper.

Wasser (bei 4°) = 1.

Aetzkali, trocken . . .	2,1	Bergkristall, rein . . .	2,6
Aetznatron		Bernstein . . . . .	1,0 — 1,1
mit 22,2 vH H <sub>2</sub> O . . .	2,0	Beton . . . . .	1,80 — 2,45
Alabaster . . . . .	2,3 — 2,8	Bimsstein, natürl. . .	0,37 — 0,9
Alaun, Kalt . . . . .	1,71	„  Wiener . . . . .	2,2 — 2,5
Aluminium, chem. r.	2,6	Bittersalz, kristall. . .	1,7 — 1,8
„  gehämmert . . . . .	2,75	„  wasserfrei . . . . .	2,6
„  gegossen . . . . .	2,56	Blätterkohle . . . . .	1,2 — 1,5
Aluminiumbronze . . .	7,7	Blei . . . . .	11,25 — 11,37
Amalgam, natürl. . . . .	13,7 — 14,1	„  flüssig . . . . .	10,64
Anthrazit . . . . .	1,4 — 1,7	Bleiglätte, künstl. . . .	9,3 — 9,4
Antimon . . . . .	6,62	Bleiglätte, natürl. . . .	7,83 — 7,98
Antimonglanz . . . . .	4,6 — 4,7	Bleiglanz . . . . .	7,3 — 7,6
Apatit . . . . .	3,16 — 3,22	Bleiweiß . . . . .	6,7
Arsen . . . . .	5,7 — 5,8	Bleizucker . . . . .	2,4
Arsenige Säure . . . . .	3,69 — 3,72	Blutlaugensalz, gelb . .	1,83
Asbest . . . . .	2,1 — 2,8	Bolus . . . . .	2,2 — 2,5
Asbestpappe . . . . .	1,2	Bor . . . . .	2,53
Asphalt (Erdpech) . . .	1,1 — 1,5	Borazit . . . . .	2,9 — 3,0
Basalt . . . . .	2,7 — 3,2	Borax . . . . .	1,7 — 1,8
Baumwolle, lufttrock.	1,47 — 1,50	Brauneisenstein . . . .	3,40 — 3,95

Braunkohle . . .	1,2 — 1,5	Gneis . . . . .	2,4 — 2,7
Braunstein (Pyrolusit)	3,7 — 4,6	Gold, gediegen . . .	19,33
Bronze (bei 7,9 bis 14 vH Zinngehalt) . . .	7,4 — 8,9	„ gegossen . . .	19,25
Butter . . . . .	0,94 — 0,95	„ gehämmert . . .	19,30 — 19,35
Cadmium . . . . .	8,65	Granat . . . . .	3,4 — 4,3
Calcium . . . . .	1,85	Granit . . . . .	2,51 — 3,05
Calciumcarbid . . .	2,26	Graphit . . . . .	1,9 — 2,3
Chilisalpeter . . .	2,26	Grauspiefsglanz . .	4,6 — 4,7
Chlorbarium, kristall.	3,7	Grobkohle . . . . .	1,2 — 1,5
Chlornatrium, gesott.	2,15 — 2,17	Gummi, arabisches .	1,31 — 1,45
Chromgelb . . . . .	6,0	„ (Kautschuk) roh	0,92 — 0,96
Chroms. Kali, dopp.	2,7	Gummifabrikate . .	1,0 — 2,0
Deltametall . . . .	8,6	Gummigutt . . . . .	1,2
Diamant . . . . .	3,5 — 3,6	Gufseisen . . . . .	7,25
Dolomit . . . . .	2,9	„ flüssig . . . . .	6,9 — 7,0
Eis . . . . .	0,88 — 0,92	Guttapercha . . . .	0,96 — 0,99
Eisen, chemisch rein	7,88	Hafer, geschüttet . .	0,43
Eisenvitriol . . . .	1,80 — 1,98	Hanfaser, lufttrocken	1,5
Elfenbein . . . . .	1,83 — 1,92	Harz . . . . .	1,07
Erde, lehmig, fest ge- stampft, frisch . .	2,0	<b>Holzarten:</b>	
„ „ trocken . . . .	1,6 — 1,9	lufttr.	frisch
Erde, mager, trocken .	1,34	Ahorn . . . . .	0,53 — 0,81
Fahlerze . . . . .	4,36 — 5,36	Akazie . . . . .	0,58 — 0,85
Feldspat (Orthoklas) .	2,53 — 2,58	Apfelbaum . . . . .	0,66 — 0,84
Fette . . . . .	0,92 — 0,94	Birke . . . . .	0,51 — 0,77
Feuerstein . . . . .	2,6 — 2,8	Birnbaum . . . . .	0,61 — 0,73
Flachs, lufttrocken .	1,5	Buchsbaum . . . . .	0,91 — 1,16
Flufseisen . . . . .	7,85	I,26	—
Flufsspat . . . . .	3,1 — 3,2	Eberesche . . . . .	0,60 — 0,80
Flufsstahl . . . . .	7,86	Eiche . . . . .	0,60 — 1,03
Gabbro . . . . .	2,9 — 3,0	Erle . . . . .	0,42 — 0,68
Galmei . . . . .	4,1 — 4,5	Esche . . . . .	0,57 — 0,94
Gerste, geschüttet . .	0,69	Fichte (Rottanne) .	0,35 — 0,60
Gips, gebrannt . . .	1,81	Guajak (Pockholz)	1,17 — 1,39
„ gegossen, trocken	0,97	Hickory . . . . .	0,60 — 0,90
„ gesiebt . . . . .	1,25	Kiefer (Föhre) . . .	0,31 — 0,76
Glanzkohle . . . . .	1,2 — 1,5	Kirschbaum . . . . .	0,76 — 0,84
Glas, Fenster . . . .	2,4 — 2,6	Lärche . . . . .	0,47 — 0,56
„ Flaschen . . . . .	2,6	Linde . . . . .	0,32 — 0,59
„ Flint . . . . .	3,15 — 3,90	Mahagoni . . . . .	0,56 — 1,06
Glas, grünes . . . . .	2,64	Nufsbaum . . . . .	0,60 — 0,81
„ Kristall . . . . .	2,9 — 3,0	Pappel . . . . .	0,39 — 0,59
„ Spiegel- od. Kron-	2,45 — 2,72	Pechkiefer (Pitch- pine) . . . . .	0,83 — 0,85
Glaubersalz . . . . .	1,4 — 1,5	Pflaumenbaum . . . .	0,68 — 0,90
Glimmer . . . . .	2,65 — 3,20	Rofskastanie . . . . .	0,58
Glockenmetall . . . .	8,81	Rotbuche . . . . .	0,66 — 0,83
		Steineiche . . . . .	0,71 — 1,07
		Tanne (Weifstanne)	0,37 — 0,75
		Teakholz . . . . .	0,9
		Ulme (Rüster) . . . .	0,56 — 0,82
		Weide . . . . .	0,49 — 0,59
		Weifs-buche . . . . .	0,62 — 0,82
		Zeder . . . . .	0,57

Holzkohle, luftgefüllt . . .	0,4	Lehm, trocken . . .	1,5 — 1,6
„ luftfrei . . .	1,4 — 1,5	„ frisch gegraben . . .	1,67 — 1,85
Holzpfasterung . . .	0,69 — 0,72	Leim . . . . .	1,27
Hornblende . . . . .	3,0	Linoleum in Rollen . . .	1,15 — 1,30
Isolierbims . . . . .	0,38	Magnesia . . . . .	3,2
Jod . . . . .	4,95	Magnesit . . . . .	3,0
Kalium . . . . .	0,865	Magnesium . . . . .	1,74
Kalk, gebrannt, gesch. . .	0,9 — 1,3	Magneteisenstein . . .	4,9 — 5,2
„ gelöscht . . . . .	1,15 — 1,25	Magnetkies . . . . .	4,54 — 4,64
Kalkmörtel, trocken . . .	1,60 — 1,65	Malachit . . . . .	3,7 — 4,1
„ frisch . . . . .	1,75 — 1,80	Mangan . . . . .	7,42
Kalksandsteine . . . . .	1,89 — 1,92	Manganerz, rot . . . . .	3,46
Kalkspat . . . . .	2,6 — 2,8	„ schwarz . . . . .	3,9 — 4,1
Kalkstein . . . . .	2,46 — 2,84	Marmor, gewöhnlicher . .	2,52 — 2,85
Kanonengut . . . . .	8,44	„ carrarischer . . . . .	2,72
Kaolin (Porzellanerde) . . .	2,2	Meerschäum . . . . .	0,99 — 1,28
Kartoffel . . . . .	1,06 — 1,13	Mehl, lose . . . . .	0,4 — 0,5
Kautschuk, roh . . . . .	0,92 — 0,96	„ zus. gepreist . . . . .	0,7 — 0,8
Kies . . . . .	1,8 — 2,0	Melaphyr . . . . .	2,6
Kieselerde . . . . .	2,66	Mennige, Blei . . . . .	8,6 — 9,1
Kieselsäure, kristall. . . .	2,6	Mergel . . . . .	2,3 — 2,5
„ amorph. . . . .	2,2	Messing, gewalzt . . . . .	8,52 — 8,62
Knochen . . . . .	1,7 — 2,0	„ gegossen . . . . .	8,4 — 8,7
Kobalt . . . . .	8,42	„ gezogen . . . . .	8,43 — 8,73
„ pulverig . . . . .	bis 9,5	Mühlstein-Quarz . . . . .	1,25 — 1,60
Kobaltglanz . . . . .	6,0 — 6,1	Naphthalin . . . . .	1,15
Kochsalz, gesotten . . . . .	2,15 — 2,17	Natrium . . . . .	0,978
Koks im Stück . . . . .	1,4	Neusilber . . . . .	8,4 — 8,7
Kolophonium . . . . .	1,07	Nickel, gegossen . . . . .	8,35
Kork . . . . .	0,24	„ gewalzt . . . . .	8,6 — 8,9
Korkstein, weißer . . . . .	0,25	Ocker . . . . .	3,5
„ schwarzer . . . . .	0,56	Papier . . . . .	0,70 — 1,15
Korund . . . . .	3,9 — 4,0	Paraffin . . . . .	0,87 — 0,91
Kreide . . . . .	1,8 — 2,6	Pech . . . . .	1,07 — 1,10
Kunstsandstein . . . . .	2,0 — 2,1	Phenol (bei 0°) . . . . .	1,08 — 1,09
Kupfer, gegossen . . . . .	8,30 — 8,92	Phosphor, gelb-weiß . . .	1,82
„ gewalzt . . . . .	8,9 — 9,0	„ rot . . . . .	2,20
„ gehämmert . . . . .	8,9 — 9,0	„ kristall. . . . .	2,34
„ -draht . . . . .	8,93 — 8,95	Phosphorbronze . . . . .	8,8
„ elektrolyt. . . . .	8,9 — 8,95	Platin, gehämmert . . . .	21,3 — 21,5
„ flüssig . . . . .	8,22	„ gegossen . . . . .	21,15
Kupferglanz . . . . .	5,5 — 5,8	Polierschiefer . . . . .	2,1
Kupferkies . . . . .	4,1 — 4,3	Porphy . . . . .	2,6 — 2,9
Kupfervitriol, krist. . . . .	2,2 — 2,3	Porzellan . . . . .	2,3 — 2,5
Lagermetall, Weißmet. . . .	7,1	Pottasche . . . . .	2,26
Lava, basaltisch . . . . .	2,8 — 3,0	Preßkohle (Brikett) . . .	1,25
„ trachytisch . . . . .	2,0 — 2,7	Quarz . . . . .	2,5 — 2,8
Leder, gefettet . . . . .	1,02	Roggen, geschüttet . . . .	0,68 — 0,79
„ trocken . . . . .	0,86		

Roheisen, weißes . . .	7,0 — 7,8	Syenit . . . . .	2,6 — 2,8
„ graues . . . . .	6,7 — 7,6	Talg . . . . .	0,90 — 0,97
Roteisenstein . . . .	4,5 — 4,9	Talk . . . . .	2,7
Salmiak . . . . .	1,5 — 1,6	Ton . . . . .	1,8 — 2,6
Salpeter, Kali- . . . .	1,95 — 2,08	Tonschiefer . . . . .	2,76 — 2,88
Sand, fein und trocken	1,40 — 1,65	Topas . . . . .	3,51 — 3,57
„ fein und feucht	1,90 — 2,05	Torf, Erd- . . . . .	0,64
„ grob . . . . .	1,4 — 1,5	„ Pech- . . . . .	0,84
Sandstein . . . . .	2,2 — 2,5	Torfstreu, geprefst	0,21 — 0,23
Schafwolle, lufttrock.	1,32	Trachyt . . . . .	2,6 — 2,8
Schamottesteine . . . .	1,85 — 2,2	Trafs, gemahlen . . . .	0,95
Schiefer . . . . .	2,65 — 2,70	Tuffstein im Stück	1,3
Schiefspulver, lose . . .	0,9	„ als Ziegel . . . . .	0,8 — 0,9
„ gestampft . . . . .	1,75	Wachs . . . . .	0,95 — 0,98
Schlacke, Hochofen- . . .	2,5 — 3,0	Walrat . . . . .	0,88 — 0,94
Schmirgel . . . . .	4,0	Weißmetall . . . . .	7,1
Schnee, lose . . . . .	0,125	Weizen, geschüttet . . .	0,7 — 0,8
Schwefel, amorph. . . .	1,93	Wismut, gediegen . . . .	9,80
„ kristall. . . . .	1,96 und 2,07	„ gegossen . . . . .	9,82
„ gediegen . . . . .	2,07	„ flüssig . . . . .	10,055
Schwefelkies (Pyrit) . . .	4,9 — 5,2	Wolfram . . . . .	19,1
Schweifeisen . . . . .	7,8	Zemente . . . . .	0,82 — 1,95
„ als Draht . . . . .	7,60 — 7,75	Ziegel, gewöhnl. . . . .	1,4 — 1,6
Schweifsstahl . . . . .	7,86	„ Klinker . . . . .	1,7 — 2,0
Schwerspat . . . . .	4,5	Ziegelmauerwerk . . . . .	
Serpentin . . . . .	2,4 — 2,7	volles, frisch . . . . .	1,57 — 1,63
Silber, gegossen . . . . .	10,42 — 10,53	„ trocken . . . . .	1,42 — 1,46
„ gehämmert . . . . .	10,5 — 10,6	Zink, gegossen . . . . .	6,86
„ flüssig . . . . .	9,51	„ gewalzt . . . . .	7,13 — 7,20
Soda, geglüht . . . . .	2,5	„ flüssig . . . . .	6,48
„ kristallisiert . . . . .	1,45	Zinkblende . . . . .	3,9 — 4,2
Spateisenstein . . . . .	3,7 — 3,9	Zinkchlorid . . . . .	2,75
Speckstein . . . . .	2,6 — 2,8	Zinkspat (Galmei) . . . .	4,1 — 4,5
Speiskobalt . . . . .	6,4 — 7,3	Zinkvitriol, kristall. . . .	2,04
Stärke im Stück . . . . .	1,53	Zinn, gehämm. o. gewalzt	7,3 — 7,5
Stahl . . . . .	7,85 — 7,87	„ gegossen . . . . .	7,2
Steinkohle im Stück . . .	1,2 — 1,5	„ flüssig . . . . .	7,025
Steinsalz . . . . .	2,28 — 2,41	Zinnstein . . . . .	6,4 — 7,0
Strontianit . . . . .	3,7	Zinnober . . . . .	8,12
Strontium . . . . .	2,54	Zucker, weißer . . . . .	1,61

## b. Spezifische Gewichte von Flüssigkeiten.

Name der Flüssigkeit	Spez. Gew.	bei °C	Name der Flüssigkeit	Spez. Gew.	bei °C
Aceton . . . . .	0,79	20°	Natronlauge,		
Aether (Aethyläther) . . . . .	0,74	0°	mit 13 vH NaOH	1,15	15°
Aldehyd . . . . .	0,80	0°	" 22 " "	1,25	15°
Alkohol (wasserfrei) . . . . .	0,79	15°	" 66 " "	1,70	15°
Amylalkohol . . . . .	0,81	20°	Oelsäure . . . . .	0,90	15°
Anilin . . . . .	1,04	0°	Olivenöl, (Baumöl, Pro-		
Anisöl . . . . .	1,00	16°	venceröl) . . . . .	0,92	15°
Baldrianöl . . . . .	0,97	16°	Palmöl . . . . .	0,91	15°
Baumwollsamensöl . . . . .	0,93	15°	Petroleumäther . . . . .	0,67	15°
Benzin . . . . .	0,68—0,70	15°	Petroleum, Leucht-0,79—0,82		15°
Benzol . . . . .	0,90	0°	Photogen . . . . .	0,78—0,85	15°
Bernsteinöl . . . . .	0,80	15°	Quecksilber . . . . .	13,5956	0°
Bier . . . . .	1,02	—	Rapsöl, rohes . . . . .	0,92	15°
Brom . . . . .	3,19	0°	" raffiniertes . . . . .	0,91	15°
Buttersäure . . . . .	0,96	15°	Rizinusöl . . . . .	0,97	15°
Chlornatrium, 14 vH NaCl	1,10	15°	Rüböl, rohes . . . . .	0,92	15°
" 26 " "	1,20	15°	" raffiniertes . . . . .	0,91	15°
Chloroform . . . . .	1,48	18°	Salpetersäure,		
Eiweiß . . . . .	1,04	15°	mit 25 vH HNO <sub>3</sub>	1,15	15°
Glycerin (wasserfrei) . . . . .	1,26	0°	" 40 " "	1,25	15°
" mit 50 vH H <sub>2</sub> O . . . . .	1,13	0°	" 91 " "	1,50	15°
Harzöl . . . . .	0,96	15°	Salzsäure, 10 vH HCl . . . . .	1,05	15°
Holzgeist . . . . .	0,80	0°	" 40 " " . . . . .	1,20	15°
Kalilauge, 12 vH KOH . . . . .	1,10	15°	Schwefelkohlenstoff . . . . .	1,29	15°
" 31 " " . . . . .	1,30	15°	Schwefelsäure,		
" 63 " " . . . . .	1,70	15°	mit 7,5 vH H <sub>2</sub> SO <sub>4</sub>	1,05	15°
Kampferöl . . . . .	0,91	—	" 27 " " . . . . .	1,20	15°
Karbolsäure, roh 0,95—0,97		15°	" 50 " " . . . . .	1,40	15°
Kienöl . . . . .	0,85—0,86	15°	" 87 " " . . . . .	1,80	15°
Klauenfett . . . . .	0,92	15°	" rauchende . . . . .	1,89	15°
Kokosnufsöl . . . . .	0,93	15°	Schweflige Säure		
Kreosotöl . . . . .	1,04—1,10	15°	(verdichtet)	1,49	-20°
Kupfervitriol,			Seewasser . . . . .	1,02—1,03	15°
mit 15 vH CuSO <sub>4</sub> + 5 H <sub>2</sub> O	1,10	15°	Specköl . . . . .	0,92	15°
" 28 " " + " . . . . .	1,15	15°	Teer, Steinkohlen- . . . . .	1,20	—
Lavendelöl . . . . .	0,88	16°	Terpentinöl . . . . .	0,87	16°
Leinöl, gekochtes . . . . .	0,94	15°	Tran . . . . .	0,92—0,93	15°
Methylalkohol . . . . .	0,81	4°	Wasser (destilliert) . . . . .	1,00	4°
Milch . . . . .	1,03	15°	Wein, Rhein- . . . . .	0,99—1,00	—
Mineralschmieröle 0,90—0,93		20°	Zinkvitriol,		
Mohnöl . . . . .	0,92	15°	mit 17 vH ZnSO <sub>4</sub> + 7 H <sub>2</sub> O	1,10	15°
Naphtha, Petroleum- . . . . .	0,76	19°	" 55 " " . . . . .	1,40	15°
			Zitronenöl . . . . .	0,84	16°

Mit Hilfe der Tafel auf S. 392 erhält man durch Bildung von  $1:V_t$  das spez. Gewicht des Wassers bei verschiedenen Temperaturen.

**Aräometer.** Sind  $n$  die Aräometergrade,  $\sigma_l$  und  $\sigma_s$  die spez. Gewichte von Flüssigkeiten, leichter oder schwerer als Wasser, so ist bei dem Aräometer nach

$$\begin{aligned} \text{Baumé (bei } 12,5^\circ \text{ C)} & \dots \dots \sigma_l = \frac{145,88}{145,88 + n} \quad \text{und} \quad \sigma_s = \frac{145,88}{145,88 - n}; \\ \text{Beck ( „ } 12,5^\circ \text{ „)} & \dots \dots \sigma_l = \frac{170}{170 + n} \quad \text{und} \quad \sigma_s = \frac{170}{170 - n}; \\ \text{Brix ( „ } 15,6^\circ \text{ „)} & \dots \dots \sigma_l = \frac{400}{400 + n} \quad \text{und} \quad \sigma_s = \frac{400}{400 - n}. \end{aligned}$$

**Spez. Gewichte und Mischungsverhältnisse des wässrigen Alkohols (nach Brix).**

Spez. Gewicht . . . . .	0,999	0,993	0,987	0,981	0,976	0,971	0,966	0,959	0,952	0,944
100 R.-T. { Alkohol-R.-T. . . . .	1	5	10	15	20	25	30	35	40	45
enthalten { Wasser-R.-T. . . . .	0,1	0,3	0,5	0,7	1,0	1,3	1,7	2,1	2,6	3,1

Spez. Gewicht . . . . .	0,934	0,924	0,913	0,902	0,890	0,877	0,864	0,850	0,834	0,816
100 R.-T. { Alkohol-R.-T. . . . .	50	55	60	65	70	75	80	85	90	95
enthalten { Wasser-R.-T. . . . .	53,70	48,72	43,66	38,56	33,38	28,14	22,82	17,42	11,88	6,15

Die vorstehenden Angaben gelten für eine Temperatur von  $15\frac{5}{9}^\circ$ . Dividiert man die Alkohol-R.-T. durch das zugehörige spez. Gewicht und multipliziert mit 0,7946, so erhält man die entsprechenden Alkohol-G.-T.

### c. Spez. Gewichte von Gasen und Dämpfen

bei  $0^\circ$  und 760 mm Q.-S. (Vrgl. S. 633.)

Trockene atmosphärische Luft = 1.

Aetherdampf . . . . .	2,586	Leuchtgas . . . . .	0,34 bis 0,45
Aethylen . . . . .	0,974	Quecksilberdampf . . . . .	6,94
Alkoholdampf . . . . .	1,601	Salzsäuregas . . . . .	1,25
Ammoniak . . . . .	0,592	Sauerstoff . . . . .	1,1056
Azetylen . . . . .	0,91	Schwefeldampf . . . . .	6,617
Chlor . . . . .	2,423	Schwefelkohlenstoff . . . . .	2,644
Chlorwasserstoff . . . . .	1,2612	Schwefelwasserstoff . . . . .	1,175
Flußsäure . . . . .	2,37	Schweflige Säure . . . . .	2,250
Grubengas (Sumpfgas) . . . . .	0,559	Stickstoff . . . . .	0,9714
Kohlenoxyd . . . . .	0,9673	Wasserdampf . . . . .	0,6233
Kohlensäure . . . . .	1,5291	Wasserstoff . . . . .	0,06927

Das spez. Gewicht der **trockenen Luft** ist nach Regnault bei einer Temperatur von  $0^\circ$  und einem Drucke von 760 mm Q.-S., bezogen auf destilliertes Wasser von  $4^\circ$ , 0,001 293 187 oder  $\sim 1:773$ . (Vrgl. S. 421.)

Gewichte von 1 cbm Dampf in kg s. S. 434.

Das Gewicht von 1 cbm **Rauchgas** mittlerer Zusammensetzung beträgt etwa  $1,25 - 0,0027 t$  in kg, wenn  $t$  die Temperatur in  $^\circ\text{C}$  ist. Da jedoch die Zusammensetzung der Rauchgase je nach dem verbrannten Brennstoffe und der mehr oder weniger reichlichen Luftzuführung sehr wechselt, so empfiehlt sich die genauere Berechnung auf Grund der Gasanalyse (vrgl. S. 489 u. f.).

### C. Gewichte geschichteter Körper.

1 cbm wiegt kg:

Aepfel . . . . .	300	Beton mit Granitbrocken . . . . .	2200
Basalt . . . . .	3200	Birnen und Pflaumen . . . . .	350
Beton mit Ziegelbrocken . . . . .	1800	Braunkohlen, lufttrocken und	
„ „ Kalksteinbrocken . . . . .	2000	in Stücken . . . . .	650 bis 780

Buchenholz in Scheiten . . .	400	Mörtel (Kalk und Sand) 1700—1800	
Chilispeter, aufgeschüttet . . .	1000	Nadelholz in Scheiten . . .	330
Eichenholz in Scheiten . . .	420	Rüben . . . . .	570—650
Fettkalk, gebrannt und pulverig	500	Sand, Lehm, Erde, trocken .	1600
Fichtenholz in Scheiten . . .	320	„ „ „ nafs . . . . .	2000
Formsand, aufgeschüttet . . .	1200	Schnee, frisch gefallen . . .	80—190
„ „ eingestampft . . . . .	1650	„ „ feucht und wässrig	200—800
Granit . . . . .	2700	Schwemmsteine, rheinische . .	850
Gras und Klee . . . . .	350	Siedesalz (NaCl), grobkörnig .	745
Holzkohlen von weichem Holze	150	„ „ feinkörnig . . . . .	785
„ „ hartem „ . . . . .	220	Steinsalz (NaCl), gemahlen . .	1015
Kalk- und Bruchsteine . . . . .	2000	Ton, Kies, trocken . . . . .	1800
Kartoffeln . . . . .	650—700	„ „ nafs . . . . .	2000
Kohlen, Zwickauer . . . . .	770—800	Torf, lufttrocken . . . . .	325—410
„ oberschlesische . . . . .	760—800	„ feucht . . . . .	550—650
„ niederschlesische . . . . .	820—870	Trafs, gemahlen . . . . .	950
„ Saar- . . . . .	720—800	Wasserkalk, gepulvert . . . .	550
„ Ruhr- . . . . .	800—860	Weifstannenholz in Scheiten .	340
Koks, Gas- . . . . .	360—470	Ziegelsteine, gewöhnliche	1375—1500
„ Zechen- . . . . .	380—530	„ Klinker . . . . .	1600—1800
Mist und Guano . . . . .	750—950		

## 1 Ladung von 10000 kg (200 Ztr.) enthält cbm:

Brauneisenstein . . . . .	3,0—3,5	Koks, Gas- . . . . .	21,3—27,8
Braunkohlen, lufttrocken und		„ Zechen- . . . . .	18,9—26,3
in Stücken . . . . .	12,8—15,4	Lehm, frisch gegraben . . . .	6,0
Buchenholz in Scheiten . . . .	25,0	Mörtel (Kalk und Sand) . . . .	5,6—5,9
Eichenholz in Scheiten . . . .	23,8	Nadelholz in Scheiten . . . .	30,3
Fichtenholz in Scheiten . . . .	31,3	Prefskohlen . . . . .	9,0—10,0
Flufskies, trocken . . . . .	3,7—4,3	Rüben . . . . .	15,4—17,5
„ nafs . . . . .	3,5—4,0	Schlacken und Koksasche . .	16,7
Flufssand, feucht . . . . .	5,7	Schwefelkies . . . . .	3,0
Formsand, aufgeschüttet . . . .	8,3	Schwemmsteine (rheinische) . .	11,8
„ „ eingestampft . . . . .	6,1	Spateisenstein . . . . .	3,0—3,3
Holzkohlen von weichem Holze	66,7	Steinsalz (NaCl), gemahlen . .	9,8
„ „ hartem „ . . . . .	45,5	Teer, Steinkohlen- . . . . .	8,3
Kalk, gebrannt . . . . .	7,7—8,4	Ton, trocken . . . . .	5,6
Kalk- und Bruchsteine . . . . .	5,0	„ nafs . . . . .	5,0
Kartoffeln . . . . .	13,7—14,3	Torf, lufttrocken . . . . .	24,4—30,8
Kohlen, Zwickauer . . . . .	12,5—13,0	„ feucht . . . . .	15,4—18,2
„ oberschlesische . . . . .	12,5—13,2	Trafs, gemahlen . . . . .	10,5
„ niederschlesische . . . . .	11,5—12,2	Weifstannenholz in Scheiten .	29,4
„ Saar- . . . . .	12,5—13,9	Ziegelsteine, gewöhnliche . .	6,7—7,3
„ Ruhr- . . . . .	11,6—12,5	„ Klinker . . . . .	5,6—6,3

44 engl. Kub.F. geschütteter **Steinkohlen** wiegen etwa 1000 kg, also 100 engl. Kub.F. rd. 2270 kg, oder 1 cbm rd. 803 kg. Nach Stevens und Düring gehen in 1 cbm Schiffs-Laderaum 896 kg Steinkohlen.

## II. METALLE.

### Allgemeines.

#### a. Gewicht von 1000 m Draht in kg.

Spez. Gewichte: Draht aus Schmiedeisen 7,65\*), Stahl 7,956\*), Kupfer 9,00\*\*), Messing 8,687\*\*).

Dicke mm	Schmied- eisen kg	Stahl kg	Kupfer kg	Messing kg	Dicke mm	Schmied- eisen kg	Stahl kg	Kupfer kg	Messing kg
0,14	0,118	0,122	0,139	0,134	1,4	11,78	12,25	13,86	13,37
0,16	0,154	0,160	0,181	0,175	1,6	15,38	16,00	18,10	17,46
0,18	0,195	0,202	0,229	0,221	1,8	19,47	20,25	22,90	22,11
0,20	0,240	0,250	0,283	0,273	2,0	24,03	25,00	28,28	27,29
0,22	0,291	0,302	0,342	0,330	2,2	29,08	30,24	34,21	33,03
0,24	0,346	0,360	0,407	0,393	2,5	37,55	39,05	44,18	42,65
0,26	0,406	0,422	0,478	0,461	2,8	47,10	48,99	55,42	53,47
0,28	0,471	0,490	0,554	0,535	3,1	57,74	60,05	67,93	65,55
0,31	0,577	0,600	0,679	0,656	3,4	69,46	72,23	81,71	78,85
0,34	0,695	0,722	0,817	0,789	3,8	86,76	90,02	102,1	98,52
0,37	0,823	0,855	0,968	0,934	4,2	105,99	110,23	124,7	120,3
0,40	0,961	1,000	1,131	1,092	4,6	127,14	132,22	149,6	144,4
0,45	1,217	1,265	1,431	1,382	5,0	150,21	156,22	176,7	170,6
0,50	1,502	1,562	1,767	1,706	5,5	181,75	189,02	213,8	206,4
0,55	1,817	1,890	2,138	2,064	6,0	216,30	224,95	254,5	245,6
0,60	2,163	2,249	2,545	2,456	6,5	253,85	264,01	298,6	288,3
0,70	2,944	3,062	3,464	3,343	7,0	294,41	306,19	346,4	334,3
0,80	3,845	3,999	4,524	4,367	7,6	347,04	360,92	408,3	394,1
0,90	4,867	5,061	5,726	5,526	8,2	404,00	420,16	475,3	458,8
1,00	6,008	6,249	7,069	6,823	8,8	465,28	483,89	547,4	528,4
1,10	7,270	7,561	8,553	8,256	9,4	530,89	552,13	624,6	602,9
1,20	8,652	8,998	10,18	9,825	10,0	600,83	624,86	706,9	682,3
1,30	10,154	10,560	11,95	11,53					

**Bleidraht** s. unter D. Blei.

**Bronzedraht** s. unter F. Metallegierungen.

\*) Nach Angaben von Felten & Guillaume, Mülheim (Rhein).

\*\*) Nach Angaben von C. Heckmann, Duisburg-Hochfeld, für hart gezogenen un-  
geglühten Draht; für geglähten Draht weichen die Zahlen nur unbedeutend ab.

## b. Gewichte von Metallplatten in kg/qm.

Stärke mm	Gufseisen	Schweißeisen	Flußeisen	Flußstahl und gewalzter Stahl	Kupfer	Messing	Bronze	Zink	Blei
1	7,25	7,8	7,85	7,86	8,9	8,55	8,6	7,2	11,37
2	14,50	15,6	15,70	15,72	17,8	17,10	17,2	14,4	22,74
3	21,75	23,4	23,55	23,58	26,7	25,65	25,8	21,6	34,11
4	29,00	31,2	31,40	31,44	35,6	34,20	34,4	28,8	45,48
5	36,25	39,0	39,25	39,30	44,5	42,75	43,0	36,0	56,85
6	43,50	46,8	47,10	47,16	53,4	51,30	51,6	43,2	68,22
7	50,75	54,6	54,95	55,02	62,3	59,85	60,2	50,4	79,59
8	58,00	62,4	62,80	62,88	71,2	68,40	68,8	57,6	90,96
9	65,25	70,2	70,65	70,74	80,1	76,95	77,4	64,8	102,33
10	72,50	78,0	78,50	78,60	89,0	85,50	86,0	72,0	113,70
11	79,75	85,8	86,35	86,46	97,9	94,05	94,6	79,2	125,07
12	87,00	93,6	94,20	94,32	106,8	102,60	103,2	86,4	136,44
13	94,25	101,4	102,05	102,18	115,7	111,15	111,8	93,6	147,81
14	101,50	109,2	109,90	110,04	124,6	119,70	120,4	100,8	159,18
15	108,75	117,0	117,75	117,90	133,5	128,25	129,0	108,0	170,55
16	116,00	124,8	125,60	125,76	142,4	136,80	137,6	115,2	181,92
17	123,25	132,6	133,45	133,62	151,3	145,35	146,2	122,4	193,29
18	130,50	140,4	141,30	141,48	160,2	153,90	154,8	129,6	204,66
19	137,75	148,2	149,15	149,34	169,1	162,45	163,4	136,8	216,03
20	145,00	156,0	157,00	157,20	178,0	171,00	172,0	144,0	227,40
21	152,25	163,8	164,85	165,06	186,9	179,55	180,6	151,2	238,77
22	159,50	171,6	172,70	172,92	195,8	188,10	189,2	158,4	250,14
23	166,75	179,4	180,55	180,78	204,7	196,65	197,8	165,6	261,51
24	174,00	187,2	188,40	188,64	213,6	205,20	206,4	172,8	272,88
25	181,25	195,0	196,25	196,50	222,5	213,75	215,0	180,0	284,25
26	188,50	202,8	204,10	204,36	231,4	222,30	223,6	187,2	295,62
27	195,75	210,6	211,95	212,22	240,3	230,85	232,2	194,4	306,99
28	203,00	218,4	219,80	220,08	249,2	239,40	240,8	201,6	318,36
29	210,25	226,2	227,65	227,94	258,1	247,95	249,4	208,8	329,73
30	217,50	234,0	235,50	235,80	267,0	256,50	258,0	216,0	341,10

## Spezifische Gewichte vorstehender Metalle, bezogen auf:

Gufseisen	} 1	1,076	1,083	1,084	1,228	1,179	1,186	0,993	1,568
Schweißeisen		} 0,929	1	1,006	1,008	1,141	1,096	1,103	0,923
Flußeisen	} 0,924		0,994	1	1,001	1,134	1,089	1,096	0,917

## c. Feinblech- und Drahtlehren.

Nr. der Lehre	Deutsche Milli-	Deutsche	Dillinger	Westfälische	Engl. Feinblech-	Französ. Feinblech-	Nr. der Lehre	Deutsche Milli-	Deutsche	Dillinger	Westfälische	Engl. Feinblech-	Französ. Feinblech-
	meter - Drahtlehre	Feinblechlehre	Feinblechlehre	Stift - Drahtlehre	und Drahtlehre	und Drahtlehre		meter - Drahtlehre	Feinblechlehre	Feinblechlehre	Stift - Drahtlehre	und Drahtlehre	und Drahtlehre
	mm	mm	mm	mm	mm	mm		mm	mm	mm	mm	mm	mm
0000	.	.	.	.	11,531	.	22	2,2	0,625	0,60	4,6	0,711	5,4
000	.	.	.	.	10,795	.	22 1/2	.	.	0,50	.	.	.
00	.	.	.	.	9,652	.	23	.	0,562	0,40	5,5	0,635	5,9
0	.	.	.	.	8,636	.	24	.	0,500	0,30	6,0	0,559	6,4
1	.	5,50	5,50	0,6	7,620	0,6	25	2,5	0,438	.	7,0	0,508	7,0
2	0,2	5,00	5,00	0,7	7,213	0,7	26	.	0,375	.	7,6	0,457	7,6
2 1/2	0,22	.	.	.	.	.	27	.	0,300	.	8,8	0,406	8,2
2 1/4	0,24	.	.	.	.	.	28	2,8	.	.	9,4	0,356	8,8
2 1/6	0,26	.	.	.	.	.	29	.	.	.	10,0	0,330	9,4
2 1/8	0,28	.	.	.	.	.	30	.	.	.	.	0,310	10,0
3	.	4,50	4,50	.	6,579	0,8	31	3,1	.	.	.	0,280	.
3 1/1	0,31	.	.	.	.	.	32	.	.	.	.	0,249	.
3 1/4	0,34	.	.	.	.	.	33	.	.	.	.	0,221	.
3 1/7	0,37	.	.	.	.	.	34	3,4	.	.	.	0,196	.
4	0,40	4,25	4,25	0,8	6,045	0,9	35	.	.	.	.	0,175	.
4 1/5	0,45	.	.	.	.	.	36	.	.	.	.	0,155	.
5	0,50	4,00	4,00	0,9	5,588	1,0	37	3,7	.	.	.	.	.
5 1/5	0,55	.	.	.	.	.	38	3,8	.	.	.	.	.
6	0,60	3,75	3,50	1,0	5,154	1,1	39	3,9	Bergische Drahtlehre.			Französ. Fein-	
7	0,70	3,50	3,25	1,1	4,572	1,2	40	4,0	Nr.			blech- und	
8	0,80	3,25	3,00	1,2	4,191	1,3	42	4,2	mm			Drahtlehre.	
9	0,90	3,00	2,75	1,3	3,759	1,4	44	4,4	Ketten . . . . .			Nr.	
10	1,0	2,75	2,50	1,4	3,404	1,5	46	4,6	Schleppen . . . . .			mm	
11	1,1	2,50	2,25	1,6	3,048	1,6	48	4,8	Grobrinken . . . . .			P. 0	
12	1,2	2,25	2,00	.	2,769	1,8	50	5,0	Feinrinken . . . . .			P. 1	
13	1,3	2,00	1,85	1,8	2,413	2,0	55	5,5	Malgen . . . . .			P. 2	
14	1,4	1,75	1,70	2,0	2,108	2,2	60	6,0	Grobmemel . . . . .			P. 3	
15	.	1,50	1,55	2,2	1,829	2,4	65	6,5	Mittelmemel . . . . .			P. 4	
16	1,6	1,375	1,40	2,5	1,651	2,7	70	7,0	Feinmemel . . . . .			P. 5	
17	.	1,250	1,25	2,8	1,473	3,0	75	7,5	Klinkmemel . . . . .			P. 6	
18	1,8	1,125	1,10	3,1	1,245	3,4	80	8,0	Natel . . . . .			P. 7	
19	.	1,000	1,00	3,4	1,067	3,9	85	8,5	Mittel . . . . .			P. 8	
20	2,0	0,875	0,90	3,8	0,889	4,4	90	9,0	3 Schillings . . . . .			P. 9	
21	.	0,750	0,80	4,2	0,813	4,9	95	9,5	1 Band . . . . .			P. 10	
21 1/2	.	0,688	0,70	.	.	.	100	10,0	2 " . . . . .			P. 11	
									3 " . . . . .			P. 12	
									4 " . . . . .			P. 13	
									5 " . . . . .			P. 14	
									6 " . . . . .			P. 15	
									7 " . . . . .				

Englische Lehre (B. W. G. = Birmingham wire gauge) in England, meist auch in Norddeutschland für Blech, Draht und Bandseisen, in Süddeutschland für Bandseisen. Dillinger Lehre benutzen die Werke von Dillingen und Hayange. Französische Drahtlehre (Jaug de Paris, 1857) in Frankreich allgemein für Draht und Drahtstifte, in Deutschland für Drahtstifte, in Süddeutschland meist auch für Draht. Bergische Lehre (älteste Lehre) nur noch in der Gegend von Altena und Iserlohn üblich.

## Eisen.\*)

Spezifische Gewichte s. S. 634, 640 u. 641, spezifische Wärme s. S. 394, Wärmeleitfähigkeit 11,0 (Silber 100), Wärmeausdehnungszahlen s. S. 391, Strahlungszahlen s. S. 410, Schmelzpunkte s. S. 397, elektrische Leitfähigkeit nach Le Chatelier  $10,53 \cdot 10^4$ , nach Benedicks  $13,1 \cdot 10^4$  (ein Draht von 1000 m Länge und 1 qmm Querschnitt hat  $\sim 111 \Omega$  Widerstand).

Kristallform: regulär, bei  $900^\circ$  Modifikationsänderung.

### 1. Bestandteile und Einteilung.

#### a. Bestandteile.

Die Eigenschaften des technisch verwerteten Eisens werden durch die Art und die Mengen der Nebenbestandteile hervorgebracht. Die Nebenbestandteile bedingen neben dem Eisengehalt den Wert der Erze und die Verfahren der Verhüttung.

#### A. Absichtlich beigemischte Nebenbestandteile.

**Kohlenstoff.** Klassifikation nach dem C-Gehalt s. u. Die Zerreißfestigkeit wächst mit einem C-Gehalt von 0 bis  $\sim 1,1$  vH von  $\sim 30$  kg/qmm auf  $\sim 100$  kg/qmm, während gleichzeitig die Dehnung von  $\sim 30$  vH auf  $\sim 3$  vH abnimmt (s. auch Tafel auf S. 645). Der Schmelzpunkt sinkt bei einem C-Gehalt von 0 bis  $4,2$  vH von  $1510^\circ$  auf  $1130^\circ$ . Einfluß auf Härtebarkeit s. Tafel auf S. 645. Im schmiedbaren Eisen und weißen Roheisen ist der Kohlenstoff in gebundener Form als Karbid  $Fe_3C$  enthalten (entweicht als Gas beim Kochen des Eisens in Säuren), im grauen Roheisen größtenteils als Graphit (schwarzer Lösungsrückstand). Graphitbildung s. u. Die Härte des Eisens wächst mit zunehmendem Gehalte an gebundenem Kohlenstoff.

**Silizium.** Vermindert die Gasentwicklung im Schmelzfluß, bewirkt daher dichten Guß, beeinträchtigt die Schmied- und Schweißbarkeit, fördert die Bildung von Graphit und Temperkohle im Eisen. Si-Gehalte s. u.

**Mangan.** Bis  $0,2$  vH im Schweißeseisen,  $0,3$  und mehr im Flußeisen. Bewirkt Abscheidung des Schwefels und Sauerstoffes aus dem Eisen. Vermindert die Schweißbarkeit. Erhöht die Festigkeit auf Kosten der Zähigkeit. Mangan übt eine härtende Wirkung aus (s. u.), daher in Spezialstählen Mangangehalte bis zu  $\sim 12$  vH.

**Nickel.** Bewirkt als Zusatz zum Flußeisen Erhöhung der Festigkeit und der Dehnung, dsgl. in Spezialstählen.

Die Kaiserliche Marine unterscheidet niedrigprozentigen (1 bis 3 vH), mittel- (5 bis 7 vH) und hochprozentigen ( $\sim 25$  vH) Nickelstahl. Anforderungen:

\*) Ausführliche Angaben über die metallurgische Chemie des Eisens, Gewinnungs- und Weiterverarbeitungsverfahren, Hüttenmaschinen und Statistik der Eisenerzeugung s. „Hütte“, Taschenbuch für Eisenhüttenleute; vgl. ferner Ledebur, Handbuch der Eisenhüttenkunde und „Gemeinsame Darstellung des Eisenhüttenwesens“, herausgegeben vom Verein Deutscher Eisenhüttenleute.

Material	Elastizitäts- grenze kg/qmm	Festigkeit kg/qmm	Dehnung vH	Proben- durchmesser	Marken- entfernung
Niedrigproz. Nickelstahl	30	45 bis 50	20	} 20 mm	200 mm
Mittel „ „	38	52 „ 70	18		
Hoch „ „	—	mind. 60	30		

Hochprozentiger Nickelstahl kann unmagnetisch hergestellt werden.

**Chrom, Wolfram, Molybdän, Vanadium**, Zusätze zu Spezialstählen, welche Festigkeit und Härte bedeutend erhöhen, während zugleich eine hohe Zähigkeit erreichbar ist. Zahlenwerte über Festigkeitseigenschaften s. S. 508, vrgl. auch II. Bd. S. 352.

## B. Schädliche Nebenbestandteile.

Sie beeinträchtigen die Festigkeitseigenschaften.

**Schwefel** vermindert ferner die Schmied- und Schweißbarkeit, macht das Eisen brüchig im rotwarmen Zustande (Rotbruch); zulässige Gehalte s. u.

**Phosphor** macht das Eisen im warmen und kalten Zustande spröde (Kaltbruch); zulässige Gehalte s. u.

**Sauerstoff** vermindert die Schmied- und Schweißbarkeit, erzeugt Rotbruch.

**Arsen** wirkt ähnlich wie Phosphor.

**Kupfer.** Ueber den Einfluß des Kupfers sind sich weder Theoretiker noch Praktiker einig.

Im Graugufs zeigt sich die schädliche Wirkung erst bei bedeutend höheren Gehalten als im Schmiedeisen. S kann im Graugufs durch Erschwerung der Graphitbildung festigkeitserhöhend wirken, P ist mitunter erforderlich, da er den Gufs dünnflüssig und dicht macht.

## b. Einteilung.

### I. Roheisen.

Nicht schmiedbar, spröde, beim Erhitzen plötzlich schmelzend. Gehalt an C mindestens 2 vH\*) (theoretische Grenze zwischen Roheisen und Schmiedeisen ist Punkt  $E_1$  des Diagramms Abb. 1).

1. **Graues Roheisen.** Ein Teil des Kohlenstoffgehalts wird infolge der Wirkung von Si nach der Erstarrung als Graphit ausgeschieden. Bruchfläche grau.

2. **Weißes Roheisen.** Der gesamte Kohlenstoff ist infolge eines größeren Mangangehaltes gebunden. Bruchfläche weiß. Härter, spröder als graues Roheisen.

„Melirtes“, „granmelirtes“, „halbirtes“ Roheisen u. a. sind Sorten, welche nach Zusammensetzung und Bruchaussehen zwischen 1 und 2 liegen.

### II. Schmiedbares Eisen (Schmiedeisen).

Schmiedbar und, wenn ausgeglüht, in gewöhnlicher Temperatur zäh und biegsam. Beim Erhitzen allmählich bis zum Schmelzen erweichend. Gehalt an C unter 2 vH.

\*) s. Wüst, Metallurgie 1909 S. 512 u. f.

## Härteskala.

Härte Nr.	C-Gehalt in vH	Festigkeit in kg für 1 qmm	Dehnung in vH auf 100 mm Stablänge	Benennung	Verwendungszweck
000	0,06	34 bis 36	30 bis 35	Weichstes Flußeisen, gutschweißbar, nicht härbar	Draht, Fein- und Stanzbleche, gezogene Röhren.
00	0,09	36 bis 38	27 bis 32	Weiches Flußeisen, gut schweißbar, nicht härbar	Bleche, gezogene und geschweißte Rohre, Draht, Drahtstifte, Niete.
0	0,12	38 bis 41	23 bis 29	Weiches Flußeisen, gut schweißbar, nicht härbar	Bleche, gezogene und geschweißte Rohre, Draht, Drahtstifte, Niete, Schrauben, Bandisen.
1	0,16	41 bis 44	21 bis 26	Flußeisen, schweißbar, nicht härbar	Eisenbahnschwellen, Laschen, Maschinenteile, Bleche, Träger, Winkel-, Stab- und Fassonisen jeglicher Art. Zaundraht, Drahtstifte, Ketten, Hacken, Spaten, Schaufeln.
2	0,20	44 bis 47	19 bis 23	Weicher Stahl, wenig härbar	Eisenbahnschwellen, Schaufeln, Hufnägel, geknotete Springfedern.
3	0,25	47 bis 53	17 bis 22	Mittelweicher Stahl, härbar	Achsen, Schmiedestücke, Radreifen, Veloziptedrohre. Draht, Gabeln, Grubenschienen.
4	0,35	53 bis 60	14 bis 19	Mit-elharter Stahl, gut härbar	Gewehrläufe, Draht, Gasflaschen, Radreifen, Achsen, Pflegscharen, Spaten, bessere Springfedern, Raspen, Griffstahl.
5	0,45	60 bis 68	11 bis 16	Zäher Werkzeugstahl	Schienen, Bandagen, Hämmer, Pflegscharen, Sensen, Hacken, Spaten, Gabeln, Klängen, Scherenmesser, Ahtendraht, Holzfeilen, Raspen, beste Federn.
6	0,55	68 bis 76	9 bis 13	Mittelharter Werkzeugstahl	Straßenbahnschienen, Radreifen, Matrizen, Hämmer, Kaltmeißel, Feilen, Pflegscharen, Spaten, Gabeln, Sensen, Klängen, Döpper, Korsettstahl, Hartdraht, beste Federn, Seildraht.
7	0,65	76 bis 84	6 bis 11	Harter Werkzeugstahl	Radreifen f. elektrischen Betrieb, Gewehrläufe f. Militär-gewehre, Geschosse, Sägelechte, Meißel, Feilen, Steinbohrer, Kabeldraht, Forterseile.
8	0,75	84 bis 92	3 bis 8	Sehr harter Werkzeugstahl	Geschosse, naturharte Sägebleche, Kugeln für Kugel-mühlen, Stempel, Regenschirmdraht.
9	0,80	92 bis 100	2 bis 5	Hartstahl	Hartwalzen, Gewindebohrer, Dreh- und Hobelstähle, Frismesser, Nadeln, Regenschirmdraht.

1. **Flusseisen und Flußstahl.** Im flüssigen Zustande erzeugt Schlackenfrei oder mit geringem Schlackengehalt.

2. **Schweißeisen und Schweißstahl.** Im nichtflüssigen, teigartigen Zustande erzeugt, schlackenhaltig, aus zahlreichen einzeln entstandenen, zusammengeschweiften, mitunter chemisch verschiedenen Eisenkörnern (oder „Sehnen“) bestehend.

Als Stahl bezeichnet man Schmiedeeisen mit einer Zerreißfestigkeit von mindestens 50 kg im ausgeglühten Zustande. Stahl ist härtbar bei einem Kohlenstoffgehalte von über  $\sim 0,25$  vH.

Zwischen Roheisen und Schmiedeeisen besteht ein allmählicher Uebergang der Eigenschaften, jedoch werden Eisensorten mit 1,6 bis 2,6 vH C kaum hergestellt.

Benennung der Eisensorten nach der Erzeugung und besondere Bezeichnungen einzelner Erzeugnisse s. u.

Bezeichnung des Flußeisens und Flußstahles nach Härtegraden s. „Härteskala“ S. 645.

## 2. Zustandsänderungen und Wärmebehandlung.

### a. Zustandsänderungen.

Bei der Erhitzung und Abkühlung verändert das Eisen oberhalb  $670^{\circ}$  seinen inneren Aufbau je nach dem Kohlenstoffgehalt bei verschiedenen Temperaturen (Diagramm Abb. 1).

#### Zustand der Eisenkohlenstofflegierungen in den Feldern des Diagramms.

$AB_1D_1$  Schmelzfluß.

$AE_1B_1$  Gemisch aus Schmelze und festen Kristallen.

$AE_1SO$  feste Lösung von Kohlenstoff und Eisen.

$OSR$  feste Lösung von Kohlenstoff und Eisen, darin ausgeschieden Kristalle reinen Eisens.

$E_1ST$  feste Lösung von Kohlenstoff und Eisen, darin ausgeschieden Karbidkristalle.

$RSV$  (Zustand der überwiegenden Menge alles schiedbaren Eisens bei gewöhnlicher Temperatur) Kristalle reinen Eisens zusammen mit einem feinlamellaren Gemenge von Karbid und reinem Eisen. (Anteil des Gemenges wächst zwischen  $R$  und  $S$  von 0 auf 100 vH).

$TSV$  Karbidkristalle zusammen mit einem feinlamellaren Gemenge von Karbid und reinem Eisen.

#### Zustandsänderungen an den Linien des Diagramms.

$AB_1$  beginnende Erstarrung bzw. vollendete Schmelzung.

$AE_1$  vollendete Erstarrung bzw. beginnende Schmelzung.

$OS$  Ausscheidung von reinem Eisen aus der festen Lösung Eisen-Kohlenstoff.

$E_1S$  Ausscheidung von Karbid  $Fe_3C$  aus der festen Lösung Eisen-Kohlenstoff.

$RST$  Umwandlung der festen Lösung Eisen-Kohlenstoff in ein feinlamellares Gemenge von Karbid und Eisen.

Die Linie  $FE$  bezeichnet die Löslichkeit des Graphits im festen Eisen bei langdauerndem Glühen.

Die **Graphitbildung** geht nach der Erstarrung in einem engen Temperaturbereich vor sich (schraffierter Streifen des Diagramms) u. zw. um so reichlicher, je langsamer dieser Temperaturbereich durchlaufen wird. Ein Siliziumgehalt des Eisens befördert und beschleunigt die Graphitbildung in ganz ausgesprochener Weise, ebenso geringe Mengen von Aluminium. Der Graphitbildung entgegen wirken Mangan, ferner Schwefel und Chrom.

Abscheidung von **Temperkohle** (fein verteilter, anscheinend amorpher, fester Kohlenstoff) findet im siliziumhaltigen, manganarmen weissen Roheisen bei längerem Glühen in Temperaturen von  $800^{\circ}$  und höher statt.

#### b. Wärmebehandlung.

**Härten.** Durch schnelles Abkühlen (Abschrecken in Wasser) wird der Zustand des Feldes  $OS E_1$  (Kohlenstoff in fester Lösung, sogen. „Härtungskohle“) bei gewöhnlicher Temperatur erhalten. Das Material zeigt erhöhte Festigkeit, ist hart und sehr spröde (innere Spannungen, Härterisse). Beste Härtetemperatur für reinen Kohlenstoffstahl von 1 vH C  $\sim 750^{\circ}$ . Wolframstähle sind bei  $\sim 1100^{\circ}$  zu härten.

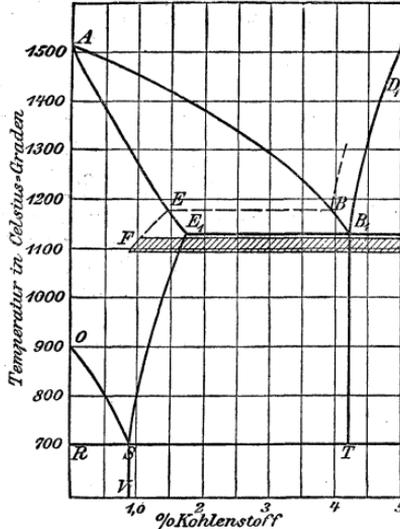
Durch **Anlassen** (Erhitzen der abgeschreckten Stähle auf  $250^{\circ}$  bis  $400^{\circ}$ ) werden die Spannungen und die Sprödigkeit beseitigt und die Festigkeit ganz bedeutend (50 bis 100 vH) erhöht, die Ritzhärte wird durch das Anlassen vermindert. Mn, Chr, Wo, Ni, Mo erniedrigen die Temperatur, bei welcher sich die feste Lösung zersetzt (härtende Wirkung), bei hohen Gehalten wird die Umwandlung ganz unterdrückt (naturharte Stähle).

Durch weniger schroffes Abschrecken (Härten in Oel, im Windstrom [Ventilator], geschmolzenem Talg, geschmolzenem Blei) werden in einer Vornahme ähnliche Wirkungen erreicht wie durch Härten in Wasser mit nachfolgendem Anlassen, dabei werden meist Härterisse vermieden.

**Einsatzhärtung:** Durch Glühen von Stahlwaren in Kohlenstoff abgebenden Mitteln (Härtepulvern) findet eine Kohlung der äußersten Oberfläche statt, wodurch diese mit größerer Härte versehen wird, während das Innere weicher und dehnbarer bleibt.

**Weichglühen.** Durch stundenlanges Glühen bei  $670^{\circ}$  wird die Festigkeit des Stahles mit  $\sim 0,3$  bis 1,6 vH C erniedrigt, die Dehnung

Abb. 1.



erhöht; einmaliges kurzes Erhitzen auf  $800^{\circ}$  gibt dem weichgeglühten Material die ursprünglichen Eigenschaften wieder.

Ueberhitzung. Durch längeres Erhitzen weit über die Linie *OSE* (Abb. 1) werden die Festigkeitseigenschaften des Schmiede Eisens verdorben. Bei weichem Flusseisen läßt sich stattgefundenen Ueberhitzung durch geringe Biegezahl bei der Kerbschlagbiegeprobe feststellen.  $\frac{1}{2}$ stündiges Glühen bei  $900^{\circ}$  hebt bei weichem Material die schädliche Wirkung der Ueberhitzung auf.

### 3. Die Erzeugung der verschiedenen Eisensorten und ihre Eigenschaften.

#### a. Roheisen.

Die für die Roheisenerzeugung in Betracht kommenden Erze werden in folgende Hauptgruppen eingeteilt:

Name	Eisen gebunden als		Eisengehalt der Verbindung vH	Eisengehalt des getrockneten Erzes vH	Bemerkungen
	Verbindung	Formel			
Spateisensteine	Eisenkarbonat	$\text{Fe CO}_3$	48,27	33 bis 40	meist phosphorarm
Brauneisensteine	Eisenhydroxyd mit wechselndem Wassergehalt	$2\text{Fe}_2\text{O}_3 + \sim 3\text{H}_2\text{O}$	—	25 „ 62	„Minette“ sind lothringische phosphorreiche Brauneisenstein
Roteisensteine	Eisenoxyd	$\text{Fe}_2\text{O}_3$	70	48 „ 63	
Magneteisensteine	Eisenoxyduloxyd	$\text{Fe}_3\text{O}_4$	72,4	60 „ 70	Hauptfundort Schweden

Deutschland einschl. Luxemburg verhüttet  $\sim 60$  vH eigener Erze, 40 vH werden (aus Schweden, Spanien, Algier, Rußland) eingeführt.

Die Erze (mitunter brikettiert, geröstet oder magnetisch aufbereitet) werden mit Koks (in holzreichen Ländern mit Holzkohle) in Hochöfen fortläufig niedergeschmolzen (je nach der Reichhaltigkeit der Erze, der Größe des Ofens und der zu erblasenden Roheisensorte 90 bis 180 kg Koks für 100 kg Roheisen), wobei heißer Wind ( $600$  bis  $900^{\circ}$ ) in den Ofen geblasen wird. Tageserzeugung großer deutscher Oefen 250 bis 400 t.

Die Schlacke wird vielseitig verwendet, u. a. a) granuliert für Mauerzwecke oder zur Schlackensteinherstellung, auch als Spülversatz; b) in Klötze gegossen, nach dem Erkalten zerschlagen als Packlage bei Wegebauten oder Kleinschlag bei Gleisen; c) zu Eisenportlandzement verarbeitet; d) in Würfel gegossen, die als Pflastersteine verwandt werden. Nicht verwendete Schlacke wird zur Halde gefahren.

Die aus dem Gebläsewind entstandenen, den Ofen verlassenden Gichtgase sind brennbar und werden zur Winderhitzung und nach umfangreicher Gasreinigung zur Krafterzeugung benutzt. Wärmewirtschaft eines Hochofenwerkes s. „Stahl u. Eisen“ 1910 Nr. 16. Die Erzeugung der Gichtgase zu Kraftzwecken kann für ein Hüttenwerk wirtschaftlich



wichtiger als die Roheisengewinnung sein.. Die Erhitzung des Gebläsewindes geschieht in steinernen Winderhitzern (Cowper-Apparaten). In der Regel vier Winderhitzer für einen Hochofen. Die für den Hochofenbetrieb benötigten Koksmengen werden mitunter auf den Hüttenwerken selbst hergestellt (Verwendung der Abgase zur Krafterzeugung, Weiterverarbeitung der Destillationsprodukte).

Bei der Erzeugung von Thomasroheisen wird das in mehreren Hochofen gewonnene Roheisen flüssig in Roheisenmischern (150 bis 1000 t Inhalt) angesammelt, wodurch die Unterschiede der einzelnen Abstiche ausgeglichen werden und zugleich eine Abscheidung des Schwefels stattfindet.

## **b. Schmiedbares Eisen.**

### **1. Thomas-Eisen.**

Das von den Mischern flüssig herangebrachte oder in großen Kupolöfen niedergeschmolzene Roheisen wird in birnenförmige, mit Dolomitmasse (basische Masse) ausgekleidete Gefäße gegossen und darauf, aus einem im Boden angebrachten Windkasten, Wind von etwa 2 at Pressung durch das flüssige Metall hindurchgeblasen. Flüssiger Inhalt der Birnen 8 bis 25 t. Zusatz von gebranntem Kalk ( $\sim 15$  vH des Roheisengewichts) zur Schlackenbildung. Durch den Wind werden die Nebenbestandteile Si, Mn und C verbrannt und dadurch vergast oder verschlackt, insbesondere geht der Phosphor in die Schlacke (Wert der Thomasschlacke als Düngemittel). Das fertig erblasene Eisen wird durch Zusätze mit dem gewünschten Gehalt an Kohlenstoff versehen (Rückkohlung) und in gußeisernen Formen zu Blöcken vergossen. Blasdauer eines Einsatzes 10 bis 12 Minuten, wobei die Temperatur des flüssigen Eisens von 1200° auf 1600° steigt.

Zusammensetzung des Thomas-Flusseisens und -Flusstahls: C 0,05 bis 0,55 S unter 0,08, P unter 0,08 (s. a. Härteskala).

Das Windfrischen in Birnen, die mit gemahlenem Sandstein oder Quarz (saure Masse) ausgefüttert sind (Bessemer- oder saures Verfahren), verlangt phosphorarme Erze und wird daher in Deutschland nur auf wenigen Hüttenwerken betrieben.

### **2. Siemens-Martin-Flusseisen und -Stahl.**

Roheisen wird mit Schrott (Schmiedeisenaabfälle) in flachen Herdöfen mit Gas-Regenerativfeuerung eingeschmolzen und durch langsame Verbrennung der Nebenbestandteile gefrischt. Das S.-M.-Verfahren kann auch ausschließlich mit Schrotteinsatz, als reiner Umschmelzprozess oder als „Roheisen-Erz-Prozess“, wobei flüssig eingebrachtes Roheisen durch reine Eisenerze gefrischt wird, durchgeführt werden. Dem flüssigen Metalle wird durch Zusätze der gewünschte Gehalt an C, Mn, Ni, Cr gegeben.

Zusammensetzung des S.-M.-Flusseisens (s. a. Härteskala):

Weichstes Material . . . . .	C 0,05,	P unter 0,03,		
Gewöhnliches weiches Material . . . . .	C 0,10,	P „ 0,05,	Mn 0,4	
Mittelhartes Material . . . . .	C 0,15,	P „ 0,08,	Mn 0,5	
Sehr hartes „ . . . . .	C 0,8,	P „ 0,08,	Mn 1,5,	

S.-M.- und Thomas-Flusseisen werden zu Konstruktionsteilen, Baueisen, Handelseisen, Eisenbahnoberbaumaterial, Blech u. a. verwandt, S.-M.-Eisen insbesondere für Schmiedeblocke. Näheres über Verwendungszwecke s. Härteskala S. 645.

### 3. Tiegelstahl.

Abgewogene Mengen reinen Schmiedeisens werden nach der Analyse gattiert und zusammen mit etwa gewünschten Zusätzen (Ni, Cr, Wo, Mo, V usw.) in Tiegeln umgeschmolzen, darauf gemeinsam vergossen. Blasen- und schlackenfreies Erzeugnis von vorzüglichen Festigkeitseigenschaften.

Zusammensetzung: C, Mn und Spezialmetalle nach Einsatz. Si meist nicht unter 0,25 vH.

#### Schädliche Bestandteile:

	P	S	As	Summe
	vH	vH	vH	nicht über vH
Für höchstwertige Qualität	< 0,015	< 0,015	—	0,05
„ gute „	< 0,022	< 0,022	—	0,08
„ mittelwertige „	< 0,035	< 0,032	< 0,008	0,135
„ ordinäre „	< 0,05	< 0,04	< 0,01	0,220

### 4. Elektro-Stahl.

Flüssiges oder kaltes Schmiedeeisen als Einsatz wird auf basischem Futter mit einer stark kalkhaltigen Schlacke durch die Wärmewirkung des elektrischen Stromes hoch erhitzt. Weitgehende Beseitigung der schädlichen Bestandteile. Ruhiger Gufs. Bequemes Einführen der gewünschten Zusätze (Ni, Cr, Wo, Mo, V usw.); ebenmäßiges Erzeugnis von vorzüglichen Eigenschaften, welches dem Tiegelstahl gleich zu kommen scheint.

#### Ofenarten:

1. Erhitzung durch Lichtbogen: Oefen von Héroult, Girod, Stassano.
2. Erhitzung durch Induktionsstrom: Oefen von Kjellin und Röchling-Rodenhauser.

### 5. Schweißeseisen.

Roheisen wird in Berührung mit Sauerstoff abgebender Schlacke (Eisenoxyd) und auf ebensolchem Futter in Flammöfen (Puddelöfen) mit einem oder zwei Herden von 300 bis 500 kg Inhalt eingeschmolzen und von Hand mit eisernen Stangen gerührt (gepuddelt), bis durch Luft und Schlacke die Nebenbestandteile oxydiert sind. Dabei wird das Metall teigig. Es wird zu einzelnen Klumpen von ~ 60 kg („Luppen“) vereinigt und dieses zu „Rohschienen“ ausgewalzt. Die Rohschienen werden nach dem Bruchaussehen sortiert und (mitunter auch mit alten Eisenabfällen) paketiirt. Die Pakete schweißst man zusammen und walzt sie weiter aus. Der Gehalt an Schwefel soll im Qualitätsschweißeseisen nicht höher als 0,08, der Gehalt an Kupfer

nicht höher als 0,35 sein. Die Festigkeit beträgt 34 bis 38 kg bei 12 bis 20 vH Dehnung. Schweisseisen enthält bis 4 vH Schlacke.

**Zementstahl.** Weiches Eisen (in der Regel Schweisseisen) wird mit Holzkohle in Glühkisten etwa 8 Tage geglüht und dabei durch Kohlenstoffaufnahme (C-Gehalt nach dem Zementieren 0,9 bis 1,5) zu Stahl. Dieser wird entweder zusammengeschweißt und dann weiter verarbeitet (Gärstahl) oder in der Regel als Einsatz für den Tiegelprozefs verwandt.

#### 4. Formgebungsarbeiten.

(Ausführliche Angaben über Einrichtung und Betrieb der Walzwerke, Röhrenwalzwerke, Walzenzugmaschinen, Hilfsmaschinen, Zurichtemaschinen, Oefen, ferner über Hammer- und Preßwerke, sowie über Eisengießerei s. „Hütte, Taschenbuch für Eisenhüttenleute“.)

##### a. Walzwerk.

Schmiedeeiserne Blöcke werden entweder noch heiß vom Gießen (bei großen Blöcken von 2 bis 6 t) oder nach Erwärmen in Wärmöfen (Rollöfen, Stofsöfen) durch Walzen auf die gewünschten fertigen Formen verjüngt.

##### b. Hammer- und Preßwerk.

Formgebung durch Schlagarbeit oder Preßwirkung, durch Schlagen oder Pressen in Gesenke, Loch-, Zieh-, Kümbe-, Bördelpressen u. a.

##### c. Gießerei.

Schwindmaß für Graugufs 0,9 bis 1,35 vH, für Stahlgufs  $\sim$  2 vH.

##### I. Eisengießerei.\*)

Roheisen verschiedener Zusammensetzung und Stahlabfälle (auch brikettiert) werden in Kupolöfen (selten Flammöfen) umgeschmolzen und in Sandformen vergossen. Prüfung am besten durch die Biegeprobe.

Hartgufs. Gufseisen wird in eiserne Formen gegossen. Dadurch erstarrt die äußere Schale infolge der schnellen Abkühlung weiß und wird hart.

##### II. Stahlgießerei.

Schmelzen von Schrot und reinem Roheisen im sauren oder basischen Martinofen oder elektrischen Ofen oder Frischen von reinem im Kupolofen geschmolzenem Roheisen in der kleinen Bessemerbirne und darauf Vergießen des Stahles in feuerfeste Formen.

Der Stahlformgufs (Stahl-Fassongufs, Stahlgufs) wird mit Festigkeiten von 40 bis 100 kg hergestellt.

##### III. Tempergießerei.

(Schmiedbarer Gufs, Weichgufs, Temperstahlgufs). Aus Kupolöfen (Flammöfen, Tiegelöfen) wird silizium- und manganarmes Roheisen in Sandformen vergossen. Wegen seines geringen Siliziumgehaltes erstarrt es weiß. Die Gufswaren werden mit Sauerstoff abgebender Masse (Eisenerze) in Glühtöpfe verpackt und 4 bis 6 Tage geglüht (ge-

\*) Zusammensetzung von Graugufs s. S. 653.

temper). Dadurch werden sie entkohl und infolgedessen weich, biegsam und schiedbar. Festigkeit des Tempergusses 32 bis 36 kg, Dehnung 1 bis 1,5 vH.

### Zusammensetzung von Graugufs. \*)

	C	Si	Mn	P	S	$s_c^{**}$
	vH	vH	vH	vH	vH	
Geschirr- und Ofengufs . . .		~ 3	0,4—0,8	1 u. m.	< 0,1	$s_c = 0,9-1$
Röhrengufs . . . . .		n. Wandst.	< 1	1 u. m.	< 0,12	$s_c = 0,9-1$
Gufswaren mittlerer Festigkeit, leicht bearbeitbar (Maschinengufs usw.) . . .		" "	0,4—0,8	0,5—0,8	< 0,12	$s_c = 0,9-1$
Maschinengufs höherer Festigkeit:						
a) Lokomotivzylinder . . .	3,2—3,57	1—1,4	0,6—0,9	0,7—0,9	< 0,12	$s_c = 0,83$
b) Dampf-, Gasmotoren-, Prefszylinder usw. . . . .	2,9—3,2	0,81—1,5	0,3—0,7	0,2—0,6	< 0,12	$s_c = 0,76-0,8$
Kokillengufs . . . . .	~ 3,5	1,6—2,5	0,8—1	< 0,1	< 0,1	$s_c = 0,9-1$
Walzengufs . . . . .	2,9—3,4	0,5—0,8	0,6—1,2	< 0,5	< 0,1	$s_c = 0,71-0,83$
Hartgufs . . . . .	3,5—3,8	0,5—0,9	0,3—0,5	0,2—0,5	0,8—0,15	$s_c = 0,75-0,88$
Dynamogufs (nach West, Metallurgy of iron) . . . . .	2,95	3,19	0,35	0,89	< 0,12	$s_c = 0,87$
Säurebeständiger Gufs . . .	3,2	1,7	0,8	0,15	0,03—0,04	$s_c = 0,85$

## 5. Handelsfabrikate des Eisens.

### Einteilung der Stahl- und Walzwerksprodukte.

(Aufgestellt vom Stahlwerksverband.)

Sämtliche Stahl- und Walzwerkserzeugnisse werden im Stahlwerksverband eingeteilt in zwei Hauptgruppen: Produkte A und Produkte B. Erstere werden durch den Stahlwerksverband A. G. Düsseldorf verkauft, letztere selbständig durch die einzelnen Werke.

#### Produkte A.

- Gruppe Halbzeug: Rohe und vorgewalzte Blöcke und Brammen, Knüppel und Platinen, Breitenisen und Puddelluppen.
- Gruppe Eisenbahnoberbaumaterial: Eisenbahnschienen, auch Rillen- und sonstige Schienen, Eisenbahnschwellen, Laschen und Unterlagsplatten, Hakenplatten, Radlenker u. dgl.
- Gruppe Formeisen: I- und L-Eisen von 80 mm Höhe und mehr, sowie Zoreisen.

Anmerkung. Solche Artikel, welche irgend einen anderen Namen führen, aber auf den gleichen Walzenstrassen wie die vorbezeichneten Artikel hergestellt werden oder

\*) Nach E. Heyn.

\*\*)  $s_c$  = Sättigungsgrad für Kohlenstoff =  $\frac{C}{4,26 - \frac{Si}{3,6}}$ , worin C der Gehalt an Kohlenstoff, Si der Gehalt an Silizium in vH ist.

hergestellt werden können und ihrer Natur nach zu einem der obigen Fabrikate gehören. gleichgültig, ob es sich um bereits bekannte oder erst später zur Einführung gelangende Profile oder Sorten handelt, sind ebenfalls Produkte A und fallen unter die Gruppe, zu der sie nach Vorstehendem gehören.

### Produkte B.

- a) Gruppe Stabeisen: Universal- und Flacheisen, auch Röhrenstreifen und Weichenplatten, Rund- und Quadrateisen, sonstiges Stab- und Stabform Eisen, Bandeisen sowie Klemmplatteisen und Streckdraht.
- b) Gruppe Walzdraht.
- c) Gruppe Bleche: Grobbleche 5 mm dick und dicker. Feinbleche jeder Art unter 5 mm dick, Riffelbleche, Warzenbleche und Bleche mit sonstigem Walzmuster.
- d) Gruppe Röhren.
- e) Gruppe Guß- und Schmiedestücke: Eisenbahnachsen, Räder und Radreifen, Schmiedestücke, Stahlgußstücke, Stahlwalzen und alle anderen Stahlfabrikate, die nicht in einer anderen der vorstehenden Gruppen verrechnet werden.

### Angaben über einige Erzeugnisse.

1. **Säulen aus Gußeisen**, werden am besten stehend (senkrecht) gegossen um gleichmäßige Wandstärken zu erzielen. Kleinste Wandstärke  $d = 10$  mm, größte Wandstärke nicht über 40 mm; praktisch ist  $d = 0,1 D$ . Größte Länge für gewöhnliche Bauzwecke nicht über 6 bis 7 m. (Vgl. S. 535 und 557.)

Gußeiserne Säulen werden im Bauwesen durch Säulen aus Formeisen bzw. Eisenbeton mehr und mehr verdrängt.

2. **Rohre aus Gußeisen**. Vgl. 6. Abschn., Maschinenteile (unter „Rohre“).

3. **Auflagerplatten für I-Träger**, aus Gußeisen 25 bis 45 mm, aus Flußeisen 15 bis 25 mm dick, auch Platten mit ganz oder zum Teil abgerundeter oberer Fläche. Heute bei großen Belastungen vielfach Stahlgußplatten verwandt.

4. **Rohre aus Schmiedeeisen**. Vgl. 6. Abschn., Maschinenteile (unter „Rohre“).

#### 5. Walzeisen.

a) **Profileisen**. Winkeleisen (gleich- und ungleichschenkelig), **T**-, **I**-, **Z**-, **C**-Eisen, Quadrant- und Belageisen, Handleisten- und Wulsteisen; **+**-, Sechskant-, Halb- und Oval-, Sprossen-, Schlagleisten-, Roststabeisen, Nageleisen (für Schienen Nägel) **⬄**, Fafsreifeneisen für eiserne Fässer **I** usw. Für die Trägereisen wird in Deutschland ausschließlich Flußeisen, für alle sonstigen Profile meist Flußeisen und (jetzt selten!) Schweißeseisen verwandt.

Den Eisenkonstruktionen sind die **Deutschen Normalprofile\*** zugrunde zu legen, die in den folgenden Tafeln enthalten sind. In den

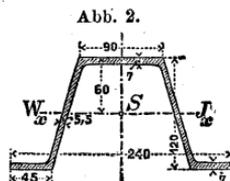
\*) S. Anmerkung S. 655.

Tafeln sind nur Fertigprofile aufgeführt; Vorprofile (Zwischenprofile) können u. Umst. durch veränderte Walzenstellung der Fertigprofile erhalten werden, werden jedoch nur bei L-Eisen geliefert.

Als Normallängen für Formeisen gelten die, in denen ein Profil ohne Aufpreis geliefert wird (4 bis 10 m bei L-Eisen, bei I-Eisen 4 bis 12 m). Die größten Längen schwanken zwischen 12 und 16 m, bei I-Eisen zwischen 14 und 20 m. Längen, größer als die normalen Längen, bedingen einen Aufpreis. Angeforderte Längen werden bis auf einen Spielraum von  $\pm 5$  cm genau geliefert. „Fixe Längen“ (bis auf  $\pm 1$  cm genau) und „gefräste Stäbe“ (bis auf  $\pm 0,5$  cm genau) haben Ueberpreise.

Die **breitflanschigen Differdinger I-Träger (Grey-Profile)**, eignen sich zu Stützen und (bei beschränkter Konstruktionshöhe) auch zu Trägern (siehe Tafel).

Oft ist das in Abb. 2 gegebene **Belag-Eisen** (in 4 bis 8 m Längen ohne Aufpreis geliefert, Rinnenprofil Nr. 120/240 (Blatt 158, Ausgabe 1907) der Burbacher Hütte gut verwendbar; Querschnitt = 25,1 qcm, Gewicht (Flusseisen) = 19,7 kg/m, Trägheitsmoment  $J_x = 541$  cm<sup>4</sup>, Widerstandsmoment  $W_x = 90$  cm<sup>3</sup>).



b) **Stabeisen** (Handelseisen). (Rund-, Quadrat-, Flacheisen usw.); aus Flufs- oder Schweifeseisen gewalzt, in Stäben von 4 bis 12 m gewöhnlich ohne Aufpreis, sogen. Moniereisen ( $\sim 12$  bis 16 mm Dmr.), bis 16 m ohne Aufpreis. Nach der Güte des Eisens wird das gewöhnliche Handelseisen und das bessere Qualitätseisen (Niet-, Schrauben-, Prefsmuttereisen usw.) unterschieden. Flacheisen ist rechteckiges Stabeisen von 10 bis 180 mm Breite; größere Breiten (bis zu 600 mm — darüber sind Bleche billiger) bei Stärken von 5 mm an aufwärts (am besten 10 bis 20 mm) werden als Universal-eisen auf einem Universalwalzwerk hergestellt. Dünnes Flacheisen unter 5 mm Stärke und bis 250 mm Breite, das in größerer Länge zu Bündeln aufgehäpelt (nicht in Stäben) verkauft wird, heißt Bandedeisen. Gewichtstafeln von Stabeisen und Flacheisen s. u.

c) **Draht**, aus Flusseisen oder Flusstahl, mit kreisförmigem Querschnitte (Durchmesser nach einer Drahtlehre s. S. 642), wird gewöhnlich nur bis 4,9 mm Dmr. gewalzt; dünnere Sorten werden in der Regel gezogen. Gewichte von Drähten s. S. 640. Ist der Querschnitt des Drahtes nicht kreisförmig, sondern halbrund, oval, quadratisch, eckig, sternförmig usw., so heißt der Draht Form- oder Fasson-draht. Zugfestigkeit von Drähten s. S. 521 und 523.

\*) Nach dem Deutschen Normalprofilbuche für Walzeisen zu Bau- und Schiffbauzwecken, gemeinschaftlich herausgegeben vom Vereine deutscher Ingenieure, vom Verbands deutscher Architekten- und Ingenieur-Vereine, vom Vereine deutscher Eisenhüttenleute und vom Vereine deutscher Schiffswerften. Erster Band: Normalprofile für Walzeisen zu Bauzwecken, 7. Aufl. 1908; Verlag der La Ruelleschen Akzidenzdruckerei und lith. Anstalt (Jos. Deterre) in Aachen.

**Deutsche Normalprofile für Walzeisen.\*)**

Bemerkung. Die in den Tafeln angegebenen **Gewichte**  $g$  in kg/m gelten für Flufseisen (spez. Gew. = 7,85).

**1. Gleichschenklige Winkeleisen.**

Normallängen = 4 bis einschl. 12 m.

Größte Längen = 12 bis 16 m.

Abrundungshalbmesser der inneren Winkelecke

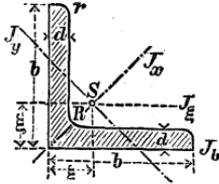
$$R = \frac{1}{2} (d_{\min} + d_{\max}).$$

Abrundungshalbmesser der Schenkellenden  $r = \frac{1}{2} R$  (auf halbe mm abgerundet).

Schwerpunktstand  $\xi \sim \frac{1}{4} b + 0,36 d$ .

**Vorprofile** mit gleicher Schenkelbreite und 1 mm größerer Schenkelstärke werden gewalzt.

Abb. 3.

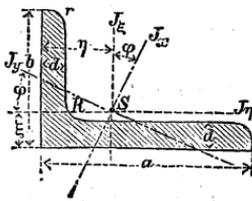


Profil-Nr.	Breite $b$ mm	Stärke $d$ mm	Querschnitt $F'$ cm <sup>2</sup>	Gewicht $g$ kg/m	Schwerpunkt- abstand $\xi$ mm	Trägheitsmoment				Profil-Nr.
						$J_b$ cm <sup>4</sup>	$J_\xi$ cm <sup>4</sup>	$J_x = \max$ cm <sup>4</sup>	$J_y = \min$ cm <sup>4</sup>	
1 <sup>1/2</sup>	15	3	0,82	0,64	4,8	0,34	0,15	0,24	0,06	1 <sup>1/2</sup>
		4	1,05	0,82	5,1	0,46	0,19	0,29	0,08	
2	20	3	1,12	0,88	6,0	0,79	0,39	0,62	0,15	2
		4	1,45	1,14	6,4	1,08	0,48	0,77	0,19	
2 <sup>1/2</sup>	25	3	1,42	1,12	7,3	1,55	0,79	1,27	0,31	2 <sup>1/2</sup>
		4	1,85	1,45	7,6	2,07	1,01	1,61	0,40	
3	30	4	2,27	1,78	8,9	3,60	1,81	2,85	0,76	3
		6	3,27	2,57	9,6	5,50	2,49	3,91	1,06	
3 <sup>1/2</sup>	35	4	2,67	2,10	10,0	5,63	2,96	4,68	1,24	3 <sup>1/2</sup>
		6	3,87	3,04	10,8	8,65	4,14	6,50	1,77	
4	40	4	3,08	2,42	11,2	8,34	4,48	7,09	1,86	4
		6	4,48	3,52	12,0	12,8	6,33	9,98	2,67	
		8	5,80	4,55	12,8	17,4	7,89	12,4	3,38	
4 <sup>1/2</sup>	45	5	4,30	3,38	12,8	14,9	7,83	12,4	3,25	4 <sup>1/2</sup>
		7	5,86	4,60	13,6	21,2	10,4	16,4	4,39	
		9	7,34	5,76	14,4	27,8	12,6	19,8	5,40	
5	50	5	4,80	3,77	14,0	20,4	11,0	17,4	4,59	5
		7	6,56	5,15	14,9	29,1	14,6	23,1	6,02	
		9	8,24	6,47	15,6	37,9	17,9	28,1	7,67	
5 <sup>1/2</sup>	55	6	6,31	4,95	15,6	32,7	17,3	27,4	7,24	5 <sup>1/2</sup>
		8	8,23	6,46	16,4	44,2	22,1	34,8	9,35	
6	60	10	10,07	7,90	17,2	56,1	26,3	41,4	11,27	6
		6	6,91	5,42	16,9	42,5	22,8	36,1	9,43	
		8	9,03	7,09	17,7	57,4	29,1	46,1	12,1	
		10	11,07	8,69	18,5	72,7	34,9	55,1	14,6	

\*) Nach dem Deutschen Normalprofilbuche für Walzeisen zu Bauzwecken (7. Aufl. 1908).

Profil-Nr.	Breite	Stärke	Querschnitt	Ge- wicht	Schwer- punkt- abstand	Trägheitsmoment				Profil-Nr.	
	<i>b</i> mm	<i>d</i> mm	<i>F</i> cm <sup>2</sup>	<i>g</i> kg/m	$\xi$ mm	<i>J<sub>b</sub></i> cm <sup>4</sup>	<i>J<sub>ξ</sub></i> cm <sup>4</sup>	<i>J<sub>x</sub></i> = max cm <sup>4</sup>	<i>J<sub>y</sub></i> = min cm <sup>4</sup>		
6 <sup>1/2</sup>	65	{	7	8,70	6,83	18,5	63,2	33,4	53,0	13,8	6 <sup>1/2</sup>
			9	10,98	8,62	19,3	82,2	41,3	65,4	17,2	
			11	13,17	10,34	20,0	101	48,8	76,8	20,7	
7	70	{	7	9,4	7,38	19,7	78,8	42,4	67,1	17,6	7
			9	11,9	9,34	20,5	103	52,6	83,1	22,0	
			11	14,3	11,23	21,3	127	61,8	97,6	26,0	
7 <sup>1/2</sup>	75	{	8	11,5	9,03	21,3	111	58,9	93,3	24,4	7 <sup>1/2</sup>
			10	14,1	11,07	22,1	140	71,4	113	29,8	
			12	16,7	13,11	22,9	170	82,4	130	34,7	
8	80	{	8	12,3	9,66	22,6	135	72,3	115	29,6	8
			10	15,1	11,85	23,4	170	87,5	139	35,9	
			12	17,9	14,05	24,1	206	102	161	43,0	
9	90	{	9	15,5	12,17	25,4	216	116	184	47,8	9
			11	18,7	14,68	26,2	266	138	218	57,1	
			13	21,8	17,11	27,0	317	158	250	65,9	
10	100	{	10	19,2	15,07	28,2	329	177	280	73,3	10
			12	22,7	17,82	29,0	398	207	328	86,2	
			14	26,2	20,57	29,8	468	235	372	98,3	
11	110	{	10	21,2	16,64	30,7	439	239	379	98,6	11
			12	25,1	19,70	31,5	529	280	444	116	
			14	29,0	22,77	32,1	618	319	505	133	
12	120	{	11	25,4	19,94	33,6	627	341	541	140	12
			13	29,7	23,31	34,4	745	394	625	162	
			15	33,9	26,61	35,1	863	446	705	186	
13	130	{	12	30,0	23,55	36,4	870	472	750	194	13
			14	34,7	27,24	37,2	1020	540	857	223	
			16	39,3	30,85	38,0	1173	605	959	251	
14	140	{	13	35,0	27,48	39,2	1176	638	1014	262	14
			15	40,0	31,40	40,0	1363	723	1148	298	
			17	45,0	35,33	40,8	1554	805	1276	334	
15	150	{	14	40,3	31,64	42	1556	845	1343	347	15
			16	45,7	35,87	43	1794	949	1507	391	
			18	51,0	40,04	44	2039	1052	1665	438	
16	160	{	15	46,1	36,19	45	2033	1099	1745	453	16
			17	51,8	40,66	46	2322	1226	1945	506	
			19	57,5	45,14	46	2564	1348	2137	558	

Abb. 4.



**2. Ungleichschenklige Winkeleisen.\*)**

Normallängen = 4 bis 12 m.

Magazinalängen = 4 bis 14 m in Abstufungen von 250 mm.

Abrundungshalbmesser der inneren Winkelecke

$$R = \frac{1}{2} (d_{\min} + d_{\max}).$$

Abrundungshalbmesser der Schenkelen den

$$r = \frac{1}{2} R \text{ (auf halbe mm abgerundet).}$$

**Vorprofile** mit gleichen Schenkelbreiten und 1 mm größerer Schenkelstärke werden gewalzt.

*i* (in mm) ist der lichte Abstand zweier ungleichschenkligen  $\llcorner$ , wobei die beiden Haupt-Trägheitsmomente gleich groß (also gleich  $2J_{\xi}$ ) sind.

Profil-Nr.	Abmessungen in mm			Querschnitt $F$ cm <sup>2</sup>	Gewicht $g$ kg/m	Abstand d. Schwerp.		$\text{tg } \varphi$	Trägheitsmoment				Abstar $i$ mm
	$b$	$a$	$d$			$\xi$	$\eta$		$J_{\xi}$ cm <sup>4</sup>	$J_{\eta}$ cm <sup>4</sup>	$J_x = \text{max}$ cm <sup>4</sup>	$J_y = \text{min}$ cm <sup>4</sup>	

**Schenkelverhältnis  $b : a = 1 : \frac{1}{2}$ .**

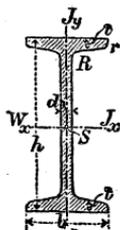
2/3	20	30	3	1,42	1,11	4,9	9,9	0,4216	1,25	0,45	1,42	0,28	5
			4	1,85	1,45	5,4	10,3	0,4214	1,60	0,56	1,82	0,33	4
3/4 1/2	30	45	4	2,87	2,25	7,4	14,8	0,4334	5,77	2,05	6,63	1,19	8
			5	3,53	2,77	7,8	15,2	0,4288	6,99	2,46	8,01	1,44	7
4/6	40	60	5	4,79	3,76	9,7	19,5	0,4319	17,3	6,21	19,8	3,66	11
			7	6,55	5,14	10,5	20,4	0,4275	22,9	7,99	26,3	4,63	9
5/7 1/2	50	75	7	8,33	6,54	12,4	24,7	0,4304	46,3	16,4	53,1	9,58	13
			9	10,5	8,24	13,2	25,6	0,4272	57,2	20,1	65,4	11,9	11
6 1/2 / 10	65	100	9	14,2	11,15	15,9	33,1	0,4101	141	46,0	160	26,8	15
			11	17,1	13,42	16,7	34,0	0,4074	167	55,1	189	32,9	17
8/12	80	120	10	19,1	14,99	19,5	39,2	0,4348	276	98,2	317	56,8	22
			12	22,7	17,82	20,2	40,0	0,4304	323	115	370	67,5	20
10/15	100	150	12	28,7	22,53	24,2	48,9	0,4361	649	232	747	134	27
			14	33,2	26,06	25,0	49,7	0,4339	743	264	854	153	26

**Schenkelverhältnis  $b : a = 1 : 2$ .**

2/4	20	40	3	1,72	1,35	4,4	14,3	0,2575	2,80	0,48	2,96	0,31	1.
			4	2,25	1,77	4,8	14,7	0,2528	3,58	0,60	3,78	0,40	1.
3/6	30	60	5	4,29	3,37	6,8	21,5	0,2544	15,6	2,61	16,5	1,71	2
			7	5,85	4,59	7,6	22,4	0,2479	20,7	3,41	21,8	2,28	1
4/8	40	80	6	6,89	5,41	8,8	28,5	0,2568	45,0	7,63	47,6	4,99	2
			8	9,01	7,07	9,6	29,4	0,2518	57,6	9,62	60,8	6,41	2
5/10	50	100	8	11,5	9,03	11,2	35,9	0,2665	116	19,6	123	12,8	3
			10	14,1	11,07	12,0	36,7	0,2658	141	23,5	150	14,6	3
6 1/2 / 13	65	130	10	18,6	14,60	14,5	46,5	0,2569	320	54,2	339	35,4	4
			12	22,1	17,35	15,3	47,5	0,2549	373	62,9	395	41,3	4
8/16	80	160	12	27,5	21,59	17,7	57,2	0,2686	719	122	762	79,4	5
			14	31,8	24,96	18,5	58,1	0,2679	822	139	875	86,0	5
10/20	100	200	14	40,3	31,64	21,8	71,2	0,2608	1653	283	1754	182	7
			16	45,7	35,87	22,6	72,0	0,2586	1862	316	1973	205	7

\*) Siehe auch S. 664.

Abb. 5.



### 3. I-Eisen.

(Doppel-T-Eisen oder I-Eisen.)

Normallängen = 4 bis 12 m.

Magazinalängen zwischen 4 bis 9 m Länge in Abstufungen von 200 mm, zwischen 9 bis 12 m von 250 mm.

Neigung der inneren Flanschflächen = 14 vH (rd. 1:7).

Abrundungshalbmesser zwischen Steg und Flansch  $R = d$ .

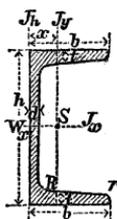
Abrundungshalbmesser der inneren Flanschanten  $r = 0.6 d$ .  
Die Flanschstärke  $t$  liegt im Abstände  $\frac{1}{4} b$  beiderseits der Profilmitte, u. zw. ist  $t \sim 1,5 d$ .

$i$  (in mm) = Abstand zweier I, für  $d$ , die beiden Hauptträgheitsmom. gleich groß werden.

Profil-Nr.	Hohe	Breite	Steg-	Flansch-	Quer-	Gewicht	Trägheits-		Widerstands-		Ab-	Profil-Nr.
	$h$	$b$	stärke	stärke	schnitt		$J_y$	$J_x$	$W_y$	$W_x$		
	mm	mm	mm	mm	cm <sup>2</sup>	kg/m	cm <sup>4</sup>	cm <sup>4</sup>	cm <sup>3</sup>	cm <sup>3</sup>	mm	
8	80	42	3,9	5,9	7,58	5,95	6,29	77,8	3,00	19,5	6,14	8
9	90	46	4,2	6,3	9,00	7,07	8,78	117	3,82	26,0	6,94	9
10	100	50	4,5	6,8	10,6	8,32	12,2	171	4,88	34,2	7,74	10
11	110	54	4,8	7,2	12,3	9,66	16,2	239	6,00	43,5	8,52	11
12	120	58	5,1	7,7	14,2	11,15	21,5	328	7,41	54,7	9,29	12
13	130	62	5,4	8,1	16,1	12,64	27,5	436	8,87	67,1	10,1	13
14	140	66	5,7	8,6	18,3	14,37	35,2	573	10,7	81,9	10,8	14
15	150	70	6,0	9,0	20,4	16,01	43,9	735	12,5	98,0	11,6	15
16	160	74	6,3	9,5	22,8	17,90	54,7	935	14,8	117	12,4	16
17	170	78	6,6	9,9	25,2	19,78	66,6	1166	17,1	137	13,2	17
18	180	82	6,9	10,4	27,9	21,90	81,3	1446	19,8	161	14,0	18
19	190	86	7,2	10,8	30,6	24,02	97,4	1763	22,7	186	14,8	19
20	200	90	7,5	11,3	33,5	26,30	117	2142	26,0	214	15,6	20
21	210	94	7,8	11,7	36,4	28,57	138	2563	29,4	244	16,3	21
22	220	98	8,1	12,2	39,6	31,09	162	3060	33,1	278	17,1	22
23	230	102	8,4	12,6	42,7	33,52	189	3607	37,1	314	17,9	23
24	240	106	8,7	13,1	46,1	36,19	221	4246	41,7	354	18,7	24
25	250	110	9,0	13,6	49,7	39,01	256	4966	46,5	397	19,5	25
26	260	113	9,4	14,1	53,4	41,92	288	5744	51,0	442	20,2	26
27	270	116	9,7	14,7	57,2	44,90	326	6626	56,2	491	21,0	27
28	280	119	10,1	15,2	61,1	47,96	364	7587	61,2	542	21,8	28
29	290	122	10,4	15,7	64,9	50,95	406	8636	66,6	596	22,5	29
30	300	125	10,8	16,2	69,1	54,24	451	9800	72,2	653	23,3	30
32	320	131	11,5	17,3	77,8	61,07	555	12510	84,7	782	24,8	32
34	340	137	12,3	18,3	86,8	68,14	674	15695	98,4	923	26,3	34
36	360	143	13,0	19,5	97,1	76,22	818	19605	114	1089	27,8	36
38	380	149	13,7	20,5	107	84,00	975	24012	131	1264	29,4	38
40	400	155	14,4	21,6	118	92,63	1158	29213	149	1461	30,8	40
42 <sup>1/2</sup>	425	163	15,3	23,0	132	103,62	1437	36973	176	1740	32,8	42 <sup>1/2</sup>
45	450	170	16,2	24,3	147	115,40	1725	45852	203	2037	34,7	45
47 <sup>1/2</sup>	475	178	17,1	25,6	163	127,96	2088	56481	235	2378	36,5	47 <sup>1/2</sup>
50	500	185	18,0	27,0	180	141,30	2478	68738	268	2750	38,4	50
55*)	550	200	19,0	30,0	213	167,21	3488	99184	349	3607	42,4	55*)

\*)  $R = 0,6 d$ .

Abb. 6.



## 4. C-Eisen.

(E- oder U-Eisen.)

Normallängen = 4 bis 10 m.

Magazinalängen mit Abstufungen von 200 mm zwischen 4 bis 9 m Länge und von 250 mm zwischen 9 bis 10 m.

Neigung der inneren Flanschflächen =  $8 \text{ vH}$  (1 : 12,5).Abrundungshalbmesser  $R = t$  und  $r = 1/2 t$  (auf halbe mm abgerundet). Die Flanschstärke  $t$  liegt in der Mitte der Flanschbreite  $b$ . $i$  (in mm) ist der lichte Abstand zweier  $\text{C}$ L, wobei die beiden Haupt-Trägheitsmomente gleich groß (also gleich  $2 J_x$ ) sind.

## C-Eisen für allgemeine Zwecke.

Profil-Nr.	Höhe	Breite	Steg- stärke	Flansch- stärke	Quer- schnitt	Gewicht	Abstand d. Schwer- punktes	Trägheitsmoment			Wider- stands- moment	Ab- stand	Profil-Nr.
	$h$	$b$	$d$	$t$	$F$	$g$	$x$	$J_h$	$J_y$	$J_x$	$W_x$	$i$	
	mm	mm	mm	mm	cm <sup>2</sup>	kg/m	mm	cm <sup>4</sup>	cm <sup>4</sup>	cm <sup>4</sup>	cm <sup>3</sup>	mm	
3	30	33	5	7	5,44	4,27	13,1	14,7	5,33	6,39	4,26	.	3
4	40	35	5	7	6,21	4,87	13,3	17,7	6,68	14,1	7,05	.	4
5	50	38	5	7	7,12	5,59	13,7	22,5	9,12	26,4	10,6	3,8	5
6 <sup>1/2</sup>	65	42	5,5	7,5	9,03	7,09	14,2	32,3	14,1	57,5	17,7	15,4	6 <sup>1/2</sup>
8	80	45	6	8	11,0	8,64	14,5	42,5	19,4	106	26,5	27,1	8
10	100	50	6	8,5	13,5	10,60	15,5	61,7	29,3	206	41,2	41,4	10
12	120	55	7	9	17,0	13,35	16,0	86,7	43,2	364	60,7	54,9	12
14	140	60	7	10	20,4	16,01	17,5	125	62,7	605	86,4	68,1	14
16	160	65	7,5	10,5	24,0	18,84	18,4	167	85,3	925	116	81,5	16
18	180	70	8	11	28,0	21,98	19,2	217	114	1354	150	94,7	18
20	200	75	8,5	11,5	32,2	25,28	20,1	278	148	1911	191	107,8	20
22	220	80	9	12,5	37,4	29,36	21,4	368	197	2690	245	120,5	22
24	240	85	9,5	13	42,3	33,21	22,3	458	248	3598	300	133,4	24
26	260	90	10	14	48,3	37,92	23,6	586	317	4823	371	146,0	26
28	280	95	10	15	53,3	41,84	25,3	740	399	6276	448	159,4	28
30	300	100	10	16	58,8	46,16	27,0	924	495	8026	535	172,4	30

## C-Eisen für den Eisenbahnwagenbau.

Profil-Nr.	Höhe	Breite	Steg- stärke	Flansch- stärke	Quer- schnitt	Gewicht	Abstand d. Schwer- punktes	Trägheitsmoment			Wider- stands- moment	Ab- stand	Profil-Nr.
	$h$	$b$	$d$	$t$	$F$	$g$	$x$	$J_h$	$J_y$	$J_x$	$W_x$	$i$	
	mm	mm	mm	mm	cm <sup>2</sup>	kg/m	mm	cm <sup>4</sup>	cm <sup>4</sup>	cm <sup>4</sup>	cm <sup>3</sup>	mm	
10 <sup>1/2</sup>	105	65	8	8	17,3	13,58	18,8	122	61,2	287	54,7	34,6	10 <sup>1/2</sup>
11 <sup>3/4</sup>	117,5	65	10	10	22,6	17,74	19,1	160	77,1	447	76,1	42,7	11 <sup>3/4</sup>
14 <sup>1/2</sup>	145	60	8	8	19,8	15,54	15,0	98,1	53,6	585	80,7	73,6	14 <sup>1/2</sup>
23 <sup>1/2</sup>	235	90	10	12	42,4	33,28	22,8	492	272	3429	292	127	23 <sup>1/2</sup>
26	260	90	10	10	41,6	32,66	19,7	398	237	3900	300	148	26
30	300	75	10	10	42,8	33,60	15,0	241	145	4925	328	181	30

### 5. T-Eisen.

Normallängen = 4 bis 12 m.  
Magazinlängen = 4 bis 12 m in Abstufungen von 250 mm.

Abrundungshalbmesser in den Winkeln  $R = d$ ,  
Abrundungshalbmesser am Fuße  $r = \frac{1}{2}d$ ,  
Abrundungshalbmesser am Stege  $\rho = \frac{1}{4}d$ , jedoch  $r$  und  $\rho$  auf halbe mm abgerundet.

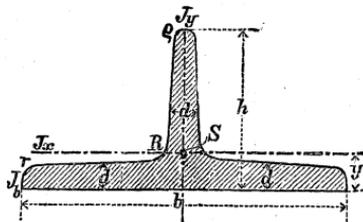
Neigungen bei breitfüßigen T-Eisen:

Steg je 4 vH; Fuße je 2 vH.

Neigungen bei hochstegigen T-Eisen:

Steg und Fuße je 2 vH.  
Die Stärken  $d$  sind in den Abständen  $\frac{1}{2}h$  bzw.  $\frac{1}{4}b$  von außen gemessen.

Abb. 7.



Profil-Nr.	Breite	Höhe	Stärke	Querschnitt	Gewicht	Abstand des Schwerpunktes	Trägheitsmoment		
	$b$	$h$	$d$	$F$			$y$	$J_b$	$J_x$
	mm	mm	mm	cm <sup>2</sup>	kg/m	mm	cm <sup>4</sup>	cm <sup>4</sup>	cm <sup>4</sup>

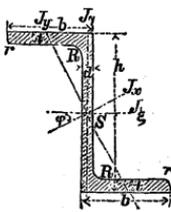
#### Breitfüßige T-Eisen. $h : b = 1 : 2$ .

6/3	60	30	5,5	4,64	3,64	6,7	4,66	2,58	8,62
7/3 <sup>1/2</sup>	70	35	6	5,94	4,66	7,7	8,01	4,49	15,1
8/4	80	40	7	7,91	6,21	8,8	13,9	7,81	28,5
9/4 <sup>1/2</sup>	90	45	8	10,2	8,01	10,0	22,9	12,7	46,1
10/5	100	50	8,5	12,0	9,42	10,9	33,0	18,7	67,7
12/6	120	60	10	17,0	13,35	13,0	66,7	38,0	137
14/7	140	70	11,5	22,8	17,90	15,1	121	68,9	258
16/8	160	80	13	29,5	23,16	17,2	204	117	422
18/9	180	90	14,5	37,0	29,05	19,3	323	185	670
20/10	200	100	16	45,4	35,64	21,4	485	277	1000

#### Hochstegige T-Eisen. $h : b = 1 : 1$ .

2/2	20	20	3	1,12	0,88	5,8	0,76	0,38	0,20
2 <sup>1/2</sup> /2 <sup>1/2</sup>	25	25	3,5	1,64	1,29	7,3	1,74	0,87	0,43
3/3	30	30	4	2,26	1,77	8,5	3,35	1,72	0,87
3 <sup>1/2</sup> /3 <sup>1/2</sup>	35	35	4,5	2,97	2,33	9,9	6,01	3,10	1,57
4/4	40	40	5	3,77	2,96	11,2	10,0	5,28	2,58
4 <sup>1/2</sup> /4 <sup>1/2</sup>	45	45	5,5	4,67	3,67	12,6	15,5	8,13	4,01
5/5	50	50	6	5,66	4,44	13,9	23,0	12,1	6,06
6/6	60	60	7	7,94	6,23	16,6	45,7	23,8	12,2
7/7	70	70	8	10,6	8,32	19,4	84,4	44,5	22,1
8/8	80	80	9	13,6	10,68	22,2	141	73,7	37,0
9/9	90	90	10	17,1	13,42	24,8	224	119	58,5
10/10	100	100	11	20,9	16,41	27,4	336	179	88,3
12/12	120	120	13	29,6	23,24	32,8	684	366	178
14/14	140	140	15	39,9	31,32	38,0	1236	660	330

Abb. 8.



## 6. Z-Eisen.\*)

Normallängen = 4 bis 10 m.

Magazinlängen = 4 bis 12 m in Abstufungen von 250 mm.

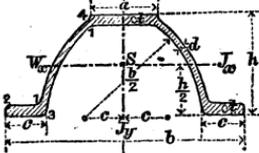
Abrundungshalbmesser am Stege  $R = t$ .

Abrundungshalbmesser an den Flanschen  $r = 1/2 t$  (auf halbe mm abgerundet).

Die inneren Flanschflächen sind den äußeren parallel.

Profil-Nr.	Höhe $h$ mm	Breite $b$ mm	Stegstärke $d$ mm	Flansch- stärke $t$ mm	Quer- schnitt $F$ cm <sup>2</sup>	Gewicht $g$ kg/m	tg $\varphi$	Trägheitsmoment			
								$J_z$ cm <sup>4</sup>	$J_y$ cm <sup>4</sup>	$J_x = \max$ cm <sup>4</sup>	$J_y = \min$ cm <sup>4</sup>
3	30	38	4	4,5	4,32	3,39	1,655	5,96	13,7	18,1	1,54
4	40	40	4,5	5	5,43	4,26	1,181	13,5	17,6	28,0	3,05
5	50	43	5	5,5	6,77	5,31	0,939	26,3	23,8	44,9	5,23
6	60	45	5	6	7,91	6,21	0,779	44,7	30,1	67,2	7,60
8	80	50	6	7	11,1	8,71	0,588	109,3	47,4	142	14,7
10	100	55	6,5	8	14,5	11,38	0,492	222	72,5	270	24,6
12	120	60	7	9	18,2	14,29	0,433	402	106	470	37,7
14	140	65	8	10	22,9	17,98	0,385	676	148	768	56,4
16	160	70	8,5	11	27,5	21,59	0,357	1053	211	1184	79,5
18	180	75	9,5	12	33,3	26,14	0,329	1599	270	1759	110
20	200	80	10	13	38,7	30,38	0,313	2299	357	2509	147

Abb. 9.



## 7. Belag-Eisen.

Normallängen = 4 bis 12 m.

Magazinlängen = 4 bis 12 m in Abstufungen von 250 mm.

Der Schwerpunkt  $S$  liegt auf halber Höhe.

Abrundungen bei 1 mit Halbmesser =  $t$ .

Abrundungen bei 2 mit Halbmesser =  $d$ .

Abrundungen bei 3 mit Halbmesser =  $d - 0,5$  mm.

Abrundungen bei 4 mit Halbmesser =  $0,6d + 1,3$  mm.

Profil-Nr.	Höhe $h$ mm	Breite			Steg- stärke $d$ mm	Fuß- und Kopf- stärke $t$ mm	Quer- schnitt $F$ cm <sup>2</sup>	Gewicht $g$ kg/m	Trägheits- moment		Wider- stands- moment $W_x$ cm <sup>3</sup>
		obere $a$ mm	untere $b$ mm	am Fuße $c$ mm					$J_y$ cm <sup>4</sup>	$J_x$ cm <sup>4</sup>	
5	50	33	120	21	3	5	6,74	5,29	86,4	23,3	9,21
6	60	38	140	24	3,5	6	9,33	7,32	164	47,3	15,6
7 1/2	75	45,5	170	28,5	4	7	13,2	10,36	347	107	28,1
9	90	53	200	33	4,5	8	17,9	14,05	651	207	46,1
11	110	63	240	39	5	9	24,2	19,00	1272	420	75,9

\*) S. auch Tafel auf S. 667. Vrgl. A. Meyerhof, Biegunsspannungen der Z-Eisen Z. d. V. d. I. 1891 S. 696. Hier findet sich eine ausführliche Tafel der Widerstandsmomente der Z-Eisen für verschiedene Biegunsebenen.

### 8. Quadrantelsen.

Normallängen = 1 bis 10 m.  
 Magazinlängen = 5 bis 14 m in Abstufungen von 500 mm.  
 Abrundungshalbmesser  $r = 0,12 R$ .  
 Abrundungshalbmesser  $r_1 = 0,06 R$ .  
 Vorprofile mit 1 mm größeren Stärken werden gewalzt.

Abb. 10.

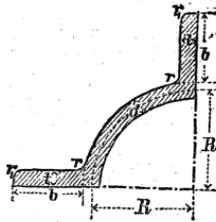
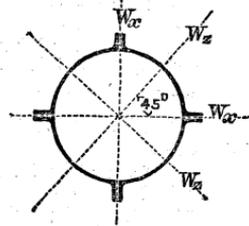


Abb. 11.

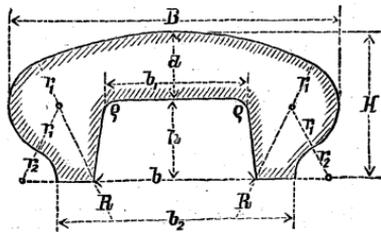


Profil-Nr.	Abmessungen in mm				Querschnitt des vollen Rohres $F'$ cm <sup>2</sup>	Gewicht des vollen Rohres $g$ kg/m	Trägheitsmoment des vollen Rohres $J = \text{konst.}$ cm <sup>4</sup>	Widerstandsmoment des vollen Rohres	
	$R$	$b$	$d$	$t$				$W_x = \text{max}$ cm <sup>3</sup>	$W_x = \text{min}$ cm <sup>3</sup>
5	50	35	4	6	29,8	23,39	576	89,6	66,2
5	50	35	8	8	48,0	37,68	908	135	102
7 <sup>1/2</sup>	75	40	6	8	54,8	43,10	2068	237	175
7 <sup>1/2</sup>	75	40	10	10	80,0	62,96	2980	331	248
10	100	45	8	10	88,0	69,16	5464	497	367
10	100	45	12	12	120,0	94,20	7480	664	495
12 <sup>1/2</sup>	125	50	10	12	128,8	101,27	12156	917	675
12 <sup>1/2</sup>	125	50	14	14	168,8	132,67	15780	1165	867
15	150	55	12	14	178,4	140,52	23636	1522	1120
15	150	55	18	17	250,4	195,47	32316	2029	1510

### 9. Handläufer-Eisen. (Handleisten-Eisen.)

Normallängen = 4 bis 8 m.  
 Größte Längen = 12 bis 16 m.  
 Obere Abrundung mit dem Halbmesser  $R = B$ .

Abb. 12.



Profil-Nr.	Abmessungen in mm										Querschn. $F'$ cm <sup>2</sup>	Gewicht $g$ kg/m	
	$B$	$H$	$b$	$h$	$R$	$d$	$r_1$	$r_2$	$q$	$b_1$			$b_2$
4	40	18	20	10	40	8	6	4	2	18	30	4,17	3,27
6	60	27	30	15	60	12	9	6	3	27	45	9,43	7,40
8	80	36	40	20	80	16	12	8	4	36	60	16,7	13,11
10	100	45	50	25	100	20	15	10	5	45	75	26,0	20,41
12	120	54	60	30	120	24	18	12	6	54	90	37,7	29,59

**Normalprofile für Schiffbaustahle.)\***  
**10. Gleichschenklige Winkel zu Schiffbauzwecken.**

(Vrgl. Abb. 3 zu Tabelle 1 auf S. 656.)

Hierzu gehören noch die in Tabelle 1 auf S. 656 aufgeführten Profile.

S. P.	b d		F	g	ξ	Jξ	Wξ	S. P.	b d		F	g	ξ	Jξ	Wξ	S. P.	b d		F	g	ξ	Jξ	Wξ	
	mm	mm							mm	mm							mm	mm						mm
1 1/2	15	2,5	0,70	0,55	4,7	0,14	0,14	6 1/2	65	6	7,53	5,91	18,3	27,6	5,01	11	110	11	23,14	18,17	31,1	256,0	32,4	
	30	2,5	0,95	0,75	5,8	0,34	0,24		65	8	9,85	7,73	19,0	30,4	7,92		110	13	27,06	21,24	32,0	293,0	37,8	
2	30	3	1,74	1,37	8,4	0,96	0,81	7	65	10	12,09	9,49	19,6	44,3	9,76	12	110	15	30,90	24,26	32,9	334,0	43,3	
	30	5	2,78	2,18	9,3	1,90	0,91		70	8	10,64	8,35	20,1	47,4	9,6		120	10	23,18	18,21	33,1	314,0	36,2	
3 1/2	35	5	3,28	2,57	10,4	3,60	1,46	7 1/2	70	10	13,08	10,27	20,9	57,2	11,8	13	120	12	27,54	21,62	33,8	362,0	42,0	
	40	5	3,79	2,98	11,6	5,50	1,94		75	7	10,13	7,95	20,8	51,4	9,5		120	14	31,82	24,98	34,7	412,0	48,3	
4	40	7	5,15	4,04	12,4	7,10	2,58	8	75	9	12,81	10,06	21,8	63,9	12,0	14	120	16	36,02	28,28	35,3	463,0	54,7	
	45	6	5,09	4,00	13,2	9,11	2,86		75	11	15,40	12,09	22,4	75,8	14,4		130	11	27,60	21,67	35,9	436,0	46,4	
4 1/2	45	8	6,01	5,19	13,9	11,5	3,70	9	80	9	13,70	10,76	22,9	78,6	13,8	15	130	13	32,12	25,37	36,8	502,0	53,9	
	45	8	6,01	5,19	13,9	11,5	3,70		80	11	16,50	12,95	23,6	93,3	16,5		130	15	36,96	29,01	37,6	568,0	61,5	
5	50	6	5,69	4,47	14,5	12,6	3,56	9 1/2	80	11	19,22	15,09	24,4	108,0	19,4	16	130	17	41,52	32,59	38,5	622,0	69,1	
	50	8	7,41	5,82	15,1	16,0	4,58		80	13	19,22	15,09	24,4	108,0	19,4		140	12	32,40	25,44	38,9	586,0	58,0	
5 1/2	55	5	5,32	4,18	15,2	14,8	3,72	10	90	10	17,13	13,45	25,8	125,0	19,5	17	140	14	37,48	29,42	39,4	666,0	66,2	
	55	7	7,28	5,72	16,0	19,5	5,00		90	12	20,29	15,93	26,5	146,0	23,1		140	16	42,48	33,35	40,2	748,0	75,0	
6	55	9	9,16	7,19	16,8	23,9	6,25	10 1/2	90	14	23,37	18,35	27,3	163,0	26,0	18	150	13	37,58	29,50	41,6	790,0	72,9	
	60	5	5,82	4,57	16,4	19,9	4,55		100	11	21,04	16,52	28,5	188,0	26,3		150	15	43,02	33,77	42,4	890,0	82,7	
6	60	7	7,98	6,26	17,2	25,7	6,03	11	100	13	24,46	19,20	29,3	219,0	31,0	19	160	15	48,38	37,98	43,4	988,0	92,7	
	60	9	10,06	7,90	18,0	31,8	7,57		100	15	27,90	21,90	30,1	243,0	34,8		160	16	49,11	38,55	45,5	1161,0	101,4	

**11. Ungleichschenklige Winkel zu Schiffbauzwecken.**

(Vrgl. Abb. 4 zu Tabelle 2 auf S. 658.)

Hierzu gehören noch die in Tabelle 2 auf S. 658 aufgeführten Profile.

B	b d		F	g	ξ	Jη	Wη	B	b d		F	g	ξ	Jη	Wη	B	b d		F	g	ξ	Jη	Wη
	mm	mm							mm	mm							mm	mm					
45	30	3	2,17	1,70	14,4	4,45	1,45	50	40	3	2,63	2,06	14,7	6,57	1,86	55	45	4	3,87	3,04	16,4	11,5	3,00
60	30	4	3,46	2,71	21,2	12,70	3,28	50	40	4	3,46	2,71	15,1	8,18	2,43	55	45	5	4,78	3,75	16,7	14,0	3,66
								50	40	5	4,27	3,35	15,5	10,3	2,99	55	45	6	5,67	4,45	17,0	16,5	4,34
45	35	3	2,33	1,83	13,5	4,69	1,49	60	40	4	3,87	3,04	19,3	14,1	3,46	65	45	4	4,27	3,35	20,1	18,2	4,08
								60	40	6	5,67	4,45	19,9	20,1	5,01	65	45	6	6,27	4,92	21,1	25,9	5,90

B	b	d	F	g	ξ	J <sub>η</sub>	W <sub>η</sub>	F			B	g	ξ	J <sub>η</sub>	W <sub>η</sub>	B			F	g	ξ	J <sub>η</sub>	W <sub>η</sub>
								b	d	mm						cm <sup>2</sup>	kg/m	mm					
60	50	5	5,28	4,15	17,9	18,4	4,38	110	75	8	14,27	11,20	35,0	174,0	23,20	150	90	11	25,34	19,80	49,7	580	58,17
65	50	5	5,55	4,36	19,9	23,1	5,12	110	75	10	17,61	13,82	35,8	211,0	28,44	150	90	12	27,51	21,60	50,2	628	62,93
65	50	7	7,61	5,97	20,6	30,9	6,06	110	75	12	20,87	16,38	36,6	247,0	33,65	150	90	14	31,79	24,06	50,9	718	72,45
65	50	9	9,59	7,53	21,3	38,0	8,70	120	75	8	15,07	11,83	39,2	222	27,48	160	90	10	24,15	18,96	53,5	637	59,81
75	50	5	6,05	4,75	24,0	34,3	6,73	120	75	10	18,61	14,61	40,0	270	33,75	160	90	12	28,71	22,54	54,2	750	70,89
100	50	6	8,69	6,83	35,0	89,0	13,69	120	75	12	22,07	17,32	40,7	314	39,60	160	90	14	33,19	26,05	54,9	859	81,73
65	55	5	5,80	4,56	19,2	24,0	5,24	130	75	8	15,87	12,46	43,6	275	31,83	170	90	9	22,74	17,85	57,5	684	61,09
65	55	7	7,96	6,25	19,9	32,0	7,10	130	75	10	17,75	13,93	44,0	307	35,65	170	90	10	25,13	19,75	57,9	753	67,17
65	55	9	10,04	7,88	20,5	39,4	8,85	130	75	12	19,61	15,39	44,3	335	39,09	170	90	12	29,91	23,48	58,7	887	79,70
75	55	5	6,30	4,95	23,1	35,6	6,86	140	75	9	18,65	14,64	48,3	375	40,80	180	90	10	26,15	20,53	61,1	882	74,18
75	55	7	8,66	6,80	23,8	47,8	9,34	140	75	11	22,55	17,70	49,9	447	49,61	180	90	12	31,11	24,43	62,0	1039	88,05
75	55	9	10,94	8,59	24,5	59,0	11,68	140	75	13	26,37	20,70	51,4	517	58,35	180	90	14	35,99	28,26	62,8	1193	101,7
90	60	6	8,71	6,84	28,7	71,5	11,66	150	75	9	19,55	15,35	52,6	453	46,51	200	90	10	28,15	22,10	71,5	1175	91,4
90	60	8	11,43	8,97	29,5	93,0	15,37	150	75	11	23,65	18,56	53,5	542	56,17	200	90	12	33,51	26,33	72,3	1386	108,5
90	60	10	14,07	11,05	30,2	111,2	18,60	150	75	13	27,67	21,72	54,3	626	65,41	200	90	13	36,17	28,39	72,5	1493	117,0
75	65	6	8,11	6,37	21,9	44,1	8,31	170	75	8	19,11	15,00	61,2	578	53,13	200	90	14	38,79	30,45	73,1	1592	125,4
75	65	8	10,63	8,35	22,7	56,8	10,36	170	75	10	23,65	18,57	62,0	704	65,18	225	90	10	30,65	24,06	81,2	1624	112,9
75	65	10	13,07	10,26	23,4	68,1	13,20	170	75	12	28,11	22,07	62,8	828	77,24	225	90	12	36,51	28,66	81,9	1917	134,0
85	65	6	8,71	6,84	22,6	62,6	10,57	170	75	14	32,49	25,51	63,6	949	89,19	225	90	14	42,29	33,20	82,6	2210	155,2
85	65	8	11,43	8,97	26,6	81,0	13,87	100	90	9	16,45	12,91	29,1	157	22,14	250	90	10	33,15	26,03	91,4	2165	136,5
85	65	10	14,07	11,05	27,3	97,2	16,84	100	90	11	19,85	15,58	29,8	186	26,50	250	90	12	39,51	31,02	92,2	2559	162,2
100	65	6	9,61	7,54	32,1	98,6	14,52	100	90	13	23,17	18,19	30,5	214	30,79	250	90	14	45,79	35,95	92,9	2952	187,9
100	65	8	12,63	9,92	32,8	127,0	18,90	110	90	9	17,35	13,62	33,1	206	26,79	130	100	10	22,13	17,37	38,5	372	40,7
100	65	10	15,57	12,22	33,4	153,5	23,05	110	90	11	20,94	16,44	33,9	245	32,19	130	100	12	26,29	20,64	39,3	440	48,5
115	65	6	10,51	8,25	38,4	144,0	18,80	110	90	13	24,47	19,21	34,6	283	37,53	130	100	14	30,37	23,84	40,0	503	55,9
115	65	8	13,83	10,36	39,1	186,0	24,51	120	90	9	18,25	14,32	37,0	262	31,57	150	100	10	24,13	18,94	46,4	554	53,5
115	65	10	17,07	13,40	39,9	226,0	30,99	120	90	11	22,05	17,31	37,5	313	37,94	150	100	13	30,93	24,28	47,5	711	69,3
130	65	8	15,03	11,80	45,7	264,0	31,32	120	90	13	25,77	20,23	38,0	301	44,02	160	100	13	32,23	25,30	53,5	819	76,98
90	75	7	11,13	8,74	26,6	88,0	13,88	130	90	10	21,16	16,61	41,4	366	42,44	170	100	10	26,13	20,51	55,0	782	68,0
90	75	8	12,64	9,96	27,1	99,2	15,78	130	90	12	25,12	19,72	42,2	422	48,06	170	100	12	31,99	24,40	55,6	920	80,4
90	75	9	14,11	11,08	27,4	110,0	17,57	130	90	14	29,00	22,75	43,0	481	55,29	170	100	14	35,97	28,24	56,4	1054	92,8
90	75	11	17,01	13,35	28,1	130,0	21,00	140	90	10	22,16	17,39	44,7	434	45,54	170	115	11	30,32	23,80	52,2	804	75,0
100	75	7	11,87	9,32	30,6	118,0	17,00	140	90	12	26,32	20,66	45,9	518	55,04	170	115	13	35,54	27,90	52,9	1035	88,4
100	75	9	15,05	11,81	31,4	147,0	21,43	140	90	14	30,40	23,86	47,0	592	63,66	170	115	14	38,00	29,90	54,8	1092	94,7
100	75	11	18,15	14,25	32,1	175,0	25,77	150	90	10	23,15	18,18	49,4	534	53,08	170	115	15	40,68	31,94	53,6	1175	101,0

Tafeln für Schiffbauahle.

### 12. Flachwulste zu Schiffbauzwecken (vgl. Abb. 13 S. 668).

$y$  = Abstand des Schwerpunktes;  $c = 0,2h - 1$  mm;  $r = 0,07h$ .

Zu diesen Profilen sind noch je 2 weitere vorgesehen, bei denen das Maß  $d$  um 1 mm bzw. 2 mm kleiner ist.

Prof.-Nr.	$h$		$F$	$g$	$y$	$J_x$	$W_x$	Prof.-Nr.	$h$		$F$	$g$	$y$	$J_x$	$W_x$	Prof.-Nr.	$h$		$F$	$g$	$y$	$J_x$	$W_x$
	mm	mm							mm	mm							mm	mm					
13	130	8	12,9	10,1	75,7	213	27,9	200	200	12	30,2	23,7	117	1174	99,4	260	260	15	49,8	39,1	154	3254	211
14	140	8	14,3	11,2	82,8	271	32,7	220	220	13	36,2	28,4	130	1703	131	280	280	17	59,8	46,9	165	4543	275
16	160	9	19,3	15,2	94,0	500	51,5	240	240	14	42,7	33,5	142	2384	168	300	300	18	68,1	53,5	177	5943	336
18	180	11	24,7	19,4	105	779	73,5																

### 13. Wulstwinkel für Schiffbauzwecke (vgl. Abb. 14 S. 668).

Abrundungsmesser  $r = 1,12d$ . Abrundungshalbmesser  $r_1 = 1/2d$ .

$h$	$b$	$d$	$t$	$R$	$F$	$g$	$\eta$	$J_\eta$	$W_\eta$	$h$	$b$	$d$	$t$	$R$	$F$	$g$	$\eta$	$J_\eta$	$W_\eta$	$h$	$b$	$d$	$t$	$R$	$F$	$g$	$\eta$	$J_\eta$	$W_\eta$
130	65	8,5	8,5	12	19,03	14,94	57,3	408	56,2	166	78	14	12	15	35,84	28,14	74,2	1201	130,6	240,5	96,5	15,5	14,5	20	57,91	45,40	110,5	4100	315,1
130,5	66,5	10	9	12	21,33	16,73	57,4	446	61,0	180	80	11,5	11,5	16	34,09	26,76	80,8	1378	139,0	241	98	17	15	20	62,08	48,73	110,6	4349	333,1
131	68	11,5	9,5	12	23,63	18,57	57,5	485	65,8	180,5	81,5	13	12	16	37,27	29,26	81,1	1486	149,8	260	95	14	14	20	66,54	44,38	120,2	4725	338,1
140	65	9,5	9,5	13	22,24	17,46	62,5	540	69,6	181	83	14,5	12,5	16	40,40	31,76	81,3	1593	159,5	260,5	96,5	15,5	14,5	20	61,01	47,89	120,4	5009	357,2
140,5	66,5	11	10	13	24,77	19,44	62,7	590	75,7	200	85	12	12	17	39,04	30,65	90,6	1947	178,0	261	98	17	15	20	65,48	51,40	120,5	5294	376,3
141	68	12,5	10,5	13	27,30	21,43	62,8	640	81,7	200,5	86,5	13,5	12,5	17	42,50	33,41	90,8	2091	190,4	280	95	15	15	21	63,58	49,01	130,6	6094	407,8
150	70	10	10	14	25,25	19,82	67,3	712	86,2	201	88	15	13,5	17	46,07	36,17	91,0	2234	202,7	280,5	96,5	16,5	15,5	21	68,30	53,66	130,7	6472	431,7
150,5	71,5	11,5	10,5	14	27,96	21,95	67,5	774	93,1	220	90	13	13	18	45,61	35,82	99,4	2747	227,8	281	98	18	16	21	73,13	57,41	130,8	6831	455,5
151	73	13	11	14	30,67	24,07	67,6	836	100	220,5	91,5	14,5	13,5	18	49,46	38,82	99,6	2940	243,0	300	95	15	15	21	66,58	52,27	140,5	7283	456,6
165	75	11	11	15	30,00	23,54	73,7	1022	111,9	221	93	16	14	18	53,30	41,84	99,9	3133	258,2	300,5	96,5	16,5	15,5	21	71,66	56,25	140,6	7743	483,8
165,5	76,5	12,5	11,5	15	32,91	25,84	74,0	1112	121,2	240	95	14	14	20	53,74	42,18	110,4	3350	297,0	301	98	18	16	21	76,73	60,23	140,6	8202	511,0

Die Profile werden nur bei den vorgeschriebenen Normalabmessungen voll ausgewalzt, bei abweichender Dicke werden die Schenkel nicht gleichmäßig dick und an ihren Enden nicht voll.

### 14. T-Wulstprofile zu Schiffbauzwecken (vgl. Abb. 15 S. 668).

Wulst nach einer Ellipse (Halbachsen:  $a = 2d$ ,  $b = d$ ) gebildet, mit anschließenden Tangenten für die Winkel  $\alpha = 50^\circ$ .

Neigung der inneren Flanschflächen =  $8$  vH.  $t = 1,15d$ . Abrundungshalbmesser:  $R = 1/2d$ ;  $r = d$ ;  $r_1 = 1/2d$ .

$h$	$B$	$d$	$t$	$F$	$g$	$y$	$J_x$	$W_x$	$h$	$B$	$d$	$t$	$F$	$g$	$y$	$J_x$	$W_x$	$h$	$B$	$d$	$t$	$F$	$g$	$y$	$J_x$	$W_x$	
																											mm
150	120	9,5	11,0	31,62	24,82	93,0	960	103	200	130	11,0	12,5	42,70	33,52	120,0	2340	195	260	145	13,0	15,0		62,00	48,67	154,0	5704	370
155	120	10,0	11,5	34,10	26,77	101,0	1270	106	220	135	11,5	13,0	47,80	37,52	131,3	3171	242	280	150	14,0	16,0		71,00	55,74	163,3	7493	459
									240	140	12,0	14,0	53,30	41,84	143,1	4215	295	300	160	15,0	17,0		81,00	63,59	175,0	9860	563

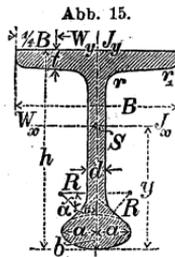
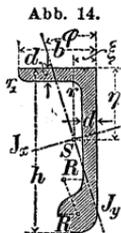
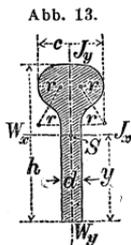
**15. C-Profil für Schiffbauzwecke.** (Vergl. Abb. 6 zu Tabelle 4 S. 660.)  
 Hierzu gehören noch die in Tabelle 4 auf S. 660 aufgeführten Profile.

<i>h</i>				<i>F</i>	<i>g</i>	<i>J<sub>x</sub></i>	<i>W<sub>x</sub></i>	<i>h</i>				<i>F</i>	<i>g</i>	<i>J<sub>x</sub></i>	<i>W<sub>x</sub></i>	<i>h</i>				<i>F</i>	<i>g</i>	<i>J<sub>x</sub></i>	<i>W<sub>x</sub></i>
mm				cm <sup>2</sup>	kg/m	cm <sup>4</sup>	cm <sup>3</sup>	mm				cm <sup>2</sup>	kg/m	cm <sup>4</sup>	cm <sup>3</sup>	mm				cm <sup>2</sup>	kg/m	cm <sup>4</sup>	cm <sup>3</sup>
140	80	10	13	33,05	25,04	996	142	200	90	14	17	55,43	43,51	3234	323	260	95	12,5	16	60,44	47,45	5998	462
140	80	11	13	34,45	27,04	1019	146	200	90	15	17	57,43	45,08	3302	330	260	95	13,5	16	63,04	49,49	6144	473
140	80	12	13	35,85	28,14	1041	149	200	90	16	17	59,43	46,65	3369	337	260	95	14,5	16	65,64	51,53	6290	484
140	80	13	13	37,25	29,24	1064	152	200	90	17	17	61,43	48,22	3436	343	260	95	15,5	16	68,20	53,57	6437	496
150	75	10	12	31,06	24,38	1041	139	220	95	14	17	59,62	46,81	4215	383	280	95	16	16	69,50	54,59	6510	501
150	75	11	12	32,56	25,56	1069	143	220	95	15	17	61,82	48,53	4304	391	280	100	13	16,5	66,66	52,33	7635	545
150	75	12	12	34,06	26,74	1098	146	220	95	16	17	64,02	50,26	4393	399	280	100	14	16,5	69,46	54,53	7818	558
150	85	11	14	38,25	30,02	1296	173	220	95	17	17	66,22	51,99	4482	407	280	100	15	16,5	72,26	56,73	8000	571
150	85	12	14	39,75	31,20	1324	177	240	100	15	18	68,05	53,42	5682	474	280	100	16	16,5	75,06	58,93	8182	584
150	85	13	14	41,25	32,38	1352	180	240	100	16	18	70,45	55,30	5798	483	280	100	16,5	16,5	76,46	60,03	8273	591
150	85	14	14	42,75	33,56	1380	183	240	100	17	18	72,85	57,19	5913	493	300	100	17	17	77,84	62,19	8464	604
165	80	10	12	33,76	26,50	1380	167	200	85	11	14	43,95	34,50	2640	264	300	100	15	17	75,84	59,54	9590	639
165	80	11	12	35,41	27,80	1417	172	200	85	12	14	45,95	36,07	2707	271	300	100	16	17	78,84	61,89	9815	654
165	80	12	12	37,06	29,09	1455	176	200	85	13	14	47,95	37,64	2774	278	300	100	17	17	81,84	64,24	10040	669
165	90	12	15	44,20	34,70	1805	219	200	85	14	14	49,95	39,21	2840	284	320	100	14	17,5	76,64	60,17	11162	698
165	90	13	15	45,85	35,99	1843	223	220	90	11,5	15	50,22	39,42	3645	331	320	100	15	17,5	79,84	62,68	11435	715
165	90	14	15	47,50	37,29	1880	228	220	90	12,5	15	52,42	41,15	3734	339	320	100	16	17,5	83,04	65,19	11708	732
165	90	15	15	49,15	38,58	1918	233	220	90	13,5	15	54,62	42,88	3823	347	320	100	17	17,5	86,24	67,70	11981	749
180	80	11	13	38,28	30,05	1817	202	220	90	14,5	15	56,82	44,60	3912	355	320	100	17,5	17,5	87,84	68,93	12117	758
180	80	12	13	40,08	31,47	1865	207	220	90	15	15	57,92	45,47	3956	359	340	100	14,5	18	82,06	64,42	13218	778
180	80	13	13	41,88	32,88	1914	213	240	95	12	15,5	55,92	43,89	4855	405	340	100	15,5	18	85,46	67,09	13545	797
180	90	13	16	49,52	38,88	2396	266	240	95	13	15,5	58,32	45,78	4970	414	340	100	16,5	18	88,86	69,76	13873	816
180	90	14	16	51,32	40,29	2444	272	240	95	14	15,5	60,72	47,66	5085	423	340	100	17,5	18	92,26	72,43	14200	836
180	90	15	16	53,12	41,70	2493	277	240	95	15	15,5	63,12	49,55	5200	432	340	100	18,0	18	93,96	73,76	14364	845
180	90	16	16	54,92	43,11	2542	283	240	95	15,5	15,5	64,32	50,49	5288	438								

Tafeln für Schiffbauzwecke.

**16. Z-Eisen für Schiffbauzwecke.** (Vergl. Abb. 8 zu Tabelle 6 S. 662.)  
 (Vergleiche auch die in Tabelle 6 auf S. 662 aufgeführten Profile.)

<i>h</i>				<i>F</i>	<i>g</i>	<i>J<sub>z</sub></i>	<i>W<sub>z</sub></i>	<i>h</i>				<i>F</i>	<i>g</i>	<i>J<sub>z</sub></i>	<i>W<sub>z</sub></i>	<i>h</i>				<i>F</i>	<i>g</i>	<i>J<sub>z</sub></i>	<i>W<sub>z</sub></i>
mm				cm <sup>2</sup>	kg/m	cm <sup>4</sup>	cm <sup>3</sup>	mm				cm <sup>2</sup>	kg/m	cm <sup>4</sup>	cm <sup>3</sup>	mm				cm <sup>2</sup>	kg/m	cm <sup>4</sup>	cm <sup>3</sup>
38	30	4	4	3,65	2,87	8,0	4,2	80	65	7	8,5	15,62	12,26	157	39,3	120	60	7	9	18,10	14,21	399	66,5
40	40	4,5	4,5	5,06	3,97	12,7	6,3	90	70	8	9,5	19,19	15,06	240	53,3	120	75	9	11	25,58	20,08	566	94,3
50	43	5	5	6,38	5,02	25,0	10,0	100	55	6,5	8	14,40	11,30	221	44,2	130	80	10	12	30,12	23,65	778	119,7
60	45	5	5	7,08	5,56	40,1	13,4	100	70	8	9,5	19,09	15,70	311	62,2	140	65	8	10	22,81	17,90	672	96,0
80	50	6	7	11,08	8,70	109	27,3	110	75	9	11	24,68	19,38	460	83,6								



## 17. Einige Formeisen für Schiffbauzwecke.

### 1. Winkel mit abgerundeter Mallkante.



40 × 80 × 8 — 10 mm	50 × 80 × 7,5 — 10 mm
45 × 65 × 5 — 10 „	65 × 80 × 7,5 — 10 „
45 × 90 × 7 — 10 „	80 × 80 × 8 — 10 „
50 × 65 × 7,5 — 10 „	

### 2. Lukenprofile.



65 × 35 × 25 × 25 mm
82 × 45 × 32 × 30 „
110 × 55 × 45 × 35 „
145 × 68 × 60 × 40 „

### 3. Halbrundprofile.



a) Scharfkantig.

30 × 8 mm	50 × 15 mm	75 × 18 mm
35 × 10 „	55 × 15 „	80 × 20 „
40 × 10 „	60 × 15 „	90 × 22 „
45 × 12 „	65 × 16 „	



b) Mit abgerundeten Kanten.

50 × 9 — 12 mm
65 × 11 — 14 „
75 × 13 — 16 „
90 × 15 — 18 „

### 4. Hesperprofile.



20 × 7 × 3 — 5 mm	45 × 12 × 5 — 7 mm
25 × 8 × 3 — 5 „	50 × 13 × 5 — 7 „
30 × 9 × 3 — 5 „	60 × 15 × 6 — 8 „
35 × 10 × 4 — 6 „	70 × 17 × 7 — 9 „
40 × 11 × 4 — 6 „	

### 5. Reelingprofile.



165 × 63 × 13 Flachrücken
125 × 50 × 11 Rundrücken
100 × 45 × 11 Rundrücken

### 6. Jackstagprofil.



85 × 50 × 45 × 12 mm
----------------------

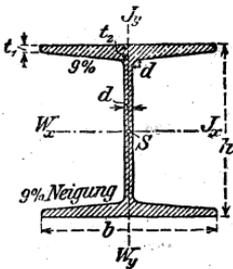
### 7. Schornsteinstahl.

60 × 15 × 3 — 5 mm
80 × 20 × 3 — 7 „
100 × 25 × 4 — 8 „
120 × 30 × 5 — 9 „
150 × 35 × 5 — 10 „



## Tafeln für Grey-Profile, Stab- und Flacheisen.

Abb. 16.



### 18. Breitflanschige Differdinger T-Grey-Profile der Deutsch-Luxemburgischen Bergwerks- und Hütten-Aktiengesellschaft.

Die Gewichte  $g$  gelten für Flußeisen (spez. Gewicht = 7,85). Normallängen 2 bis 12 m. Magazinlängen 4 bis 15 m mit Abstufungen von 500 mm.

Neigung der inneren Flanschflächen = 9 vH. = rd. 1 : 11.

Abrundungshalbmesser zwischen Steg und Flansch gleich der Stegstärke  $d$ . An den Flanschkanten fehlen die Abrundungen.

Die Flanschstärke  $t_2$  ist in der Verlängerung der Stegkante gemessen, u. zw. von außen bis zur Verlängerung der schrägen Flanschkante.

Profil-Nr.	Höhe		Steg- stärke $d$	Flans- stärke		Quer- schnitt $F$	Ge- wicht $g$	Trägheits- moment		Wider- stands- moment		Profil-Nr.
	$h$	$b$		$t_1$	$t_2$			$J_y$	$J_x$	$W_y$	$W_x$	
	mm	mm		mm	mm			cm <sup>4</sup>	cm <sup>4</sup>	cm <sup>3</sup>	cm <sup>3</sup>	
18	180	180	8,5	9	16,72	59,9	47	1073	3512	119	390	18
20	200	200	8,5	9,5	18,12	70,4	55,4	1568	5171	157	517	20
22	220	220	9	10	19,5	82,6	64,8	2216	7379	201	671	22
24	240	240	10	10,5	20,85	96,8	76	3043	10260	254	855	24
25	250	250	10,5	10,9	21,7	105,1	82,5	3575	12066	286	965	25
26	260	260	11	11,7	22,9	115,6	90,7	4261	14352	328	1104	26
27	270	270	11,25	11,95	23,6	123,2	96,7	4920	16529	365	1224	27
28	280	280	11,5	12,35	24,4	131,8	103,4	5671	19052	405	1361	28
29	290	290	12	12,7	25,2	141,1	110,8	6417	21866	443	1508	29
30	300	300	12,5	13,25	26,25	152,1	119,4	7494	25201	500	1680	30
32	320	300	13	14,1	27	160,7	126,2	7867	30119	524	1882	32
34	340	300	13,4	14,6	27,5	167,4	131,4	8097	35241	540	2073	34
36	360	300	14,2	16,15	29	181,5	142,5	8793	42479	586	2360	36
38	380	300	14,8	17	29,8	191,2	150,1	9175	49496	612	2605	38
40	400	300	15,5	18,2	31	203,6	159,8	9721	57834	648	2892	40
42½	425	300	16	19	31,75	213,9	167,9	10078	68249	672	3212	42½
45	450	300	17	20,3	33	229,3	180	10668	80887	711	3595	45
47½	475	300	17,6	21,35	34	242	190	11142	94811	743	3992	47½
50	500	300	19,4	22,6	35,2	261,8	205,5	11718	111283	781	4451	50
55	550	300	20,6	24,5	37	288	226,1	12582	145957	839	5308	55
60	600	300	20,8	24,7	37,2	300,6	236	12672	179303	845	5977	60
65	650	300	21,1	25	37,5	314,5	246,9	12814	217402	854	6690	65
70	700	300	21,1	25	37,5	325,2	255,3	12818	258106	854	7374	70
75	750	300	21,1	25	37,5	335,7	263,4	12823	302560	855	8068	75

## 19. Gewichtstafel

Gewicht von

1 cbm Stabeisen (Flusseisen) wiegt 7850 kg;

Dicke in mm	Breite in mm										
	10	12	14	15	16	18	20	22	24	25	26
1	0,079	0,094	0,110	0,118	0,126	0,141	0,157	0,173	0,188	0,196	0,204
2	0,157	0,188	0,220	0,236	0,251	0,283	0,314	0,345	0,377	0,393	0,408
3	0,236	0,283	0,330	0,353	0,377	0,424	0,471	0,518	0,565	0,589	0,612
4	0,314	0,377	0,440	0,471	0,502	0,565	0,628	0,691	0,754	0,785	0,816
5	0,393	0,471	0,550	0,589	0,628	0,707	0,785	0,864	0,942	0,981	1,020
6	0,471	0,565	0,659	0,707	0,754	0,848	0,942	1,036	1,130	1,178	1,225
7	0,550	0,659	0,769	0,824	0,879	0,989	1,099	1,209	1,319	1,374	1,429
8	0,628	0,754	0,879	0,942	1,005	1,130	1,256	1,382	1,507	1,570	1,633
9	0,707	0,848	0,989	1,060	1,130	1,272	1,413	1,554	1,666	1,766	1,837
10	0,785	0,942	1,099	1,178	1,256	1,413	1,570	1,727	1,884	1,963	2,041
11	0,864	1,036	1,209	1,295	1,382	1,554	1,727	1,900	2,072	2,159	2,245
12	0,942	1,130	1,319	1,413	1,507	1,696	1,884	2,072	2,261	2,355	2,449
13	1,021	1,225	1,429	1,531	1,633	1,837	2,041	2,245	2,449	2,551	2,653
14	1,099	1,319	1,539	1,649	1,758	1,978	2,198	2,418	2,638	2,748	2,857
15	1,178	1,413	1,649	1,766	1,884	2,120	2,355	2,591	2,826	2,944	3,061
16	1,256	1,507	1,758	1,884	2,010	2,261	2,512	2,763	3,014	3,140	3,266
17	1,335	1,601	1,868	2,002	2,135	2,402	2,669	2,936	3,203	3,336	3,470
18	1,413	1,696	1,978	2,120	2,261	2,543	2,826	3,109	3,391	3,533	3,674
19	1,492	1,790	2,088	2,237	2,386	2,685	2,983	3,281	3,580	3,729	3,878
20	1,570	1,884	2,198	2,355	2,512	2,826	3,140	3,454	3,768	3,925	4,082
21	1,649	1,978	2,308	2,473	2,638	2,967	3,297	3,627	3,956	4,121	4,286
22	1,727	2,072	2,418	2,591	2,763	3,109	3,454	3,799	4,145	4,318	4,490
23	1,806	2,167	2,528	2,708	2,889	3,250	3,611	3,972	4,333	4,518	4,694
24	1,884	2,261	2,638	2,826	3,014	3,391	3,768	4,145	4,522	4,710	4,898
25	1,963	2,355	2,748	2,944	3,140	3,533	3,925	4,318	4,710	4,905	5,103
26	2,041	2,449	2,857	3,062	3,266	3,674	4,082	4,490	4,898	5,103	5,307
27	2,120	2,543	2,967	3,179	3,391	3,815	4,239	4,663	5,087	5,299	5,511
28	2,198	2,638	3,077	3,297	3,517	3,956	4,396	4,836	5,275	5,495	5,715
29	2,277	2,732	3,167	3,415	3,642	4,098	4,553	5,008	5,464	5,691	5,919
30	2,355	2,826	3,297	3,533	3,768	4,239	4,710	5,181	5,652	5,888	6,123
31	2,434	2,920	3,407	3,650	3,894	4,380	4,867	5,354	5,840	6,084	6,327
32	2,512	3,014	3,517	3,768	4,019	4,522	5,024	5,526	6,029	6,280	6,531
33	2,591	3,109	3,627	3,886	4,145	4,663	5,181	5,699	6,217	6,476	6,735
34	2,669	3,203	3,737	4,004	4,270	4,804	5,338	5,872	6,406	6,673	6,939
35	2,748	3,297	3,847	4,121	4,396	4,946	5,495	6,045	6,594	6,869	7,144
36	2,826	3,391	3,956	4,239	4,522	5,087	5,652	6,217	6,782	7,065	7,348
37	2,905	3,485	4,066	4,357	4,647	5,228	5,809	6,390	6,971	7,261	7,552
38	2,983	3,580	4,176	4,475	4,773	5,369	5,966	6,563	7,159	7,458	7,756
39	3,062	3,674	4,286	4,592	4,898	5,511	6,123	6,735	7,348	7,654	7,950
40	3,140	3,758	4,396	4,710	5,024	5,652	6,280	6,908	7,536	7,850	8,164
41	3,219	3,862	4,506	4,828	5,150	5,793	6,437	7,081	7,724	8,046	8,368
42	3,297	3,956	4,616	4,946	5,295	5,935	6,594	7,253	7,913	8,243	8,572
43	3,376	4,051	4,726	5,063	5,401	6,076	6,751	7,426	8,101	8,439	8,776
44	3,454	4,145	4,836	5,181	5,526	6,217	6,908	7,599	8,290	8,635	8,980
45	3,533	4,239	4,946	5,299	5,652	6,359	7,065	7,772	8,478	8,831	9,185

## für Flacheisen.

1 m in kg.

s. auch Abs. 3 der Anmerkung auf S. 675.

Breite in mm											Dicke in mm
28	30	32	34	35	36	38	40	42	44	45	
0,220	0,235	0,251	0,267	0,275	0,283	0,298	0,314	0,330	0,345	0,353	1
0,440	0,471	0,502	0,534	0,550	0,565	0,597	0,628	0,659	0,691	0,707	2
0,659	0,705	0,754	0,801	0,824	0,848	0,895	0,942	0,989	1,036	1,060	3
0,879	0,942	1,005	1,068	1,099	1,130	1,193	1,256	1,319	1,382	1,413	4
1,099	1,177	1,256	1,334	1,374	1,413	1,492	1,570	1,649	1,727	1,766	5
1,319	1,413	1,507	1,601	1,649	1,696	1,790	1,884	1,978	2,072	2,120	6
1,539	1,648	1,758	1,868	1,923	1,978	2,088	2,198	2,308	2,418	2,473	7
1,758	1,884	2,010	2,135	2,198	2,261	2,386	2,512	2,638	2,763	2,826	8
1,978	2,119	2,261	2,402	2,473	2,543	2,685	2,826	2,967	3,109	3,179	9
2,198	2,355	2,512	2,669	2,748	2,826	2,983	3,140	3,297	3,454	3,533	10
2,418	2,590	2,763	2,936	3,022	3,109	3,281	3,454	3,627	3,799	3,886	11
2,638	2,826	3,014	3,203	3,297	3,391	3,580	3,768	3,956	4,145	4,239	12
2,857	3,061	3,266	3,470	3,572	3,674	3,878	4,082	4,286	4,490	4,592	13
3,077	3,297	3,517	3,737	3,847	3,956	4,176	4,396	4,616	4,836	4,946	14
3,297	3,532	3,768	4,003	4,121	4,239	4,474	4,710	4,945	5,181	5,299	15
3,517	3,768	4,019	4,270	4,396	4,522	4,773	5,024	5,275	5,526	5,652	16
3,737	4,003	4,270	4,537	4,671	4,804	5,071	5,338	5,605	5,872	6,005	17
3,956	4,239	4,522	4,804	4,946	5,087	5,369	5,652	5,935	6,217	6,359	18
4,176	4,474	4,773	5,071	5,220	5,369	5,668	5,966	6,264	6,563	6,712	19
4,396	4,710	5,024	5,338	5,495	5,652	5,966	6,280	6,594	6,908	7,065	20
4,616	4,946	5,275	5,605	5,770	5,935	6,264	6,594	6,924	7,253	7,418	21
4,836	5,181	5,526	5,872	6,045	6,217	6,563	6,908	7,253	7,599	7,772	22
5,055	5,417	5,778	6,139	6,319	6,500	6,861	7,222	7,583	7,944	8,125	23
5,275	5,652	6,029	6,406	6,594	6,782	7,159	7,536	7,913	8,290	8,478	24
5,495	5,888	6,280	6,673	6,869	7,065	7,458	7,850	8,243	8,635	8,831	25
5,715	6,123	6,531	6,939	7,144	7,348	7,756	8,164	8,572	8,980	9,185	26
5,935	6,359	6,782	7,206	7,418	7,630	8,054	8,478	8,902	9,326	9,538	27
6,154	6,594	7,034	7,473	7,693	7,913	8,352	8,792	9,232	9,671	9,891	28
6,374	6,830	7,285	7,740	7,968	8,195	8,651	9,106	9,561	10,02	10,24	29
6,594	7,065	7,536	8,007	8,243	8,478	8,949	9,420	9,891	10,36	10,60	30
6,814	7,301	7,787	8,274	8,517	8,761	9,247	9,734	10,22	10,71	10,95	31
7,034	7,536	8,038	8,541	8,792	9,043	9,546	10,05	10,55	11,05	11,30	32
7,253	7,772	8,290	8,808	9,067	9,326	9,844	10,36	10,88	11,40	11,66	33
7,473	8,007	8,541	9,075	9,342	9,608	10,14	10,68	11,21	11,74	12,01	34
7,693	8,243	8,792	9,342	9,616	9,891	10,44	10,99	11,54	12,09	12,36	35
7,913	8,478	9,043	9,608	9,891	10,17	10,74	11,30	11,87	12,43	12,72	36
8,133	8,714	9,294	9,875	10,17	10,46	11,04	11,62	12,20	12,78	13,07	37
8,352	8,949	9,546	10,14	10,44	10,74	11,34	11,93	12,53	13,13	13,42	38
8,572	9,185	9,797	10,41	10,72	11,02	11,63	12,25	12,86	13,47	13,78	39
8,792	9,420	10,05	10,68	10,99	11,30	11,93	12,56	13,19	13,82	14,13	40
9,012	9,656	10,30	10,94	11,27	11,59	12,23	12,87	13,52	14,16	14,48	41
9,232	9,891	10,55	11,21	11,54	11,87	12,53	13,19	13,85	14,51	14,84	42
9,451	10,13	10,80	11,48	11,81	12,15	12,83	13,50	14,18	14,85	15,19	43
9,671	10,36	11,05	11,74	12,09	12,43	13,13	13,82	14,51	15,20	15,54	44
9,891	10,60	11,30	12,01	12,36	12,72	13,42	14,13	14,84	15,54	15,90	45

Dicke in mm	Breite in mm										
	46	48	50	52	54	55	56	58	60	62	64
1	0,361	0,377	0,392	0,408	0,424	0,432	0,440	0,455	0,471	0,487	0,502
2	0,722	0,754	0,785	0,816	0,848	0,864	0,879	0,942	0,942	0,973	1,005
3	1,083	1,130	1,177	1,225	1,272	1,295	1,319	1,336	1,413	1,400	1,507
4	1,444	1,507	1,570	1,633	1,696	1,727	1,758	1,821	1,884	1,947	2,010
5	1,805	1,884	1,962	2,041	2,119	2,159	2,198	2,276	2,355	2,433	2,512
6	2,167	2,261	2,355	2,449	2,543	2,591	2,638	2,732	2,826	2,920	3,014
7	2,528	2,638	2,747	2,857	2,967	3,022	3,077	3,187	3,297	3,407	3,517
8	2,889	3,014	3,140	3,266	3,391	3,454	3,517	3,642	3,768	3,894	4,019
9	3,250	3,391	3,532	3,674	3,815	3,886	3,956	4,098	4,239	4,380	4,522
10	3,610	3,768	3,925	4,082	4,239	4,318	4,396	4,553	4,710	4,867	5,024
11	3,972	4,145	4,317	4,490	4,663	4,749	4,836	5,008	5,181	5,354	5,526
12	4,333	4,522	4,710	4,898	5,087	5,181	5,275	5,464	5,652	5,840	6,029
13	4,694	4,898	5,102	5,307	5,511	5,613	5,715	5,919	6,123	6,327	6,531
14	5,055	5,275	5,495	5,715	5,935	6,045	6,154	6,374	6,594	6,814	7,034
15	5,416	5,652	5,887	6,123	6,358	6,476	6,594	6,829	7,065	7,300	7,536
16	5,778	6,029	6,280	6,531	6,782	6,908	7,034	7,285	7,536	7,787	8,038
17	6,139	6,406	6,672	6,939	7,206	7,340	7,473	7,740	8,007	8,274	8,541
18	6,500	6,782	7,065	7,348	7,630	7,772	7,913	8,195	8,478	8,761	9,043
19	6,861	7,159	7,457	7,756	8,054	8,203	8,352	8,641	8,940	9,247	9,546
20	7,222	7,536	7,850	8,164	8,478	8,635	8,792	9,106	9,420	9,734	10,05
21	7,583	7,913	8,243	8,572	8,902	9,067	9,232	9,561	9,891	10,221	10,55
22	7,944	8,290	8,635	8,980	9,326	9,499	9,671	10,017	10,36	10,707	11,053
23	8,305	8,666	9,028	9,389	9,750	9,930	10,111	10,472	10,83	11,194	11,56
24	8,666	9,043	9,420	9,797	10,174	10,36	10,55	10,927	11,30	11,681	12,058
25	9,028	9,420	9,813	10,21	10,598	10,79	10,99	11,383	11,78	12,168	12,56
26	9,389	9,797	10,21	10,613	11,021	11,23	11,43	11,838	12,25	12,654	13,062
27	9,750	10,17	10,60	11,021	11,445	11,66	11,87	12,293	12,72	13,141	13,565
28	10,11	10,55	10,99	11,43	11,869	12,09	12,31	12,748	13,19	13,628	14,067
29	10,47	10,93	11,38	11,84	12,293	12,52	12,75	13,204	13,66	14,114	14,57
30	10,83	11,30	11,78	12,25	12,717	12,95	13,188	13,659	14,13	14,601	15,072
31	11,19	11,68	12,17	12,654	13,141	13,38	13,63	14,114	14,60	15,088	15,574
32	11,56	12,06	12,56	13,062	13,565	13,82	14,07	14,570	15,07	15,574	16,077
33	11,92	12,43	12,95	13,471	13,989	14,25	14,501	15,025	15,54	16,061	16,579
34	12,28	12,81	13,35	13,88	14,413	14,68	14,95	15,48	16,01	16,548	17,082
35	12,64	13,19	13,74	14,287	14,84	15,11	15,386	15,926	16,49	17,035	17,584
36	13,00	13,57	14,13	14,695	15,26	15,54	15,826	16,391	16,96	17,521	18,086
37	13,36	13,94	14,52	15,103	15,684	15,98	16,265	16,840	17,43	18,008	18,589
38	13,72	14,32	14,92	15,522	16,11	16,41	16,705	17,301	17,90	18,495	19,091
39	14,08	14,70	15,31	15,92	16,532	16,84	17,144	17,757	18,37	18,981	19,594
40	14,44	15,07	15,70	16,33	16,956	17,27	17,584	18,212	18,84	19,468	20,096
41	14,81	15,45	16,09	16,74	17,38	17,70	18,024	18,667	19,31	19,955	20,598
42	15,17	15,83	16,49	17,144	17,804	18,13	18,463	19,123	19,78	20,441	21,101
43	15,53	16,20	16,88	17,553	18,23	18,57	18,903	19,578	20,25	20,928	21,603
44	15,89	16,58	17,27	17,961	18,652	19,00	19,342	20,033	20,72	21,415	22,106
45	16,25	16,96	17,66	18,369	19,076	19,43	19,782	20,489	21,20	21,902	22,608

Breite in mm											Dicke in mm
65	70	75	80	85	90	95	100	110	120	130	
0,510	0,540	0,589	0,628	0,667	0,707	0,746	0,785	0,864	0,942	1,021	<b>1</b>
1,021	1,099	1,177	1,256	1,335	1,413	1,492	1,570	1,727	1,884	2,041	<b>2</b>
1,531	1,648	1,766	1,884	2,002	2,120	2,237	2,355	2,591	2,826	3,062	<b>3</b>
2,041	2,198	2,355	2,512	2,669	2,826	2,983	3,140	3,454	3,768	4,082	<b>4</b>
2,551	2,747	2,944	3,140	3,336	3,532	3,729	3,925	4,377	4,770	5,163	<b>5</b>
3,062	3,297	3,532	3,768	4,003	4,239	4,474	4,710	5,181	5,652	6,123	<b>6</b>
3,572	3,846	4,121	4,396	4,671	4,946	5,220	5,495	6,044	6,594	7,143	<b>7</b>
4,082	4,396	4,710	5,024	5,338	5,652	5,966	6,280	6,908	7,536	8,164	<b>8</b>
4,592	4,945	5,299	5,652	6,005	6,358	6,712	7,065	7,771	8,478	9,185	<b>9</b>
5,103	5,495	5,887	6,280	6,672	7,065	7,457	7,850	8,635	9,420	10,21	<b>10</b>
5,613	6,044	6,476	6,908	7,340	7,771	8,203	8,635	9,498	10,36	11,23	<b>11</b>
6,123	6,594	7,065	7,536	8,007	8,478	8,949	9,420	10,36	11,30	12,25	<b>12</b>
6,633	7,143	7,654	8,164	8,674	9,184	9,695	10,20	11,23	12,25	13,27	<b>13</b>
7,144	7,693	8,242	8,792	9,341	9,891	10,44	10,99	12,09	13,19	14,29	<b>14</b>
7,654	8,242	8,831	9,420	10,01	10,60	11,19	11,77	12,95	14,13	15,31	<b>15</b>
8,164	8,792	9,420	10,05	10,68	11,30	11,93	12,56	13,82	15,07	16,33	<b>16</b>
8,674	9,341	10,01	10,68	11,34	12,01	12,68	13,35	14,68	16,01	17,35	<b>17</b>
9,185	9,891	10,60	11,30	12,01	12,72	13,42	14,13	15,54	16,96	18,37	<b>18</b>
9,695	10,44	11,19	11,93	12,68	13,42	14,17	14,92	16,41	17,90	19,39	<b>19</b>
10,21	10,99	11,78	12,56	13,35	14,13	14,92	15,70	17,27	18,84	20,41	<b>20</b>
10,72	11,54	12,36	13,19	14,01	14,84	15,66	16,49	18,13	19,78	21,43	<b>21</b>
11,23	12,09	12,95	13,82	14,68	15,54	16,41	17,27	19,00	20,72	22,45	<b>22</b>
11,74	12,64	13,54	14,44	15,35	16,25	17,15	18,06	19,86	21,67	23,47	<b>23</b>
12,25	13,19	14,13	15,07	16,01	16,96	17,90	18,84	20,72	22,61	24,49	<b>24</b>
12,76	13,74	14,72	15,70	16,68	17,66	18,64	19,63	21,59	23,55	25,51	<b>25</b>
13,27	14,29	15,31	16,33	17,35	18,37	19,39	20,41	22,45	24,49	26,53	<b>26</b>
13,78	14,84	15,90	16,96	18,02	19,08	20,14	21,20	23,31	25,43	27,55	<b>27</b>
14,29	15,39	16,49	17,58	18,68	19,78	20,88	21,98	24,18	26,38	28,57	<b>28</b>
14,80	15,94	17,07	18,21	19,35	20,49	21,63	22,77	25,04	27,32	29,60	<b>29</b>
15,31	16,49	17,66	18,84	20,02	21,20	22,37	23,55	25,91	28,26	30,62	<b>30</b>
15,82	17,01	18,25	19,47	20,68	21,90	23,12	24,34	26,77	29,20	31,64	<b>31</b>
16,33	17,58	18,84	20,10	21,35	22,61	23,86	25,12	27,63	30,14	32,66	<b>32</b>
16,84	18,13	19,43	20,72	22,02	23,31	24,61	25,91	28,50	31,09	33,68	<b>33</b>
17,35	18,68	20,02	21,35	22,69	24,02	25,36	26,69	29,36	32,03	34,70	<b>34</b>
17,86	19,23	20,61	21,98	23,35	24,73	26,10	27,48	30,22	32,97	35,72	<b>35</b>
18,37	19,78	21,20	22,61	24,02	25,43	26,85	28,26	31,09	33,91	36,74	<b>36</b>
18,88	20,33	21,78	23,24	24,69	26,14	27,59	29,05	31,95	34,85	37,76	<b>37</b>
19,39	20,88	22,37	23,89	25,36	26,85	28,34	29,83	32,81	35,80	38,78	<b>38</b>
19,90	21,43	22,96	24,49	26,02	27,55	29,08	30,62	33,68	36,74	39,80	<b>39</b>
20,41	21,98	23,55	25,12	26,69	28,26	29,83	31,40	34,54	37,68	40,82	<b>40</b>
20,92	22,53	24,14	25,75	27,36	28,97	30,58	32,19	35,40	38,62	41,84	<b>41</b>
21,43	23,08	24,73	26,38	28,03	29,67	31,32	32,97	36,27	39,56	42,86	<b>42</b>
21,94	23,63	25,32	27,00	28,69	30,38	32,07	33,76	37,13	40,51	43,88	<b>43</b>
22,45	24,18	25,91	27,63	29,36	31,09	32,81	34,54	37,99	41,45	44,90	<b>44</b>
22,96	24,73	26,49	28,26	30,03	31,79	33,56	35,33	38,86	42,39	45,92	<b>45</b>

Dicke in mm	Breite in mm										Dicke in mm
	140	150	160	170	180	190	200	210	220	230	
1	1,099	1,178	1,256	1,335	1,413	1,492	1,570	1,649	1,727	1,806	1
2	2,108	2,355	2,512	2,669	2,826	2,983	3,140	3,297	3,454	3,611	2
3	3,207	3,533	3,768	4,004	4,239	4,475	4,710	4,946	5,181	5,417	3
4	4,396	4,710	5,024	5,338	5,652	5,966	6,280	6,594	6,908	7,222	4
5	5,495	5,887	6,280	6,673	7,065	7,458	7,850	8,243	8,635	9,028	5
6	6,594	7,065	7,536	8,007	8,478	8,949	9,420	9,891	10,362	10,833	6
7	7,693	8,242	8,792	9,342	9,891	10,441	10,991	11,541	12,090	12,640	7
8	8,792	9,420	10,050	10,680	11,310	11,940	12,570	13,200	13,830	14,460	8
9	9,891	10,600	11,300	12,010	12,720	13,430	14,140	14,850	15,560	16,270	9
10	10,990	11,77	12,56	13,35	14,13	14,92	15,70	16,49	17,27	18,06	10
11	12,09	12,95	13,82	14,68	15,54	16,41	17,27	18,13	18,99	19,86	11
12	13,19	14,13	15,07	16,01	16,96	17,90	18,84	19,78	20,72	21,67	12
13	14,29	15,31	16,33	17,35	18,37	19,39	20,41	21,43	22,45	23,47	13
14	15,39	16,48	17,57	18,66	19,75	20,84	21,93	23,02	24,11	25,20	14
15	16,49	17,66	18,84	20,02	21,20	22,37	23,55	24,73	25,90	27,08	15
16	17,58	18,84	20,10	21,35	22,61	23,86	25,12	26,38	27,63	28,89	16
17	18,68	20,02	21,35	22,69	24,02	25,36	26,69	28,02	29,36	30,69	17
18	19,78	21,20	22,61	24,02	25,43	26,85	28,26	29,67	31,08	32,50	18
19	20,88	22,37	23,86	25,36	26,85	28,34	29,83	31,32	32,81	34,30	19
20	21,98	23,55	25,12	26,69	28,26	29,83	31,40	32,97	34,54	36,11	20
21	23,08	24,73	26,38	28,02	29,67	31,32	32,97	34,62	36,27	37,92	21
22	24,18	25,91	27,63	29,36	31,09	32,81	34,54	36,27	37,92	39,72	22
23	25,28	27,08	28,89	30,69	32,50	34,31	36,11	37,92	39,72	41,53	23
24	26,38	28,26	30,14	32,03	33,91	35,80	37,68	39,56	41,45	43,33	24
25	27,48	29,44	31,40	33,36	35,33	37,29	39,25	41,21	43,18	45,14	25
26	28,57	30,61	32,66	34,70	36,74	38,78	40,28	42,86	44,902	46,94	26
27	29,67	31,79	33,91	36,03	38,15	40,27	42,39	44,51	46,63	48,75	27
28	30,77	32,97	35,17	37,37	39,56	41,76	43,96	46,16	48,36	50,55	28
29	31,87	34,15	36,42	38,70	40,98	43,25	45,53	47,81	50,03	52,36	29
30	32,97	35,33	37,68	40,04	42,39	44,75	47,10	49,46	51,81	54,17	30
31	34,07	36,50	38,94	41,37	43,80	46,24	48,67	51,10	53,54	55,97	31
32	35,17	37,68	40,19	42,70	45,22	47,73	50,24	52,75	55,264	57,78	32
33	36,27	38,86	41,43	44,04	46,63	49,22	51,81	54,10	56,991	59,58	33
34	37,37	40,04	42,70	45,37	48,04	50,71	53,38	55,05	58,72	61,39	34
35	38,47	41,21	43,96	46,71	49,46	52,20	54,95	57,70	60,45	63,19	35
36	39,56	42,39	45,22	48,04	50,87	53,69	56,32	59,35	62,172	64,99	36
37	40,66	43,57	46,47	49,38	52,28	55,19	58,09	60,99	63,899	66,80	37
38	41,76	44,75	47,73	50,71	53,69	56,68	59,66	62,64	65,63	68,71	38
39	42,86	45,92	48,98	52,05	55,11	58,17	61,23	64,29	67,53	70,41	39
40	43,96	47,10	50,24	53,38	56,52	59,66	62,80	65,94	69,08	72,22	40
41	45,06	48,28	51,50	54,72	57,93	61,15	64,37	67,59	70,81	74,03	41
42	46,16	49,46	52,75	56,05	59,35	62,64	65,94	69,24	72,534	75,81	42
43	47,26	50,63	54,01	57,38	60,76	64,14	67,51	70,19	74,261	77,64	43
44	48,36	51,81	55,26	58,72	62,17	65,63	69,08	72,53	75,99	79,44	44
45	49,46	52,99	56,52	60,05	63,59	67,12	70,65	74,18	77,72	81,25	45

## 16. Gewichtstafel für Quadrat-, Sechskant- und Rundeisen.

1 cbm Stabeisen (Flusseisen) wiegt 7850 kg.

Dicke <i>d</i> mm	Gewicht in kg/m			Dicke <i>d</i> mm	Gewicht in kg/m			Dicke <i>d</i> mm	Gewicht in kg/m		
											
5	0,196	0,170	0,154	50	19,625	16,995	15,413	180	254,340	220,265	199,738
6	0,283	0,245	0,222	52	21,226	18,383	16,671	185	268,666	232,638	211,010
7	0,385	0,333	0,302	54	22,891	19,824	17,978	190	283,355	245,419	222,570
8	0,502	0,435	0,395	56	24,618	21,320	19,335	195	298,496	258,506	234,438
9	0,636	0,551	0,499	58	26,407	22,870	20,740	200	314,000	271,932	246,615
10	0,785	0,680	0,617	60	28,260	24,474	22,195	205	329,896	288,927	259,100
11	0,950	0,823	0,746	62	30,175	26,133	23,700	210	346,185	299,805	271,895
12	1,130	0,979	0,888	64	32,154	27,846	25,253	215	362,866	314,251	284,994
13	1,327	1,149	1,042	66	34,195	29,614	26,856	220	379,940	329,037	298,404
14	1,539	1,332	1,208	68	36,298	31,436	28,509	225	397,406	344,164	312,122
15	1,766	1,530	1,387	70	38,465	33,312	30,210	230	415,265	359,631	326,148
16	2,010	1,740	1,578	72	40,694	35,243	31,961	235	433,516	375,437	340,483
17	2,269	1,965	1,782	74	42,987	37,228	33,762	240	452,160	391,583	355,126
18	2,543	2,203	1,998	76	45,342	39,267	35,611	245	471,196	408,068	370,077
19	2,834	2,454	2,226	78	47,759	41,361	37,510	250	490,625	424,894	385,336
20	3,140	2,719	2,466	80	50,240	43,509	39,458	255	510,446	442,060	400,994
21	3,462	2,998	2,719	85	56,716	49,118	44,545	260	530,660	459,565	416,779
22	3,799	3,290	2,984	90	63,585	55,007	49,940	265	551,266	477,411	432,993
23	4,153	3,596	3,261	95	70,846	61,355	55,643	270	572,265	495,597	449,456
24	4,522	3,916	3,551	100	78,500	67,983	61,654	275	593,656	514,022	466,257
25	4,906	4,249	3,853	105	86,546	74,951	67,973	280	615,440	532,988	483,365
26	5,307	4,596	4,168	110	94,985	82,160	74,601	285	637,616	552,193	500,783
27	5,723	4,956	4,495	115	103,816	89,908	81,537	290	660,185	571,738	518,508
28	6,154	5,330	4,834	120	113,040	97,896	88,781	295	683,140	591,623	536,542
29	6,602	5,717	5,185	125	122,656	106,224	96,334	300	706,500	611,848	554,884
30	7,065	6,118	5,549	130	132,665	114,891	104,195	305	730,246	632,413	573,534
32	8,038	6,961	6,313	135	143,066	123,899	112,364	310	754,385	653,318	592,493
34	9,075	7,859	7,127	140	153,860	133,247	120,841	315	778,916	674,563	611,759
36	10,174	8,811	7,990	145	165,046	142,934	129,627	320	803,840	696,148	631,334
38	11,335	9,817	8,903	150	176,625	152,962	138,721	325	829,156	718,071	651,218
40	12,560	10,877	9,865	155	188,596	163,320	148,123	330	854,865	740,336	671,499
42	13,847	11,992	10,876	160	200,960	174,026	157,834	335	880,966	762,940	691,909
44	15,198	13,162	11,936	165	213,716	185,084	167,852	340	907,460	785,885	712,717
46	16,611	14,385	13,046	170	226,865	196,471	178,179	345	934,346	809,169	733,834
48	18,086	15,663	14,205	175	240,406	208,198	188,815	350	961,625	832,793	755,258

Die angegebenen Dicken des Quadrat- und Sechskanteisens entsprechen dem Durchmesser des eingeschriebenen Kreises.

Das Gewicht von Sechskanteisen beträgt das  $2,5981 \cdot \pi = 0,827$ -fache (oder annähernd das  $\frac{5}{6}$ -fache) des Gewichtes von Rundeisen, welches den Durchmesser des umschriebenen Kreises des Sechskanteisens hat.

Für **Schweißeseisen** (spez. Gew. = 7,8) sind die Gewichtangaben der vorstehenden Tafel noch mit  $7,8 : 7,85 = 0,99363 = \left(1 - \frac{1}{157}\right)$  zu multiplizieren. — Die entsprechenden Faktoren für andere Metalle stehen in der letzten Zeile auf S. 611.

Es wiegen 1000 m **Telegraphendraht** nach Felten & Guillaume in Mülheim [Rhein]:  
 verzinkter Eisendraht 6 mm dick 215 kg, 5 mm dick 150 kg, 4 mm dick 100 kg,  
 3 mm dick 55 kg 2 mm dick (Bindendraht) 24 kg, 1,7 mm dick (Wickeldraht) 18 kg.

**8. Glatte Bleche** (Schwarzbleche) werden aus Platinen und Brammen aus Schweifs- und Flußeisen sowie aus Flußstahl gewalzt. Unter 5 mm Dicke heißen sie Feibleche (Sturzbleche), bei 5 mm und mehr Dicke Grobbleche. Dem Verwendungszweck entsprechend zerfallen die Grobbleche in Kessel- (Feuer- und Mantel-), Schiffs-, Lokomotiv-, Behälter-, Konstruktions- und Spezial-Bleche. — Weiteres s. S. 677 bis 679.

**Feibleche.** Die Dicke wird nach der Nummer der Blechlehre (S. 642) angegeben. Gewichte von Feiblechen enthält nachstehende Tafel. Der Grundpreis richtet sich nach der Blechnummer. Bleche von größeren Abmessungen, oder nach Form oder rechtwinklig auf genaue Länge und Breite geschnitten, runde oder halbrunde Feibleche, ebenso die Qualität, bedingen Ueberpreise.

### Gewichtstafeln für Feibleche

der deutschen und Dillinger Lehre. (Vrgl. S. 642.)

Gewicht in kg/qm.

Dicke mm	Schweifs- eisen	Flußeisen	Flußstahl	Dicke mm	Schweifs- eisen	Flußeisen	Flußstahl	Dicke mm	Schweifs- eisen	Flußeisen	Flußstahl
0,30	2,34	2,36	2,36	0,875	6,83	6,87	6,88	1,85	14,4	14,5	14,5
0,375	2,93	2,94	2,95	0,90	7,02	7,07	7,07	2,00	15,6	15,7	15,7
0,40	3,12	3,14	3,14	1,00	<b>7,80</b>	<b>7,85</b>	<b>7,86</b>	2,25	17,6	17,7	17,7
0,438	3,42	3,44	3,44	1,10	8,58	8,64	8,65	2,50	19,5	19,6	19,7
0,50	3,90	3,93	3,93	1,125	8,78	8,83	8,84	2,75	21,5	21,6	21,6
0,562	4,38	4,41	4,42	1,25	9,75	9,81	9,83	3,00	23,4	23,6	23,6
0,60	4,68	4,71	4,72	1,375	10,7	10,8	10,8	3,25	25,4	25,5	25,5
0,625	4,88	4,91	4,91	1,40	10,9	11,0	11,0	3,50	27,3	27,5	27,5
0,68	5,30	5,34	5,34	1,50	11,7	11,8	11,8	3,75	29,3	29,4	29,5
0,70	5,46	5,50	5,50	1,55	12,1	12,2	12,2	4,00	31,2	31,4	31,4
0,75	5,85	5,89	5,90	1,70	13,3	13,3	13,4	4,25	33,2	33,4	33,4
0,80	6,24	6,28	6,29	1,75	13,7	13,7	13,8	4,50	35,1	35,3	35,4

Bund- oder Zentnerbleche sind Feibleche, die in Gebunden von 50 kg und in Tafelgrößen von 470. 630, 470. 790, 630. 940 mm geliefert werden. Ein Gebund enthält je nach der Tafelgröße und der Blechnummer 3 bis 75 Tafeln.

**Gelochte Bleche** sind Feibleche mit kreisförmiger, quadratischer, rechteckiger, sechseckiger, dreieckiger oder geschlitzter Löchung; in allen Nummern der Feiblechlehre bis zu 2,5 m Breite und 6,0 m

Länge erhältlich, dienen sie zu Siebzwecken allerart. Runde Lochung wird von 0,5 bis 100 mm Durchmesser ausgeführt. Zierbleche sind verschiedenartig gemusterte gelochte Bleche von 0,75 bis 2 mm Stärke; sie werden zur Verkleidung von Heizkörpern, Ausfüllung von Maueröffnungen usw. benutzt. Alle gelochten Bleche werden auch verzinkt oder verbleit geliefert.

**Grobbleche** aus Schweifs- oder Flufseisen. Gewichte s. S. 641. Der Durchmesser runder Platten beträgt bis zu etwa 2300 mm bei Blechen unter 8 mm Stärke und bis zu etwa 3600 mm bei stärkeren Blechen. Dicke der Bleche bis zu 40 mm, auch dicker. Weiteres s. II. Bd. Abschn. Kraftmaschinen, unter „Teile der Dampfkessel“. Grundpreise und Ueberpreise sind aus der Preisliste des Verbandes der Grobblechwalzwerke zu entnehmen.

Der Grundpreis gilt für folgende normale Maße und Gewichte:

Bei einer Dicke von	Breite und Durchmesser bis zu mm	Fläche bis zu qm	Gewicht bis zu kg
5 bis unter 6 mm . . .	1600	6	500
6 „ „ 7 „ . . .	1700	7	600
7 „ „ 8 „ . . .	1800	8	700
8 „ „ 9 „ . . .	1900	9	800
9 „ „ 10 „ . . .	2000	10	900
10 „ „ 15 „ . . .	2200	12	1250
15 „ „ 25 „ . . .	2400	15	2500
25 mm und darüber . .	2700	20	3500

Bei Schiffsblechen ist es allgemein üblich, bis zu 10 vH Verschnittbleche (mit einem Gesamtschrägschnitt bis zu 9“ engl.) ohne Aufpreis zu liefern.

**9. Buckelplatten** (Trogbleche) aus Flufseisen, zum Belegen von Brücken usw., nach Art der Klostersgewölbe mit  $\frac{1}{10}$  bis  $\frac{1}{15}$  Stich geformt, mit allseitigem, ebenem Rande von 40 bis 80 mm Breite zum Anrieten an die Träger, werden in allen Abmessungen (Seitenlängen von 500 bis 1800 mm) in quadratischer, rechteckiger und Trapezform bei 5 bis 10 mm Stärke geliefert. Die Tragfähigkeit der Platten wird am besten durch Versuchsbelastungen festgestellt. Bei der Gewichtsrechnung ist die Krümmung der Buckelplatten meist zu vernachlässigen. Die für das Gewicht in Rechnung zu ziehende ebene Fläche ist dann

für rechteckige Buckelplatten (Abb. 17):

$$F_1 = LB,$$

für quadratische Buckelplatten mit  $L = B$  und  $l = b$ :

$$F_2 = L^2,$$

für trapezförmige Buckelplatten (Abb. 18):

$$F_3 = \frac{L + L_1}{2} B.$$

Unter Berücksichtigung der Krümmung ist, wenn  $h$  die Pfeilhöhe der Buckelplatte bedeutet,

$$F_1 = LB + 2 \frac{l^2 + b^2}{lb} h^2$$

$$F_2 = L^2 + 4 h^2$$

$$F_3 = \frac{L + L_1}{2} B + \frac{(l + l_1)(l^2 + l_1^2 + 2 b^2)}{2 l l_1 b} h^2.$$

Die Firma Henschel und Sohn, Abteilung Henrichshütte, Hattingen a. Ruhr, liefert rechtwinklige Buckelplatten von  $1000 \times 1200 \times 6$  mm bis  $1600 \times 2000 \times 8$  mm.

Abb. 17.

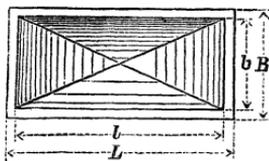
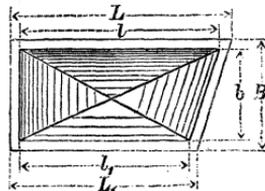


Abb. 18.



10. **Tonnenbleche** (Hängebleche) aus Flußeisen, zum Belegen von Brücken, nach Art der flachen Kappen mit  $\frac{1}{8}$  bis  $\frac{1}{12}$  Stich geformt, mit längsseitigen, ebenen Rändern von 60 bis 80 mm Breite zum Annetzen, werden in allen Abmessungen (Länge = 500 bis 3000 mm, Breite = 500 bis 2000 mm) in rechteckiger Grundform bei 5 bis 10 mm Stärke geliefert. Das Gewicht ist aus dem Querschnitt und der mittleren Länge zu bestimmen.

11. **Riffelbleche** (gerippte Bleche) aus Flußeisen. Die Platten sind auf der einen Seite mit geradlinigen, sich rautenförmig kreuzenden (Diagonalen-Verhältnis  $\sim 20 : 30$  mm), 1,5 bis 3 mm hohen, 4 bis 5 mm breiten Erhöhungen (Riffeln) versehen. Sie werden bis 450 kg schwer, bis 1350 mm breit und in Stärken von 4 bis 25 mm (ausschl. Riffel) gewalzt. Benutzt zu Belagzwecken und Abdeckungen allerart, z. B. für Belagplatten (besonders im Schiffbau und für Bühnen in Hüttenwerken und im Bergbau), Treppenstufen, für Abdeckung von Kanälen, zu Brücken-Fußwegen usw. — **Waffelbleche**, in Stärken von 1,5 bis 5 mm, sind wie die Riffelbleche verwendbar. Ähnlich auch die **Warzenbleche**.

12. Für viele Zwecke wird Feinblech (Schwarzblech) mit einem schwer oxydierenden, metallischen Ueberzuge von Zinn, Zink, Blei, Kupfer und Nickel versehen, u. zw. auf warmem Wege oder galvanisch.

Der Ueberzug muß das Eisen vollständig und gleichmäßig bedecken und gut haften. (Vrgl. auch S. 684 u. f.)

**Weißbleche** sind gute, gleichmäßig stark **verzinnete** Schwarzbleche; sie kommen als Kreuzbleche (Tafeln 380.265 mm für dünnere, 430.330 mm für dickere Bleche, oder mit der doppelten

Länge oder Breite) und als Pontonbleche (Tafeln 430.330 mm) in den Handel (in Kisten). Die Stärke der Weifsbleche schwankt zwischen 0,4 und 2,5 mm; die dünneren Blechsorfen sind die gebräuchlichsten.

**Verzinkte und verbleite Eisenbleche** in allen Stärken und Größen der Feinbleche; für eine 1 qm große Tafel und beide Seiten des Bleches zusammen ist zu rechnen 0,5 kg Zink oder 0,8 bis 1,0 kg Blei.

**Verkupferte Bleche** mit ein- oder beiderseitigem Kupferüberzuge (galvanisch), der 5 bis 10 vH des Eisengewichtes beträgt. Tafeln bis 1,0 m lang und bis 0,6 m breit. — Die Deutsche Wachwitzmetall-A.-G. in Hersbruck (Bayern) stellt nach einem patentierten Schweißverfahren kupferplattierte Flufseisenbleche her; die beiderseitige Kupferdecke ist homogen, poren- und blasenfrei und so stark, dafs sie mechanischen und atmosphärischen Einflüssen widersteht. Verwendung im Hochbau (bei Dächern, Gesimsverkleidungen usw.) in Form von flachen Tafeln und Wellblechen.

**Vernickelte Bleche.** Auf eine oder beide Seiten des Eisenbleches werden dünne Nickelplatten geschweisft und das Ganze ausgewalzt. Der Nickelüberzug beträgt 5 bis 10 vH. des Eisengewichtes.

13. **Wellbleche.** Querschnittformen, Trägheits- und Widerstandsmomente für eine Wellenbreite s. S. 555, Nr. 24 und 25. Um  $J$  in  $\text{cm}^4$  und  $W$  in  $\text{cm}^3$  für 1 m Tafelbreite zu erhalten, multipliziere man die dort angegebenen Formelwerte (Abmessungen in cm vorausgesetzt) noch mit 100 :  $B$ . Sind auf S. 555  $H$ ,  $B$  und  $\delta$  in mm gegeben, so findet man auch angenähert für 1 m Breite:

$$J = 0,1 [0,1 + 0,195 (H : B)] H^2 \delta \text{ in cm}^4,$$

$$W = [0,2 + 0,39 (H : B)] H \delta \text{ in cm}^3.$$

Wellbleche sind schwarz, gestrichen oder verbleit, meist aber verzinkt verwandt. Die beiderseitige Verzinkung ruft ein Mehrgewicht von etwa  $z = 0,8$  kg/qm des ebenen (ungewellten) Bleches hervor.

Eine Anzahl gebräuchlicher Profilformen gibt umstehende Tafel. Die erste Zahl der Profilnummer bedeutet die Höhe der Welle, die zweite bedeutet die Breite von Mitte zu Mitte Welle.

14. **Eisenbahn-Baustoffe.** Näheres s. III. Bd. Abschn. Eisenbahnwesen.

15. **Niete und Schrauben.** Abmessungen und Berechnungen siehe 6. Abschn., Maschinenteile I. — Ueberschlägige Gewichtsbestimmung von Schraubenbolzen mit Mutter (ohne Unterlagscheibe) und quadratischem Kopf: Man nehme zu der gesamten Bolzenlänge (einschl. Kopfhöhe) einen Zuschlag gleich dem vierfachen Schaftdurchmesser und bestimme mit dieser Länge in m und dem Gewicht des betreffenden Rundeisens in kg/m (s. S. 675) das gesuchte Gewicht.

Beispiel. Ein Fundament-Ankerbolzen von 1,5 m Gesamtlänge und 30 mm Schaftstärke (Rundeisengewicht nach S. 675 gleich 5,549 kg/m) wiegt mit Mutter und quadratischem Kopf  $(1,50 + 4 \cdot 0,03) \cdot 5,549 = 8,99$  kg.

16. **Drahtseile und Ketten.** Näheres s. 6. Abschn., Maschinenteile.

17. **Nägcl** werden aus Draht oder Blech mittels Maschinen hergestellt, oder sie werden aus Stabeisen mit der Hand geschmiedet.

**Drahtnägcl** (Drahtstifte), 5 bis 250 mm lang und 0,5 bis 10 mm stark, aus hart gezogenem, nicht ausgeglühtem, meist rundem (auch vierkantigem) Eisendraht mittels Maschinen gefertigt.

(Fortsetzung S. 683.)

Tafel für Wellbleche.

Nummer des Profils	Blechstärke mm	Gewicht f. 1 qm exkl. Ueberdg. kg		Widerstands- moment f. 1 m Breite cm <sup>3</sup>	Querschnitt f. 1 m Breite cm <sup>2</sup>	Normale Baubreite cm	Nummer des Profils	Blechstärke mm	Gewicht f. 1 qm exkl. Ueberdg. kg		Widerstands- moment f. 1 m Breite cm <sup>3</sup>	Querschnitt f. 1 m Breite cm <sup>2</sup>	Normale Baubreite cm
		schwarz	verzinkt						schwarz	verzinkt			
15/30	0,50	6,28	<b>8,01</b>	2,8	7,8	63	30/70	0,75	8,62	<b>10,20</b>	7,9	10,8	63
	0,56	7,07	<b>8,80</b>	3,2	8,8	63		1,00	11,50	<b>13,08</b>	10,6	14,4	63
	0,62	7,86	<b>9,59</b>	3,5	9,8	63		1,50	17,24	<b>18,82</b>	15,9	21,5	63
10/40	0,62	5,79	<b>7,07</b>	1,8	7,2	84	35/70	0,75	9,43	<b>11,16</b>	10,0	11,8	63
	0,75	6,95	<b>8,23</b>	2,1	8,7	84		1,00	12,57	<b>14,30</b>	13,3	15,7	63
	1,00	9,27	<b>10,55</b>	2,7	11,6	84		1,50	18,85	<b>20,58</b>	20,0	23,6	63
15/40	0,62	6,70	<b>8,18</b>	3,1	8,4	72	20/76	0,75	7,05	<b>8,34</b>	4,6	8,8	76
	0,75	8,05	<b>9,52</b>	3,7	10,1	72		1,00	9,40	<b>10,69</b>	6,1	11,7	76
	1,00	10,73	<b>12,20</b>	4,8	13,4	72		1,50	14,10	<b>15,39</b>	9,1	17,6	76
20/40	0,62	7,86	<b>9,58</b>	4,8	9,8	60	25/76	0,75	7,62	<b>9,00</b>	6,1	9,5	76
	0,75	9,42	<b>11,15</b>	5,7	11,8	60		1,00	10,16	<b>11,56</b>	8,1	12,7	76
	1,00	12,57	<b>14,30</b>	7,5	15,7	60		1,50	15,24	<b>16,64</b>	12,2	19,0	76
15/50	0,62	6,13	<b>7,48</b>	2,9	7,7	80	30/76	0,75	8,30	<b>9,82</b>	7,5	10,4	68
	0,75	7,35	<b>8,70</b>	3,4	9,2	80		1,00	11,06	<b>12,58</b>	10,4	13,8	68
	1,00	9,80	<b>11,15</b>	4,5	12,2	80		1,50	16,60	<b>18,12</b>	15,6	20,7	68
20/50	0,62	6,92	<b>8,44</b>	4,3	8,6	70	35/76	0,75	8,96	<b>10,60</b>	9,6	11,2	60
	0,75	8,30	<b>9,81</b>	5,1	10,4	70		1,00	11,94	<b>13,58</b>	12,8	14,9	60
	1,00	11,06	<b>12,58</b>	6,7	13,8	70		1,50	17,92	<b>19,56</b>	19,3	22,4	60
25/50	0,62	7,86	<b>9,58</b>	6,0	9,8	60	38/76	0,75	9,42	<b>11,15</b>	10,9	11,8	60
	0,75	9,42	<b>11,15</b>	7,1	11,8	60		1,00	12,57	<b>14,30</b>	14,6	15,7	60
	1,00	12,57	<b>14,30</b>	9,4	15,7	60		1,50	18,84	<b>20,57</b>	21,9	23,6	60
30/60	0,62	8,85	<b>10,80</b>	7,9	11,1	55	55/76	0,75	12,12	<b>14,34</b>	19,9	15,1	45
	0,75	10,63	<b>12,57</b>	9,5	13,3	55		1,00	16,16	<b>18,38</b>	26,6	20,2	45
	1,00	14,17	<b>16,12</b>	12,6	17,7	55		1,50	24,24	<b>26,46</b>	39,9	30,3	45
30/80	0,62	6,36	<b>7,76</b>	4,0	7,9	72	25/80	0,75	7,46	<b>8,83</b>	6,0	9,3	80
	0,75	7,65	<b>9,05</b>	4,7	9,6	72		1,00	9,94	<b>11,31</b>	8,0	12,4	80
	1,00	10,20	<b>11,60</b>	6,3	12,7	72		1,50	14,91	<b>16,30</b>	12,0	18,6	80
25/80	0,75	8,48	<b>10,00</b>	6,5	10,6	66	30/80	0,75	8,05	<b>9,52</b>	7,6	10,0	72
	1,00	11,30	<b>12,85</b>	8,6	14,1	66		1,00	10,73	<b>12,20</b>	10,2	13,4	72
	1,50	16,96	<b>18,50</b>	12,9	21,2	66		1,50	16,10	<b>17,57</b>	15,3	20,1	72
30/80	0,75	9,42	<b>11,15</b>	8,6	11,8	60	40/80	0,75	9,42	<b>11,15</b>	11,7	11,8	56
	1,00	12,57	<b>14,30</b>	11,4	15,7	60		1,00	12,57	<b>14,30</b>	15,6	15,7	56
	1,50	18,85	<b>20,58</b>	17,1	23,6	60		1,50	18,84	<b>20,57</b>	23,4	23,6	56
35/80	0,75	10,42	<b>12,33</b>	10,9	13,0	54	55/80	0,75	11,70	<b>13,85</b>	19,2	14,6	48
	1,00	13,90	<b>15,81</b>	14,6	17,4	54		1,00	15,61	<b>17,76</b>	25,6	19,5	48
	1,50	20,85	<b>22,76</b>	21,9	26,1	54		1,50	23,41	<b>25,56</b>	38,4	29,3	48
40/80	0,75	11,42	<b>13,51</b>	13,5	14,3	48	26/86	0,75	7,37	<b>8,72</b>	6,2	9,2	77
	1,00	15,23	<b>17,32</b>	18,0	19,0	48		1,00	9,82	<b>11,17</b>	8,2	12,3	77
	1,50	22,84	<b>24,93</b>	27,0	28,6	48		1,50	14,74	<b>16,09</b>	12,4	18,4	77

Nummer des Profils	Blechstärke mm	Gewicht f. 1qm exkl. Ueberdüg. kg		Widerstands- moment f. 1 m Breite cm <sup>3</sup>	Querschnitt f. 1 m Breite cm <sup>2</sup>	Normale Baubreite cm	Nummer des Profils	Blechstärke mm	Gewicht f. 1qm exkl. Ueberdüg. kg		Widerstands- moment f. 1 m Breite cm <sup>3</sup>	Querschnitt f. 1 m Breite cm <sup>2</sup>	Normale Baubreite cm
		schwarz	verzinkt						schwarz	verzinkt			
32/86	0,75	8,04	<b>9.51</b>	8,1	10,0	69	50/100	1,00	12,57	<b>14.30</b>	19,2	15,7	60
	1,00	10,72	<b>12.19</b>	10,8	13,4	69		1,50	18,85	<b>20.58</b>	28,9	23,6	60
	1,50	16,08	<b>17.55</b>	16,2	20,1	69		2,00	25,14	<b>26.87</b>	38,5	31,4	60
36/86	0,75	8,50	<b>10.06</b>	9,3	10,6	69	55/100	1,00	13,37	<b>15.21</b>	22,4	16,7	60
	1,00	11,33	<b>12.90</b>	12,5	14,2	69		1,50	20,05	<b>21.89</b>	33,5	25,1	60
	1,50	17,00	<b>18.56</b>	18,7	21,2	69		2,00	26,74	<b>28.57</b>	44,7	33,4	60
30/90	0,75	7,65	<b>9.05</b>	7,3	9,6	72	60/100	1,00	14,17	<b>16.12</b>	25,6	17,7	50
	1,00	10,20	<b>11.60</b>	9,8	12,7	72		1,50	21,25	<b>23.19</b>	38,4	26,6	50
	1,50	15,29	<b>16.69</b>	14,7	19,1	72		2,00	28,34	<b>30.29</b>	51,3	35,4	50
35/90	0,75	8,18	<b>9.68</b>	9,0	10,2	63	70/100	1,00	15,77	<b>17.94</b>	32,7	19,7	50
	1,00	10,91	<b>12.41</b>	12,1	13,6	63		1,50	23,64	<b>25.81</b>	49,1	29,5	50
	1,50	16,37	<b>17.87</b>	18,1	20,5	63		2,00	31,54	<b>33.70</b>	65,4	39,4	50
40/90	0,75	8,78	<b>10.39</b>	10,8	11,0	63	80/100	1,00	17,37	<b>19.76</b>	40,5	21,7	40
	1,00	11,70	<b>13.31</b>	14,4	14,6	63		1,50	26,05	<b>28.44</b>	60,7	32,6	40
	1,50	17,55	<b>19.16</b>	21,6	21,9	63		2,00	34,74	<b>37.13</b>	81,0	43,4	40
45/90	0,75	9,42	<b>11.15</b>	13,0	11,8	63	90/100	1,00	18,96	<b>21.57</b>	48,8	23,7	40
	1,00	12,57	<b>14.29</b>	17,3	15,7	63		1,50	28,44	<b>31.05</b>	73,2	35,6	40
	1,50	18,84	<b>20.58</b>	25,9	23,6	63		2,00	37,92	<b>40.53</b>	97,6	47,4	40
50/90	0,75	10,09	<b>11.94</b>	15,3	12,6	54	100/100	1,00	20,56	<b>23.39</b>	58,0	25,7	40
	1,00	13,45	<b>15.30</b>	20,4	16,8	54		1,50	30,84	<b>33.67</b>	87,0	38,6	40
	1,50	20,18	<b>22.03</b>	30,6	25,2	54		2,00	41,12	<b>43.95</b>	116,0	51,4	40
30/90	0,75	11,42	<b>13.51</b>	20,4	14,3	54	110/100	1,00	22,16	<b>25.21</b>	68,0	27,7	40
	1,00	15,23	<b>17.32</b>	27,2	19,0	54		1,50	33,24	<b>36.28</b>	102,0	41,6	40
	1,50	22,85	<b>24.94</b>	40,8	28,6	54		2,00	44,32	<b>47.37</b>	136,0	55,4	40
70/90	0,75	12,76	<b>15.10</b>	26,1	15,9	45	35/120	0,75	6,66	<b>7.88</b>	5,4	8,3	84
	1,00	17,01	<b>19.35</b>	34,8	21,3	45		1,00	8,88	<b>10.10</b>	7,2	11,1	84
	1,50	25,51	<b>27.85</b>	52,2	31,9	45		1,50	13,32	<b>14.54</b>	10,7	16,7	84
5/100	0,75	6,96	<b>8.23</b>	5,5	8,7	80	30/120	0,75	6,96	<b>8.24</b>	6,7	8,7	84
	1,00	9,27	<b>10.54</b>	7,3	11,6	80		1,00	9,28	<b>10.56</b>	9,0	11,6	84
	1,50	13,92	<b>15.19</b>	10,9	17,4	80		1,50	13,92	<b>15.20</b>	13,5	17,4	84
0/100	0,75	7,34	<b>8.69</b>	6,9	9,2	80	40/120	1,00	10,20	<b>11.60</b>	13,1	12,7	72
	1,00	9,80	<b>11.15</b>	9,2	12,2	80		1,50	15,30	<b>16.70</b>	19,6	19,1	72
	1,50	14,70	<b>16.05</b>	13,8	18,4	80		2,00	20,40	<b>21.80</b>	26,1	25,5	72
3/100	0,75	7,80	<b>9.23</b>	8,5	9,7	70	50/120	1,00	11,30	<b>12.85</b>	17,7	14,1	60
	1,00	10,40	<b>11.83</b>	11,4	13,0	70		1,50	16,95	<b>18.50</b>	26,5	21,2	60
	1,50	15,60	<b>17.00</b>	17,0	19,5	70		2,00	22,60	<b>24.15</b>	35,3	28,3	60
1/100	0,75	8,29	<b>9.81</b>	10,3	10,4	70	60/120	1,00	12,57	<b>14.29</b>	23,2	15,7	60
	1,00	11,06	<b>12.58</b>	13,7	13,8	70		1,50	18,84	<b>20.57</b>	34,8	23,6	60
	1,50	16,60	<b>18.12</b>	20,6	20,7	70		2,00	25,12	<b>26.85</b>	46,4	31,4	60
1/100	1,00	11,79	<b>13.41</b>	16,4	14,7	60	70/120	1,00	13,90	<b>15.81</b>	29,5	17,4	48
	1,50	17,70	<b>19.31</b>	24,6	22,1	60		1,50	20,85	<b>22.76</b>	44,2	26,1	48
	2,00	23,58	<b>25.20</b>	32,7	29,5	60		2,00	27,80	<b>29.71</b>	59,0	34,8	48

Nummer des Profles	Blechstärke mm	Gewicht f. 1 qm exkl. Ueberdrg.		Widerstands- moment f. 1 m Breite cm <sup>3</sup>	Querschnitt f. 1 m Breite cm <sup>2</sup>	Normale Baubreite cm	Nummer des Profles	Blechstärke mm	Gewicht f. 1 qm exkl. Ueberdrg.		Widerstands- moment f. 1 m Breite cm <sup>3</sup>	Querschnitt f. 1 m Breite cm <sup>2</sup>	Normale Baubreite cm
		kg							kg				
		schwarz	verzinkt						schwarz	verzinkt			
80/120	1,00	15,23	<b>17,32</b>	36,4	19,0	48	30/150	0,75	6,62	<b>7,84</b>	6,3	8,3	75
	1,50	22,84	<b>24,93</b>	54,6	28,6	48		1,00	8,82	<b>10,03</b>	8,4	11,0	75
	2,00	30,46	<b>32,55</b>	72,8	38,1	48		1,50	13,23	<b>14,44</b>	12,6	16,5	75
27/122	0,75	6,75	<b>8,00</b>	5,8	8,4	85	35/150	0,75	6,84	<b>8,09</b>	7,6	8,5	75
	1,00	9,00	<b>10,25</b>	7,7	11,3	85		1,00	9,11	<b>10,36</b>	10,1	11,4	75
	1,50	13,50	<b>14,75</b>	11,6	16,9	85		1,50	13,68	<b>14,93</b>	15,2	17,1	75
29/122	0,75	6,87	<b>8,13</b>	6,3	8,6	85	40/150	0,75	7,08	<b>8,38</b>	9,0	8,8	75
	1,00	9,15	<b>10,40</b>	8,4	11,4	85		1,00	9,44	<b>10,74</b>	12,0	11,8	75
	1,50	13,74	<b>15,00</b>	12,6	17,2	85		1,50	14,16	<b>15,46</b>	18,0	17,7	75
50/125	1,00	11,07	<b>12,59</b>	17,3	13,8	62	45/150	0,75	7,35	<b>8,70</b>	10,5	9,2	75
	1,50	16,60	<b>18,12</b>	25,9	20,7	62		1,00	9,80	<b>11,15</b>	14,0	12,2	75
	2,00	22,13	<b>23,65</b>	34,5	27,7	62		1,50	14,70	<b>16,05</b>	21,0	18,4	75
80/127	0,75	6,85	<b>8,10</b>	6,5	8,6	76	50/150	1,00	10,19	<b>11,59</b>	16,1	12,7	75
	1,00	9,15	<b>10,40</b>	8,7	11,4	76		1,50	15,29	<b>16,70</b>	24,1	19,1	75
	1,50	13,70	<b>14,95</b>	13,0	17,1	76		2,00	20,38	<b>21,80</b>	32,2	25,4	75
32/128	0,75	6,96	<b>8,24</b>	7,0	8,7	77	60/150	1,00	11,06	<b>12,58</b>	20,8	13,8	6
	1,00	9,28	<b>10,56</b>	9,4	11,6	77		1,50	16,59	<b>18,11</b>	31,1	20,7	6
	1,50	13,92	<b>15,20</b>	14,1	17,4	77		2,00	22,13	<b>23,65</b>	41,6	27,7	6
26/130	0,75	6,62	<b>7,83</b>	5,4	8,3	91	70/150	1,00	12,04	<b>13,69</b>	26,1	15,0	6
	1,00	8,82	<b>10,04</b>	7,3	11,0	91		1,50	18,06	<b>19,70</b>	39,2	22,6	6
	1,50	13,23	<b>14,44</b>	10,9	16,5	91		2,00	24,08	<b>25,73</b>	52,3	30,1	6
80/130	0,75	6,82	<b>8,07</b>	6,5	8,5	78	75/150	1,00	12,57	<b>14,30</b>	29,1	15,7	6
	1,00	9,09	<b>10,34</b>	8,6	11,4	78		1,50	18,85	<b>20,58</b>	43,6	23,6	6
	1,50	13,63	<b>14,88</b>	13,0	17,0	78		2,00	25,14	<b>26,85</b>	58,1	31,4	6
35/130	0,75	7,10	<b>8,40</b>	7,9	8,9	78	80/150	1,00	13,10	<b>14,90</b>	32,1	16,4	4
	1,00	9,46	<b>10,76</b>	10,5	11,8	78		1,50	19,66	<b>21,45</b>	48,2	24,7	4
	1,50	14,21	<b>15,51</b>	15,8	17,8	78		2,00	26,21	<b>28,00</b>	64,3	32,8	4
30/135	0,75	6,76	<b>8,00</b>	6,4	8,4	81	30/160	0,75	6,55	<b>7,75</b>	6,3	8,2	8
	1,00	9,02	<b>10,25</b>	8,6	11,3	81		1,00	8,73	<b>9,93</b>	8,4	10,9	8
	1,50	13,52	<b>14,76</b>	12,9	16,9	81		1,50	13,10	<b>14,30</b>	12,5	16,4	8
35/135	0,75	7,03	<b>8,30</b>	7,8	8,8	81	40/160	0,75	6,96	<b>8,22</b>	8,8	8,7	8
	1,00	9,37	<b>10,67</b>	10,4	11,7	81		1,00	9,28	<b>10,54</b>	11,8	11,6	8
	1,50	14,05	<b>15,35</b>	15,6	17,6	81		1,50	13,90	<b>15,17</b>	17,7	17,4	8
70/140	1,00	12,57	<b>14,29</b>	27,1	15,7	56	50/160	1,00	9,94	<b>11,31</b>	15,7	12,4	8
	1,50	18,84	<b>20,57</b>	40,6	23,5	56		1,50	14,91	<b>16,28</b>	23,6	18,6	8
	2,00	25,12	<b>26,85</b>	54,2	31,4	56		2,00	19,89	<b>21,26</b>	31,5	24,9	8
25/150	0,75	6,45	<b>7,63</b>	5,1	8,0	90	60/160	1,00	10,73	<b>12,19</b>	20,2	13,4	8
	1,00	8,58	<b>9,76</b>	6,8	10,7	90		1,50	16,08	<b>17,55</b>	30,3	20,1	8
	1,50	12,90	<b>14,08</b>	10,2	12,1	90		2,00	21,46	<b>22,92</b>	40,5	26,8	8

Außer den angegebenen werden noch folgende Profile hergestellt:

70/160, 75/180, 80/160, 150/160, 70/200, 75/200, 80/200, 85/200, 90/200, 95/200, 100/200.

**Geschnittene Nägel** werden mittels Maschine aus keilförmigem Blech kalt (ohne Abfall) geschnitten und mit kalt geprefstem Kopf versehen; Querschnitt flach rechteckig, Schneide mäfsig stumpf, keilförmig zulaufend. Brett-, Latten- und Bohlnägel, 70 bis 130 mm lang für 3 bis 8 cm starke Hölzer; Mühlen-, Schiffs- und Leistennägel werden bis 500 mm lang geliefert.

**Geschmiedete Nägel** werden von Hand (die stärksten mit Maschinen-Hämmern) aus vierkantigem Stabeisen auf warmem Wege hergestellt.

### Lieferungsbedingungen für Eisen und Stahl.

Vrgl.: I. Vorschriften für Lieferung von Eisen und Stahl, aufgestellt vom Verein deutscher Eisenhüttenleute.\*)

II. Besondere Vertragsbedingungen für Eisenkonstruktionen, aufgestellt vom preufs. Ministerium der öffentlichen Arbeiten.\*\*)

III. Normalbedingungen für die Lieferung von Eisenkonstruktionen für Brücken- und Hochbau, Aufgestellt vom Verbands deutscher Architekten und Ingenieurvereine.\*\*\*)

## 6. Rostschutz des Eisens.

**1. Rosten** ist die allmähliche Umwandlung des Eisens in Eisenoxydhydrat durch gemeinsamen Angriff von Luft und Wasser, schneller jedoch unter Mitwirkung verdünnter Säuren, auch einiger Salzlösungen, wie auch von abirrenden elektrischen Strömen; im Seewasser befördert besonders Chlormagnesium die Rostbildung. In völlig wasserfreier Luft und sauerstofffreiem Wasser rostet Eisen nicht.

Der Rost (spez. Gew. rd. 4) nimmt einen gröfseren Raum ein als das dazu verbrauchte Eisen. Frischer Kalkmörtel greift Eisen stark an, indessen kommt die Rostbildung gewöhnlich zum Stillstand; Zementmörtel hält dagegen das Eisen blank (s. u.)

**2. Rostschutzmittel** sind nur wirksam, wenn die Oberfläche vorher gut gereinigt ist, wozu auch Sandstrahlgebläse dienen kann. Unter ihnen ist, den jeweiligen Umständen entsprechend, sorgfältige Auswahl zu treffen. Bewährte Mittel sind:

1. Bedeckthalten mit Körpern, die Wasser und Säuren aufnehmen oder binden. So zum Schutze der Dampfkessel der Zusatz von Zinkara (Lösung von Zinkoxyd-Natron) oder von festem Karbozink (kohlens. Zinkoxyd) zum Dampfkesselwasser bei der Kaiserl. Deutschen Marine. Ferner werden aufser Betrieb befindliche Dampfkessel gut geschützt durch Eintragen von Chlorcalcium in aufsgrofsen Stücken in den mittels der Feuerung gut ausgetrockneten Kessel, bei gleichzeitigem Luftabschlusse.

In Tunnels benutzt man entweder Kalksteinschlag als Bettung, oder man bestreicht die Eisenteile des Oberbaues mit Kalkmilch, wodurch ein besonders gefährlicher Rosterreger, nämlich die schweflige Säure der Lokomotiv-Rauchgase, gebunden und unschädlich gemacht wird. Für Schraubenmütern genügt in Tunnels ein zweimaliger Teeranstrich.

\*) Zu beziehen durch die Verlagsbuchhandlung A. Bagel, Düsseldorf.  
 \*\*) „ „ „ „ W. Ernst u. Sohn, Berlin W 66, Wilhelmstr. 90.  
 \*\*\*) „ „ „ „ O. Meifsner, Hamburg, Hermannstr. 44.

2. Erzeugung einer harten und dichten Oxyduloxyschicht nach dem Barffschen oder nach dem Bowerschen Verfahren. Nur für kleinere Stücke (Waffen, geschmiedete Gegenstände).

3. **Metallüberzüge**, dadurch hergestellt, das die mit Säure usw. völlig rein gebeizten und dann rasch getrockneten Gegenstände noch heiß in die geschmolzenen Metalle getaucht oder in dem betreffenden Metallbad galvanisch überzogen werden.

**Zink** gibt den vorzüglichsten Schutz (auch vor Salzwasser), weil sich im Zinkbade an der Oberfläche eine Eisen-Zink-Legierung bildet; s. auch S. 679. (Verzinktes Eisen wird im Handel vielfach als „galvanisiertes“ bezeichnet.) Besser ist die kalte elektrolytische Verzinkung. Verzinktes Eisendrahtseil [12-drähtig, Drahtstärke 3,5 mm] eignet sich vorzüglich bei Blitzableitern zur Luftleitung.

Die Deutsche Reichs-Post- und Telegraphen-Verwaltung verlangt für den Zinküberzug des eisernen Telegraphendrahtes folgendes:

Zusammenhängende, glatte Oberfläche; wenn Draht in eng aneinander liegenden Schraubenwindungen um einen Zylinder vom 10-fachen Draht-Durchmesser gewickelt wird, soll der Zinküberzug weder rissig werden noch abblättern. Dicke des Ueberzuges: Es soll sich auf ihn keine zusammenhängende Kupferhaut bilden, wenn der Draht von 6 und 5 mm Dicke 8-mal, von 4 und 3 mm 7-mal, von 2 und 1,7 mm 6-mal je eine Minute lang in eine Lösung von 1 G.-T. Kupfervitriol mit 5 G.-T. Wasser eingetaucht wird.

**Zinn** schützt nur so lange, als das Eisen an keiner Stelle von Zinn entblößt ist; vgl. Weißbleche, S. 679.

**Blei** bildet einen auch gegen Salz- und Schwefelsäure schützenden Ueberzug. Verbleit-verzinkte Bleche dienen zu Dachdeckungen von chemischen Fabriken, Gasanstalten usw.

**Kupfer** und **Nickel** (galvanisch) schützen nur bei größerer Dicke der Schicht; vgl. S. 679.

4. **Emaillieren**. Die auf die gereinigten (gebeizten und getrockneten) Flächen des Gußstückes aufgetragene pulverige Grundmasse (Feldspat, Quarz, Borax und Ton) wird bis zur Sinterung gebrannt und dann die Masse des eigentlichen Schmelzes (Silikate und Zinnoxid) aufgebracht und bis zu ihrer völligen Schmelzung erhitzt.

5. **Fette**, fest oder flüssig, eignen sich gut zum vorübergehenden Ueberziehen von blanken Eisenteilen; jedoch werden im Freien die Fette von der Sonne abgeschmolzen oder vom Regen fortgespült. Talg (auch mit 50 bis 100 vH Bleiweiß) wird später ranzig, die entstehenden Fettsäuren greifen das Eisen an. Talg mit Graphit zum Einfetten der Drahtseile (alle Monat zu wiederholen), sowie des Ackergeräts im Winter u. a. empfohlen. Mineralische Fette, in Terpentin oder in leichtflüssigen Petroleumdestillaten gelöst, sind zu empfehlen. So die Rostschutzsalbe Ferronat von Rosenzweig & Baumann in Kassel.

6. **Portland-Zement** (auch als Mörtel und Beton) schützt nicht nur, sondern nimmt sogar dünne Rostschichten in sich auf (vgl. Monierbau). Vorzüglicher Schutz für gegossene Stücke und ganze Eisenkonstruktionen; der dünne, mit Wasser angerührte, reine Zement wird 4- bis 5-mal (nach jedesmaligem völligen Erhärten) auf die metallreinen Flächen gestrichen. Für Flächen, die dem Wasser ausgesetzt sind (z. B. Schleusenbauten, Schiffsböden), wird Zement mit entrahmter Milch angemacht.

7. **Teer, Asphalt und Pech**, rein und wasserfrei, in heißem Zustande auf das heiße Eisen aufgetragen, haben sich für gußeiserne Röhre sehr bewährt. Zu empfehlen ist auch die Mischung von 8 G.-T. Teer mit 2 G.-T. zu Pulver gelöschtem Kalk und 1 G.-T. Terpentinöl, dreimaliger Anstrich; oder auch 1 G.-T. Schwefel in 2 G.-T. schwerem Teeröl und darin 5 G.-T. Pech oder Asphalt mit ein wenig Wachs aufgelöst.

8. **Harzölanstriche**. Rostschutzmittel der deutschen Kriegsmarine: Kautschuköl, eine Lösung von Kautschuk in Terpentinöl. Ähnlich das Antioxyd, eine dünne Lösung von Guttapercha in Benzin.

9. **Hartgummi und Zelluloid** geben festhaltende Ueberzüge von Nägeln, Schrauben, Schnallen, Ringen usw., die dadurch vollkommen unangreifbar für Luft, Wasser, Säuren werden. Sehr wichtig für elektrische Isolatoren. Umkleidungen von Schiffswellen mit Hartgummi (Kaiserl. Marine). Mit Zaponlack (Lösung von Zelluloid) werden u. a. Maschinen, die über See gehen, vor dem Rosten geschützt.

10. **Oelfarbenanstriche** sind als Rostschutzmittel am gebräuchlichsten. Leinölfirnis allein blättert leicht ab. Als Grundierung dient dünnflüssiger, rasch trocknender Leinölfirnis, gemischt mit gut deckenden Farbstoffen, wie Graphit, Ocker, Eisenmennige (mit höchstens 20 vH Ton und völlig säurefrei!), am besten aber mit Bleimennige ( $Pb_3O_4$ ) angieben. Unter Wasser hat sich nur Bleimennige bewährt.

Nach dem Grundieren folgt der äußere Anstrich, wozu reiner Leinölfirnis mit Bleiweiß — nicht Zinkweiß —, Graphit und Zinkstaub, auch unter Kreidezusatz, den besten Schutz gibt. Zur Verhütung von Blasenbildung soll der möglichst dünnflüssige Anstrich erst nach dem völligen Erhärten der unteren Schichten aufgetragen werden.

Für Oelfarbenanstriche gelten folgende Erfahrungssätze\*):

**Säuren.** Jeder Oelanstrich wird von verdünnter Salzsäure und Salpetersäure, von gasförmiger Salzsäure, Salpetersäure, schwefliger Säure und von Essigsäure zerstört, wobei gasförmige Säuren rascher wirken als die Säuren in verdünnter wässriger Lösung. — Verdünnte Schwefelsäure greift einen Oelanstrich nicht an.

**Aetzende Alkalien, alkalische Flüssigkeiten und Gase, Ammoniak, Schwefelammonium, Sodalösung** zerstören jeden Oelanstrich rasch. Alte Oelanstriche lassen sich durch ätzende Alkalien sehr schnell abbeizen und beseitigen.

**Reines Wasser** wirkt viel stärker zerstörend als Seewasser und als die sonst als Rostzerzeuger gefürchteten Lösungen von Kochsalz, Salmiak und Chlormagnesium; der Salzgehalt vermindert die Einwirkung des Wassers auf Oelfarben. Die beobachteten zerstörenden Wirkungen des Seewassers müssen der mechanischen Einwirkung des bewegten Wassers auf die Farbdecke zugeschrieben werden. — Heißes Wasser wirkt viel schneller zerstörend als kaltes.

Die durch Wasser ausziehbaren Bestandteile der Steinkohlenasche wirken infolge ihrer alkalischen Beschaffenheit zerstörend auf Oelanstriche; die aus den Schornsteinen mitgerissene feine Asche, die sich auf gestrichenen Flächen ansetzt, ist daher den Anstrichen sehr gefährlich.

Alle Anstriche verlieren in der Wärme an Gewicht und ziehen sich zusammen; dadurch werden sie spröde und erhalten Risse, in die der Regen eindringt. Je geringer das spez. Gew. des Farbkörpers ist, desto haltbarer gegenüber der Wärmewirkung ist der Anstrich.

Aus allem folgt, daß es gegen schädliche Einflüsse, die das Bindemittel des Anstriches, das Leinöl angreifen, keinen wirksamen Schutz gibt.

\*) Vgl. J. Spennrath, Untersuchung der gebräuchlichen Eisenanstriche, Z. d. V. d. I. 1895 S. 1334. Z. d. B. 1900 S. 133

**Anstrichmittel**, die sich ferner bewährt haben, sind: Bessemerfarben, sowie Nauton von Rosenzweig & Baumann (Kassel); Schuppenpanzerfarbe von Dr. Graf & Co. (Berlin); Siderosthen-Lubrose von der A.-G. für Asphaltierung und Dachbedeckung, vormals Johannes Jeserich (Hamburg); die Farbe von Zonka & Co. (Würzburg); Tegolin-Rostschutzfarbe von Court & Baur (Köln-Ehrenfeld).

**II. Schiffsbodenfarben.** Um die eisernen Schiffsböden aufser gegen das Rosten auch gegen das Ansetzen von Tieren zu schützen, müssen die Anstriche auch giftige Stoffe (Quecksilberoxyd u. a.) enthalten. Bewährt sind u. a. die Farben von Joh. Rahtjen (Hamburg) sowie von der Norddeutschen Farbenfabrik Holzapfel (Hamburg).

### Reinigung und Anstrich von Eisenkonstruktionen.

(Auszug aus dem § 7 der auf S. 683 unter II. erwähnten „Normalbedingungen“.)

**Reinigung.** Die einzelnen Teile sind vor dem Zusammensetzen von allen Unreinheiten sowie von Rost und Hammerschlag zu befreien. Der Unternehmer ist gehalten, die von ihm beabsichtigte Reinigungsweise in dem Angebote anzugeben, falls (in den besonderen Bedingungen) nicht ein bestimmtes Verfahren vorgeschrieben ist, oder der Unternehmer von der Vorschrift abzuweichen wünscht.

Falls die Reinigung auf chemischem Wege stattfindet, ist der Unternehmer für das etwaige Nachrosten infolge nicht genügend sorgfältiger Entfernung der Säure verantwortlich. Die auf chemischem Wege gereinigten Stücke (Platten, Stäbe usw.) sind unmittelbar nach der Reinigung in heißem Zustande mit einem Anstriche von Leinölfirnis zu versehen. Der Firnis muß dünnflüssig und schnell trocknend sein. Bis der Leinölfirnis genügend angetrocknet ist, sind die gestrichenen Eisenteile in geeigneter Weise unter Schutz zu halten.

**Anstrich.** Bevor ein deckender Anstrich aufgebracht wird, ist dem Besteller entsprechende Mitteilung zu machen, damit er die Eisenteile vorher prüfen kann. Erst nach Erledigung der bei dieser vorlaufigen Abnahme für erforderlich erachteten Nacharbeiten und nach Erneuerung des etwa beschädigten Leinölfirnis-Anstriches darf die Grundierung der Teile mit dem (in den besonderen Bedingungen) vorgeschriebenen Grundanstriche erfolgen. Die Flächen, die durch andere verdeckt werden, sind vor der Zusammensetzung zu streichen.

Nach erfolgter Aufstellung der Eisenkonstruktion sind die Köpfe der auf der Baustelle eingeschlagenen Nieten von Rost zu reinigen und zu grundieren. Sämtliche Fugen sind sorgfältig zu verkitten.

In allen zwischen den Konstruktionsteilen bleibenden freien Räumen, in denen sich Wasser ansammeln kann, muß für besonders sorgfältigen Anstrich sowie für den Abfluß des Wassers durch entsprechend gebohrte Löcher Sorge getragen werden. Ist letzteres nicht zugänglich, so ist der Raum, soweit tunlich, mit Asphaltkit oder einem anderen geeigneten Stoff (z. B. Portland-Zement) auszufüllen.

## 7. Schweißverfahren.\*)

### 1. Elektrische Verfahren.

a) Das Thomson'sche **Widerstandsschweißverfahren** (Stumpfschweißung) besteht darin, daß die zu schweißenden Stücke in eine Maschine gegeneinander gelegt werden und dann ein starker Strom mit geringer Spannung durch dieselben so lange hindurchgeschickt wird, bis die Verbindungsstellen auf Schweißglut erwärmt sind. Hierauf wird der Strom unterbrochen und die Teile, soweit wie nötig, zusammengeprefst. Das Verfahren ist anwendbar für Querschnitte bis rd. 20 qcm bei Eisen und bis rd. 25 qcm bei Kupfer. Zur Anwendung gelangt Wechselstrom, der in der Maschine auf 1 bis 3 Volt

\*) Vgl. a. C. Diegel, Das Schweißen und Hartlöten mit bes. Berücksichtigung der Bleischweißung.

transformiert wird. Energiebedarf bei den angegebenen Querschnitten rd. 60 Kw.

Die **elektrische Punktschweißung** ist eine besondere Ausführung des Widerstandsverfahrens und dient zur Verbindung meist dünnerer Bleche, bei welchen die überlappte Naht in kürzeren oder längeren Abständen zusammengeheftet wird und so die Handnietung ersetzt.

Hierbei werden die Schweißstellen durch besondere gegenüberstehende Elektroden, zwischen denen die Bleche liegen, erwärmt. Um ungünstige Beeinflussung des Kraftverbrauchs durch Erwärmen der Elektroden zu vermeiden, werden diese durch Wasserumlauf gekühlt.

Werden die Elektroden in Rollenform ausgebildet, so lassen sich auch fortlaufende Nähte herstellen. Besonders bei der Herstellung von Blechgeschirren angewendet. Die Schweißung geht mit etwa 2 Volt vor sich.

Leistung und Kraftbedarf der von der Allg. Elektr.-Ges. Berlin gebauten Apparate.

#### Maschinen zur Stumpfschweißung.

Type	1 A	2 A	75 A	10 A	20 A	40 A	3 F	75 F	15 F	
Größter Querschnitt in qcm Kraftbedarf . . . Kw	Eisen	0,3	0,6	1,5	5	10	20	0,6	1,5	5
	Kupfer	0,2	0,4	0,8	1,5	2,5	5	0,4	0,8	2
		1,5	3	7,5	15	40	60	3	7,5	15

arbeiten  
automatisch

#### Maschinen zur Punktschweißung.

Type	2B	5B	15B
Blechstärke . mm	1	3	7
Kraftbedarf . Kw	3	7,5	15

b) Bei der **Lichtbogenschweißung** nach Bernardos wird das Schweißstück an den einen Pol einer Dynamo angeschlossen, während der andere mit einem Kohlenstab verbunden ist, den man in geringem Abstände über die zu schweißende Stelle langsam hinwegführt. Der hierbei entstehende Lichtbogen bringt das Metall zum Schmelzen, so daß es an der Schweißstelle zusammenfließt.

Beim Verfahren nach Zerener werden beide Pole an Kohlenstäbe, die unter einem spitzen Winkel zueinanderstehen, angeschlossen und der entstehende Lichtbogen durch einen Magneten derart abgelenkt, daß er als Stichflamme wirkt.

Beide Verfahren, bei denen die Verbindung der Fuge durch ineinanderfließen erfolgt, werden zum Stumpfschweißen angewendet. Als Stromart können für beide Verfahren Gleichstrom, für letzteres aber besser Wechselstrom benutzt werden. Ein Teil des Kohlenstoffes der Anode geht auf das Material über, wodurch die Härte an der Schweißstelle ungünstig beeinflusst und das Metall leicht brüchig wird.

Der Lichtbogen eignet sich auch zum Zerschneiden von Blechen jeder Form, doch werden die Schneidkanten zackig und uneben.

Das Verfahren nach Slavianoff (auch elektrisches Giefsverfahren genannt) weicht von dem nach Bernardos dadurch ab, dafs anstatt der Kohlenanode eine Metallanode aus dem gleichen Material wie das des Schweifsstückes zur Anwendung gelangt. Beim Schweißen schmilzt der Metallstab und tropft auf die Schweifsstelle. Dieses Verfahren eignet sich deshalb besonders zur Reparatur gebrochener Gufs- und Schmiedestücke und zum Beseitigen von Schönheitsfehlern an neuen Eisengufsstücken. Hierbei wird die Schweifsstelle so eingeformt, als ob die Fuge mit flüssigem Metall ausgegossen werden sollte. Gufseisen wird in Koksplatten, Schmiedeseisen und Stahlgufs in Quarzsand eingeformt. Durchmesser der Schmelzstäbe 8 bis 10 mm; Gleichstrom von 65 Volt; Stromstärke je nach der Dicke der Schmelzstäbe 400 bis 600 Amp.

Bei dem elektrischen Schweifsverfahren müssen die Augen und nicht bedeckte Hautstellen der Arbeiter durch entsprechende Schutzvorrichtungen gegen die Einwirkung des intensiven weissen Lichtes geschützt werden.

**2. Aluminothermisches Schweifsverfahren oder Thermitschweißung** nach Dr. Goldschmidt (s. Hütte, Taschenbuch für Eisenhüttenleute 1910 S. 667). Die Schweifsstelle wird mit flüssigem Eisen umgossen, das durch Reaktion zwischen Aluminiumpulver und Eisenoxyd entstanden ist.

**3. Die autogene Schweißung.** Die Schweifsstellen werden mittels Stichflamme so weit erhitzt, dafs sie bei dünnen Blechen zusammenfliefsen, während bei starken Blechen ein gleichartiges Material eingeschmolzen wird. Die Erzeugung der Stichflamme erfolgt durch einen sogen. Schweifs Brenner, in welchem die Mischung der zu verwendenden Gase, entweder Sauerstoff und Wasserstoff oder Sauerstoff und Azetylen so erfolgt, dafs die Flamme reduzierend ist, d. h. dafs entweder der Wasserstoff oder das Azetylen in Ueberschufs vorhanden ist. Das Mischungsverhältnis beträgt für 1 R.-T. Sauerstoff 4 R.-T. Wasserstoff oder 0,6 R.-T. Azetylen.

Obwohl beide Verfahren fast gleichwertig sind, dürfte doch das eine oder das andere je nach Art der auszuführenden Arbeiten den Vorzug verdienen. Mit Wasserstoff werden Bleche bis 8 mm, mit Azetylen bis 10 mm geschweifst. Bleche bis 3 mm werden stumpf aneinandergeschweifst, starke Bleche werden an den Kanten abgeschrägt, so dafs sich eine Nut bildet, die beim Schweißen vollgeschmolzen wird. Das Material ist an der Schweifsstelle nicht so homogen und so zähe wie das Blech selbst. Dieser Verlust an Festigkeit läfst sich jedoch dadurch einschränken, dafs die Naht dem Fortschreiten der Schweißung gehämmert wird. Das Hämmern hat zu beginnen, wenn das eingeschmolzene Material noch weif-glühend ist, und mufs bis zum Erkalten auf Rotwärme fortgesetzt werden.

Beim Wasserstoffverfahren wird der Druck der beiden Gase, der in den Flaschen anfangs bis 125 kg/qcm beträgt, je nach der Dicke der Bleche auf 0,5 bis 2 kg/qcm durch Regulierhähne heruntergebracht. In den Mischraum, vor dem Ausflufs im Brenner, strömen die Gase

durch enge Kanäle, die unter sehr spitzem Winkel stehen. Die Druckregulierung muß so erfolgen, daß die Austrittsgeschwindigkeit größer ist als die Zündgeschwindigkeit der Gase, um ein Zurückschlagen der Flamme zu vermeiden.

Beim Azetylenverfahren reißt der Sauerstoff nach dem Injektorprinzip das unter einem Druck von rd. 50 mm Wassersäule stehende Azetylen mit.

Zum Vergleich der beiden Verfahren ist zu beachten, daß man beim Wasserstoffverfahren unabhängiger ist, da sich die Gasflaschen leicht transportieren lassen und man von einer besonderen Anlage, wie beim Azetylen, absehen kann; letzteres arbeitet dagegen infolge der größeren Wärmeentwicklung schneller und ist für stärkere Gegenstände anwendbar, außerdem ist Azetylen billiger herzustellen als Wasserstoff. Wasserstoff ruft keine chemische Zersetzung im Eisen hervor, während das Azetylen den Kohlenstoffgehalt an der Schweißstelle erhöht.

Die autogenen Verfahren eignen sich auch bei der Anwendung sogen. Schneidbrenner zum **Durchschneiden** von Eisen- und Stahlteilen in beliebiger Stärke und Härte. Zu diesem Zwecke erhitzt man zunächst eine Stelle mit der Schweißflamme bis auf Schmelzhitze, stellt dann die Wasserstoff- bzw. Azetylenzufuhr ab und läßt den Sauerstoff allein mit einem Druck bis zu 30 kg/qcm gegen die Trennstelle streichen, wodurch eine augenblickliche Verbrennung und dadurch Schmelzung und Trennung an der Stelle entsteht. Die benachbarten Teile werden nicht merklich erwärmt.

**4. Schweißen mit Wassergas.** Besonders zum Schweißen stärkerer Bleche benutzt, die im gewöhnlichen Koksfeuer, da nur einseitig, nicht günstig genug erwärmt werden können. Die Wassergasflamme dagegen kann bei nicht zu engen Querschnitten von beiden Seiten wirken. Das zum Schweißen benutzte Wassergas hat eine Zusammensetzung von 3 vH  $\text{CO}_2$ , 44 vH  $\text{CO}$ , 50 vH  $\text{H}$  und 3 vH  $\text{N}$  bei rd. 2600 W.-E. Die Temperatur der Wassergasflamme beträgt rd. 1800° C. Zur Erreichung der höchsten Temperatur ist es notwendig, daß die Verbindung des Gases mit der atmosphärischen Luft eine möglichst innige ist. Die Mischung erfolgt meist in dem Brenner vor dem Ausströmungsschlitz in einem Verhältnis von rd. 5 R.-T. Luft und 2 R.-T. Gas. Zur Erzeugung der Stichflamme wird Luft und Gas, und zwar erstere stärker verdichtet. Hierdurch reißt der Wind das Gas beim Ausströmen in den Mischraum mit.

Die Schweißung kann entweder mit Ueberlappen oder durch Einschweißen von Keilstücken erfolgen. Normale Blechstärken für die Wassergasschweißung sind 10 bis 25 mm, doch können auch Platten bis 100 mm geschweißt werden. Die Keilschweißung fängt bei 20 bis 25 mm an. Blechstärken unter 4 mm eignen sich nicht mehr für dieses Verfahren. Für starke Bleche und Platten sind Kraft-hämmer oder hydraulisch wirkende Schweißapparate in Anwendung. Je nach der Größe, der Blechstärke und dem Gewicht der Schweißkörper erfordert ein Schweißfeuer zwei bis vier Mann beim Maschinenschweißen und vier bis sieben Mann beim Hand-schweißen.

Gasverbrauch und Leistung einer maschinell betriebenen Schweißstrafe stellen sich nach Angaben von Julius Pintsch:

Blechstärke . . . mm	6	8	10	15	20	25
Gasverbrauch . . . cbm	70—75	73—78	75—80	90—110	110—120	130—145
Schweißnaht i. d. Stunde	normal m		2,6	2,2	1,4	1,3
	maximal m		5,0	4,2	3,4	2,5

## B. Zink.

Meist aus Zinkspat (Galmei) gewonnen, kommt als (schlesisches, rheinisches oder belgisches) Zinkblech und Schmelzzink in den Handel. Spez. Gew. s. S. 636 und 641. Zwischen 100 bis 150° geschmeidig und walzbar, bei sehr niedriger Temperatur spröde; Schmelzpunkt (vor dem Glühen) bei 419°; fließt, weil sehr dünnflüssig, die Formen gut aus. Erfährt durch Erwärmung eine bedeutende Ausdehnung (Ausdehnungszahl  $\alpha \sim 0,00003$  für 1°), was bei Verwendung von Zinkblechen besonders zu berücksichtigen ist. Feuchte Luft erzeugt auf ihm eine dünne, fest haftende, schützende Schicht von halbkohlensaurem Zinkoxyd (in 25 Jahren etwa 0,02 mm stark). Durch säurehaltige Dämpfe und an dumpfen Orten wird Zink bald zerstört. Verunreinigungen des Handelzinks: Blei und Cadmium. Bei hellroter Glühhitze verdampft das Zink und verbrennt bei Luftzutritt mit bläulicher Flamme zu Zinkoxyd (Zinkweiß).

**1. Glattes Zinkblech**, in 26 Stärken wird benutzt zu Dacheindeckungen, Dachrinnen und Abfallrohren (Nr. 13-bis 15), Fenster- und Gesimsabdeckungen, Kehlblechen, architektonischen Verzierungen, Badewannen usw. Für Bauzwecke meist in den Stärken Nr. 12 bis 16; leicht und billig, wetterbeständig, durch Silikat-Anstrich oder galvanische Verkupferung zu schützen.

Bei 16° ist längs der Faser  $K_z = 1900$ , quer  $K_z = 2500$  kg/qcm; dabei die Dehnung  $\varphi = 18$  bzw. 15 vH. Bei 155° ist  $\varphi$  am größten; längs 100 vH, quer 80 vH; die Längsdehnung fällt von 155° ab bis zu 100° bzw. 175° auf  $\varphi = 40$  vH und gleichzeitig die Querdehnung auf  $\varphi = 20$  bzw. 26 vH.

Zu Leisten-Dachdeckungen werden meist Blechtafeln von 1,0 . 2,0 m benutzt; jedoch sind auch Tafeln 0,65 . 2,0 m, 0,8 . 2,0 m, 1,0 . 2,25 m, 1,0 . 2,5 m zu beziehen.

Größte Länge 6,0 m, größte Breite 1,6 m; Stärken von 0,1 bis 30 mm.

### Deutsche Zinkblechlehre.

Nr. der Lehre .	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Dicke in mm .	0,10	0,143	0,186	0,228	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50	0,58	0,66	0,74
1 qm wiegt kg .	0,70	1,00	1,30	1,60	1,75	2,10	2,45	2,80	3,15	3,50	4,06	4,62	5,18
Nr. der Lehre .	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
Dicke in mm .	0,82	0,95	1,08	1,21	1,34	1,47	1,60	1,78	1,96	2,14	2,32	2,50	2,68
1 qm wiegt kg .	5,74	6,65	7,56	8,47	9,38	10,29	11,20	12,46	13,72	14,98	16,24	17,50	18,77

Bemerkung. Die **belgische Lehre** stimmt mit der deutschen Lehre überein.

**2. Zinkwellblech** für Dachdeckungen, vom Verbands deutscher Zinkwalzwerke, Berlin, Albrecht Str. 11 in den nachstehenden sechs Profilen geliefert, wovon A bis D in Dicken bis Nr. 16 und E bis Nr. 12. Profil E nur auf Schalung oder Lattung, im Längsstoffe Ueberdeckung mit zwei Wellen. Bei den übrigen Profilen ist für Ueberdeckung im Seiten- und Längsstoffe einschl. Befestigung auf den Fetten 15 bis 18 vH Gewichtzuschlag zu rechnen.

Profil A auch gebogen (bombiert) nach Halbmessern von 1,5 m und darüber für gewölbte Dächer (Fettenteilung bis 2,0 m). — Weiteres über Zinkblechdächer s. III. Bd. Abschn. Hochbau.

### Zinkwellbleche.\*)

Profil-Nr.	Wellen-		Max. Breite	Max. Länge	Querschnitt für 1 m Tafelbreite	Gewicht f. 1 qm Wellblech	Widerstandsmoment f. 1 m Tafelbreite
	Breite	Höhe					
	B	H			gem	kg	und für 1 mm Blechstärke
A	117	55	etwa 1,60	etwa 3,00	14,50	10,33	20,9
B	110	32	„ 1,60	„ 3,00	12,35	8,79	10,0
C	100	32	„ 1,30	„ 3,00	12,50	8,90	10,4
Grillo	100	26	„ 1,00	„ 2,80	11,40	8,13	7,3
D	60	14	„ 1,50	„ 2,61	11,50	8,20	4,2
E	20	6	„ 1,00	„ 2,58	11,65	8,30	1,9

Die Querschnitte, Gewichte und Widerstandsmomente für kleinere und größere Blechdicken als 1 mm erhält man (annähernd) durch Multiplikation mit der betreffenden Blechdicke in mm. Hierbei sind ABC der Länge nach, D und E der Breite nach gewellt.

**3. Schmelzzink**, meist in kleinen 4 cm starken Platten, zum Verzinken von Eisenblech und Eisendraht, ferner für Metallegierungen (s. S. 694), Zinkgufwaren, galvanische Elemente usw. Längen-Schwindmaß =  $\frac{1}{69}$  (s. S. 392). Zinkgufwaren sind durch Anstrich oder galvanischen Metallüberzug (z. B. Kupfer) gegen atmosphärische Einflüsse zu schützen.

## C. Kupfer.

Rösten und reduzierendes Schmelzen der meist schwefelhaltigen Kupfererze liefert das unreine, spröde Roh-(Schwarz-)Kupfer. Bei sehr armen Erzen und kupferhaltigen Metallabfällen wird das Kupfer auf nassem Wege ausgelaugt und gefällt, Zementkupfer. Weiterverarbeitung jetzt meist durch Raffinieren, wiederholtes oxydierendes Schmelzen mit unmittelbar anschließendem Reduzieren des gebildeten Kupferoxyduls. Das reinste Kupfer wird durch Elektrolyse gewonnen.

Schmelzpunkt 1054<sup>0</sup>. Spez. Gewicht s. S. 635 u. 641. Festigkeitsangaben für Kupfer und Kupferlegierungen s. S. 514 u. f.

Je reiner, desto weicher und dehnbarer, sowohl kalt wie in Glühhitze; Verunreinigung durch Blei, Arsen, Wismut, Zink, Nickel, Silber.

\*) Angabe vom Februar 1911.

Geringe Mengen Wismut (schon 0,05 vH) machen das Kupfer brüchig; Arsengehalt bis 0,5 vH erhöht seine Festigkeit, vermindert aber elektrische Leitungsfähigkeit. Durch Walzen und Hämmern wird es hart, durch Erhitzen auf 200 bis 300<sup>0</sup> (Art der Abkühlung ohne Einfluss) wieder weich; sehr wenig schweißbar, zu Gußwaren ungeeignet, weil es blasige Güsse liefert. Große Leitungsfähigkeit für Wärme und Elektrizität.

Aus Kupfer werden gefertigt Draht, Blech, Stangen und Rohre, es wird benutzt zu Legierungen und Farben.

**1. Kupferdraht.** Gewichte s. S. 640 und II. Bd. Abschn. Elektrotechnik. Festigkeit s. S. 521.  $K_z = 3300$  kg/qcm für elektrolytisch reinen Kupferdraht; bei 0,351 vH und 0,808 vH Arsengehalt  $K_z = 5100$  bzw. 4700 kg/qcm, bei 0,26 vH und 0,529 vH Antimongehalt  $K_z = 5200$  bzw. 5500 kg/qcm.\*) Wird meist bezogen, wie er aus dem letzten Zuge hervorgegangen ist, also ungeglüht und blank, in großen mit Kupferdraht abgebundenen Ringen (Bunde und Adern). Verzinnter Kupferdraht für Telephonleitungen. — Kupferdraht muß sehr biegsam und glatt sein und gleichmäßigen, kreisförmigen Querschnitt haben.

**2. Kupferbleche.** Gewichte s. S. 641. Gutes Kupferblech muß eine reine, glatte Oberfläche haben, sehr biegsam und im Bruche gleichmäßig sein; bei mehr als 5 mm Dicke sei  $K_z \geq 2000$  bis 2300 kg/qcm,  $\varphi \geq 38$  vH. Benutzt zu Dachdeckungen (Tafeln hierzu in Größen von 0,8 bis 2 qm bei höchstens 1 m Breite und 0,5 bis 1 mm Dicke), zu Dachrinnen, Abfallrohren bis 1,5 mm Dicke, getriebenen Bildwerken, zu Schiffsbekleidungen (Tafeln 1,9 bis 2,5 m lang, 0,8 m breit), zu Geschirren, Pfannen, zu Kesselblechen usw.

Fasson- oder Mafsbleche nach besonderer Mafsaufgabe werden gewalzt in Breiten bis 3 m und Längen bis 8 m bei 0,1 bis 4,5 mm Stärke. Lagerbleche: 1,0. 2,0 m bei 0,44 bis 1,11 mm Stärke, 1,0. 3,0 m bei 0,67 bis 1,11 mm Stärke, 1,0. 4,0 m bei 0,85 bis 1,50 mm Stärke. Für feinere Fabrikation (Treibarbeiten) Glatt- und Druckbleche. Dicke Platten, z. B. Feuerbüchsenbleche (1,0 bis 2,4 m breit, 2 bis 4 m lang und bis 26 mm stark), werden gehämmert. Kupferblech in kreisrunden Scheiben von 50 bis 3200 mm Durchmesser bei 0,44 bis 8 mm Stärke im Handel.

**3. Stangenkupfer** wird aus kleinen Blöcken gehämmert, gewalzt oder wie Draht gezogen; es muß sich stauchen und biegen lassen, ohne rissig zu werden.  $K_z > 2300$  kg/qcm bei 60 vH Zusammenziehung des ursprünglichen Querschnitts. Man unterscheidet Quadrat- und Rundkupfer; Quadratkupfer 1 bis 25 qcm Querschnitt, Rundkupfer 3 bis 100 mm Durchmesser.

**4. Kupferrohre** entweder nahtlos gewalzt (Patent Mannesmann s. Tafel im 6. Abschn., Maschinenteile, unter „Rohre“) oder aus einem Stück ohne Naht gezogen oder aus Blechstreifen durch Zusammenbiegen über eine Rundeisenstange, Zusammenlöten mit Schlaglot und nachherigem Ziehen, auch elektrolytisch nach Elmore hergestellt. Kupferrohre sollen sich um einen Dorn von der dreifachen Dick-

\*) Vgl. Hampe, Chemiker-Ztg. 1892 S. 726.

des Rohrdurchmessers kreisförmig biegen lassen, ohne Brüche oder Risse zu zeigen. Kupferne Knie- und Federrohre, kupferne T-Stücke, sowie Näheres über Kupferrohre s. im 6. Abschn., Maschinenteile, unter „Rohre“.

## D. Blei.

Meist aus Bleiglanz (Schwefelblei) als (meist silberhaltiges) Werkblei gewonnen, das raffiniert (und entsilbert) das Kaufblei liefert. Spez. Gew. zwischen 11,25 und 11,37, wenn nicht allzusehr verunreinigt. Blei schmilzt bei 326°, ist gießbar, sehr dehnbar und biegsam, wetterbeständig, läßt sich leicht schneiden und verdampft bei Rotglühhitze. Festigkeit s. S. 517 u. 521.

Bleibleche\*) für Dachdeckungen: aufgerollte Tafeln, 0,80 und 1,00 m breit, 10 bis 15 m lang, 1,5 bis 2,0 mm stark.

Hartblei ist Blei mit Antimonzusatz, zu Lagerschalen, Schriftmetall, Bleirohren, zum Untergießen der Auflagerplatten von Eisenkonstruktionen (Blei mit 5 bis 10 vH Antimon) usw. benutzt. Bleirohre sind zum Schutze gegen die Einwirkung von Wasser innen mit einem Ueberzuge von Schwefelblei (durch Schwefelnatrium) oder Zinn zu versehen. — Rohre aus Hart- und Weichblei s. 6. Abschn., Maschinenteile, unter „Rohre“.

## Bleidraht.

### Handelsbureau der königl. sächsischen Hüttenwerke in Freiberg.\*\*)

Dicke	Gewicht von 100 m						
mm	kg	mm	kg	mm	kg	mm	kg
1,0	0,9	3,5	10,9	6	32,2	11	107,5
1,5	2,0	4,0	14,2	7	43,5	12	128,0
2,0	3,6	4,5	18,0	8	57,0	13	150,0
2,5	5,6	5,0	22,2	9	72,5	14	174,0
3,0	8,0	5,5	26,8	10	89,0	15	200,0

Bemerkung. Draht aus Weichblei ist außer in den vorstehenden Sorten auch noch in jeder anderen gewünschten Stärke über 0,5 mm, u. zw. rund oder mit anderem Profil, erhältlich.

## E. Zinn.

Meist aus Zinnstein gewonnen. Spez. Gew. s. S. 636; Schmelzpunkt bei 232°,  $K_z = 350$  bis 400 kg/qcm. Zinn ist weich und geschmeidig, sehr dehnbar, härter als Blei. In Stärken von 0,2 bis 0,008 mm ausgewalzt und gehämmert, heißt es Zinnfolie oder Stanniol.

Gutes Zinn muß frei von verunreinigenden Beimengungen (Arsen, Blei, Eisen, Kupfer, Wismut, Nickel und Zink) sein und an der Luft

\*) Handelsbureau der königl. sächsischen Hüttenwerke in Freiberg: **Bleiblech** in Stärken von 0,5 bis 12 mm, Längen von 3,0 bis 10 m und Breiten von 1,5 bis 3,0 m ist käuflich; dabei das größte Plattengewicht 1200 kg.

\*\*) Angabe Februar 1911.

seine glänzende Oberfläche behalten. Kommt in Form von Blöcken (60 kg), Stangen, Rollen (5 bis 6 kg schwer) und Körnern, u. zw. nach Ursprungsländern bezeichnet, als Banka-, Billiton-, Malakka-, australisches und englisches (Lamm-) Zinn in den Handel; ersteres ist das beste und sehr rein. Böhmisches, sächsisches und peruanisches Zinn sind unreine Sorten.

## F. Metallegierungen.\*)

Die Zusammensetzung der Legierungen ist im folgenden überall nach Gewichtsteilen (G.-T.) angegeben. — Festigkeitszahlen für Metallegierungen s. S. 514 u. f.

**1. Messing** (Gelbgufs) nennt man Legierungen aus Kupfer und Zink. Stolberger Messing: 64,8 Kupfer, 32,8 Zink, dazu 2,0 Blei und 0,4 Zinn. Englisches Messing: 66,7 Kupfer, 33,3 Zink. Messing ist härter als Kupfer und sehr dehnbar. Härte und Festigkeit nehmen mit dem Zinkgehalte zu, erstere bis zu etwa 50 vH, letztere bis zu etwa 45 vH Zinkgehalt, darüber wieder Abnahme. Für eine gegebene Legierung ist die Härte von dem Grade der Kaltbearbeitung abhängig. Für die Praxis empfiehlt sich ein Zinkgehalt von 25 bis 35 vH. Die Dehnbarkeit wächst mit dem Kupfergehalte. — Durchschnittlich ist  $K_g = 1500 \text{ kg/qcm}$ .

Messing ist in der Rotglühhitze spröde, läßt sich kalt wie Kupfer bearbeiten und zu den dünnsten Blechen kalt auswalzen (Gewichte s. S. 641). Blech kommt schwarz, gebeizt, ein- und zweiseitig geschabt und poliert in den Handel. Tafeln meist 0,5–2,0 m groß in 0,1 bis 10 mm Stärke. Messingdraht (Gewichte s. S. 640) gegläht und ungegläht; Festigkeit s. S. 521. — Messing liefert, weil dünnflüssig, glatten, blasenfreien Gufs (oft mit 1 bis 2 vH Bleizusatz); der leicht zu bearbeiten ist. Allzu hoher Zinkgehalt verursacht starkes Saugen in der Gufsform. Ueber Messingrohre s. 6. Abschn., Maschinenteile, unter „Rohre“.

Aehnlich dem Messing sind **Tombak** (85 Kupfer, 15 Zink) von rötlicher Farbe und **Weißmessing** mit 50 bis 80 vH Zink, gelblich weiß.

**2. Bronze** (Rotgufs) heißen Legierungen aus Kupfer und Zinn; dichter, härter, leichtflüssiger als Kupfer. Für Lagerschalen geeignet: 83 Kupfer und 17 Zinn bzw. 82 Kupfer, 16 Zinn und 2 Zink. Härte wächst bis zu 28 vH Zinn, nimmt dann wieder ab; Festigkeit am größten bei 17,5 vH Zinn. Bronze mit  $< 5$  vH Zinn läßt sich kalt strecken. Bleizusatz erhöht die Sprödigkeit, vermindert die Festigkeit und erniedrigt den Schmelzpunkt; Zinkzusatz vermindert Festigkeit und Härte. Festigkeit bei höherer Temperatur s. S. 515.

Zur Erzielung sauerstofffreier Bronzen wird dem Gusse 0,5 bis 1 vH Phosphor zugesetzt. Der Phosphor bildet eine dünnflüssige Schlacke. Das (meist phosphorfreie) Erzeugnis, **Phosphorbronze**, ist sehr zäh, fest, feinkörnig und dünnflüssig, walz-, zieh- und schmiedbar. Zu Maschinenteilen: 90,34 Kupfer, 8,90 Zinn und 0,76 Phosphor. Phosphor-

\*) Ueber die zur Verminderung der Reibung dienenden Metallegierungen s. Z. d. V. d. I. 1898 S. 1300, 1330, 1350 u. f. — Legier- und Löt kunst von Dr. F. Wüst Leipzig 1908.

bronze findet Verwendung für Achslager und -büchsen, Dampfschieber, Zahnräder, Presszylinder und Armaturen, d. h. im besonderen für solche Maschinenteile, welche heftigen Stößen ausgesetzt sind.; auch wird sie zu Rundstangen, Rohren ohne Naht (weich und federhart), Blech und Telephondraht (ungeglüht  $K_z = 14000$  kg/qcm bei  $\varphi = 1$  vH, gegläht  $K_z = 6300$  kg/qcm bei  $\varphi = 72$  vH) benutzt.

Bei den **Lokomotiven** der preuß. Staatsbahnen wird **Rotgufs** von der Zusammensetzung 84 Kupfer, 15 Zinn und 1 Zink verwendet für die Lagerschalen der Treib- und Kuppelstangen, der Treib- und Kuppelachsen, Gleitbacken der Geradfürungen u. ähnl., **Phosphorbronze** von der Zusammensetzung 83 Kupfer, 16 Zinn, 1 Phosphorkupfer für die Buchsen des Steuerungsgestänges, der Schieberschubstangen u. ähnl.

**Glockenmetall** enthält bis 25 vH Zinn, ist rötlich-grau, sehr spröde, läßt sich schwer bearbeiten. — **Geschützbronze** enthält bis 10 vH Zinn, ist gelblich-rot, wenig dehnbar, ziemlich hart und sehr fest, zu Geschützrohren, Dampfventilen, Dampfhammen und zu den meisten Bronze-gufswaren benutzt, wird durch schnelles Abkühlen weich, bei langsamem Abkühlen hart und spröde.

**Kunstbronze** enthält noch Zusätze von Zink und Blei, füllt die Gufsformen gut aus und überzieht sich allmählich unter der Einwirkung der feuchten, kohlenstoffhaltigen Luft mit sogen. Patina (halbkohlensaurem Kupferoxyd), dem grünen, blauen, braungrünen Edelrost. Kunstbronze ist in der Zusammensetzung sehr schwankend. Soll im Freien leicht Patina erzeugt werden, so muß die Bronze zinkfrei sein (90 bis 95 vH Kupfer und 10 bis 5 vH Zinn). Kunstbronze nach Elster: 86,7 Kupfer, 6,7 Zinn, 3,3 Blei und 3,3 Zink. Künstlich erzeugte Patina ist wenig dauerhaft. — **Medaillenbronze** mit nur 2 vH Zinn.

### Telegraphen- und Telephondraht aus Bronze

von Felten & Guilleaume in Mülheim (Rhein).

Drahtstärke in mm . . . .	4,5	4,0	3,0	2,7	2,5	2,2	2,0	1,8	1,5	1,2	1,0	0,9
Gewicht v. 1000 m Draht in kg	143	113	63	51	44	34	28	23	18	10	7,0	4,5

**Bronzedraht** für große Entfernungen mit 60 bis 98 vH der Leitungsfähigkeit des Kupfers und

$K_z = 6800$  bis  $4600$  kg/qcm bei 3,0 mm Stärke,

$K_z = 7100$  „  $4800$  „ „  $0,9$  „ „

**Siliziumbronzedraht** für Stadtleitungen mit 30 bis 40 vH der Leitungsfähigkeit des Kupfers und

$K_z = 7800$  bis  $6500$  kg/qcm bei 3,0 mm Stärke,

$K_z = 8500$  „  $8000$  „ „  $0,9$  „ „

Siliziumbronzedraht wird als Seele für Tiefseekabel benutzt.

**Doppelbronzedraht**, aus einer Aluminiumbronzeseele mit Kupferumhüllung bestehend, mit  $K_z = 7600$  kg/qcm und 69 vH der Leitungsfähigkeit des Kupfers.\*)

**Compounddraht**, aus einer Stahlseele mit Bronzeumhüllung bestehend; bei einem 3 mm starken Drahte ist der Querschnitt der Seele 2,87 qmm, der der Hülle 4,20 qmm.

\*) Vrgl. Z. d. V. d. I. 1892 S. 1319.

Bei der Zerreißprobe (bei 10 bis 15° Temperatur) sei für den 1,5 mm starken Draht  $\varphi \geq 1$  vH, für die übrigen Drähte  $\varphi \geq 1,5$  vH. — Ueber den zulässigen Leitungswiderstand s. II. Bd. Abschn. Elektrotechnik.

Die Deutsche Reichs-Post- und Telegraphen-Verwaltung verlangt für Bronzedraht zu Telephonleitungen folgendes:

Für Draht von . . . . .	4,5	4	3	2	1,5	mm Durchmesser
sei $K_g$ mindestens . . . . .	5000	5100	5260	5260	7000	kg/qcm;
der Draht soll aushalten . . . . .	6	7	7	7	11	Biegungen
bei Klemmbacken von . . . . .	10		5			mm Halbmesser.

**3. Weißmetall**, zinnreiche Legierungen mit Antimon, Kupfer oder Blei. Weißmetall für Lagerschalen: 1 Kupfer, 2 Antimon und 15 Zinn. Weißmetall für Stopfbüchsenringe: 7 Blei, 1,5 Antimon und 1,5 Zinn.

**4. Deltametall**, Legierungen aus Kupfer, Zink und Eisen, goldgelb, von großer Festigkeit und Dehnung, in Rotglut schiedbar. Gegossen, durchaus dicht und für hohen Druck sehr geeignet. Gegen Seewasser und saure Grubenwässer vollständig widerstandsfähig, daher vielseitige Verwendung im Schiffbau und Bergbau, zu Pumpenkörpern, Flügelrädern für Kreiselpumpen, zu Kolbenstangen, Spindeln, Ventilen usw. Wird geliefert in Barren, Blechen, Stangen, Guß-, Schmiede- und Stanzstücken von der Deutschen Delta-Metall-Gesellschaft, Düsseldorf-Grafenberg.

**5. Duranametall**, eine vollkommen homogene Kupfer-Zink-Eisen-Legierung (Dürener Metallwerke A.-G.) von ausgezeichneter Festigkeit und Widerstandsfähigkeit, läßt sich ebensogut warm schmieden und walzen als gießen und findet die vielseitigste Verwendung im Schiffbau, Maschinen- und Pumpenbau, Lokomotiv- und Automobilbau u. a. Ueber Festigkeit usw. siehe I, S. 516.

**Duraluminium** ist eine Legierung aus Aluminium, Kupfer, Mangan und Magnesium mit über 90 vH Aluminium. Spez. Gew. 2,77 bis 284. Bruchfestigkeit 35 bis 46 kg/qmm. Dehnung 21 bis 18 vH.

**6. Lote.** Vor dem Löten sind die zu verbindenden Stellen durch Feilen, Schaben oder Ätzen metallisch rein zu machen und alsdann zum Schutz gegen Oxydation während des Lötens beim Weichlöten z. B. mit Lötwasser (Zink in Salzsäure gelöst), Lötfett, Kolophonium, beim Hartlöten z. B. mit Borax zu bedecken. Die zu verbindenden Metallflächen müssen mindestens bis zum Schmelzpunkte des Lotes erhitzt sein, gut aufeinander passen und unverschiebbar gegeneinander gehalten werden. Die Erhitzung der Metallflächen und das Schmelzen des Lotes geschieht beim Weichlöten mit Hilfe des LötKolbens oder der Lötlampe, beim Hartlöten in einem Holzkohlenfeuer.

Wismutlote für leicht schmelzbares. bleihaltiges Zinn; in G.-T.	15,5 20 20,6 21,4 24,8 20 15	Zinn, 32 " 26 " 26,8 " 27,8 " 22,1 " 20 " 25	Blei, 52,5 " 54 " 52,6 " 50,8 " 53,1 " 60 " 60	Wismut; " " " " " " " " " " " "	der Schmelzpunkt liegt bei	960
						1019
						1030
						1070
						1210
						1140
1250						

<b>Weichlote</b>		} 90 Zinn, 10 Blei; der Schmelzpunkt liegt bei 210° 70 " 30 " " " " " " " " " 190°
für verzinnertes Eisenblech, Kupfer, Messing, Zinn, Zink, Blei usw.; in G.-T.		
<b>Hartlote</b> für Messing, Kupfer, Eisen und Stahl; in G.-T.	. Zinn, 1 Zink, 7 Messing, . Kupfer; sehr strengflüssig	} gelb strengflüssig für Messing } halbweifs leicht schmelzbar} weifs
	. " 1 " 3—4 " . " strengflüssig	
	. " 1 " 2—2,5 " . " strengflüssig	
	1 " 4—7 " 12 " * " } halbweifs	
	1 " 16 " . " 16 " " } leicht schmelzbar} weifs	
. " 1 " . " 1 " . " } leicht schmelzbar} weifs		
<b>Silberlote</b>		} 4 Feinsilber, . Zink, . Messing, 1 Kupfer; hart weich für Gußeisen geeignet.
für feine Arbeiten; in G.-T.		
} 2 " " 1 " " " weich		}
} 20 " 10 " " 30 " für Gußeisen geeignet.		

Bleiflächen, z. B. bei Akkumulatorplatten, werden dadurch miteinander verlötet, daß man die Flächen reinigt und dann mit Hilfe einer Wasserstoffgasflamme zum Schmelzen und Ineinanderfließen bringt.

### 7. Sonstige Metallegierungen.

Bezeichnung	Gehalt in G.-T. an				Dazu noch G.-T.
	Kupfer	Zinn	Zink	Antimon	
Letternmetall . . .	.	.	.	16 bis 25	84 bis 75 Blei (auch mit 5 bis 15 vH Alum.-Zusatz)
Letternmetall von Ehrhardt . . . . .	4 bis 2	4 bis 3	89 bis 93	.	3 bis 2 Blei
Hartes Typenmetall } von Johnson	.	59	33	.	
	.	75	.	25	
Britanniametall . . . . .	1,85	81,9	.	16,25	
	.	90	.	10	
Neusilber . . . . .	50 bis 65	.	30 bis 20	.	20 bis 15 Nickel
Alfenide . . . . .	59	.	30	.	10 "
Aluminiumbronze . . . . .	85 bis 95	.	.	.	15 bis 5 Alum.
Aluminiummessing . . . . .	96,7	.	.	.	3,3 "

**Magnalium**, Legierungen aus 77 bis 98 vH Aluminium (Al) und 23 bis 2 vH Magnesium (Mg). Die Legierung von 100 Al mit 10 Mg besitzt etwa die mechanischen Eigenschaften des gewalzten Zinks, die mit 15 Mg des Messings, die mit 20 Mg weicher Bronze und die mit 25 Mg gewöhnlicher Bronze. Festigkeitsangaben s. S. 517.

**Spiegelamalgam**: 1 Zinn, 1 Blei und 2 Wismut werden zusammengesmolzen (Schmelzpunkt bei 110°) und hierzu 4 Quecksilber (bis auf 100° vorgewärmt) zugefügt.

#### Leicht schmelzbare Legierungen.

**Roses Metall**: 1 Zinn, 1 Blei, 2 Wismut (Schmelzpunkt bei 110°).  
**Clichélegierung**: 2 Zinn, 2 Blei, 5 Wismut (Schmelzpunkt bei 105°).

**Wood-Metall**: 4 Zinn, 8 Blei, 15 Wismut, 4 Kadmium (Schmelzpunkt bei 70°).

**Lipowitz-Metall**: 4 Zinn, 8 Blei, 15 Wismut, 3 Kadmium (Schmelzpunkt bei 60°).

### III. NATÜRLICHE STEINE UND ERDEN.\*)

**Mineralogische Härteskala** (nach Mohs): 1. Talk, 2. Gips (oder Steinsalz), 3. Kalkspat, 4. Flussspat, 5. Apatit, 6. Feldspat, 7. Quarz, 8. Topas, 9. Korund (Schmirgel), 10. Diamant.

Ueber Druckfestigkeit und zulässige Druckspannung natürlicher Steine s. S. 518 u. 526. — Spezifische Gewichte s. S. 633 u. f.

1. **Granit** (Feldspat, Quarz und Glimmer); kristallin-körnig. Feldspat bestimmt die Farbe: gelbgrau, grau bis schwärzlich, fleischfarben, rot bis braun, auch grün, Quarz wesentlich die Härte.

2. **Syenit** (Feldspat und Hornblende); kristallin-körnig. Schwarz und weiß gesprenkelt. Der **Augitsyenit** („Labrador“) von Norwegen, besonders hart und polierbar.

3. **Diorit** (Feldspat und Hornblende, daneben Augit, Glimmer u. a.). Meist grün-weiß oder dunkelgrün: Grünstein.

4. **Diabas** (Feldspat mit Augit). Schwärzlich bis grün, daher auch Grünstein genannt.

5. **Gabbro** (Labrador oder Saufsurit mit Diallag). Dunkelgrau und grün. Geht, wie auch 3. und 4., vielfach als Granit.

6. **Serpentin** (wahrscheinlich durch Umwandlung aus Gabbro entstanden). Meist grün. Nicht haltbar im Freien. — Verwandt sind der dauerhafte nordische **Saponit** sowie der **Speckstein** und der immer mehr angewendete **Asbest** (Chrysotil).

7. **Porphyrgesteine** (dichte oder feinkörnige kristalline Grundmasse aus Feldspat und Quarz, in die deutliche Kristalle von Feldspat, zuweilen von Quarz, Hornblende, Augit usw. eingesprengt sind). Hauptsächlich: **Felsitporphyr**, rötlichbraun, gelblich, grau, grünlich oder bläulich und **Melaphyr**, meist schwärzlich von Augit.

8. **Trachytgesteine** (dichte, häufig poröse Grundmasse von Feldspat, wesentlich Sanidin, mit Einsprengungen von Hornblendekristallen, schwarzem Glimmer, Magnetisen). Grau. Dazu gehörend: **Bimsstein**, **Obsidian**, **Phonolit** usw.

9. **Augitgesteine**. Darunter: **Basalt**, erstarrter Ausfluß aus Vulkanen (scheinbar gleichartiges Gestein aus Augit, Feldspat, Olivin, Magnetisen u. a.), dunkelgrau bis schwarz, oft in prismatischen Säulen: **Säulenbasalt**, der dauerbarste und druckfesteste Baustein, für Straßenaufbau, Ufer- und Stützmauern. **Basaltlava**, vielfach poriges Gestein, in Farbe und Härte sehr verschieden. Für Treppen, Sockel, als Pflaster- und Mühlstein. **Anamesit** und **Dolerit** sind fein- bis grobkörnige Basalte.

10. **Gneis** (schiefrige Ausbildung des Granites). Mehr als Granit der Verwitterung ausgesetzt, besonders der feldspat- und glimmerreiche.

\*) Näheres s. Hugo Koch, Die natürlichen Bausteine Deutschlands; Berlin 1892, Ernst Toeche. O. Herrmann, Steinbruchindustrie und -geologie; Berlin 1899, Borntraeger. E. Nandelstaedt, Die Werk- und Pflastersteine Westdeutschlands; Hannover 1910, Max Jänecke. Ferner: E. Glinzer, Lehrbuch der Baustoffkunde, 4. Aufl.; Leipzig 1910, L. Degener. H. Seipp, Die Wetterbeständigkeit der natürlichen Bausteine und die Wetterbeständigkeitsproben, mit besonderer Berücksichtigung der Dachschiefer; Jena 1900, H. Costenoble. H. Seipp, Die abgekürzte Wetterbeständigkeitsprobe; Frankfurt a. M. 1905, Heinrich Keller. J. Hirschwald, Prüfung der natürlichen Bausteine auf ihre Wetterbeständigkeit; Berlin 1908, Ernst & Sohn.

11. **Quarzit** (reiner oder nahezu reiner Quarz). Kristallin bis glasartig. Löcherig zu Mühlsteinen. Zur Glasfabrikation. Als Stein- schlag oder als Kies zum Strafsenbau, zur Bereitung von Beton usw. Dazu gehörig: **Feuerstein**, **Jaspis** usw.

12. **Glimmerschiefer**. Zwischen stark glänzenden Lagen von Glimmer grauer Quarz. Zu Dachplatten sowie als Gestellstein.

13. **Urtonschiefer** oder **Phyllit**. Dunkel oder grünlich, feinkörnig mit seidenglänzender Fläche. Vielfach als Dachschiefer.

14. **Tonschiefer** (erhärteter Ton [s. S. 701] und Quarz, oft mit Glimmerblättchen). Bläulichgrau bis schwärzlich, auch rot; fein spaltbar, daher zur Dachdeckung geeignet. Schädliche Beimengungen: Schwefel- kies, Kohle, kohlenaurer Kalk. Beste deutsche Dachschiefer von Lehesten (Meiningen) und andere Thüringer Schiefer. Die überall besten sind die englischen blauen und roten.

15. **Kalkstein** (kohlenaurer Kalk). Wenn polierbar, heißt er **Marmor**. Farbe nach der Reinheit oder den zufälligen Beimengungen von Eisen- oxyd, Kupferoxyd usw. sehr verschieden: weiß bis grau und schwarz, gelb, rot, braun, bald einfarbig, bald gefleckt, geädert, geflammt usw. Nach Austreibung der Kohlensäure durch bedeutende Hitze bleibt Aetzkalk zurück. **Kristalliner Kalk**, durchscheinend: Edler Marmor (Griechenland, Carrara, Tirol, Schlesien, Norwegen, neuerdings Deutsch- Südwestafrika). **Dichter Kalk**, oft mit Sand und Ton vermengt; bildet sich noch heute als Tropfstein und Kalksinter. Darunter: **Uebergangs- kalk** (Grauwackenkalk). Weiß, grau, gelb, rot usw. Oft hohle oder tonige Stellen, die sich leicht austreten. **Kohlenskalk**, meist dunkelgrau bis schwarz; hierzu gehört der „belgische Granit“, ein vortrefflicher Baustein. **Zechstein**, tonhaltig und bituminös, dunkelgrau. **Muschel- kalk**, gelblich und bläulich grau bis schwärzlich, auch rötlich. **Oolith- kalk** oder **Rogenstein**, aus rundlichen Körnern bestehend, grau bis rotbraun, oft sehr fest, zu Uferbauten. **Jurakalk**, grau, gelblich oder rötlichweiß. **Alpenkalk**, gelblich, rötlich, braun usw.; am bekanntesten der Untersberger Marmor. **Kreide**, weißer, erdiger, schreibender Kalk aus mikroskopischen Tiergehäusen bestehend. Dazu gehörig der oft sehr feste **Plänerkalk**. **Grobkalk**, sandiger, im frischen Zustande weicher, an der Luft erhärtender, mit zahllosen Schalthieren angefüllter Kalkstein; weißlich bis gelb (Pariser Kalkstein). **Kieselkalk**, lichtgrau und bräunlich, mit viel Kieselerde gemengt: u. a. der vortreffliche „bayerische Granitmarmor“. Zu den **Kalkbreccien** (s. 21) gehört der Brokatelmarmor mit kleineren Bruchstücken; der Lumachelmarmor, außerdem mit Muschelversteinerungen.

16. **Mergel**. Verschieden gefärbte, dichte, erdige oder schiefrige Gesteine aus kohlenaurer Kalkmasse, verbunden mit Ton und Sand. Je nach dem Vorherrschen: Kalk- oder Tonmergel; mit Kieselerde: kieseliger Mergel; mit Bitterkalk: dolomitischer Mergel usw. Manche Mergelarten sind vorzüglich zur Zementfabrikation geeignet.

17. **Dolomit** (kohlenaurer Kalk und kohlenaurer Magnesia). Weiß- lich, gelb, grau bis braun. Kristallin, dicht, oolithisch. Aus guten Brüchen ein harter, höchst dauerhafter Baustein, vornehmlich zum Sockelbau.

18. **Gips** ist wasserhaltiger schwefelsaurer Kalk. Im allgemeinen weiß, gelblich bis rötlich, grau bis schwärzlich, oft gefleckt, geadert, wolkig usw. Darunter: **Spätiger Gips** oder **Marienglas**, wasserhell, kristallin großblättrig, ungemein leicht spaltbar. **Feinkörniger Gips** (oder **Alabaster**), weißgelblich und grünlich, auch grau; geadert, geflammt usw.; oft stark durchscheinend und polierbar. **Fasergips**, mit parallelfaserigem Gefüge, weiß, gelb, grau, rot. **Dichter Gips**, schneeweiß bis grau, zum Brennen benutzt. Der Gips kommt gewöhnlich in Begleitung von Ton, Steinsalz vor. (S. auch S. 711.) — Wasserfreier schwefelsaurer Kalk bildet den weit härteren, oft wie Marmor, aber nur innen verwendbaren **Anhydrit**.

19. **Sandstein.** Quarztrümmer (Sandkörner) durch ein kieseliges oder kalkiges oder (meistens) ein toniges Bindemittel zu mehr oder weniger festem Gestein verbunden. Weiß, grau, grünlich, bräunlich, gelb bis rot. Führt oft Kalkspat, Glimmerblättchen, Brauneisenerz, Einschlüsse von rotem und grünem Ton usw. mit sich. Verderblich wirkt Schwefelkies, ungünstig auch Glimmerreichtum. Darunter: **Grauwacke**, gewöhnlich dunkelgrau; besonders hart, daher zu Pflasterungen benutzt. **Kohlensandstein**, meist hellgrau mit tonigem, glimmerhaltigem Bindemittel und oft mit Kohlenadern (Ruhr-Sandstein). **Buntsandstein**, vorherrschend rot, mit tonigem, kieseligem, eisenschüssigem Bindemittel; enthält oft Tongallen (d. s. eingeschlossene Tonbrocken); sehr verbreitet. **Keupersandstein**, meist gelb, mit tonigem und mergeligem Bindemittel. **Wäldersandstein**; hier besonders die Wesersandsteine wertvoll, wozu der kieselige, für den besten gehaltene **Obernkirchener Sandstein**\*) gehört; grau und gelblichgrau, feinkörnig. **Quadersandstein**, mehr oder weniger tonig, fein- und grobkörnig, meist weiß und gelblich (sächsische Sandsteine). **Hilssandstein**, weißlich oder gelblich. **Nummuliten- oder Molassesandstein.** Letzterer enthält ein toniges, stark kalkhaltiges Bindemittel. Grau, grünlich und gelblich: zweifelhaftes Material (schweizer Sandsteine).

20. **Konglomerate.** Bestehen aus abgerundeten Geschieben der mannigfaltigsten Mineralien, durch ein Bindemittel verkittet; z. B. **Nagelfluh**, die Gerölle und Geschiebe der in der Nähe befindlichen Gebirgsarten enthält; mergeliges Bindemittel (u. a. Rigi, Salzburg).

21. **Breccien.** Scharfkantige, eckige Bruchstücke durch Bindemittel verkittet. Besonders häufig bei Kalkstein (u. a. Höttinger Breccie bei Innsbruck), oft schön polierbar.

22. **Tuff.** Ein mehr oder minder lockeres, poröses Gestein. Man unterscheidet vulkanische und Kalktuffe. Erstere sind verhärtete, lose Auswurfstoffe von Vulkanen, letztere Sinterbildungen, die sich aus kalkhaltigen Wässern bilden. Darunter: **Porphyrtuff**, rot (Rochlitz in Sachsen). **Bimssteintuff**, aus Bimssteinschutt bestehend. Weiß, gelb oder grau. Enthält Brocken von Bimsstein und Trachyt, Körner von Augit und Leucit, Sanidinkristalle usw. Feinerdig und frisch weich. (Brohler Duckstein; Ettringer Tuffstein.) Dazu die **Puzzolanerde**, die **Santorinerde**, der **Trafs**. **Basalttuff** aus verkittetem Basalt- oder Doleritschutt. Schmutzig grau bis schwärzlich. Enthält Augit, Olivin,

\*) Bewahrung am Kölner Dom vgl. Z. d. B. 1908 S. 473.

Hornblende, Glimmer usw. **Leucittuff**, gelblichgrau. Enthält viele meist verwitterte Leucitkörner, Augit, Glimmer, Sanidin. — **Kalktuff** (Travertin), gelblichweiß oder grau bis bräunlich. Mehr oder minder dicht, oft porös, blasig und röhrig; oft als „Grottenstein“ verwendet.

23. **Erratische Blöcke** oder **Findlinge**, sind durch Gletscher oder Eisberge fortgeführt worden und Fremdlinge an ihrer Fundstätte. Am häufigsten Granit, Gneis, Syenit, Diorit, Porphyr usw.

24. **Gerölle** und **Geschiebe**, Trümmer von Gesteinen, durch Frost abgebröckelt und von stark fließendem Wasser aus dem Gebirge fortgeführt. Kalkgerölle zum Brennen, Kiesgerölle zum Wegebau.

25. **Kies** und **Grant**, sowie **Sand**, kleine bis aller kleinste Bruchstücke quarziger Steine, oft mit Kalk, Mergel und Ton verunreinigt, durch Waschen davon zu befreien. Fluß- und Grubensand; letzterer gewöhnlich schärfer, aber häufig unreiner als Flußsand.

26. **Kieselgur**, Infusorienerde, aus fossilen Panzern mikroskopischer Tierchen bestehend. Weißlich und grau. Zu Isoliermasse, Kitt, als Poliermittel, zur Dynamitfabrikation, zur Herstellung von Wasser-glas usw. verwendet (u. a. Lüneburger Heide, Untergrund von Berlin).

27. **Ton**, im völlig reinen Zustande: wasserhaltige kiesel-säure Ton-erde; sonst aber ein Gemenge dieser mit Sand (grob und sehr fein), Kalkstein und Eisenoxyd, durch Verwitterung feldspathaltiger Gestein-massen entstanden und im Wasser abgelagert. Grau, grün, blau, rot, braun oder gelb. Darunter: **Kaolin**, der reinste Ton, zur Herstellung des Porzellans benutzt. Die andern **plastischen Tone**, dazu der Pfeifenton, die feuerfesten und die Töpfertone. Die **Ziegelerde**, dazu Tonmergel, Lehm und Löß, der sich heute noch fortwährend absetzt.

Ton schwindet beim Trocknen und nachherigen Brennen, ohne die Form im ganzen zu verlieren, und wird dabei äußerst hart. Anwendung zum Porzellan und zu allen Töpferwaren, sowie zu den gebrannten Steinen (s. S. 706 u. f.). Trockener Ton, besonders Bolus, saugt auch Fett begierig ein.

28. **Dammerde** (Acker- und Gartenerde), durch Verwitterung von Gestein, unter Beimengung von verwesenden Pflanzen- und Tierstoffen, entstanden; führt stets NaCl (Kochsalz) mit sich und gibt hierdurch, sowie besonders durch Bildung von Salpetersäure, bei Berührung mit kalkhaltigem Mauerwerke zum Mauerfraß Anlaß und ist daher durch trockenen Schutt, durch eine Teer-, Lehm- oder Zementschicht usw. von Holz oder Mauerwerk getrennt zu halten.

## IV. KÜNSTLICHE STEINE.

### a. Ungebrannte Steine.

1. **Lehmsteine** (Lehmpatzen, Luftziegel) werden aus nassem Lehm geformt und an der Luft getrocknet; zum Vermauern dient Lehm-mörtel (Lehm mit Wasser). Format ist wechselnd; Festigkeit gering. Lehmsteine werden zum Ausmauern von Fachwerk und zu Innenwänden

landwirtschaftlicher Gebäude benutzt und geben hierbei billige, trockene und warme Wände.

Aus Lehm, der mit geschnittenem Stroh (oder mit Flachs- oder Hanfscheben) gemengt ist, werden zwischen Holzverschalungen die sogen. Lehm pisé-Wände hergestellt. Außenwände aus Lehmsteinen oder Lehm sind durch gute Isolierung und vorspringende Dächer vor Feuchtigkeit zu schützen. Lehmschlag als Füllstoff für die Zwischendecken; wenn feucht bleibend, eine Gefahr für das Holz.

**2. Kalksandziegel.** 1 R.-T. dicke Kalkmilch wird mit 6 R.-T. Sand (grob und lehmfrei) sorgfältig gemischt und aus dieser Mischung Ziegel gewöhnlichen Formats geformt. Nach 24 Stunden werden die angetrockneten Ziegel aufeinander gesetzt; Erhärtung an der Luft in etwa 4 Wochen; durch Eintauchen der Steine in dünne Wasserglaslösung (nach dem ersten Antrocknen) wird schnellere und größere Erhärtung erzielt. Billiger und guter Ersatz gebrannter Ziegel für landwirtschaftliche Gebäude in Gegenden, wo Ziegelerde fehlt und guter Sand zu haben ist (z. B. auf den Nordseeinseln); frostbeständig und ziemlich fest.

Die vorstehende Mischung (u. Umst. mit der 1,5- bis 2-mal größeren Sandmenge, auch mit Zement-Zusatz), zwischen Holzverschalungen in etwa 10 cm hohen Lagen verbandartig eingestampft, liefert die sogen. Kalksand pisé-Wände.

**3. Kunstsandstein,** wozu auch der Hydrosandstein gehört, wird nach verschiedenen Verfahren aus Sand und Kies mit Kalk u. a. hergestellt. Benutzt als billiger Ersatz des natürlichen Sandsteins, dessen Farbe und Korn gut nachgeahmt ist; auch gut zu bearbeiten, für Gebäudefronten, Treppenstufen, zu Bauornamenten usw. Man prüfe jedoch sein Wasseraufsaugungsvermögen! Festigkeitsangaben s. S. 519. — Ueber die beträchtlich festeren und härteren mittels Portlandzement hergestellten Steine siehe bei Beton.

**4. Kalksandstein (Hartstein)\*** ist „ein aus einer innigen Mischung von Kalk und Sand geprefster und unter Dampfdruck (7 bis 9 at) gehärteter Mauerstein mit einer durchschnittlichen Mindestdruckfestigkeit von 140 kg/qcm“. Das nur 5 bis 8 vH Fettkalk haltende Gemenge wird in feuchtem Zustande in Mauersteinform gebracht und darauf im Härtekessel in 8 bis 10 st zu sofort brauchbaren Steinen umgewandelt: Bildung von wasserhaltigem Kalksilikat. In Korn und Härte sandsteinartig, weiß, aber auch gefärbt, von sehr regelmässiger Form;  $K = 140$  bis  $240$  kg/qcm. Vorzüglicher Ersatz für gewöhnliche gute Ziegelsteine, da er auch in anderen wesentlichen Eigenschaften (Wasseraufnahme, Frostbeständigkeit, Haftvermögen am Mörtel, Widerstand gegen Feuer) ihnen nachgewiesenermaßen mindestens ebenbürtig ist; korrekte Herstellung vorausgesetzt (Vorsicht!). Auch schon als Verblendstein und im Tiefbau mit Erfolg verwendet. Preis im allgemeinen geringer als für gleichwertige Ziegelsteine.

**5. Terranova** („Terranova“-Industrie in Freihung, Oberpfalz) ist ein dekorativ wirkendes Mörtelmaterial, das mit Wasser ähnlich langsam bindendem Zement abbindet und einen naturechten, wetterfesten, harten Putz gibt, dabei luftdurchlässig und durchaus volumbeständig ist. In

\*) H. Burchartz, Die Prüfung und die Eigenschaften der Kalksandsteine, Berlin 1908. — Verein der Kalksandsteinfabriken, Der Kalksandstein, seine Herstellung und Eigenschaften, 2. Aufl. Berlin 1909.

mehreren Farbtönen geliefert, gestattet es mannigfaltigste Oberflächenbehandlung. — Ähnlich das **Lithin** von H. Knab in Steinfels, Bayern, der **Felsitporphyr** von der „Porphyr“-Putz-Industrie in Freihung, sowie der **Terrasit** von der Terrasit-G. m. b. H., Berlin-Halensee.

6. **Hellolith** (von Ad. Möller in Altona) ist ein harter, glänzender, waschbarer, fugenloser Wand- und Deckenputz, der auch von Desinfektionsmitteln nicht angegriffen wird. Amtlich als hygienisch bester Wandputz bezeichnet. Weiss, farbig sowie marmorartig. Preis etwa 7  $\mathcal{M}$ /qm.

7. **Rheinischer Schwemmstein** (Bimssandstein).\*) Der vulkanische Bimssand des Neuwieder Beckens wird zu 9 R.-T. mit 1 R.-T. hydraulischer Kalkmilch gründlich durchgemengt und zu Steinen gestrichen, die 3 bis 4 Monate an der Luft getrocknet werden. Raumgew. 0,7 bis 0,85, Druckfestigkeit  $K = 15$  bis 29 kg/qcm, zulässige Druckspannung für das Mauerwerk  $k = 3$  kg/qcm. Verlangen als Bindemittel Kalkmörtel oder besser verlängerten Zementmörtel und eignen sich zu Fachwerkbauten, zum Aufbau von Stockwerken auf bereits bestehende Gebäude, zu Zwischenwänden und Deckenkappen zwischen eisernen I-Trägern, sind aber auch zur Herstellung massiver belasteter Außenmauern zugelassen. Die damit ausgeführten Bauteile sind leicht, trocken, feuer-, schwamm- und schallsicher und schützen gegen Kälte und Wärme. Auf der porösen Oberfläche haftet jeder Verputz leicht und dauerhaft. Die Schwemmsteine sind zu Pafsstücken zersägbar und ermöglichen wegen ihrer Leichtigkeit schwache Fundamente und den Versand auf weite Entfernungen. Der Versand beträgt jetzt jährlich 300 bis 350 Millionen Steine. Die gangbarsten Grölsen, von denen der Stein 25 . 12 . 9,5 als Normalstein bezeichnet wird, sind in folgender Tafel gegeben.

Länge	Breite	Stärke	Gewicht/Stück	Lademenge für 10000 kg Je nach der Witterung	Ungef. Preis für 1000 Stück
cm	cm	cm	kg	Stück	$\mathcal{M}$
25	12	6,5	1,35 bis 1,85	6500 bis 7200	20 bis 21
25	12	7,5	1,65 „ 2,30	5500 „ 6000	20 „ 21
25	12	9,5	2,05 „ 2,85	4400 „ 5000	21 „ 22

Verkauf durch das **Rheinische Schwemmstein-Syndikat** in Neuwied.

Losser Bimssand ist sehr leicht (spez. Gew. = 0,375), luftdurchlässig und ein schlechter Wärmeleiter (die Wärmeleitfähigkeit beträgt bei ihm nur 0,066 m. qm. St. °C); er dient als „Isolierbims“ zu Fußboden-Unterlagen, zu Ausfüllungen zwischen Verschaltungen und auf Deckengewölben, als Schutz gegen Frost bei Wasserleitungen, zum Ausfüllen der Isolierschichten in Eis- und Kühlkellern usw.

Die von H. Schneider in Neuwied (Rhein) aus Bimssand mittels Zement, Kieselerde und Schill hergestellten Isolierbimssteine (mit  $\lambda = 0,084$ ) eignen sich zu isolierenden Bodenbelägen in Kühlhallen und Eishäusern, zu Dampfkessel-Einmauerungen usw. Raumgew. i. M. 0,68;  $K = 17$  kg/qcm. — Die zwischen I-Trägern hergestellten Isolierbimsdecken (D. R. P. 73494) aus Isolierbims und Bimsbeton (9 R.-T. Bimssand mit 1 R.-T. Zement) sind flach und haben vor den vorstehend angegebenen gewölbten Schwemmsteindecken noch verschiedene Vorzüge; ihr Gewicht beträgt (einschl. der eisernen Träger) bei 1 m Trägerteilung f. d. qm 6 bis 7 kg auf je 1 cm der Deckenhöhe, dabei die gleichmäßig verteilte gesamte Bruchbelastung etwa 3000 kg/qm.

\*) Vgl. Anton Hambloch, Der rheinische Schwemmstein. Stuttgart 1903. — Der Schwemmstein und seine Verwendung zu Banzwecken; zu beziehen vom Syndikat in Neuwied.

**8. Korkstein**, von Grünzweig & Hartmann in Ludwigshafen a. Rh., Dr. Friedrich Nafzger in Hamburg, Rheinhold & Co. in Hannover, A. Haacke & Co. in Celle u. a. Spez. Gew. s. S. 635; Festigkeitsangaben s. S. 519. Die gewöhnlichen bestehen aus Korkstückchen, die mit einer wesentlich tonigen Masse verkittet sind; sie haben sehr geringes Gewicht, lassen sich in beliebigen Größen herstellen, zersägen, zerschneiden und mit Nägeln befestigen. Ungef. Preis des Normalziegels (25.12.6,5 cm) für 100 Stück 10 *M.* Gute Eigenschaften und vielfache Verwendungszwecke wie vorstehend bei Schwemmsteinen; jedoch sind Nässe und Temperaturen über 350° zu vermeiden. Als Bindemittel zum Vermauern dient meistens Gips, zum Verputzen empfiehlt sich Kalkmörtel und Gips zu gleichen Teilen oder verlängerter Zementmörtel.

Schwarze Korksteine, mit Steinkohlenpech als Bindemittel, fester, etwas schwerer und etwa 40 vH teurer als die gewöhnlichen, lassen sich auch in feuchter Umgebung verwenden; mit Zement- oder Asphaltmörtel zu vermauern. Sind auch, einerseits mit Goudron überzogen, besonders für Bekleidung kalter und feuchter Wände zu empfehlen, sowie für Kälteschutz (Kühlanlagen). Für schwarzen Korkstein ist die Wärmeleitzahl  $\lambda = 0,165$ , für gewöhnlichen  $\lambda = 0,080$  m·qm·St.°C. Nach amtlichen Brennproben sind beide als feuerschützende Ummantelung eiserner Säulen und Träger geeignet.

Von beiden Arten hat man 1 bis 12 cm starke Platten in Größe von 100.25 cm bis 100.50 cm. Solche mit Magnesiazementüberzug ( $K = 15$  kg/qcm) dienen als vorzügliche Unterlage von Linoleum, nehmen keinen Eindruck an. Dem letzteren Zweck dient auch das **Korkment** von Maximiliansau, welches, in Stärke von 8 mm mit Linoleum bedeckt, fast den allervollkommensten Schutz gegen kalten Fußboden abgibt.

**Korkstein** in halbzylindrische Formen gepreßt, ist ein vorzügliches Wärmeschutzmittel für Dampfleitungen. Noch wirksamer sind hierzu die **gebrannten Kieselgurplatten** und **-formstücke**, aus einem mit Korkstücken gemengten Gur-Ton-Gemisch naß geformt und scharf gebrannt, von außerordentlicher Porosität und Leichtigkeit: so der **Diatomit** von Grünzweig & Hartmann, Raumgew. 0,3.

**Gepreßte Korkplatten** der Delmenhorster Korkwerke in Größe von 50.50 cm und mehr, 10 bis 60 mm stark, in zwei Härten geliefert, dienen höchst wirksam zur Schall-, Wärme- und Trockenisolierung als Unterlage von Maschinen, Trägern, Säulen, Schienen, Belag von Schiffswänden, sowie zu Fußboden und Wand. Preise: 10 bis 30 mm stark 2,50 bis 4,50 *M./qm.* Ähnlich die **Rein-Korkplatten** der Korkwerke Salmünster (Hessen-Nassau) in 5 Qualitäten und in Tafeln 100.50 cm und 50.50 cm geliefert, die imprägniert auch zur Ummantelung von Eisen dienen. Preise der Stärken 6 bis 60 mm Qual. B 1,70 bis 9,50 *M./qm.*

**Linoleum** aus Korkmehl und verharztem Leinöl, einseitig mittels Jute-Gewebe und Lackierung verstärkt, dient zum Belegen von Treppen und Fußböden und zu Wandbekleidungen.

Handelsübliche Sorten: Einfarbig in verschiedenen Tönungen. Bedruckt: die bald unansehnliche Druckware. Mit durchgehender Musterung: die Inlaidware, wozu die beliebten Granitmuster u. a.

Handelsübliche Mafse: Länge rd. 25 m, Breite 2 m, Dicke 1,8, 2,2, 3, 3,6, 4, 4,6, 7 mm, bei Inlaid Dicke nur 2,2 und 3,3 mm.

Gewicht: durchschnittlich 1,1 kg/qm für 1 mm Dicke.

Haupteigenschaften: Wasserdicht, warm, dauerhaft, schalldämpfend, u. zw. umso mehr, je größeres Korkmehl verwendet wird (Korklinoleum von Maximiliansau 4 und 7 mm stark). Desto weniger geschlossen und eben ist aber auch die Oberfläche.

Linoleum bewährt sich auf Holzboden sowie massiven Decken; wichtig ist, daß der Fußboden vor dem Verlegen des Linoleums gut geglättet und gänzlich trocken, auch

ganz frei von hygroskopischen und von Oelsäure angreifenden Stoffen ist.\*) Die Befestigung bei Holz hin und wieder durch Anstiften mit kopflosen Nägeln, sonst durch Aufkleben mit Harzkitt, 1 kg Kitt auf 4 qm (Kleister ist durchaus zu verwerfen).

Neu ist das von der Schlüsselmarke Delmenhorst gelieferte *Muralin*, ein linoleum-ähnlicher, sehr haltbarer, etwas rauher Wandbelag in guten farbigen Mustern.

Deutsche Fabriken. Delmenhorst bei Bremen; „Hansa“, „Anker“ und „Schlüssel“; Bietigheim bei Stuttgart „Germania“; Rixdorf bei Berlin; Bedburg, Rheinland; Maximilianau, Rheinpfalz.

9. **Eternit** von der Deutschen Eternitgesellschaft in Hamburg ist Asbestzementschiefer. Wasserundurchlässige Tafeln von der Härte mancher natürlichen Schiefer, leichter und fester als diese (Raumgew. 2,1 und  $K_b = 689$  kg/qcm), gut wärmeisolierend, als feuersicher bewährt, eignet sich außer zur Dacheindeckung auch für Fachwerkbau zu billigen, leicht zerlegbaren, gesunden Wohnstätten, besonders in den Tropen und in kalten Gegenden. Farben hellgrau, dunkelgrau und rot.

I. Dachschiefer, 3,5 mm stark, für alle Deckungsarten zugeschnitten, gestattet leichte Konstruktion, vermindert die Heizkosten.  
II. Tafeln zur Decken- und Wandverkleidung, Herstellung von Baracken, 122.122 und 244.122 cm groß und 4 bis 20 mm stark.  
III. Calmons Asbestholz aus Eternit mit Holzfurnier zu Tafelungen, Türen u. a., spart an Gewicht, Raum und auch an Kosten. Ähnlich der **Thümmeltschiefer** von den Thümmelwerken Nürnberg.

10. **Englische Schlackensteine** (Ironbricks). In Eisenformen gegossene, noch längere Zeit glühend erhaltene Hochofenschlacke bildet nach langsamer Abkühlung äußerst harte, schwere, wenig spröde Steine von brauner bis schwarzer Farbe; durch ein Muster rau gemacht, eignen sich diese Steine zur Pflasterung von Bürgersteigen, Höfen, Ställen usw. Ähnlich **deutsche Schlackensteine** (Mansfeldsche Kupferschiefer bauende Gewerkschaft zu Eisleben) von grauer Farbe und Pflasterstein-Format, für Radfahrwege, jetzt auch für ganze, leichter belastete Straßen bewährt.

11. **Kalk-Schlackensteine** (Georgs-Marien-Hütte in Osnabrück, Sophienhütte bei Wetzlar, Maximilianshütte i. Th., Hochofenwerk Lübeck u. v. a.). Hochofenschlacke wird in kaltes Wasser abgelassen, wodurch sie zu grobsandigem Pulver wird; alsdann mit gelöschtem Kalk gemengt, wird die Masse in Ziegelform geprefst. Die Steine erhärten an der Luft allmählich (bei Bildung von kiesel- und kohlenurem Kalk) und geben warme und dauerhafte, gut ventilierende Wände, sind vielfach als vollwertiger Ersatz für gebrannte Ziegelsteine zugelassen, oft noch wetterbeständiger als diese. Auch solche von hydraulischen Eigenschaften im Tiefbau, zu Wasserbehältern u. a.

12. Unter dem Namen „Steinholz“ lassen sich mehrere Fußbodenarten zusammenfassen, deren erster Vertreter der **Xylolith** (von Otto Sening & Co. in Potschappel bei Dresden) ist. Sägespäne (Korkmehl u. a.), wozu Infusorienerde, mit Magnesiakitt (s. S. 732) angerührt und unter hohem Drucke in Formen geprefst. Die Platten müssen auf völlig trockener Unterlage höchst sorgfältig (vgl. S. 731) verlegt werden. Xylolith ist ein schlechter Wärmeleiter, leichter zu bearbeiten als Stein, jedoch von höchst geringer Abnutzbarkeit, wirft

\*) S. den Ministerial-Erlaß vom 12. Oktober 1910 über die Verwendung von Linoleum als Fußbodenbelag, vgl. Z. d. B. 1910 S. 571.

sich nicht, ist schwamm- und feuersicher und dauerhaft gegen Nässe (nimmt nur bis 5 vH. Wasser auf). Spez. Gew. 1,56. Platten bis 1,5 qm groß und 10 bis 26 mm stark.

**Torgament** von Lehmann in Leipzig (auch Berliner Torgamentwerke, Berlin SW.), aus Sägemehl und Magnesiakitt nebst einem Füllmittel erst an Ort und Stelle ähnlich wie Zementestrich aufgetragen und geglättet, bildet fugenfreie, feuersichere, fußwarme und staubfreie Fußbodenbeläge, an der Oberfläche ziemlich wasserundurchlässig, etwas hygroskopisch.

Ähnlich sind viele andere, wie **Xylopal** von Kühl & Miethe in Hamburg, **Sanitas** von Heinze & Kroner in Erfurt, **Terralith** von Mahla in Nürnberg, **Pyrofugont** von Gebr. Schleicher in München, **Doloment** von Langguth & Platz in Berlin, **Holzarmor** und **Holzterrazzo** (beide von Hamburg). Hygienisch einwandfrei ist besonders der Oel-Xylopal, für den das Holzmehl vorher mit Oel getränkt wird. Ungef. Preis einschl. Verlegung bei 24 mm Stärke 7,50 M/qm. Der **Sklerolithzement** von K. Müller in Lüneburg mit Magnesiumsulfat (statt -chlorid) ist weniger hygroskopisch und dürfte sich in der feuchten Tropenluft besser bewähren. Der unter Zusatz von Asbest hergestellte **Mineralit** von den Asbestzementwerken in Hamburg ist gleichfalls empfehlenswert.

Haltbarkeit und Aussehen aller Steinholzfußböden ist von guter Pflege abhängig: Reinigung nur mit reinem warmem Wasser, Einreiben nach dem Trocknen mit Fußbodenöl, zuerst öfter, später alle Vierteljahre.

13. **Gipsdielen, Marmorzement, Stuckmarmor** u. a. s. unter Gips, S. 711.

14. **Kunststein, Terrazzo** u. a. s. unter Zement S. 709 u. f.

15. **Glasbausteine, Keramoplatten** u. a. s. unter Glas S. 724.

### b. Gebrannte Steine.

Der Rohstoff hierfür ist der feuchte Ton (Ziegelton, Ziegelerde Lehm) mit mehr oder weniger Sand (Staubsand und Grobsand), wozu noch Beimengungen von Eisenoxyd, Kalkstein, Schwefelkies, organischen Resten usw. kommen. Die Aufbereitung des Ziegelgutes durch Auswintern, Einsumpfen, Schlämmen usw. bezweckt Auflockerung und die Entfernung aller groben und schädlichen Einmengungen. Zu fette Ziegelerde wird durch Zumischen von Sand, Ziegelmehl, Sägespänen, Lohe (für feuerfeste Steine auch Schamottegrus, Serpentin u. a.) magerer gemacht; auch wird oft durch Mischung von fettem und magerem Lehm eine brauchbare Mischung erzielt.

Nachdem die Masse möglichst gleichmäßig gemacht ist (z. B. durch Tonschneider), erfolgt das Formen meist in nassem (auch wohl in „trockenem“, grubenfeuchtem) Zustande zum größten Teil in Maschinen (mit mechanischem oder Hand-Antrieb), welche dichtere, festere und regelrechtere Steine liefern als der Handstrich und auch zur Herstellung von Loch- und Formsteinen, Tonrohren usw. dienen können. Die Größe der Form muß jedenfalls auf das Schwinden des Ziegelgutes berechnet sein. Das Längen-Schwindmaß eines mittleren Tons ist 1:10 bis 1:7; das körperliche Schwindmaß ist annähernd dreimal so groß und u. Umst. durch Probefiren festzustellen. Ein Arbeiter

streicht in 10 st 3000 bis 4000 Ziegel; eine Ziegelmaschine von 20 und mehr PS formt aus nassem Lehm bis zu 30000, eine noch stärkere aus trockenem Lehm bis zu 40000 Ziegeln in 10 st.

Auf Gerüsten lufttrocken geworden, werden die Steine gebrannt. Der Feldbrand (in Meilern) liefert bei vielem Abfall unansehnliche, aber billige und für gewöhnliche Zwecke brauchbare Steine. Von Brennöfen ist in Deutschland der Ringofen von Hoffmann und Licht der vollkommenste, da er ununterbrochenen Betrieb bei möglichster Ausnutzung des Brennstoffes ermöglicht. Er liefert täglich, je nach GröÙe 4000 bis 20000 Steine bei einem Brennstoffverbrauch von 150 bis 200 kg Kohlen auf 1000 hartgebrannte Steine. Jahresproduktionen von mehreren Millionen Steinen sind jetzt nichts Seltenes. — Spez. Gew. der Ziegelsteine s. S. 636 (auch S. 639); Festigkeitsangaben, auch für das Ziegelmauerwerk, s. S. 519 und 520. — Ueber „die Ausblühungen des Mauerwerks, ihre Entstehung und Bekämpfung“ s. die Schrift von Dr. Mäckler, Berlin 1901.

**1. Gewöhnliche Mauersteine** (Hintermauerungssteine). **Normalformat** (ReichsmaÙ) = 25 . 12 . 6,5 cm usw. s. III. Bd., Hochbau. Außerdem noch in den Gebieten der unteren Elbe und der unteren Weser sowie in Schleswig-Holstein zwei **Kleinformat**: 22 . 10,5 . 5 cm (Hamburger oder Oldenburger Format) und 23 . 11 . 5,5 cm (Kieler Format).

Gut gebrannte Steine dürfen nicht abfärben, sollen höchstens bis 16 vH Wasser aufnehmen, hart sein und scharfkantigen Bruch zeigen, sowie beim Anschlagen mit dem Hammer hellen (nicht dumpfen oder klirrenden) Klang geben; nur solche Steine sind tragfähig und dauerhaft.

Poröse Vollsteine (Tuffziegel) für leichte Wände, Erker usw., werden aus Lehm, der zu einem Drittel bis zur Hälfte mit Brennstoff (Sägespänen, Braunkohle, Koksstaub, Lohe) gemischt ist, hergestellt; sie sind etwa halb so fest wie gewöhnliche Ziegel, besonders warmhaltend und leicht (1 Stein im Normalformat wiegt 2,25 bis 2,75 kg, 1 cbm hiervon wiegt 1130 bis 1380 kg).

Lochsteine, mit prismatischen oder zylindrischen Löchern, längs oder quer; Vorteile und Verwendung wie bei porösen Steinen, dabei aber gröÙere Festigkeit. Die Wandstärken des Lochsteines macht man am besten überall gleich, etwa 1,5 bis 2,5 cm. Dünnwandige Lochsteine wiegen etwa 1000, dickwandige etwa 1200 kg/cbm oder im Normalformat 2,0 bzw. 2,4 kg. Noch leichter und auch für manche Zwecke fest genug (z. B. für Erker, Balkone, massive Decken usw.) sind die porösen Lochsteine. So die Steine für die Förstersche Decke, Format 25 . 13 cm und für Spannweiten bis 1,7 m 10 cm hoch. Gewicht des Steins 3,2 kg. Preis für 1000 St. etwa 52 M.

**2. Klinker**, durchweg verglaste Ziegelsteine, aus kalkhaltigem Lehm (u. Umst. mit Quarzsand-Zusatz) hergestellt. GröÙe normal oder auch 21 . 10 . 5,5 cm; Form bei den Handstrichklinkern wenig regelmäßig; besser bei den Maschinenklinkern, die zum Verblenden dienen. Sollen gar kein Wasser aufnehmen, hellklingend und sehr hart sein; sind nur mit hydraulischem Mörtel zu vermauern. Verwendung zu Brücken- und Wasserbauten, Ausmauerung von Jauchegruben; in Gebäuden zu Träger-Auflagern und stark belasteten Pfeilern, zu Grundmauern und Trockenschichten; zu Pflasterungen: KlinkerstraÙen usw.

**3. Verblendsteine**, aus fetterem Ton sorgfältig hergestellt und von verschiedenen Farbtönen. Normalformat usw. s. III. Bd., Hochbau. Die Lagerflächen sind durch Rillen usw. rau gemacht. Die Verblender sind häufig gelocht. Durch Engoben (Ueberfangfarben, vor dem Brennen aufgetragener Tonschlamm) oder Glasuren (nochmaliges Brennen) erhalten sie Glanz, lebhaftere Farben und Schutz vor Verwitterung, jedoch letzteres nur, wenn die Ueberzüge frei von Sprüngen und Haarrissen sind. Zu verlangen sind ein durchaus gleichmäßiger Farbenton (ohne jede Auswitterung) und vollkommen scharfe Formen bei Abweichungen in den Abmessungen von höchstens  $\pm 0,5$  mm. Größere Steine im sogenannten **Klosterformat**: 28,5 . 13,5 . 8,5 cm werden jetzt für staatliche monumentale Backsteinbauten in Preußen hergestellt, wobei Handstrich oder der maschinell hergestellte Handstrich bevorzugt wird.

Hierzu sind zu rechnen die Profilsteine (zu Gesimsen, Fenster- und Türöffnungen usw.), die keilförmigen und nach der Krümmung des Gewölbes gestalteten Gewölbesteine; ferner die immer mehr zur Fassadenverblendung angewendeten glasierten Wandplatten, oft in Form von Spaltvierteln oder Spalthalben geliefert; die neuen, 11 mm dicken Fugenplättchen. Für Monumentalbau die Quaderverblender (Sichtfläche 15,6 . 25,6 cm) mit und ohne Verzahnung.

Am meisten verbreitet sind die schlesischen Verblender.

**4. Terrakotten** sind künstlerisch ausgebildete Ziegelwaren, aus sehr fettem, sich mit gleichmäßiger Farbe brennendem Ton, unter Anwendung von Gipsformen hergestellt. (Fabriken in Charlottenburg, Wien-berg bei Wien, Nymphenburg bei München, Muldenhütten i. S., Ullersdorf, Liegnitz, Lauban, Siegersdorf, Grube Ilse mit ihren „Eisenklinkern“, Villeroy & Boch in Mettlach und Merzig a. d. Saar.) — Hieran schließt sich die plattierten Ziegelwaren, die als Boden- und Wandbelag Verwendung finden; u. a. die farbig gemusterten Mettlacher Fliesen (jetzt auch von anderen Werken geliefert, wie Deutsch-Lissa i. Schl.; Vereinigte Mosaikplatten-A.-G. in Friedland i. M., Norddeutsche Steingutfabrik Grohn bei Bremen) aus fettem, leicht sinterndem Ton mit Beimengung von Quarzsand.

**5. Schamottesteine**, feuerfest, werden geformt aus feuerfestem Ton, der mit bereits gebranntem, zerstoßenem Ton (z. B. Kapselscherben) gemischt wird, langsam getrocknet und in Weißglut gebrannt. Der Hitze-grad, für den sie feuerfest sein sollen, wird mit den Segerschen Kegeln S. 391 bestimmt. Je nach dem Verwendungszwecke werden sie sehr dicht und hart, oder auch von lockerer körniger Beschaffenheit hergestellt. Vermauerung mit feuerfestem Mörtel (fetter Ton, trocken mit Schamottegrus gemischt); vortrefflich hierzu und billig sind Feuerzement und Klebesand, beide vom Westerwald (Tonzeche Rofsbach) oder von der Eifel (Industrie-Gesellschaft „Brohlthal“ in Köln); teurer der Pyrosin.

**6. Dachziegel**, entweder eben wie die Biberschwänze oder gekrümmt wie die Pfannen (S-Ziegel), First-, Grat- oder Hohlziegel. In mannigfaltigen Farben, auch grau „gedämpft“, engobiert oder glasiert; zum Schutze gegen Säuren usw. werden sie auch in heißen Gas-Teer getaucht. — Die neueren Falzziegel machen das Verstreichen der Fugen mit

Mörtel überflüssig; sie verhindern durch ihr falzartiges Ineinander-greifen das Eindringen von Regen und Schnee. Einfacher in Form und Herstellung sind die Strangfalzziegel. — Die mannigfachsten Formen und Färbungen für die verschiedenen Zwecke (Turm-, Giebelverzierungen) bieten u. a. Ludowici in Jockgrim (Pfalz), Sturm in Freiwalddau (Schlesien), die Möncheberger Gewerkschaft, Kassel.

7. **Ofenkacheln**, aus dem glasierten rechteckigen Blatt und der (inneren) im Viereck gebogenen, wulstförmigen Zarge bestehend, werden aus Ton von Hand mittels dieser Teile oder durch Maschinenarbeit (Pressen) gleich im ganzen hergestellt und zweimal gebrannt. Nach dem ersten Brennen wird die Außenfläche mit einer Glasurmasse überzogen.

8. **Tonrohre** für Flüssigkeits-Leitungen, selten und dann nur innen glasierte Muffenrohre von kreisförmigem (auch wohl elliptischem oder eiförmigem) Querschnitte, sind mit den zugehörigen Formstücken (Bogen, Abzweigen, Übergängen, Siphonen) in lichten Weiten von 5 bis 60 cm und darüber erhältlich. — Tonrohre von rechteckiger Form zu Rauchrohanlagen, Abluftröhren und Luftheizungskanälen; in Stücken mit 1 bis 4 Oefnungen von 70 bis 2350 qcm lichtigem Querschnitt. Andere Formen zu Krippen und Trögen, Schornsteinaufsätzen, Klosettbecken u. v. a.

## V. MÖRTEL, PUTZ, ZEMENT, BETON USW.

Nach den Definitionen, Dezember 1909 von den Handelskammern Berlin und Potsdam sowie den Ältesten der Kaufmannschaft zu Berlin aufgestellt, ist **Kalkmörtel** = Gemisch von gelöschtem Kalk und Sand; verlängertes **Zementmörtel** = Gem. wie eben mit Zementzusatz; **Gipsmörtel** = Gem. wie eben mit Gipszusatz; **Haarkalkmörtel** = Gem. wie eben mit Zusatz von Tierhaaren; **reiner Zementmörtel** = Gem. von Zement und Sand; **hydraulischer Mörtel** = sonstiger Mörtel, der unter Wasser abbindet; **Schamottemörtel** = Gem. von Schamottemehl mit feuerfestem Ton; **Lehmmörtel** = Gem. von Lehm und Wasser.

### a. Luftmörtel.

Luftmörtel wird für Mauern, die nur von Luft umgeben sind, benutzt.

1. **Lehmmörtel** aus genästem, magerem, mit Häcksel, Spreu usw. vermischtem Lehm bestehend, erhärtet durch einfaches Austrocknen, daher wenig fest und vom Wasser leicht auszuspülen. Nur für Innenwände und ganz geschützte Außenmauern sowie bei Feuerungsanlagen (Backöfen) anwendbar. Billigster, schnell trocknender, warm haltender Mörtel, auch Anstrich für Holz gegen Feuersgefahr.

Zu dem ziemlich harten und zugleich etwas elastischen **Lehmestrich** (Lehmschlag) für Tennen, Kegelbahnen usw. wird mit Hammerschlag versetzter und auch mit Blut getränkter Lehm gehörig gestampft.

2. **Kalkmörtel\*** („Mauerspeise“). Der zum Löschen bestimmte gebrannte Kalk wird aus möglichst von Ton und Sand freiem Kalkstein

\*) H. Burchartz, Lufikalke und Luftkalkmörtel. Berlin 1908.

durch starkes Glühen in den Kalköfen, jetzt vielfach im Ringofen (s. S. 707), hergestellt, wobei für rasche Abführung der entweichenden Kohlensäure gesorgt werden muß. Vor Wasser und Luft sorgfältig geschützt aufzubewahren (wozu auch die dichte Lagerung der Kalkstücke auf und unter einer rd. 15 cm starken Schicht Staubkalk dienen kann), da er sonst abstirbt. Dieser gebrannte oder Aetzkalk (Mindestgehalt an CaO soll 90 vH sein) wird mit weichem Wasser (am besten Regenwasser) gelöscht, entweder trocken zu Pulver (Staubkalk), wozu die aufgehäuften Kalkstücke mit Sand völlig überdeckt und dann überbraust oder auch in rohgeflochtenen Körben eine Zeitlang in Wasser getauch werden, oder aber meistens (beim Naßlöschen) zu Kalkbrei.

Hierzu bringt man den Kalk am besten zunächst mit dem gleichen Gewichte Wasser zum Zerfallen, wobei er gedeiht (d. h. seinen Rauminhalt bedeutend vergrößert), und setzt dann sogleich noch das doppelte Gewicht Wasser und mehr unter Umrühren zu. Bei zu wenig Wasser „verbrennt“ der Kalk, bei zu viel „ersäuft“ er. Totgebrannte Stücke sind u. a. durch zu hohe Glut beim Brennen von magerem Kalkstein entstanden. — Die entstehende Kalkmilch fließt in eine (nicht ausgemauerte) Erdgrube und geseht hier, unter Abrieselung von Unreinheiten und völliger Löschung aller Teilchen, zu dem Speckkalk, der vor seiner Verwendung eine rissige Oberfläche zeigen soll. Durch aufgestreuten Sand und sorgfältige Abdeckung läßt sich der so eingesumpfte Kalk lange gebrauchsfähig erhalten. Die Mörtelbereitung aus der frischen Kalkmilch im Kasten selbst ist zu verwerfen.

Man unterscheidet fetten („Weißkalk“) und mageren Kalk. Letzterer, weniger geschmeidig und mehr körnig (kurz), verträgt weniger Sandzusatz. Durch zu großen Gehalt an der magernden Magnesia wird er schlecht brauchbar zu Mörtel, so der aus dolomitischen Kalken gebrannte Magerkalk („Graukalk“).

Zur Herstellung des Mörtels wird mittelgrober, möglichst mit  $\frac{1}{3}$  Feinsand vermischter, von Lehm und organischen Resten möglichst freier Quarzsand mit so viel Kalkbrei versetzt, daß die Lufträume zwischen den Körnern ausgefüllt werden, mithin der Gesamtinhalt sich kaum vergrößert. An Wasser so viel, daß beim gehörigen Durcharbeiten der Mörtel gut von der Kelle läuft. Bei fettem Kalk nimmt man für Mauern über der Erde 1 R.-T. Kalk : 3 R.-T. Sand, woraus 3,2 R.-T. Mörtel entstehen; für Grundmauern 1 R.-T. Kalk : 4 R.-T. Sand. Bei magerem Kalk 1 R.-T. Kalk : 1 bis 2 R.-T. Sand. Mit dem Kalkgehalte wachsen die Erhärtungszeit und die Festigkeit, aber auch die Kosten. — Ersetzt man das Wasser beim Anmachen durch Kuhmilch, so erhält man den Milchalkmörtel von außerordentlicher Härte. — Das Mischen geschieht mit Vorteil in Mörtelmaschinen.

Bei Anwendung von Staubkalk zum Mörtel ist für 1 R.-T. Kalkbrei überall 1,5 R.-T. Staubkalk zu nehmen. Ein Zusatz von Wasserglas gibt dabei die größte Härte.

Erhärtung des Kalkmörtels. Sofort beginnt durch teilweises Verdunsten des Wassers das Abbinden. Erst nach beträchtlicher Verminderung des Wassergehaltes geht die eigentliche Erhärtung durch Aufnahme von Kohlensäure aus der Luft vor sich. Mit nicht

gehörig genästen Steinen hergestelltes Mauerwerk hat geringe Festigkeit. Durch künstliche Erhitzung rasch getrockneter Mörtel fällt auseinander. Für guten Kalkmörtel ist  $K = 40 \text{ kg/qcm}$ . Durch Frost wird der Kalkmörtel zerrissen, solange er noch nicht angezogen hat; die für die Verarbeitung polizeilich erlaubte Frostgrenze ist vielfach auf  $-2^{\circ}$  festgesetzt. Bei stärkerem Frost wendet man mit Erfolg Wasser und Steine in erwärmtem Zustand an oder setzt dem Wasser Soda (1 kg auf 12 l Wasser) zu.

Durch eine geringe Beimischung von Portlandzement wird die Erhärtung wesentlich beschleunigt; zugleich werden die Festigkeit und Härte hierdurch beträchtlich vergrößert. Ueber verlängerten Zementmörtel siehe S. 718.

Die Festigkeit des Kalkmörtels und des Mauerwerks in Kalkmörtel ist beträchtlich geringer als beim Zementmörtel. Namentlich wo eine Beanspruchung auf Zug oder Schub in Frage kommt, ist der Kalkmörtel besonders minderwertig und deshalb auszuschließen. Vgl. Dr. Michaëlis, Der Kalkmörtel. Z. d. B. 1908 S. 120.

Sparkalk ist mit Lehm vermischter Kalkmörtel; gibt wenig festes Mauerwerk, wohl nur bei ländlichen Bauten anzuwenden.

Als Mörtel für Werkstücke (Sandsteine u. a.) dient ein Gemisch von Staubkalk und Ziegelmehl oder auch Trafskalkmörtel siehe unten.

Der innere Wandputz wird aus Löschkalk, Gips und wenig Sand hergestellt. Das beschleunigte Austrocknen des Wandputzes mittels (auf gemauerte Unterlage aufzustellender) Kokskörbe, wobei die aufsteigende Kohlensäure wesentlich mitwirkt, liefert weniger feste und oft rissige Flächen; auch gefährden Kohlensäure und Kohlenoxyd die Bauarbeiter. Verbot des Arbeitens in solchen Räumen.

Stuccolustro (Glanzstück). Mit Marmorstaub gemischter Fettkalk wird auf rauhem Grundputz aufgetragen, marmorartig bemalt und nach dem Trocknen poliert.

**3. Gipsmörtel**, durch Anmachen von entwässertem und gepulvertem Mauerhips hergestellt. Bis auf  $200^{\circ}$  erhitzt, gibt der natürliche Gips (s. S. 700) leicht sein ganzes Kristallwasser (21 vH) ab und hat dann die Fähigkeit, mit Wasser angemacht, sich sehr rasch wieder damit zu verbinden und zu einer wenig harten, gegen Wasser nicht widerstandsfähigen Masse zu erstarren. Die weitere Erhitzung über  $200^{\circ}$  macht ihn totgebrannt, so daß er gar nicht mit Wasser abbindet. Wird er aber noch weiter bis  $400^{\circ}$  und mehr erhitzt, so wird er dichter und schwerer und erlangt hydraulische Eigenschaften, d. h. er bindet mit Wasser, wenn auch langsam, zu einer sehr harten, wasserfesten Masse ab.

Von den beiden, hiernach sehr verschiedenen Stoffen ist der erstere im gepulverten Zustande der **Stuck- oder Bildhauergips** (Schnellgips), welcher in der Regel, nur bis  $130^{\circ}$  gebrannt, noch 5 vH Wassergehalt hat, und dessen Anmachung mit Wasser deshalb erst in etwa 30 min völlig erstarrt, ohne sich dabei zu stark zu erwärmen. Da sich die Masse hierbei etwas ausdehnt, füllt sie Gußformen rasch und vollkommen aus (Herstellung der inneren Bauornamente in Leimformen). Völlig entwässert (siehe oben), bindet er zu rasch ab und ist „hitzig“, so daß die Leimformen zu schmelzen beginnen; auch treibt er dann nachträglich ebenso wie der zu wenig

(d. h. unter 120<sup>0</sup>) gebrannte Gips. Beträchtlich härter werden diese Arbeiten durch Beimischung von Leim oder Dextrin zum Wasser: **Hartstück.**

Die zweite Art, der **Estrich- oder Mauergips** (Gipskalk), verhält sich, wenn er in allen Teilen zur schwachen Rotglut gekommen ist, als Pulver mit Wasser angemacht, ähnlich wie langsam bindender Zement. Der steife Gipsteig, stundenlang noch weich bleibend, erhärtet erst nach mehreren Tagen vollständig, ist dann aber sehr hart, außerordentlich fest, dicht und wetterbeständig und treibt auch nicht.

Andere Anwendungen des Stuckgipses: **Decken- und Wandputz** aus Gips und Kalk bzw. Sand. **Gipsdielen**, u. a. die Mackschen nagelbaren mit Holzleisten (Fabrik in Ludwigsburg i. Württ.), die Sittigschen mit Kokosfasereinlage besonders fest und feuersicher, in verschiedenen Stärken bis 9 cm, sowie **Gipsbautafeln** zu leichten, rasch auszuführenden Wänden in Innenräumen, Decken usw. **Rabitz-Wände:** Mit Leimwasser verrührtes Gipspulver, mit Kalkmörtel gemischt, wird auf ein Drahtgeflecht oder auf Streckmetall aufgetragen. **Scagliola** aus Gipspulver und gepulvertem Gipsspat, mit Leimwasser angemacht. **Stuckmarmor** aus Gipspulver, Leimwasser und den Farbstoffen auf rauhem Grundputze. Ferner Alaungips, Marmorzement von der Walkenrieder Gipsfabrik usw. — An der Oberfläche erheblich gehärtet werden diese Gipsarbeiten durch das Kesslersche Gipsfluat (Hans Hauenschild, G. m. b. H., Berlin NW. 21, Dreyestr.).

Anwendungen des Estrichgipses: **Gipsmörtel**, u. a. in Paris zu allen Mauern über dem Erdgeschoße, wie auch zum äußeren Verputze benutzt, wird als steifer Brei ohne alle Beimengungen aufgetragen. Zu rascherem Trocknen und der Ersparnis halber setzt man oft  $\frac{1}{3}$  bis  $\frac{1}{2}$  Sand oder Ziegelmehl zu. Haftet vorzüglich an den Steinen und ist schließlicb härter als diese (Pyramiden; Ruinen bei Osterode, Südharz). **Gipsestrich**, aus grobgemahlenem, mit wenig Wasser zu gleichmäßsigem Brei verarbeiteter Gips auf eine vorher nafs gemachte Unterlage (Grobsand, geschlagener Lehm, Kohlenasche), ausgebreitet, nach 24 st geschlagen und geglättet, auch mit angewärmtem Leinöl getränkt, in 1 bis 2 Wochen beschreitbar, ist ein billiger, dauerhafter, für die Nagetiere unangreifbarer, feuer- und wassersicherer Fußboden für Vorratskammern, Kornspeicher, Flure, Trockenböden usw. Gipsestrich, nach vollkommener Austrocknung mit Linoleum (s. S. 704) belegt, gibt einen vortrefflichen Fußboden, aber nur auf massiven Decken. **Gipsbeton** zu Kunststeinen und Gufsmauerwerk, wie Zementbeton hergestellt, gibt sehr feste und harte Quadern und, die Fernhaltung der Erdfeuchtigkeit vorausgesetzt, höchst trockene Wände, deren Widerstandsfähigkeit längjährig erprobt ist.

## **b. Wassermörtel (hydraulischer oder Zementmörtel).**

Die Stoffe, die zur Herstellung solcher Mörtel dienen, sind mannigfaltiger Art, jedoch sind bei allen Ton und Kalk die Grundbestandteile.

**1. Puzzolane**, natürliche oder künstliche, durch Glühen aufgeschlossene Tonerdesilikate, die dem Löschkalke zugemischt, diesem

die Eigenschaft verleihen, im Wasser zu erhärten, also **hydraulische Zuschläge**.

α. **Natürliche Puzzolane: Puzzolanerde** (Italien, Frankreich), **Santorinerde** (Griechenland). Der **Trafs\*** (vulkanischer Tuffstein von der Eifel), altberühmtes vortreffliches Material, wird in Stücken und in Mehlform gehandelt. Am besten in Stücken zu beziehen, die dann fein gemahlen und dem Kalke zugemischt werden. Preis (1905) gemahlen  $M$  110 bis 140/10 000 kg (= 10 cbm).

**Trafsmörtel** ist vorzugsweise hydraulisch (Wasserbauten in Holland) und durch Raumbeständigkeit, Elastizität und Wasserdichtigkeit (daher zu Talsperren) besonders ausgezeichnet, wird jedoch, wo Trafs billig ist, auch mit Vorteil als Luftmörtel benutzt (Cölner Dom). 1 R.-T. Trafs mit 1 R.-T. nassem Kalkbrei und bis 2 R.-T. Sand ohne Wasser gibt vollen Trafsmörtel für wasserdichte Bauten; zu Talsperren  $1\frac{1}{2}$  Tr.: 1 K.:  $1\frac{3}{4}$  S. Die Mischungen: 1 R.-T. Trafs, 1 R.-T. Kalkbrei, 2 R.-T. Sand bis  $1\frac{1}{2}$  R.-T. Trafs, 2 R.-T. Kalkbrei, 3 bis 5 R.-T. Sand geben verlängerten Trafsmörtel für Bauten über Wasser.\*\*)

Ueber Trafsbeton siehe unten bei Beton.

β. **Künstliche Puzzolane: gebrannter Ton** jeder Art, in Mehlform, also u. a. Ziegmehl. Gebraucht wird z. B. ein Mörtel aus 3 R.-T. Kalkbrei, 2 R.-T. Ziegmehl und 3 R.-T. Sand. — Wassergekörnte Hochofenschlacke von geeigneter Zusammensetzung (50 bis 60 vH  $SiO_2$  und 15 bis 20 vH  $Al_2C_3$ ) mit Kalkbrei gemengt, bindet langsam ab. Daraus hergestellte Schlackensteine (s. oben auf S. 705) sind stark hydraulisch. — Günstig zusammengesetzte Stein- oder Braunkohlenasche gibt, mit Staubbkalk zu Brei angemacht, dem ein wenig verdünntes Wasserglas zugesetzt wird, einen brauchbaren Wassermörtel.

**2. Hydraulische Kalke\*\*\*)** sind Kalksteine mit einem günstigen Gehalt an Toncerdesilikaten, Magnesia u. a., wie Septarienkalke und gewisse Mergelarten, Jura- und Muschelkalke. Auf Faustgröße gebracht, werden sie in Schachtöfen mit Kohlen geschichtet, vorsichtig (nur bis zur Sinterglut, sonst erfolgt Verglasen) gebrannt. In gemahlenem Zustande mit Wasser (auch wohl unter Zusatz von Sand) angemacht, erhärtet die Masse unter Wasser, aber auch in aufgehendem Mauerwerk, und erhält mehr oder weniger Festigkeit. Hydraulischer Kalk (ohne Sand) mit wenig Wasser zu Mauern in bewegtem Wasser; mit Sand (3 R.-T. Zement, 2 R.-T. Sand) zu Mauerwerk im Nassen.

Hierher gehören die **Romanemente**, von denen der älteste (eigentliche) der englische ist. Ähnlich sind der Bielefelder, Mindener, Culmbacher, Perlmooser usw., sämtlich billiger und viel leichter als Portlandzement. Raumgew.: lose eingelaufen i. M. 0,82, eingerüttelt i. M. 1,27.

Vielfach bewährt haben sich zahlreiche **Wasserkalke**. So der Natur-Zementkalk von Schenk & Vogel, Förderstedt, durch scharfes Glühen eines Dolomits erhalten. Besteht aus rd. 60 vH Kalk, 15 vH

\*) Vgl. Anton Hambloch, Der rheinische Trafs. Andernach 1905.

\*\*\*) Ueber Trafsprüfung s. Z. d. B. 1897 S. 179 u. f. M. Gary, Mitteilungen a. d. Kgl. techn. Versuchsanstalten zu Berlin 1901 Heft 1 S. 8. Neue Vorschriften für die Trafsprüfung vom Dtsch. Verb. f. d. Materialprüfung d. Technik 1909.

\*\*\*\*) Burchartz, Ueber hydraulische Kalke, Z. d. B. 1902 S. 255.

Magnesia, 8 vH Eisenoxyd und 14 vH löslicher Kieselsäure. Mit Sand (1:6) trocken gemischt und dann mit Wasser zum Brei angemacht, bleibt die Masse 24 Stunden liegen, bevor sie gebraucht wird. Eignet sich zu Mauerwerk in nassem Boden, Brücken, Gewölben, Tunnels u. dgl. sowie zum Putzen von Wetterwänden. Der vorzüglich empfohlene Meteoralkalk von Geseke i. W., spez. Gew. 3,06, von äußerst feiner Mahlung, Bindezeit etwa 13 st, gibt bedeutende Festigkeit. Aehnlich der sehr ausgiebige Zementkalk von Steudnitz i. Thür., der hydraulische Kalk von Rüdersdorf, der westfälische Wasserkalk von Recklinghausen (Wicking). Der vielgerühmte und auch bei großen Staatsbauten bewährte Viktoria-Puzzolan-Zement von Thale a. H. gibt bei großer Ergiebigkeit an der Luft wie unter Wasser gut erhärtenden Mörtel von Festigkeiten, welche die Normenproben (siehe 3.) reichlich aushielten (1901).

Nach Erlaß von 1902 können auch derartige Zemente bei den preussischen Staatsbauten Verwendung finden, falls nicht ausdrücklich Portlandzement ausgeschrieben ist. — Naturzement darf nicht als Portlandzement angepriesen werden (Oberlandesgericht Düsseldorf 1909).

**3. Portlandzement, ††)** hergestellt durch Glühen eines innigen Gemenges aus Kalkstein und Ton, ist ein bläulich- oder grünlich-graues, äußerst gleichmäßiges, sehr feines und schweres Pulver. Spez. Gew. als Klinker 3,1 bis 3,2, Raumgew. gepulvert, lose eingelaufen 1,4, eingerüttelt 1,95; erhärtet 2,7 bis 3,2. Die Vorgänge bei der Erhärtung des Portlandzementes (und der anderen hydraulischen Bindemittel) sind noch nicht völlig aufgeklärt. Chemische Zusammensetzung ziemlich gleichmäßig, i. M. 60 vH Kalk, 23 vH Kieselsäure, 7,5 vH Tonerde, 3,5 vH Eisenoxyd usw.

**Erzement\***) (nach Dr. Michaelis) heißt ein in Hemmoor hergestellter, langsam bindender, dunkelgefärbter Portlandzement, der wegen seiner Entstehung aus Kreide, Eisenoxyd und Feuersteinpulver fast frei von Tonerde und daher vollkommen widerstandsfähig gegen Seewasser ist. im übrigen sämtliche Forderungen der Normen reichlich erfüllt. Zu größeren Versuchen in sämtlichen Nordseehäfen und besonders bei den Befestigungsarbeiten von Helgoland verwendet.

### Normen für einheitliche Lieferung und Prüfung von Portlandzement, aufgestellt von dem „Verein deutscher Portlandzement-Fabrikanten“.

Rund-Erlaß des preuss. Ministers der öffentl. Arbeiten vom 28. Juli 1887,\*\*) vom 23. April 1897 und 19. Februar 1902,\*\*)\*) vom 16. März 1910. †)

(Auszug.)

**1. Begriffs-erklärung.** Portlandzement ist ein hydraulisches Bindemittel mit nicht weniger als 1,7 G.-T. Kalk (CaO) auf 1 G.-T. lösliche Kieselsäure (SiO<sub>2</sub>) + Tonerde (Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>) + Eisenoxyd (Fe<sub>2</sub>O<sub>3</sub>), hergestellt durch feine Zerkleinerung und innige Mischung der Rohstoffe, Brennen bis mindestens zur Sinterung und Feinmahlen. Dem Portlandzement dürfen nicht mehr als 3 vH Zusätze zu besonderen Zwecken zugegeben sein.

Der Magnesiumgehalt darf höchstens 5 vH, der Gehalt an SO<sub>3</sub> nicht mehr als 2,5 vH im geglühten Portlandzement betragen.

\*) Erzement, Darstellung seiner Eigenschaften. Hemmoor bei Hamburg 1905. — Vrgl. Z. d. B. 1904 S. 444.

\*\*) S. Z. d. B. 1887 S. 309; als Sonderdruck zu beziehen von Wilh. Ernst & Sohn, Berlin W. — S. auch Z. d. B. 1890 S. 539.

\*\*)\*) S. auch Z. d. B. 1902 S. 113.

†) S. auch Z. d. B. 1910 S. 189.

††) Vrgl. a. C. Schumann, der Portlandzement und seine Anwendung im Bauwesen, 3. Aufl. Berlin 1905.

**2. Verpackung und Gewicht.** Portlandzement wird in der Regel in Säcken oder Fässern verpackt. Die Verpackung soll außer dem Bruttogewicht die Firma oder die Fabrikmarke des Werkes in deutlicher Schrift tragen.

Streuverlust sowie etwaige Schwankungen im Einzelgewichte können bis zu 2 vH nicht beanstandet werden.

[Die Bestimmungen unter 2. sind zum Teil durch den Minist.-Erl. vom 23. April 1897 (s. nächste Seite) ersetzt bzw. erweitert worden.]

**3. Abbinden.** Der Erhärtungsbeginn von normal bindendem Portlandzement soll nicht früher als eine Stunde nach dem Anmachen eintreten. Für besondere Zwecke kann rascher bindender Zement verlangt werden, welcher als solcher gekennzeichnet sein muß.

Zur Feststellung des Erhärtungsbeginns und zur Ermittlung der Bindezeit bedient man sich der Normalnadel von 1 qmm Querschnitt und 800 g Gewicht, die quer abgeschnitten ist. Ein auf eine Glasplatte gesetzter Hartgummiring wird mit dem Portlandzementbrei (aus 300 g Zement) von bestimmter Dickflüssigkeit gefüllt und unter die Nadel gebracht. Der Zeitpunkt, in dem die Nadel den Kuchen nicht mehr ganz zu durchdringen vermag, gilt als „Beginn des Abbindens“. Die Zeit, welche verfließt, bis die Nadel keinen merklichen Eindruck mehr hinterläßt, ist die „Bindezeit“. Wasserund Lufttemperatur sollen hierbei 15 bis 18° betragen.

Portlandzement wird durch längeres Lagern langsamer bindend und verliert, sofern er trocken und zugfrei aufbewahrt wird, nicht an Güte. Vertragsbestimmungen, welche nur frische Ware vorschreiben, sollten daher in Wegfall kommen.

**4. Raumbeständigkeit.** Portlandzement soll nicht treiben, d. h. raumbeständig sein. Als entscheidende Probe soll gelten, daß ein auf einer Glasplatte hergestellter und vor Austrocknung geschützter Kuchen aus reinem Zement, nach 24 st Luftlagerung unter Wasser gelegt, auch nach längerer Beobachtungszeit (bis zu 28 Tagen) durchaus keine Verkrümmungen oder Kantenrisse zeigen darf. — Die abgekürzten Proben haben sich als nicht zuverlässig erwiesen.

**5. Feinheit der Mahlung.** Portlandzement soll so fein gemahlen sein, daß eine Probe von 100 g auf dem Siebe von 900 Maschen/qcm höchstens 5 vH Rückstand hinterläßt. Die Maschenweite des Siebes soll 0,222 mm betragen.

**6. Festigkeitsproben.** Die Bindekraft von Portlandzement soll durch Prüfung einer Mischung von Zement und Sand auf Druckfestigkeit nach einheitlichem Verfahren ermittelt werden, u. zw. an Würfeln von 50 qcm Fläche.

Die eventuellen Zerfallsproben (s. unten) sind an Probekörpern von 5 qcm Querschnitt der Bruchfläche vorzunehmen. Bei den Druckproben soll der Druck stets auf zwei Seitenflächen der Würfel, nicht aber auf die Bodenfläche und die bearbeitete obere Fläche ausgeübt werden. Zur Erzielung richtiger Durchschnittszahlen sind für jede Prüfung mindestens 5 Probekörper anzufertigen. Das Mittel aus den fünf Proben soll maßgebend sein.

Langsam bindender Portlandzement soll bei der Probe mit 3 G.-T. Normensand (s. unten) auf 1 G.-T. Zement nach 7 Tagen Erhärtung (1 Tag an der Luft und 6 Tage unter Wasser) eine Druckfestigkeit von mindestens  $K = 120$  kg/qcm haben (Vorprobe). Nach weiterer Erhärtung von 21 Tagen in Luft von Zimmertemperatur (15 bis 20° C) soll die Druckfestigkeit mindestens 250 kg/qcm betragen. Im Streitfalle entscheidet nur die Prüfung nach 28 Tagen.

Portlandzement, der für Wasserbau bestimmt ist, soll nach 28 Tagen Erhärtung (1 Tag in feuchter Luft, 27 Tage unter Wasser) mindestens 200 kg/qcm Druckfestigkeit zeigen.

Zur Erleichterung der Kontrolle auf der Baustelle kann eine Prüfung auf Zugfestigkeit dienen. Der Zement soll in einer Mischung von 1 T. Zement: 3 T. Normensand nach 7 Tagen Erhärtung (1 Tag in der Luft, 6 Tage unter Wasser) mindestens 12 kg/qcm Zugfestigkeit aufweisen.

Bei schnell bindenden Portlandzementen ist die Festigkeit nach 28 Tagen im allgemeinen geringer als die vorstehend angegebene. Es soll deshalb bei Nennung von Festigkeitszahlen stets auch die Bindezeit angeführt werden.

Zement, der eine höhere Zug- oder Druckfestigkeit zeigt, gestattet in vielen Fällen einen größeren Sandzusatz und hat Anrecht auf einen entsprechend höheren Preis.

Um zu übereinstimmenden Ergebnissen zu gelangen, muß überall Sand von gleicher Korngröße und gleicher Beschaffenheit benutzt werden. Diesen Normensand für Deutschland erhält man aus dem gewaschenen und getrockneten Quarzsand von Freienwalde a. d. O., den man durch zwei Siebe vom Groben wie vom Feinen befreit hat. (Spez. Gew. des Normensandes 1,41.) — Zur Kontrolle der Korngröße (ausgeführt vom Kgl. Materialprüfungsamt in Groß-Lichterfelde) dienen Siebe aus 0,25 mm dickem Messingblech mit kreisrunden Löchern von 1,35 und 0,775 mm Durchmesser. Verkauf des „Deutschen Normensandes“ durch das Laboratorium des Ver. dtsch. Portlandzement-Fabrikanten, Karlshorst.

[Folgen im Minist.-Erl. von 1887 genaue Regeln über die Anfertigung der Proben und deren Behandlung bei der Prüfung, ergänzt durch den Erlafs von 1902.]

### Anweisung für die Ermittlung des Nettogewichtes bei der Abnahme von Portlandzement.

Rund-Erlafs des preufs. Ministers der öffentl. Arbeiten vom 23. April 1897.\*)

Bei der Veranschlagung, Verdingung und Abnahme von Portlandzement ist fortan das Nettogewicht (in kg oder t) zugrunde zu legen.

Die Verpackung kann in Fässern oder Säcken erfolgen. Auf den Verpackungen müssen Brutto- und Nettogewicht sowie Firma oder Marke der betreffenden Fabrik deutlich angegeben sein.

Fässer sollen in der Regel die Normalgröße von

180 kg brutto	= etwa 170 kg netto für ganze Fässer
90 " "	= " 83 " " " halbe " "
45 " "	= " 40 " " " viertel " "

Doch ist auch die Packung in größeren Fässern von 200 kg brutto zuzulassen.

Zur Feststellung des Nettogewichtes einer Lieferung soll wenigstens ein Zehntel der gelieferten Fässer oder Säcke nach beliebiger Auswahl des abnehmenden Beamten genau verwogen werden. Hierbei ist zunächst das Bruttogewicht zu ermitteln und alsdann durch Abzug des Gewichtes der Verpackungen das Nettogewicht festzustellen. Weicht dieses um weniger als 2 vH von dem Gewichte ab, das die Fabrik angeben hat, so ist das letztere der Abrechnung zugrunde zu legen. Beträgt die Abweichung nach unten mehr als 2 vH, so ist der überschießende Teil für die ganze Lieferung in Abzug zu bringen. Uebergewicht wird dagegen nicht bezahlt.

Für die Ermittlung des Gewichtes der Verpackung ist anzunehmen, daß alle Verpackungen einer Lieferung bzw. (bei größeren Lieferungen) einer Sendung von gleichem Gewichte sind; doch ist das Einheitsgewicht aus dem Durchschnitt wenigstens des zehnten Teiles der Lieferung oder der Einzelsendung festzustellen.

**4. Eisen-Portlandzement\*\*)** wird hergestellt aus einem kalkreichen (übrigens auch mit Hilfe von Hochofenschlacke entstandenen) Portlandzement und einer kalkarmen Hochofenschlacke besonderer Art durch inniges Vermischen derselben im mehlfeinen Zustand und soll mindestens 70 vH vom ersteren und höchstens 30 vH. von letzterer enthalten. Seine Zusammensetzung ist derjenigen des Portlandzements sehr ähnlich, er hat auch (nach amtlicher Prüfung seit 1902) allen Forderungen der Normen genügt, so daß er durch Erlafs des preussischen Arbeitsministers 1909 in derselben Weise wie jener zu allen Staatsbauten zugelassen ist.\*\*\*) Die acht Werke, die ihn zur Zeit fabrizieren, haben sich zum Verein deutscher Eisen-Portlandzementwerke verbunden und garantieren als Mindestfestigkeiten 18 kg/qcm für Zug und 180 kg/qcm für Druck. — Vrgl. hierzu die Schrift: „Portlandzement und die Schlackemischfrage“. Ver. deutsch. Portlandzement-Fabrikanten, Berlin 1909.

**5. Andere künstliche Zemente** sind u. a. Passow-Zement: Hochofenschlacke, deren Zusammensetzung gewissen Bedingungen entsprechen muß, wird nur durch Luft granuliert und dann zu Mehl zerkleinert. Erfüllt ohne weiteres alle wesentlichen Anforderungen an einen sehr langsam bindenden Portlandzement; deshalb für rascheres Abbinden ein Zusatz von Portlandzement.

**Schlackenzemente** (Permzement, Puzzolanzement) werden hergestellt aus 2 R.-T. geeigneter wassergekörneter, staubfein gemahlener Hochofenschlacke und 1 R.-T. zu Pulver gelöschtem Kalk, welcher

\*) S. Z. d. B. 1897 S. 205.

\*\*) Vrgl. Taschenhandb. d. Ver. deutsch. Eisen-Portlandzementwerke 1904.

\*\*\*) S. Rund-Erlafs, betr. die Verwendung von Eisenportlandzement vom 6. März 1909, Z. d. B. 1909 S. 153.

Mischung noch bis zu 10 vH Puzzolanerde oder andere Silikate zugeschlagen werden.\*) Nähern sich in ihrer Wirkung unter Wasser dem Portlandzement, bleiben aber bei Luftherhärtung u. a. hinter ihm zurück.

**Weißer Zement:** von Ransome aus Ton, Kaolin und Kreide, marmorartig; von Berkefeld aus Kieselgur und Kreide; von Heintzel, aus Kreide und Quarz, deren Gemisch heftig gegläht ist und dann mit Wasserglas zu einem dünnen Brei angemacht wird; neuerdings durch Brennen eines Gemenges von Kalkstein und Kaolin unter Zusatz von Feldspat. Ferner der weiße Sternzement der Portlandzementfabrik „Stern“ in Finkenwalde bei Stettin, in jeder Hinsicht vorzügliches Material.

**6. Anwendung der hydraulischen Bindemittel** zu Wassermörtel, der auch als Luftmörtel die vorzüglichsten Dienste leistet (der größte Teil des produzierten Portlandzements dient jetzt zu aufgehendem Mauerwerk), zu Beton und Eisenbeton, zu Kunststeinen usw.

#### a) Wassermörtel für Mauern usw.

Zement ganz ohne Sandzusatz, nur selten anzuwenden, dient u. a. zum Ausfüllen von Sprüngen, Verstopfen von Quellen, Einspritzen in Hohlräume; ferner zum Rostschutz des Eisens und als bestes Mittel zum Vergießen von Eisen in Stein. Sonst (schon aus Rücksicht auf die Kosten) stets Sandzusatz. Mittelfeiner Quarzsand und weiches Wasser sind vorzuziehen; frei von Lehm, organischen Teilen usw. sollen sowohl Sand wie Wasser sein. Nötigenfalls vorherige Reinigung des Sandes in besonderen Waschmaschinen. Trockener Sand ist zunächst mit dem Zement gut zu vermischen, und dann ist das Wasser unter fortwährendem Durcharbeiten hinzuzufügen. Bei nassem Sand empfiehlt es sich, den Zement mit dem Wasser anzumachen und dann den Sand einzumischen. Die Menge des Wassers betreffend ist nur so viel zu nehmen, daß der Mörtel erst durch längeres kräftiges Durcharbeiten die nötige Geschmeidigkeit erlangt. Die gehörige Durcharbeitung ist äußerst wichtig, daher die immer allgemeinere Anwendung von Mörtelmaschinen.

Mehr, als vor dem Abbinden verarbeitet werden kann, darf nicht angemacht werden, da abgebundene Mörtelreste als unbrauchbar beiseitigt werden müssen. Die Steine sind vor dem Vermauern mit Wasser zu sättigen, die zu verputzenden Mauerflächen nach sorgfältiger Reinigung gehörig zu nassen und die Verputzarbeiten (Gesimse, Verzierungen usw.) noch längere Zeit (2 Wochen) nach der Herstellung stets feucht zu halten, um Reifsen und Abblättern zu verhindern.

Durch Mischung von magerem Portlandzementmörtel mit einem geringen Zusatz von fettem Kalkbrei (oder noch besser zu Pulver gelöschtem hydraulischen Kalk) erhält man den billigeren, verlängerten Zementmörtel, der gut zu verarbeiten ist und sich überall eignet, wo nicht die volle Festigkeit des fetten Zementmörtels verlangt wird. Derselbe genügt besser als Kalkmörtel allen Anforderungen, die an einen guten Luftmörtel, betreffend Adhäsion an den Stein-

\*) Näheres s. Pinkenburg, Ueber Schlackenzement, Z. d. B. 1890 S. 510.

flächen, rasche Erhärtung und Festigkeit zu stellen sind und bewährt sich auch als hydraulischer Mörtel.

Zementmörtel widersteht hohen Hitzegraden besser und schwindet weniger als Kalkmörtel.

Mischungsverhältnisse von Zementmörtel (in R.-T.): 1 Zement mit 1 Sand (höchst fett); 1 Zement mit 2 bis 3 Sand (für nafliegende Konstruktionsteile); 1 Zement mit 3 bis 4 Sand (gewöhnlich); 1 Zement mit 5 bis 6 Sand (zu mager). — Mischungsverhältnisse des verlängerten Zementmörtels (in R.-T.): 1 Zement, 5 bis 7 Sand, 1 Kalkbrei oder 1 Zement, 8 Sand,  $1\frac{1}{2}$  Kalkbrei oder 1 Zement, 10 Sand, 2 Kalkbrei. — Für die 15 bis 20 cm starke Bettung der Asphaltstraßen genügt eine Mischung von 1 Zement mit 8 bis 10 Grobsand (nebst Wasserzusatz), also i. M. 1 Fafs Zement (von 170 kg netto) auf 1 cbm Grobsand. — Festigkeitsangaben für Zement und Zementmörtel s. S. 518.

Mischungsverhältnis und Ausbeute in R.-T.				1 cbm Mörtel erfordert	
Zement	Sand	Wasser	Ausbeute	Zement in kg	Sand in l
I	1	0,53	1,53	933	667
I	2	0,71	2,22	630	900
I	3	0,95	3,00	467	1000
I	4	1,22	3,80	368	1053

Reiner Zement wird eher rissig als mit Sand gemischerter und ist daher zum Abdichten nicht so geeignet als Zementmörtel, der bei Mischungen von 1 Zement mit 1 feinem, reinem Sand, oder 1 Zement mit 2 Sand und  $\frac{1}{4}$  bis  $\frac{1}{6}$  Kalkbrei, oder 1 Zement mit 3 Sand und 1 Kalkbrei gut wasserdicht bleibt. Schichtstärke 1,5 bis 2,5 cm. Vorzügliche Dichtung und die Fähigkeit, den Ölfarbenanstrich alsbald festzuhalten, erlangt die Oberfläche des Zementes durch Anstrich mit Keßlerschem Zementfluat. Bessere Dichtungsmittel sind: Biber von Cornel Esser in Köln ( $M$  1,20/kg); Aquabar von der Aquabar-Ges. Berlin N.20; Ceresit von Unna i. W.; Porolith, eine Asphalt emulsion von Straßburg i. E. — Da kohlenstoffhaltiges Wasser stark einwirkt, müssen die Behälter mancher Wasserwerke, die Staubcken von Talsperren u. a. gut geschützt werden, wozu sich ein Anstrich des Zementputzes mit Siderosthen (s. Rostschutz S. 683), noch besser mit Inertol (P. Lechler in Stuttgart) eignet.

Gegen Frost ist der Zementmörtel, sobald er abgebunden hat, ganz unempfindlich, weshalb für Arbeiten bei Kälte schnell bindender Zement vorzuziehen ist. Anwärmung von Wasser und Sand sowie Anwendung von möglichst wenig Wasser beschleunigen außerdem das Abbinden. Ein besonderes Mittel ist der Zusatz von Calcidium (Z. d. B. 1903 S. 152).

**Puzzolanmörtel**, für Bruchstein 1 R.-T. Kalk auf 6 R.-T. Puzzolanerde; für Ziegel 3 : 7, für Putzarbeiten 2 : 3.

## b) Beton.

**Beton** wird aus losem, ungeformtem Steinmaterial durch Verkittung mittels eines hydraulischen Mörtels hergestellt und ist der schmiegsamste und anpassungsfähigste von allen Baustoffen, dazu unbedingt feuersicher. Verwendungszwecke s. III. Bd. Abschn. Eisenbetonbau und Abschn. Grundbau.

Das Steinmaterial, welches aufer Zement (am besten Portlandzement, aber auch Trafs u. a.), Sand und Wasser, für die das S. 717 Gesagte gilt, genommen wird, ist entweder grober Kies, möglichst Quarzgesteinen entstammend, oder Schotter, d. i. Steinschlag aus natürlichen oder aus gebrannten Steinen. Danach sind **Kiesbeton** und **Schotterbeton** zu unterscheiden. Ihrer Festigkeit nach müssen diese Zuschläge den erhärteten Mörtel mindestens erreichen, worauf besonders beim Ziegelsteinschlag zu achten ist; dieser muß gut gesiebt sein (nur grobe Stücke), während der Grus der Natursteine, falls es Silikatgesteine sind, ein gutes Füllmaterial abgibt. Gewaschener Kalksteinschotter von Rüdersdorf gibt vortrefflichen, besonders feuersicheren Beton. Größe der Stücke bei Kies bis zu 5 cm, bei Schotter bis zu 7 cm. Für den Mörtelverbrauch am vorteilhaftesten ist es, wenn möglichst alle Größen vorhanden sind. — Ein geringer Zusatz von Fettkalk oder von hydraulischem Kalk zum Portlandzementbeton verleiht ihm besonders große Wasserdichtigkeit.

Zur Herstellung des Betons werden Zement und Sand trocken durchgemischt, dann mit Wasser derart durchfeuchtet, daß durch nochmaliges regelrechtes Umschaufeln eine gleichmäßig feuchte Masse entsteht. Nun werden die Zuschläge, vorher angefeuchtet, zugegeben und das Ganze nochmals gehörig durchgearbeitet. Alles dies mit möglichster Beschleunigung. Je nach der Menge des Wassers erhält man Stampfbeton, wobei die Betonmasse eben erdfeucht ist, oder Schüttbodyeton, der in breiigem Zustand aufgetragen wird. Ersterer, in anscheinend etwas trockenem Zustand aufgebracht, wird kräftig (oft mit mechanisch bewegten Stampfen) geschlagen, bis er in der ganzen Schichthöhe (bis 25 cm) gleichmäßige Dichtigkeit erreicht hat. Durch möglichst geringen Wasserzusatz\*) wird bei richtiger Ausführung der Arbeit eine außerordentlich hohe Druckfestigkeit erzielt, die mit den Jahren noch größer wird. Weit Geringeres leistet der Schüttbodyeton, der am Platze ist, wo wenig Festigkeit gefordert wird, seine wichtigste Anwendung aber zur Betonierung unter Wasser erfährt, vgl. III. Bd. Abschn. Grundbau.

Die Gleichmäßigkeit der Mischung wird am besten durch Maschinenarbeit (die auch billiger ist als Handmischung) gewährleistet.\*\*) Für größere Bauten ist deshalb meistens Maschinenmischung vorgeschrieben.

Mischungsverhältnisse und Ausbeute (in R.-T.) für Stampfbeton aus Portlandzement, Sand und Kies: 1:2:4=4,4 Beton; 1:3:6=6,6 Beton; 1:4:8=8,8 Beton; 1:5:10=11,3 Beton. Der Bedarf für 1 cbm Kies-Stampfbeton ist danach z. B. bei 1:3:6=150 l Zement, 450 l Sand und 900 l Kies. — Wird Steinschlag statt Kies genommen, so darf der Zusatz nur  $\frac{3}{4}$  von der Kiesmenge betragen. Danach hat man für Schotter-Stampfbeton: 1:2:3=3,6 Beton; 1:3:4,5=5 Beton; 1:4:6=6,5 Beton; 1:5:7,5=8,4 Beton. Der Bedarf für 1 cbm ist z. B. bei 1:5:7,5=120 l Zement, 600 l Sand und 900 l Schotter. — Ferner für Grundmauern aus verlängertem

\*) S. C. Bach, Ueber Druckfestigkeit von Betonkörpern mit verschiedenem Wasserzusatz. Stuttgart 1909, auch Z. d. V. d. I. 1909 S. 828.

\*\*) S. Z. d. B. 1896 S. 15.

Zementbeton: 1 Zement, 1 Kalkbrei, 5 Sand, 9 Kies (Strafsburger Universität); 1 Zement, 1 hydraul. Kalk, 6 Sand, 10 Kies (Pfeiler der Mainbrücke zu Frankfurt); aus reinem Beton, bei sehr nassem Boden (Hamburg): 2 Zement, 5 Sand, 7 Steinschlag.

Für Trafsbeton haben sich folgende Mischungen in R.-T. bewährt: 1 Trafs, 1 Wasserkalk, 1 Sand, 4 Kies (Rheinschleuse Strafsburg 1900); 1 Trafs, 1 Wasserkalk,  $1\frac{1}{2}$  Sand, 5 Kies (Hafenneubau Cöln); 1 Trafs, 1 Kalk, 1 Sand, 4 bis 5 Kies (Kaimauer des Freihafens Bremen); 1 Trafs, 1 Kalk, 1 Sand und auf je 1 cbm dieses Mörtels 2 cbm Steinschlag (Kriegshafenbau Kiel).

Schlackenbeton, ein magerer Beton aus Kohlschlacken und Zement, nur zu Ausfüllungen bei Wellblech-Zwischendecken (bis mindestens 5 cm über den Wellen), zu Zwickelausfüllungen (bis über Trärgleiche) bei den Decken aus gewölbten, gestampften Betonkappen usw. Gewicht 750 kg/cbm. — Für Eisenbeton sind Kohlschlacken allgemein auszuschließen und für Stampfbeton nur zuzulassen, wo keine tragenden Eisenteile damit in Berührung kommen.\*)

**Betonestrich** (Zementestrich), 10 cm stark (8 cm Betonplatte, 2 cm Ueberzug von fetterem Zementmörtel), erfordert 50 l Mörtel/qm.

Zur Herstellung des **Zementsteins** (Kunststeins) verwendet man besten langsam bindenden Portlandzement, gemengt mit feinstem Sande bis grobem Kiessande, je nach den anzufertigenden Gegenständen. Erst nach 1 bis 2 Tagen aus den Formen genommen, müssen die Gegenstände noch 1 bis 2 Monate täglich angefeuchtet werden. —

**Terrazzo**, das bekannte schöne Fußbodenmaterial, wird durch Vermengen von verschiedenfarbigen Marmorstücken mit fettem Zementmörtel (der auch gefärbt sein kann), Auftragen der Masse und Schleifen und Polieren nach der Erhärtung hergestellt.

Neue **Kunststeine** (u. a. von H. Boschen in Oldenburg i. Gr., Albert Lauer mann in Detmold) aus zerkleinertem Naturstein (Granit u. a.) mit Portlandzement, die sich nachher gut bearbeiten lassen und auch in Farbe und Korn wie Natursteine wirken, werden als billiger Ersatz für diese sowohl in Blöcken geliefert als auch in der Art von Steinputz aufgetragen. So auch schöne Treppenstufen, ohne und mit Eisenarmierung, feuersicher. — Hieran reihen sich die neuen Platten für schönen Fußbodenbelag aus mehreren Werken, u. a. die Granitoidplatten, so die Zechit-Granitoidplatten von den Zechstein- und Zechitwerken Bredelar.

**Stampfbeton\*\*)** findet immer gröfsere Anwendung im Hoch- und Tiefbau.

Die **Stampfbeton-Rohre** für Kanalisation, Durchlässe und offene Wasserleitungen mit rundem oder eiförmigem Querschnitte (Spitze nach unten, Achsenverhältnis 2 : 3) erhalten innen durch Imprägnierung (z. B. mit Kefslerschem Zementfluat) eine etwa 8 mm starke, wasser-

\*) Vrgl. Ministerial-Erlafs vom 25. März 1908. Z. d. B. 1908 S. 198.

\*\*) S. Allgemeine Bestimmungen für die Vorbereitung, Ausschiffung und Prüfung von Bauten aus Stampfbeton. aufgestellt vom Deutschen Ausschufs für Eisenbeton 1908, anerkannt durch Ministerial-Erlafs vom 19. Juli 1909. Z. d. B. 1909 S. 417. — Vorschriften über die Ausführung von Wänden und Pfeilern in Stampfbeton, Berliner Baupolizei 1905.

dichte, öl- und säurefeste Schicht. Sie werden frühestens 3 Monate nach Fertigstellung verlegt, wobei in starken Gefällen die Sohle besonders vor Abnutzung geschützt wird. Dichtung der Verbindungsfalze mittels Teerstricken und Ton von außen, mit Zement von innen. Die fertig verlegten Rohre werden mit lehmigem Kiessand (bei starker Auflast Kiessand mit  $\frac{1}{15}$  bis  $\frac{1}{20}$  Zementzusatz) fest eingestampft. Die Beton-Fabriken verbürgen gewöhnlich eine ruhende Scheitelbelastung von 5000 bis 6000 kg/qm des wagerechten Rohrquerschnittes; jedoch verlegt man bisweilen derartige Rohr-Durchlässe unter 10 m hohen Eisenbahndämmen ebenso sicher wie bei nur 1 m Abstand vom Rohrscheitel bis Unterbau-Oberkante. — (S. die folg. Tafel.)

## Stampfbetonrohre (Zementrohre).\*)

Lichte Weite	Durchfuß-Querschnitt	Mittlere Wandstärke	Nutzlänge	Gewicht (spez. Gew. = 2,2)	Lichte Weite	Durchfuß-Querschnitt	Mittlere Wandstärke	Nutzlänge	Gewicht (spez. Gew. = 2,2)
cm	qcm	cm	m	kg/m	cm	qcm	cm	m	kg/m

## Runde Form (Abb. 18).

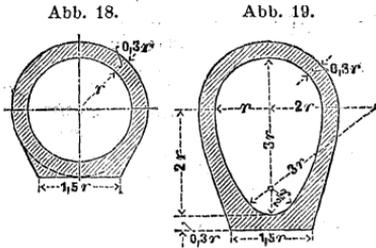
7,5	44,2	2,25	0,8	15,2	35	962,1	4	1,0	126
10,0	78,5	2,25	1,0	19,1	40	1256,6	4,5	1,0	161
12,0	113,1	2,5	1,0	25,1	45	1590,4	5	1,0	202
15,0	176,7	2,5	1,0	30,3	50	1963,5	5	1,0	222
17,5	240,5	3,0	1,0	42,5	60	2827,4	6	1,0	320
20,0	314,2	3,0	1,0	47,7	70	3848,4	6,5	1,0	402
22,5	397,6	3,5	1,0	62,9	80	5026,6	7	0,8	491
25,0	490,9	3,5	1,0	68,9	90	6361,7	7,5	0,8	590
30,0	706,9	3,5	1,0	81,1	100	7854,0	8	0,8	697

## Ei-Form (Abb. 19).

20/30	459	3,5	1,0	79	60/90	4135	9	1,0	602
25/37,5	718	4,0	1,0	112	66,7/100	5105	10	1,0	743
30/45	1034	4,5	1,0	151	70/105	5628	10,5	0,8	820
35/52,5	1407	5,5	1,0	215	80/120	7351	12	0,8	1072
40/60	1838	6,0	1,0	268	93,3/140	10005	14	0,7	1457
45/67,5	2326	7,0	1,0	352	100/150	11485	15	0,5	1673
50/75	2871	7,5	1,0	418	110/165	13897	16,5	0,5	2025

\*) Ueber Prüfung von Ton- und Zementrohren vgl. die vom Internat. Kongress f. d. Mater.-Prüf. d. Technik Brüssel 1906 angenommenen Vorschläge von M. Gary, Bericht 17 d. — Nach den vom Deutschen Beton-Verein 1909 aufgestellten „Leitsätzen für die Prüfung von Zementrohren“ sind die Mindesttraglasten auf 1 m Rohrlänge festgestellt worden. Die betreffende Tabelle ist in „Beton u. Eisen“ 1910 Heft IX S. 286 abgedruckt, ferner vom Deutschen Beton-Verein E. V., Oberkassel (Siegkreis) zu beziehen.

Die kreisförmigen Stampfbetonrohre von 35 bis 100 cm Lichtweite erhalten den in Abb. 18 gegebenen Querschnitt; die kleineren



Rohre sind im Querschnitte einfach kreisringförmig. — Für die eiförmigen Rohre gilt Abb. 19; hierbei ist für das volllaufende Profil der Wasserquerschnitt

$$F' = 4,594 13 r^2,$$

der benetzte Umfang

$$u = 7,929 89 r$$

(also der hydraulische Radius

$$F' : u = 0,5793 r), \text{ der Betonquer-}$$

schnitt =  $3,0392 r^2$  und das Rohrgewicht =  $0,67 r^2 \text{ kg/m}$  (spez. Gew. = 2,2) und =  $0,76 r^2 \text{ kg/m}$  (spez. Gew. = 2,5).

Ist das eiförmige Profil (Abb. 19) nur bis zur Kämpferhöhe mit Wasser angefüllt, so ist der Wasserquerschnitt =  $3,02333 r^2$ , der benetzte Umfang =  $4,7883 r$  und der hydraulische Radius =  $0,6314 r$ .

Bei Berechnung des lichten Rohrquerschnittes nehme man für mittlere Niederschlagverhältnisse bei mäßigem Leitungsfälle (1:300) 300 qcm auf 1 ha zu entwässernde Fläche, so daß z. B. ein rundes 50 cm-Rohr von 1963,5 qcm lichtigem Querschnitte für 1963,5 : 300 = 6,54 ha Fläche ausreicht.

**Eisen-Beton.\*** Der vielfach angewendete **Monierbau\*\***) aus fettem Zementmörtel (1 Zement:3 Sand bis 1:1) mit Einlage von Eisenstäben oder Drahtgeflechten oder neuerdings mit Vorteil von Streckmetall (Schächtermann & Kremer, Dortmund), vereinigt die Druckfestigkeit des Zementmörtels mit der Zugfestigkeit des Eisens und gründet sich auf folgende Tatsachen: 1. Die Adhäsion des Zementes an Eisen beträgt 40 bis 47 kg/qcm, so daß selbst bei 10-facher Sicherheit 4 bis 5 kg/qcm Haftspannung mit Sicherheit gerechnet werden können; die Schubspannung soll 4,5 kg/qcm nicht überschreiten. 2. Beton und Eisen erfahren annähernd gleiche Wärmeausdehnung. 3. Bei dichter Umschließung (weshalb die Mischung ziemlich fett und auch naß genug sein soll) ist das Eisen vor dem Rosten geschützt, darf jedoch nicht zu nahe an der Oberfläche liegen. Zu ebenen und gewölbten Decken, zu Wänden, Treppen, Behältern, Brücken usw. angewendet, liefert er tragfähige, vorzüglich feuersichere Bauten bei großer Raumersparnis (vgl. III. Bd.) Beim **Hennebiquebau** und vielen verwandten Konstruktionen werden auch die Unterzüge und die Stützen in gleicher Weise hergestellt und mit

\*) S. d. Abschn. „Eisenbetonbau“ III. Bd. — Bestimmungen für die Ausführung von Konstruktionen aus Eisenbeton bei Hochbauten, Ministerial-Erlaß in Preußen vom 16. April 1904 und vom 24. Mai 1907 (Z. d. B. 1907 S. 301) sowie vom 11. April 1908 und vom 21. Januar 1909. — Runderlasse betreffend Säulen aus eisenumschürtem Beton vom 18. September 1909 (Z. d. B. 1909 S. 529) und 21. Dezember 1909. Antliche Ausgabe sämtlicher Bestimmungen Berlin 1910, Wilhelm Ernst & Sohn.

\*\*) Näheres über Monierbau s. im Z. d. B. 1886, S. 88, 144, 462; 1887, S. 252; 1888, S. 83; 1889, S. 49, 114; 1890, S. 164, 267; 1891, S. 51, 208, 523; 1892, S. 149, 489; 1893, S. 252, 444; 1895, S. 9, 32, 428, 481; 1896, S. 45, 227, 288, 542; 1897, S. 150, 172, 430; 1898, S. 368, 380. — Koenensche Ventenplatten-Decke s. ebendas. 1897, S. 50, 579; 1898, S. 591.

den Decken verbunden. — Ferner Eisenbeton-Pfähle nach Hennebique u. a., so der Simplexpfahl, mit vielen Vorzügen vor Holzpählen.

Die Akt.-Ges. für Beton- und Monierbau, Berlin W., liefert ferner runde und eiförmige Monier-Rohre mit Eisenringen (für große Belastungen) oder mit Eisengeflechteinlagen (dünnwandige, für mittlere Lasten); diese Rohre übertreffen die vorstehend aufgeführten Stampfbetonrohre durch geringere Wandstärken und Gewichte, bei ungefähr gleichen Tragfähigkeiten und Preisen.

Neu sind die mittels Zentrifugalkraft hergestellten Hohlkörper aus Eisenbeton, und zwar Masten für Leitung und Beleuchtung, sowie Säulen und Leitungsrohre für hohen Erddruck, von den Deutschen Schleuderröhrenwerken in Meissen i. Sa.

Um schweren Unglücksfällen im Eisenbetonbau vorzubeugen, sei auf die Notwendigkeit der gewissenhaftesten Berechnung und Ausführung durch geschulte Kräfte besonders hingewiesen, wie solche nur größeren Firmen zu Gebote stehen. Besonders ist auch vor zu früher Ausrüstung zu warnen.

### Das Raumbgewicht des Betons.

Das Raumbgewicht des Betons ist im allgemeinen sehr verschieden und richtet sich vornehmlich nach der Güte der aufgewandten Stampfarbeit, der Höhe des Wasserzusatzes und der Auswahl der Materialien, während die Wahl des jeweilig zu verwendenden Mischungsverhältnisses weniger von Belang ist.\*) Das Raumbgewicht ist im allgemeinen um so höher, je größer die Stampfarbeit, je geringer der Wasserzusatz und je fetter die Mischung ist. Probewürfel zeigen in der Regel ein größeres Raumbgewicht, als solches dem Beton des betreffenden Bauwerkes entsprechen würde, da hier weitaus intensiver gestampft wird. Je kleiner das Raumbgewicht, um so geringer natürlich auch die Festigkeit des Betons.

Unter normalen Verhältnissen sind die Raumbgewichte einzelner Betonsorten etwa folgende:

Beton aus	Raumbgewicht in kg/cbm	Mittelwert in kg/cbm
Zement und Kies (Kiessand) . . . . .	1800 bis 2400	2200
„ „ Granitschotter . . . . .	2000 „ 2500	2300
„ „ Basaltschotter . . . . .	2200 „ 2800	2400
„ „ Kalkstein oder Sandstein . . . . .	2000 „ 2200	2100
„ „ Ziegelschotter . . . . .	1500 „ 2000	1800
„ „ Bimssteinkies**) . . . . .	600 „ 1400	1100
„ „ Kohlschlacke**) . . . . .	800 „ 1500	1200

Das Raumbgewicht des Eisenbetons wird in der Regel zu 2400 kg/cbm angenommen, welcher Wert für Decken, schlanke Stützen, Gewölbe

\*) Für einen normal hergestellten Kiesbeton kämen vergleichsweise etwa folgende Mittelwerte in Frage:

Mischung . . . . .	1:3	1:5	1:7	1:10	1:12	1:15
Raumbgewicht in kg/cbm	2300	2250	2200	2170	2150	2140

\*\*) Für Bims- und Schlackenbeton werden zumeist zu geringe Raumbgewichte angegeben; man hat sogar schon Raumbgewichte von 1500 bis 1700 kg/cbm für diese Betonsorten festgestellt. Die neuen preussischen Bestimmungen über die bei Hochbauten anzunehmenden Belastungen (31. Januar, 1910) geben nur 1000 kg/cbm als Durchschnittswert an.

u. dgl. als durchaus ausreichend erachtet werden kann. Für gering armierte Fundamentkörper, Wandkonstruktionen, Widerlager usw. genügt es, der Berechnung ein Raumgewicht von etwa 2300 kg/cbm zugrunde zu legen. Die neuen Schweizerischen „Vorschriften über Bauten in armiertem Beton“ (Juni 1909) schreiben ein Raumgewicht von 2500 kg/cbm als Grundlage für die statische Berechnung vor; hierbei ist jedoch die nicht beabsichtigte, aber kaum unvermeidliche Zunahme an Dicke in der Ausführung mitberücksichtigt.

## VI. GLAS.\*)

**Wichtigste Eigenschaften:** Durchsichtigkeit, Undurchlässigkeit für Luft und Wasser, Härte und Glanz, Unveränderlichkeit, schlechte Leitungsfähigkeit für Wärme und Elektrizität (Isolierglocken); außerdem Leichtigkeit und Mannigfaltigkeit der Formgebung und der Färbung.

Glas ist ein durch Zusammenschmelzen von Kieselsäure mit Kalk (oder Bleioxyd) und Natron oder Kali hergestelltes Gemenge von mehreren Silikaten, meist kieselsaurem Kalk und kieselsaurem Natron; spez. Gewicht i. M. 2,6 (vgl. S. 634). Glas ist bei Weißglut ganz dünnflüssig, bei Rotglut teigartig und zähe, so daß es im ersteren Zustande gegossen, im letzteren geblasen werden kann. Nur wenn es nach der Formgebung gut „gekühlt“ wurde (die noch rotglühenden oder wieder bis dahin erhitzten Gegenstände werden in einen heißen Raum gebracht, mit dem sie ganz allmählich abkühlen), ist seine große Sprödigkeit und Zerbrechlichkeit im erforderlichen Grade herabgemindert. Härte und Glanz werden durch den Kalkgehalt vergrößert, durch Bleioxyd verringert. — Das Blasen des Glases geschieht immer mehr auf mechanischem Wege mit Luft wie bei der automatischen Owensschen Flaschenblasmaschine oder mit Wasserdampf nach Sievert (Dresden).

Festigkeitsangaben für Glas s. S. 517 und 527. Durch verschieden starke Zusammenziehung bei der Abkühlung erhält das Glas aufsen Druck- und im Inneren Zugspannung. Sein Widerstand gegen Druck ist bedeutend größer als der gegen Zug; die Oberflächenhaut dient ihm zum Schutze, die natürliche Oberfläche soll daher außen liegen. Noch widerstandsfähiger ist die Oberfläche bei dem (zwischen Metallplatten) gekühlten „Pfehartglas“ von Siemens, bei dem allerdings (wie auch noch mehr bei dem de la Bastieschen „Hartglas“) jeder Eingriff in das Innere (Ritzen) leicht die gänzliche Zerstörung hervorruft.

Glas von geringer Güte leidet durch Regen und Luft, besonders in der Wärme, indem es erblindet (Treibhäuser u. a.) oder in Farben schillert und abblättert. Aber auch gutes Glas leidet schon, wenn es verpackt an feuchten Orten länger steht, oder gar die Verpackung von Seewasser durchfeuchtet ist; daher ist Glas stets luftig und trocken

\* S. Baukunde des Architekten I. Bd., 2. Teil; Berlin 1891. — Th. Landsberg, Glas- und Wellblechdeckung; Darmstadt 1887.

aufzubewahren. Gutes Glas soll weder von scharfen Säuren noch Basen angegriffen werden; nur Flußsäure zerstört jedes Glas vollkommen.

Das durch Schmelzen von Bergkristall (W. C. Heraeus in Hanau), neuerdings von reinstem Quarzsand (Deutsche Quarzgesellschaft A.-G. in Beuel-Bonn), im elektrischen Ofen hergestellte **Quarzglas** („Quarzgut“) ist völlig unempfindlich gegen scharfen Temperaturwechsel, hochfeuerfest, äußerst säurebeständig und leitet die Elektrizität nicht. Wärmeausdehnung fast Null. Spez. Gew. 2,2.

Zu baulichen Zwecken sind die wichtigsten Sorten folgende:

**1. Deutsches Glas** [auch vielfach als rheinisches bezeichnet], **Fensterglas**,\*) in den rheinischen Hütten, aber ebenso in Westfalen, Schlesien, Sachsen usw. durch Blasen hergestellt, beherrscht jetzt fast ausschließlich den Markt in Deutschland. Die gangbarsten Sorten werden als sogen.  $\frac{4}{4}$ -,  $\frac{6}{4}$ - und  $\frac{8}{4}$ -Glas gehandelt, welche Bezeichnungen etwa den Stärken 2, 3 und 4 mm oder den Gewichten 5, 7,5 und 10 kg/qm entsprechen. Der Einheitspreis wächst mit der Größe der Scheiben, jedoch nicht nach dem Flächeninhalte, sondern nach der Summe aus Längen- und Breitenabmessung, sogen. „addierte Zentimeter“. Die Größe geht bis zu 300 add. cm und mehr, bei den stärksten Sorten von 4,5 bis 5 mm Stärke nur bis 164 add. cm, so daß hierfür das größte Tafelmaß etwa 100.64 oder 66.98 usw. wäre.

(Bei den Bahnhofshallen der Berliner Stadtbahn ist geblasenes Glas, 5 mm stark, in Tafeln von 50.85 cm verwendet worden.)

Von den vier Güteklassen oder „Wahlen“ werden gewöhnlich bei besseren Bauten die 2. und 3. Wahl benutzt. Die 1. Wahl ist ganz rein und auch sonst tadellos. Die 4. Wahl dient nur zu untergeordneten Zwecken, wie bei Kellern, Speisekammern, Bodenräumen, Treibhäusern, Oberlichtern usw.; ihr Preis ist für  $\frac{4}{4}$ -Glas 1,70 bis 2 M/qm. Die Bau-Preise für die 2. und 3. Wahl sind  $\frac{4}{4}$ -Glas (eingesetzt) bis 150 add. cm rd. 3 M/qm, bis 210 add. cm rd. 3,25 M/qm, bis 260 add. cm rd. 4 M/qm;  $\frac{6}{4}$ -Glas kostet 40 vH,  $\frac{8}{4}$  80 vH mehr als  $\frac{4}{4}$ -Glas. Die Reparatur-Preise betragen das Doppelte der Baupreise und mehr. Unter „Doppelglas“ wird öfter auch  $\frac{6}{4}$ -Glas verstanden.

**2. Rohglas**, gegossen, wird meist in Stärken von 3 bis 13 mm verwendet. Noch stärkere Sorten von 20 bis 30 mm und mehr (bis 60 mm) werden zu Fußboden-Einlagen benutzt; wegen der bei der Kühlung entstandenen, unregelmäßigen Spannungen springen die sehr starken Platten öfters bei plötzlicher Temperaturänderung (z. B. Regen auf die sonnenbeschienene Scheibe). Die Tragfähigkeit des Rohglases

\*) Der Runderlaß des preuß. Ministers der öffentl. Arbeiten, betreffend die Bedingungen für die **Lieferung von Fensterglas**, vom 23. Juni 1894, bestimmt folgendes:

1. Für die allgemeine Bezeichnung des für gewöhnliche Zwecke zu verdingenden Glases ist der in der Technik übliche Ausdruck „rheinisches Glas“ zu gebrauchen, ohne damit das Verlangen eines Ursprungsnachweises zu verbinden.

Hierzu wird bemerkt, daß die Bezeichnung „rheinisches Glas“ nur als ein Ausdruck für die Herstellungsweise, wie solche in den verschiedenen deutschen Landesteilen üblich, anzusehen ist, nicht aber eine besondere Kennzeichnung des aus rheinisch-westfälischen Glashütten hervorgehenden Fabrikates, so daß eine unberechtigte Monopolisierung dieser Glashütten ausgeschlossen ist.

2. Die allgemein in der Praxis gebräuchliche, der geringeren oder besseren Güte entsprechende Gruppierung als Glas I., II. oder III. Sorte bzw. als weißes, halbweißes oder grünes Glas ist zur allgemeinen Kennzeichnung der auszuschreibenden Lieferung beizubehalten, dsgl. auch die Abstufung nach den Stärkegraden  $\frac{1}{4}$ ,  $\frac{3}{4}$  oder  $\frac{5}{4}$ , entsprechend den Durchschnittstärken von 2, 3 und 4 mm.

ist hoch (vgl. S. 517 und 527), schon eine 20 mm starke Platte kann, auf 1 m freiliegend, mit leichtem Schritte begangen werden; es ist jedoch gegen Stöße u. dgl. sehr empfindlich, weshalb man die Platten in Abständen von 40 bis 55 cm durch Sprosseneisen unterstützt. Die gewöhnliche Stärke für Bedachungen, die wesentlichste Anwendung des Rohglases, ist 5 mm; Stärken über 7 mm sind selten. Es kommt glatt, gerautet oder geriffelt (was auch das Ausgleiten verhindert) und neuerdings auch mit eingebrannten Emailfarben verziert vor.

Preise für weißes Rohglas (eingesetzt): 4 bis 6 mm stark 5 bis 6  $\mathcal{M}/\text{qm}$ , 13 mm 10 bis 15  $\mathcal{M}/\text{qm}$ , 20 mm 25 bis 30  $\mathcal{M}/\text{qm}$ , 26 mm 35 bis 40  $\mathcal{M}/\text{qm}$ .

**3. Drahtglas** der Akt.-Ges. für Glasindustrie, vorm. Fried. Siemens, Dresden, ist Glas mit einer darin völlig versenkten, also nicht rostenden Netz-Einlage aus Eisendraht, besitzt etwa die 1,5-fache Biegefestigkeit des Rohglases\*) und gestattet geringe Stärken [kann schon bei 12 mm völlig sicher begangen werden]; behält, selbst wenn es durch Stöße oder Gluthitze Sprünge erhalten hat, noch völlig sicheren Zusammenhalt, ist also feuersicher (1904 in Baltimore bewährt) und diebessicher. Der Lichtdurchgang wird bei 1 mm Drahtstärke und 7,5 mm Maschenweite um 27 vH vermindert. Empfiehlt sich zu Bedachungen und Fußböden (Oberlichtern), macht Schutzgitter überflüssig. Zu Schutzgläsern für Wasserstände, zum Abschluss von Lichtöffnungen in Treppenhäusern, Lichthöfen, feuersicheren Türen, Brandmauern u. dgl. Stärken 8 bis 10, 15, 20, 25 bis 60 mm. Die Tafeln (bis 100.60 cm groß) lassen sich nicht schneiden, müssen daher genau nach Maß bestellt werden. Preis bei 8 bis 25 mm Stärke 6 bis 40  $\mathcal{M}/\text{qm}$ .

Drahtglas der Manufakturen: Schalke (Westfalen), Stolberg (Rheinland), Waldhof b. Mannheim, Gerresheim (Rheinland) und Altwasser (Schlesien) sowie Siemens (Dresden) hat dem vorigen gegenüber den Vorzug schneidbar und wegen des dünneren Drahtes mehr lichtgebend zu sein, ist aber wegen des seitlich offenen Drahtes dem Rosten ausgesetzt. Wird geliefert in Stärken von rd. 4 bis 9 mm glatt und gerippt, von 10 bis 15 mm nur glatt, u. zw. als Tafeln von 300.100 cm und als Fußbodenplatten von geringeren Größen in Stärken von 20 bis 50 mm. Preis bis 9 mm Stärke 5  $\mathcal{M}/\text{qm}$ , für größere Stärken rd. 1  $\mathcal{M}/\text{mm}$ , also für 15 mm 15  $\mathcal{M}/\text{qm}$ .

**4. Spiegelglas** wird wie Rohglas durch Gießen, aber aus einem feineren und bleihaltigen Glassatze hergestellt und dann auf beiden Seiten geschliffen und poliert; wegen des Verlustes der natürlichen Oberfläche und auch wegen des Bleigehaltes von rd. 2 vH ist es weicher und schwieriger zu behandeln. Von den drei „Wahlen“ dienen die 1. und 2. zu Spiegeln (jetzt meist mit Silberbelegung), die 3. zu Schaufenster Scheiben u. dgl. Stärke 5 bis 8 mm, wenn verlangt, auch stärker; Tafelgrößen bis 4.5 m und darüber.

Die Preise der Spiegelglasscheiben, mit der Größe sehr erheblich wachsend, nach dem Vereins-Preiscurant von 1907, z. B. für Größen von 0,5 qm 22  $\mathcal{M}/\text{qm}$ , von 2 qm 28  $\mathcal{M}/\text{qm}$ , von 4 qm 29  $\mathcal{M}/\text{qm}$ , von 6 qm 31  $\mathcal{M}/\text{qm}$ , von 13 qm 33  $\mathcal{M}/\text{qm}$ .

\*) S. E. Hartig, Civil-Ingenieur Bd. 38 Heft 3; ferner C. Mühlke, Drahtglas, Z. d. B. 1892 S. 246.

Gegen die Ansätze dieser Preistafel wird je nach der Geschäftslage nach Prozenten abgeboten; i. J. 1907 stand der Nettopreis 25 bis 30 vH unter jenen Preisen. — Für das Einsetzen usw. ist hierzu ein Betrag von 30 bis 40 vH der Netto-Sätze zu rechnen.

**5. Prefshartglas** der Akt.-Ges. für Glasindustrie, vorm. Fried. Siemens, Dresden, besitzt große Biegungsfestigkeit, so dafs z. B. Oberlichter aus sehr dünnen (2 bis 4 mm starken) Platten hergestellt werden können. Dieses Glas kann aber nicht mit dem Diamant usw. geschnitten werden und ist daher genau nach Mafs zu bestellen. Wegen der kleinen Abmessungen der Platten (0,2 bis 0,5 qm) gibt es viele Fugen und Sprossen.

**6. Kathedralglas**, gegossenes, 2 bis 3 mm starkes, oft farbiges, auch geflammtfarbiges Rohglas mit unregelmäßiger Oberfläche; in mehreren Hütten (Wiesau in Schlesien, Zwiesel in Niederbayern) für Kirchenfenster und Profanzwecke hergestellt. Dämpft das Licht und ist wenig durchsichtig, ohne matt zu sein. In Tafeln von rd. 0,7. 1,5 m; Preis weifs 2,5  $\mathcal{M}$ /qm, getönt 3  $\mathcal{M}$ /qm, farbig 4  $\mathcal{M}$ /qm.

Aehnlich, aber besonders schön und auch kostspieliger ist das amerikanische **Opalescentglas** (K. Engelbrecht in Hamburg), das in Bleieinfassung trefflichen Ersatz für Glasmalerei abgibt. Preise 1,50 bis 4  $\mathcal{M}$ /kg. Wird jetzt auch in Schlesien hergestellt.

Alle diese Gläser können ganz oder in Mustern mattiert werden, u. zw. durch Aetzen mit Flußsäure oder durch Schleifen oder (minderwertig, da leicht schmutzend) durch das Sandstrahlgebläse. Das erste Verfahren ist am teuersten (in einem oder mehreren Tönen 10 bis 50  $\mathcal{M}$ /qm ohne Glas), gibt aber eine glatte, wenig schmutzende Oberfläche; das dritte ist schon für 0,75  $\mathcal{M}$ /qm ausführbar. — Die Färbung des Glases geschieht mittels verschiedener Metalloxyde in allen möglichen Tönen, u. zw. entweder in der ganzen Masse oder oberflächlich durch Ueberziehen ungefärbten Glases mit farbigem (sogen. Ueberfangglas).

Die Verbindung mit Holz und Eisen durch Glaserkitt s. S. 732. Zu Bleiverglasungen werden verwendet: Kathedralglas, Ornamentglas (gemustert, auch farbig), Antikglas, Butzenglas (geblasen), farbiges Flachglas, Ueberfangglas, Opalescentglas, Glassteine. Preise 15 bis 80  $\mathcal{M}$ /qm und höher, mit Glasmalerei bis 500  $\mathcal{M}$ /qm. — Viel fester gefast ist das Glas bei der neuen Elektroverglasung, die deshalb u. a. in Warenhäusern besonders große Brandsicherheit bietet und auch mit geringerem Lichtverlust verbunden ist.

Die **Luxfer-Prismen** (Deutsches Luxfer-Prismen-Syndikat G. m. b. H. Weifsensee bei Berlin) dienen zur Erhellung dunkler Räume mit außerordentlichem Erfolg. Diese weissen Glasfliesen von 10, 13,5 und 15 cm im Geviert, deren innere Seite mit parallelen prismatischen Querleisten versehen ist, werden auf elektrolytischem Wege durch sehr feine Kupferleisten fest verbunden: Elektroverglasung. Auswahl des Prismenwinkels je nach der Richtung des verfügbaren Lichtes. Die Tafeln werden lotrecht vor die Fenster oder an deren Stelle gesetzt oder als Schirmdächer mehr oder weniger schräg je nach dem Zenitwinkel aufsen angebracht. Für Räume unter der Erde sind die Multiprismen und besondere Glasprismenfliesen geeignet. Von großer Festigkeit und bedeutendem Widerstand gegen Feuer. Preis einschl. Aufstellung rd. 50 bis 70  $\mathcal{M}$ /qm. Zu

Oberlicht und Dach dienen die Luxfer-Scheiben bis zu 2,5 . 1,1 m, welche auf eigens konstruierten eisernen Sprossen kittfrei und beweglich, dabei völlig wasserdicht verlegt werden. Preis der Tafeln 15  $\mathcal{M}/\text{qm}$ , der Sprossen 2,5 bis 3,5  $\mathcal{M}/\text{m}$ . — Wichtige Ausführungen u. a. Berlin: Zeughaus, Untergrund-Bahnhof, Warenhäuser. — Neu sind die Luxfer-Oberlichtplatten in Eisenbetonkonstruktion, vollkommen tragfähig für Fußgängerverkehr, feuersicher und weniger als schmiede- und gußeiserne Rahmen Volumänderungen unterworfen. Preise 36 bis 50  $\mathcal{M}/\text{qm}$ . Ferner die künstlerisch hervorragenden Deckenabschlüsse aus „plastischem Glas“, Preis von 45  $\mathcal{M}/\text{qm}$  an. Metz, Bahnhof; Düsseldorf, Warenhaus. — Bewährt für Glasdächer ist auch die Sprossenkonstruktion Anti-Pluvius von J. Degenhardt in Berlin-Lichtenberg.

**Glasbausteine „Falconnier“** (Adlerhütten A.-G. Penzig, Schlesien), geblasen, sind flaschenartige, geschlossene Glaskörper von solchen Formen, daß sie sich ohne Zwischenräume zum Schließen von Maueröffnungen, Decken von Dächern usw. zusammenfügen lassen. Auch in Farben, sowie in halben und dreiviertel Steinen erhältlich. Mörtel: 3 T. Sand, 1 T. Zement mit etwas Kalkbrei. Etwa gebrochene Steine leicht auswechselbar. Ventilatoren aus Blech, an Stelle eines Steines zu setzen. Von den gangbarsten Sorten gehen rd. 55 Stück auf 1  $\text{qm}$ ; Preis des Steins halbweifs 30  $\phi$ . Für Brandmauern u. a. Zwecke werden sie mit Drahtmantel geliefert (u. a. 12 . 12 . 6,5 cm). Neu sind die für dünne Zwischenwände bestimmten rechteckigen Steine von 24 . 12,5 . 6,5 cm mit Falz (Preis 55  $\phi$  für 1 Stück). — Weil völlig geschlossen, können diese Steine durch Staub, Feuchtigkeit u. a. in ihrer Lichtdurchlässigkeit niemals leiden.

Höchst geeignet zu lichtgebenden, aber nur durchscheinenden Scheidewänden in Verkaufs-, Wirts-, Abort- usw. Räumen, zu blinden Fenstern in Giebelwänden, für Räume, die auf gleicher Temperatur zu halten sind (Gärtnerei, Kühlhaus, Eiskeller).

**Hartglasbausteine „Faust“** (Sächsische Glaswerke A.-G., Deuben), gepreßt, rechteckig, hohl und unten offen, von solchen Abmessungen, daß sie mit Normalsteinen in Verband gehen, übereinander und seitlich ineinander greifend; auch zu halb- und viertelsteinigen Wänden. Weifs und farbig.  $K = 32,6 \text{ kg/qcm}$ . Verwendung zu den gleichen Zwecken wie vorige. Preis für 59 Stück, die auf 1  $\text{qm}$  gehen, weifs 18  $\mathcal{M}$ . Auch Dach-, Fußboden- und Wandplatten aus demselben Glas.

Ähnlich zu verwenden sind die **Vitral Glasbausteine** (Gebr. von Streit in Berlin SW.) und die **Ideal-Glasbausteine** von der Rhein.-Westf. Prismen-Gesellschaft in Düsseldorf, leichter auswechselbar sind ferner die der Akt.-Ges. für Glasindustrie (Siemens), Dresden.

**Keramoplaten** Patent Garchey (Adlerhütten A.-G. Penzig, Schlesien), von der Härte des Korunds (9), empfehlen sich zu Fußbodenbelag (Trottoir und Pflasterung), Wandverkleidung (auch poliert), als Fassadenverzierung in verschiedener Färbung und Oberflächenbehandlung. Stärke 2 und 3 cm. Druckfestigkeit  $> 2000 \text{ kg/qcm}$ .

**Prüfung des Glases:** 1. auf Farblosigkeit: Eine oder mehrere Scheiben werden auf einen weissen Papierbogen, diesen teilweise bedeckend, gelegt und der Abstich geprüft; 2. auf Blasen, Schlieren, Wellen u. dgl.: Bei einem Lieferungsvertrage ist eine Probescheibe

von der ungefähren Gröfse der zu liefernden Scheiben zugrunde zu legen; 3. auf Haltbarkeit: Die Probe wird, von einer Glocke dicht überdeckt, den Dämpfen stark rauchender Salzsäure 24 st ausgesetzt und dann in völlig reiner, staubloser Luft 24 st getrocknet. Sie darf nicht den geringsten weiflichen abwischbaren Anflug aufweisen.

Da bisweilen farbloses Glas durch längere Einwirkung der Sonne bläulichrot wird, ist es für Gemäldegalerien, photographische Ateliers usw. auf seinen Mangengehalt zu untersuchen, wovon schon 0,1 vH jene Wirkung ausübt. — Windschiefe, verbogene oder mit Haarrissen behaftete Tafeln sind auszuschneiden.

## VII. \*) KAUTSCHUK UND GUTTAPERCHA. \*\*) ASBEST. \*\*\*)

**1. Kautschuk.** Gereinigtes und getrocknetes Gummi findet unvulkanisiert Verwendung als sogen. Paragummiband zur Isolation von metallischen elektrischen Leitern. Vulkanisiert, d. h. nach vorheriger Reinigung und Trocknung mit 2 bis 35 vH Schwefel vermischt und dann unter Druck einer Temperatur von 120 bis 150° C ausgesetzt, bildet es, je nach Vulkanisationszeit und Schwefelmenge, Weich- oder Hartkautschuk. Diese besitzen grofse Elastizität und Festigkeit, Luft- und Wasserbeständigkeit, gröfste Isolation gegen Elektrizität und Beständigkeit gegen eine grofse Anzahl von Säuren und Laugen.

Die Elektrotechnik verlangt für Schwachstrom hohe Isolation, für Starkstrom aufer vollkommener Isolation hohe Wärmebeständigkeit, Festigkeit und Unveränderlichkeit bei allen Lufttemperaturen, neuerdings auch eine gewisse Unverbrennbarkeit, so dafs das Isoliermaterial, wenn angebrannt, von selbst wieder verlicht (entsprechend § 3c der vom „Verb. dtsh. Elektrot.“ herausgegebenen „Sicherheitsvorschriften f. elektr. Starkstromanlagen“). Hierfür kommen vorwiegend harte und lederharte Kautschukfabrikate in Betracht. Reines Hartkautschuk (Hartkautschuk von Dr. Heinr. Traun & Söhne, Hamburg) vom spez. Gew. 1,15 besitzt nach Feststellung der physik.-techn. Reichsanstalt einen spezifischen Leitungswiderstand  $W = 565\,667 \cdot 10^6$  Megohm-cm, d. i. 1257-mal†) soviel als Guttapercha und 28-mal soviel als Flintglas. Für dasselbe Produkt war nach Ausweis der mechan.-techn. Versuchsanstalt zu Charlottenburg  $K_z = 6$  kg/qmm,  $\varphi = 1,5$  vH,  $\psi = 11$  vH; bei Druckfestigkeit waren die Spannungen an der Quetschgrenze  $\sigma_f = 5,8$  kg/qmm, an der Bruchgrenze  $K = 40,6$  kg/qmm. Letztere ging aber in der Wärme (bei 140 bis 150° C) auf 5 kg/qmm zurück.

\*) Firmen s. im Adreßbuch der deutschen Gummi-, Guttapercha- und Asbestindustrie 1910, Berlin SW.

\*\*) S. Dr. Chr. Heinzerling u. Wilh. Pahl in den Verhandlungen des Ver. z. Bef. d. Gewerbf. 1891; Dr. Eugen Obach, Die Guttapercha, Dresden 1899; Ed. Debes, Vortrag vor der Schiffbautechn. Gesellschaft Nov. 1900 und Z. d. V. d. I. 1901.

\*\*\*) W. Venerand, Asbest und Feuerschutz, Wien 1886; Union, Deutsche Verlagsgesellschaft, Das Ganze der Asbestverarbeitung, 2. A., Berlin 1910.

†) S. Uppenborn, Elektrot. Kal. 1904 S. 146.

Dagegen hat das Dr. Traunsche sogen. Eisengummi vom spez. Gew. 1,5, welches nach Ausweis der oben genannten Anstalt mindestens 158387 · 10<sup>6</sup> Megohm-cm spez. Leitungs-widerstand, d. i. das 352-fache der Guttapercha besitzt, folgende Festigkeitszahlen: für Zug  $K_z = 3,6$  kg/qmm,  $\varphi = 0,1$  vH,  $\psi = 0,5$  vH; für Druck  $\sigma_f = 8,7$  kg/qmm,  $K = 22,5$  kg/qmm; letztere nimmt aber bei Erwärmung bis 160° nur minimal ab. Damit entspricht dieses Gummi allen Anforderungen für elektrische Leitungen von hoher Spannung (Voll- und Straßbahnen). Das in verschiedenen Färbungen gelieferte Isolast findet zu gleichen Zwecken sowie besonders in der Automobiltechnik bei Herstellung von Zündapparaten allgemein Verwendung. Als ein Isoliermaterial von höherer Wärmebeständigkeit, wie es für die Starkstromtechnik ein Bedürfnis war, dient der vulkanisierte Stoff Lapisan, der wie Eisengummi und Isolast zu bearbeiten ist und bis 300° Wärme ohne Deformation verträgt.

Verwendung finden Weichkautschukfabrikate außer für Luftballons und in der Fahrrad- und Automobil-Industrie (bedeutendste Fabriken: Continental-Kautschuk- u. Guttapercha-Cie., Hannover. Vereinigte Gummiwaren-Fabriken Harburg-Wien. Franz Clouth, Rhein. Gummiwaren-Fabrik, Köln-Nippes) im Maschinen-, Kessel- und Röhrenbau als Dichtungsmittel, z. B. als Ventilkappen, Membranen, Manschetten. Lederhartes Kautschuk auch zum Aus- und Umkleiden von Rohrleitungen (Dr. Trauns Ideal-Qualitäten). Hartkautschuk (größte Fabriken außer Traun, s. oben: New York-Hamburger Gummiwaren-Comp., Hamburg. Hannoversche Gummikamm-Comp., Hannover) zu Ventilscheiben, Stopfbüchsen, Kolbenringen, Wassermessern, Jenkinsventilen, Zeigerrädern usw. bei Dampfheizungen. Lederhartes und hartes Kautschuk zu ober- und unterirdischen Isolatoren (Weitspann-, Wirbel- und Schnallenisolatoren), zu Schaltergriffen, zum Ueberziehen von Werkzeugen für die Elektrotechnik, zu einfachen und gepanzerten Isolierröhren für sichere Verlegung elektrischer Leitungen, zu Akkumulatorenkästen, zu den sogen. Ferronitnägeln (ohne Eisen, nicht unter 6 kg/qmm Druckfestigkeit). In der chemischen Industrie finden lederharte und harte Kautschukfabrikate mit und ohne Metalleinlagen steigende Verwendung zu Pumpen, Rohrleitungen, Hähnen, Zentrifugen usw., die säure- und laugenbeständig sein müssen. In der Röntgentechnik sind für die Strahlen undurchlässige Schutzstoffe (Antixplatten) geschaffen.

**2. Guttapercha** wird wie Gummi aus dem erstarrten Milchsafte gewisser Tropenbäume gewonnen und die rohe Masse dann vielfach gereinigt. Spez. Gew. rd. 1,0. Bei 55 bis 60° wird sie weich und so plastisch, daß sie zu Röhren, Fäden, Bändern ausgezogen werden kann, worauf sie beim Erkalten die feinsten Details der Form behält. Elektrisch ragt sie durch Isolierfähigkeit hervor. Sie ist unempfindlich gegen konzentrierte Laugen und verdünnte Säuren. Unverwundlich unter Wasser.

Verwendung weitaus am meisten in der Schwachstromtechnik zur Isolation von Untersee- und unterirdischen Kabeln, zu Schläuchen, Pumpen, Spritzen, Flaschen für chemische, medizinische und andere

Zwecke, zu Treibriemen, zu Abdrücken, Klischees, zu Zahnplomben, zur Anfertigung wasserdichter Gewebe.

3. **Asbest.** Der a) Serpentin-asbest (hauptsächlich „Canadafaser“) Härte 3 bis 4, spez. Gew. 2,3 bis 2,8 und der b) Hornblende-asbest (Italien, Böhmen u. a.) Härte 5,5 bis 6, spez. Gew. 2,9 bis 3 finden durch ihre vorzüglichen Eigenschaften, nämlich bei a): Feinste weiche Fasern, spinnfähig, schlechter Leiter für Wärme und Elektrizität, feuerfest, leicht mit anderen Stoffen zu verbinden, bei b) außerdem Säurebeständigkeit, steigende Verwendung in der Technik. Als reine aufbereitete Faser zum Klären und Schönen von Getränken sowie zum Füllen von Matratzen und Schnüren (s. unten). Gesponnen und verwebt zu feuerfesten Geweben für Theaterdekorationen (auch Appretur und Farbe feuersicher), für Kleidungsstücke, Feuerwehrschirme, -schutzwände und -matratzen, zu den Glühstrumpffäden, zu Filtergeweben in der chemischen Industrie (letzteres b). Geflochten zusammen mit Fäden aus Baumwolle, Hanf u. a., auch mit Blei- und Messingdraht zu Schnüren für beste, hitzebeständige Packungen. Mit Gummi zu Dichtungsplatten, -ringen und -rahmen, mit bestem Gummi zu den Hochdruckdichtungsplatten (Klingerit u. a. It-Platten) sowie in besonderer Verbindung zu den Marine-Blockpackungen. Mit geringem Kaolinzusatz zu den Asbestpappen (bis 30 mm stark) und -papieren. Mit überwiegend dem Portlandzement innig gemengt und geprefst zu dem Asbestzementschiefer (Eternit S. 705). Mit Kieselgur (5- und mehrfache Menge) zu Isolierkompositionen für Dampfkessel und -leitungen sowie zum Feuerschutz des Eisens (Plutonit). Letztere mit geringen Klebstoffzusätzen.

## VIII. WASSERGLAS, KITTE, ASPHALT, DACHPAPPE.

1. **Wasserglas.\*)** Kieselsaures Kali oder Natron, u. a. durch Schmelzen von Quarzsand und Pottasche oder Soda hergestellt, ist in Wasser löslich. Dicke, ölige, ätzende Flüssigkeit mit 33 oder mit 66 vH Wasserglas; wohlverschlossen aufzubewahren, da sonst die Kohlensäure der Luft zersetzend wirkt. Außer dem Kali- und dem Natronwasserglas hat man ein Doppelwasserglas.

Anwendungen: Schutz für Holz, Pappe, Zeug gegen Feuer, auch Schwamm und Wurmfraß. Kalk- und Zementputz, noch feucht mit verdünntem Kaliwasserglas (1:2) überstrichen, erhält eine sehr harte, gegen Feuchtigkeit widerstandsfähige Oberfläche (Waschküchen, Wetterwände). Ähnlich wird der Untergrund hergestellt für das stereochromische Malverfahren. Zum Silikatisieren der weichen (Pariser u. a.) Kalksteine. Ein wichtiges Mittel zur Herstellung von Kittten. Zum Verlegen der Xyolithplatten (s. S. 705) dient ein aus Kali-

\*) Näheres s. H. Zwick, Das Wasserglas, seine Bedeutung für die Industrie; Zürich 1877.

wasserglas von 34<sup>0</sup> Baumé (11 l), Schlämmkreide (7 kg), scharfem Sande und wenig Portlandzement hergestellter, schnell erstarrender Brei.

**2. Kitte.\***) Die betreffenden Flächen sind völlig zu reinigen, der Kitt ist in dünner, gleichmäßiger Schicht aufzutragen und vor der Erhärtung jede Erschütterung fernzuhalten.

1. Käsekitt. Zu Pulver gelöschter Kalk mit feinem Sande oder Ziegelmehl (1:1) vermischt und mit Wasser zu steifem Mörtel angemacht, dann mit dreifacher Menge Käsequark (durch Abpressen von der Molke erhalten, jetzt auch als trockenes Pulver im Handel) verrührt; guter Steinkitt. Ähnlich für Steinfugen der Zementkitt aus Zementpulver mit  $\frac{1}{4}$  Ziegelmehl, mit saurer Milch zu zähem Teige verarbeitet. Holzkitt: Gepulverter Aetzkalk mit zerriebenem, trockenem Quark (1:1) gemengt und mit 1 G.-T. Eiweiß verrührt.

2. Oelkitt. Leinölfirnis mit Bleimennige oder Bleiglätte, zusätzlich Kreide, Ton usw., gemischt. Glaserkitt besteht aus Leinölfirnis und Schlämmkreide, für besondere Zwecke hierzu noch Bleimennige. Verhärteter Glaserkitt wird aufgeweicht mit Kalilauge und Schmierseife. — Zur Beseitigung nasser Stellen in Mauern dient Mastixzement, d. i. Kalksteinpulver, feiner Sand, Bleiglätte mit Leinölfirnis durchgearbeitet. — Zum Belegen von Terrassen, Treppen usw. wird Oelzement verwendet, d. i. Schamottmehl, feinste Bleiglätte und heißes gekochtes Leinöl.

3. Harzkitt, wasserbeständig, verträgt aber keine Hitze. Zusammensetzung (in G.-T.) für Holzfugen: Kolophonium (2) und Ziegelmehl (1). — Steinkitt: Pech (2), Kolophonium (1) mit Mennige (1) und Ziegelmehl ( $\frac{2}{5}$ ). — Brunnenmacherkitt: Ziegelmehl (2) in siedend heißem Teer (1) eingerührt.

4. Glycerinkitt aus Bleiglätte und wenig verdünntem Glycerin, vorzüglich gegen Laugen, Säuren, Petroleum usw.

5. Wasserglaskitt. Wasserglas mit Kreide gibt eine wasserfeste, harte Masse. Für Steine: Wasserglas mit Roman- oder Portlandzement, sehr schnell erhärtend. Für Metalle, Stein und Holz: Wasserglas, Kreide und Zinkstaub.

6. Rostkitt (für Eisen oder Eisen auf Eisen): Schwefelblumen (1) und Salmiak (2) unter stetem Rühren mit Wasser (oder Essig) bei Zusatz von Eisenfeilspänen zu einem steifen Brei gemengt.

7. Kitt für Holz (oder Glas) auf Eisen: Gepulverter Bimsstein (oder Kreide) mit gleichem Gewichte Schellack zusammen geschmolzen und heiß aufgetragen.

8. Magnesiakitt. Gebrannte Magnesia in 30-prozentiger Magnesiumchloridlösung verrührt, erhärtet zu steinharter Masse (Sorels Zement). Dient zu allen Steinholzarten S. 705 sowie zum Inkrustatmarmor, auch zu künstlichen Mühlsteinen. — Ueber den Sklerolithzement s. S. 706.

9. Kitte für Eisen in Stein, zum Dichten von Rohren usw.: Reiner Portlandzement; ferner Spenzemetall, ein Gemisch von Schwefel mit Schwefelmetallen, Schmelzpunkt 160<sup>0</sup>; der Patent-

\*) Näheres s. Leonhardt, Kittfabrikation; Halle a. S. 1883.

Metall-Zement von Bassermann in Mannheim, Schmelzpunkt  $119^{\circ}$ , sehr dünnflüssig werdend, Druckfestigkeit  $K \sim 1000$  kg/qcm; der Atlas-Blei-Zement von den A.-B.-C.-Werken in Cöln a. Rh., Schmelzpunkt  $119^{\circ}$ , erhärtet sofort, spez. Gew. 1,9, also 6 mal so ergiebig als Blei. Die drei letzteren sind widerstandsfähig gegen Wasser, Säuren und Oele.

**3. Asphalt** wird sowohl das harzige Erzeugnis (Erdpech) als auch der davon durchdrungene natürliche Asphaltstein (d. i. ein Kalkstein mit etwa 10 vH Asphaltgehalt) genannt, aus dem das Erdpech ausgeschmolzen wird. Goudron besteht aus Trinidad-Asphalt mit 25 vH Rückständen aus der Destillation des Petroleums; wird in Fässern geliefert. Asphaltmastix (in schwarzen Broten von 25 kg Gewicht) wird hergestellt, indem man gepulverten Asphaltstein (10 G.-T.) in das geschmolzene Goudron (1 G.-T.) verrührt. — Oft geht auch Steinkohlenpech unter dem Namen Asphalt.

Gufasphalt [für wasserundurchlässige Flächen in Kellern, ferner in Höfen, Stallungen usw., für Bürgersteige, Trockenschichten usw.] ist Asphaltmastix in faustgroßen Stücken mit 4 bis 7 vH Goudron bei  $160^{\circ}$  geschmolzen und dann mit 50 vH reinem (nicht lehmigem), trockenem, grobem Sande oder feinem Kies zu Brei verarbeitet. In 1,5 bis 1,0 cm starker Schicht auszubreiten, sofort mit Sand zu bestreuen und abzuklopfen oder abzuwalzen.

Stampfasphalt (für Straßen): Zerschlagener Asphaltstein wird bei  $120^{\circ}$  zum Zerfallen gebracht; das warme Pulver wird auf die 15 bis 20 cm starke, trockene Beton-Unterlage (s. S. 718) 4 bis 6 cm hoch ausgebreitet und mittels heißer Eisenrammen, Plätteisen und Walzen befestigt und auf Steinhärte gebracht. — Für Bürgersteige u. a. sehr geeignet sind die Stampfasphaltplatten 25. 25 cm und 3 bis 5 cm stark, Preis 4,50 bis 6,20  $\mathcal{M}$ /qm (u. a. Herm. Consruch, Hamburg). Aus gepulvertem Gufasphalt durch Pressen der erwärmten Masse hergestellt (D. R.-P.) sind die bewährten Homogenplatten von Schliemann & Co., Hannover-Linden in verschiedenen Größen.

Asphalt-Filzplatten, einfache 0,7 cm, doppelte 1 cm stark, aus verfilzter Pflanzenfasermasse hergestellt, die völlig mit sogen. Asphalt durchtränkt und dann mit grobem Sande bestreut wird. Liefern wegen der Zähigkeit der Masse bessere Trockenschichten als Glas, Schiefer und auch als Dachpappe. Zu Unterlage und Schallschutz werden die Isolierfilze von Adlershof bei Berlin (darunter der Eisenfilz für Maschinen usw.) empfohlen.

**4. Dachpappe.** a) Teerpappe und Asphaltpappe. Die gewöhnliche Dachpappe wird hergestellt, indem man gute Pappe minutenlang mit kochendem Steinkohlenteer tränkt und nach dem Abtropfen mit grobem Sande bestreut; Gewicht bis 3 kg/qm. Vorteilhaft ist die „endlose“ (etwa 1 m breite und bis 20 m lange) Rollenpappe. Gute Dachpappe muß vom Teer völlig durchdrungen sein, so daß das Innere keine trockenen Stellen aufweist. Die aufgenagelte Pappe wird zur größeren Widerstandsfähigkeit gegen das Wetter mit Steinkohlenteer überstrichen, dem vorher in heißem Zustande zu Pulver gelöschter Kalk ( $\frac{1}{4}$ ) zugemischt ist. Hierauf wird Sand aufgesiebt.

Vorzüglicher, aber wesentlich teurer ist die Asphaltpappe oder der Asphaltdachfilz, aus besonders verfilztem Material und Asphalt hergestellt.

Die **Biehnsche Grundwasserabdichtung** (Hans Biehn & Co., Berlin W.) wird hergestellt aus 3 Lagen Asphaltfilzpappe mit 3 heifs aufgetragenen Anstrichen eines vorwiegend aus gereinigtem Trinidadasphalt bestehenden Asphaltkitts. Preis je nach den Verhältnissen 3 bis 6  $\mathcal{M}/\text{qm}$ . (Untergrundbahnen von Berlin, Pest, Hamburg u. a.)

Asphalt-Steinpappe mit Drahtgeflechtinlage (L. Linden-berg, Stettin) ist besonders geeignet für Stall- und Fabrikgebäude.

b) Ruberoid (Ruberoid-Ges. in Hamburg) ist eine Dachpappe, die durch Imprägnierung von Filz mit einer gummiähnlichen Masse und Ueberziehen mit einer härteren, ziemlich glatten Deckmasse hergestellt ist. Gibt ohne besonderen Schutzanstrich eine dichte und wetterbeständige, feuersichere, stets elastisch bleibende Bedachung, die sich bereits vorzüglich bewährt hat. Auch besonders zu Trockenschichten. In Rollen zu 20  $\text{qm}$  und 1 bis 2 mm Stärke 15 bis 19  $\mathcal{M}$  für 1 Rolle.

c) Wasserdichte Leinenstoffe (Weber-Falckenberg in Berlin SW.) geben eine feuer- und sturmsichere, äußerst leichte und billige Bedachung, in verschiedenen Farben geliefert. Länge bis 60 m, Breite bis 165 cm. Preise 2 bis 3,50  $\mathcal{M}/\text{qm}$ , je nach Farbe, wozu noch die wetterfeste Streichmasse. Sehr gut bewährt.

## IX. NUTZHÖLZER.

Das ältere, um die Achse des Stammes liegende Holz wird allmählich dichter und härter, zugleich trockener und dunkler gefärbt: der Kern. Der ihn umgebende, weichere und hellere Splint vermittelt allein das Wachsen des Baumes. Da das Kernholz in jeder Beziehung am widerstandsfähigsten ist, müssen alle wichtigeren Konstruktionsteile aus dem Kern geschnitten sein.

Das **Gefüge des Holzes** zeigt sich in den drei Schnitten: Der **Hirnschnitt** (Querschnitt), winkelrecht zur Stammachse, zeigt den Kern und Splint, die Jahresringe und Markstrahlen; der **Radialschnitt**, durch die Achse gelegt, zeigt u. a. das Mark in Form der **Spiegel**; der **Sehnenschnitt**, durch eine Sehne parallel zur Achse gelegt, zeigt die Jahresringe als mannigfaltig geförmte Längsstreifen. Nach diesen drei Schnitten unterscheidet man die Flächen eines Holzstückes in „Hirnholz“, „Spiegelholz“, „Langholz“.

### Physikalische Eigenschaften des Holzes.

1. **Spezifisches Gewicht** ist bei demselben Holze je nach Kern und Splint verschieden, besonders aber je nach dem Grade der Trockenheit. Allgemein enthält grünes Holz bis 37 vH Wasser und ist 33 bis über 50 vH schwerer als ausgetrocknetes Holz. — Spezifische Gewichte verschiedener Holzarten s. S. 634.

Schwerste Holzarten (lufttrocken) sind: Quebracho, Eiche; schwere: Weißbuche, Rotbuche, Pitchpine, Esche, Ulme; ziemlich leichte: Tanne, Kiefer, Erle, Lärche; leichte: Fichte, Pappel, Weide.

2. Nach der Härte ordnen sich die Hölzer wie folgt. Hart sind: Weißbuche, Eiche, Rotbuche, Ahorn, Esche und Ulme; mittelhart: Erle, Lärche und Kiefer; weich: Tanne, Fichte, Birke, Linde, Pappel und Weide. Die Härte der einzelnen Hölzer wechselt mit dem Standorte, Klima usw.

Widerstand der Holzarten gegen einen rechtwinklig zur Stammachse geführten Sägeschnitt: Rotbuche = 1, Kiefer = 0,53, Tanne = 0,56, Fichte = 0,60, Eiche = 1,03, Birke und Espe = 1,35, Weißbuche, Linde, Weide und Silberpappel = 1,87.

3. Der Widerstand beim Spalten ist am geringsten in der Fläche der Spiegel; im Sehnenschnitte meist  $1\frac{1}{3}$ - bis  $1\frac{1}{2}$ -mal so stark. Schwerspaltig sind: Weißbuche, Ulme und Esche; ziemlich leichtspaltig: Lärche, Erle, Kiefer und Eiche; leichtspaltig: Tanne, Fichte, Pappel.

4. Biugsamkeit und Zähigkeit. Junges Holz, frisch gefällt, ist am biugsamsten. Holz wird durch Wasserdampf ganz erweicht; es läßt sich dann nach Wunsch formen, behält die Form nach dem Trocknen bei und wird sehr hart (gebogene Möbel; geschweifte Kiefernholzbretter). Ebenso ist junges Holz zäher als dasselbe Holz im Alter. Trockene alte Hölzer vertragen keine Ueberlastung und plötzliche Erschütterung: Gerüsteinstürze durch das Aufwerfen der Steinlasten.

5. Ueber die Festigkeit\*) und Elastizität einiger Holzarten s. S. 517.

6. Die Wärmeausdehnung des völlig trockenen Holzes ist fast verschwindend, zumal in der Richtung der Stammachse (vgl. S. 391: Vorzug der Holzmasstäbe).

**Fällen des Holzes.** Als beste Fällzeit gilt der Winter, da angeblich das Sommerholz die Schwammbildung begünstigt.\*\*) Nach anderer Ansicht ist sorgfältig getrocknetes Sommerholz ebensogut und brauchbar wie Winterholz. Die Zeit vom August bis zum Oktober gilt als die ungünstigste Fällungszeit.

Durch die Jodprobe kann die Fällungszeit eines Holzes festgestellt werden, indem das Winterholz wegen der Reservestärke dabei eine blaue Färbung annimmt.

**Trocknen des Holzes:** An der Luft gibt frisches Holz sein Wasser allmählich ab bis zur Lufttrockenheit, wobei es noch 10 vH (Nadelholz) bis 17 vH (Laubholz) Wasser enthält. Das natürliche Austrocknen in luftigen, vor Sonnenschein und Nässe (auch vom Boden her) geschützten Schuppen (Zimmerholz) oder in gewärmten Lagerräumen (Tischlerholz) dauert je nach Art und Verwendung des Holzes, 1 bis 4 Jahre, bei Eichenholz wenigstens 1 Jahr länger.

Das künstliche Austrocknen (für Pitchpinedielen unumgänglich) geschieht in besonderen Trockenanstalten mit Hilfe eines heißen Luftstromes, der bei Eichenholz 40°, bei anderen Laubhölzern 30

\*) Ueber Prüfung von Holz betreffs Festigkeit und anderer Eigenschaften vgl. die vom Internat. Kongress f. d. Mat.-Prfg. d. Technik Brüssel 1906 angenommenen Vorschläge von M. Rudeloff. Bericht 23 d.

\*\*) Vgl. Fällzeit des Holzes, Z. d. B. 1885 s. 93.

bis 40°, bei Nadelhölzern 80 bis 95° für dünnere, 50° für dickere Stücke haben soll. Wirkt der Luftstrom täglich 12 Stunden, so rechnet man

bei einer Dicke von	2,5	5	7,5	10	15	20 cm
die Trockenzeit	1	2	3	4	7	10 Wochen.

### Schwinden und Quellen des Holzes.

Das bei dem Trocknen eintretende Schwinden ist verschieden stark, je nach der Art des Holzes und nach der Geschwindigkeit des Trocknens, stets aber beim Splint viel stärker als beim Kern. Es ist in der Richtung der Stammachse äußerst gering (bei den wichtigsten Bauhölzern um 0,1 vH), in der Richtung des Hirschnitt-Halbmessers größer (ebenso bis zu 3 vH) und am größten in der Richtung der Sehne eines Hirschnittes (ebenso bis gegen 7 vH); s. Tafel S. 737.

Die **Lavesohen Versuche** zur Ermittlung der in nachstehender Tafel enthaltenen Schwindmaße wurden mit sehr dünnen Holzstäbchen angestellt, deren Länge erst in grünem und vollkommen mit Wasser durchzogenem Zustande, dann nach längerem Trocknen (bei 14 bis 16°) gemessen wurde. Aus dem Unterschiede ergibt sich das spezifische Schwindmaß des Holzes in vH der ursprünglichen Abmessungen.

Getrocknetes Holz nimmt leicht Wasser wieder auf und dehnt sich dadurch bis zum früheren Volumen aus: das **Quellen**. Dabei entwickelt das Holz außerordentliche Energie (Spalten der festesten Steine mittels ausgetrockneter Holzkeile). Durch das verschiedene Verhalten von Kern und Splint beim Schwinden und Quellen entstehen die zum Teil starken Formveränderungen der geschnittenen Hölzer: das **Werfen** (Arbeiten, Verziehen, Reifsen) des Holzes. Der ganzgelassene Stamm reißt im Splintring, da dieser sich stärker zusammenzieht, wogegen nur das Ausbohren des Kerns hilft. Die aus dem Stamme geschnittenen Bohlen und Bretter wölben sich beim Trocknen, u. zw. wird die nach der Stammachse gekehrte „rechte“ (oder Bund-) Seite konvex. Bei einseitigem Drucke ist diese rechte oder Kernseite womöglich dem Drucke entgegen (z. B. bei Fußböden nach oben) zu legen. Wasser oder Feuchtigkeit einseitig läßt man am besten auf die „linke“ (oder Splint-) Seite wirken. Sehr wichtig ist das trockene Verlegen der Hölzer (Parkett), das Lassen von Fugen zwischen Schalbrettern u. a., die Anwendung von Keilen bei den Hölzern der Rüstung, das nur einseitige Nageln von Deckleisten u. v. a. Zusammensetzung der gestimmten Tischlerarbeiten aus zahlreichen Teilen in wechselnder Richtung. Gesperstes Holz (das Koptoxyl von Harras in Böhlen i. Thür. und das Stereoxyl von der Westdeutschen Holzindustrie in Holsterhausen i. Westph.) zu Täfelungen, Türen u. a.

### Arten der Zerstörung des Holzes.

1. Alles Faulen geht von der Zersetzung gewisser Saftbestandteile aus und wird meist von Pilzen gefördert. Das Ersticken oder Anlaufen (Blauwerden) des grünen Holzes ist unschädlich, falls das Holz rasch geschnitten und gut getrocknet wird. Das gewöhnliche Verfaulen oder 1. die nasse Fäule, die eine braune nasse Masse liefert, tritt ein, wenn das Holz mit nasser Erde usw. in Berührung steht oder abwechselnd nass und trocken wird. Seltener ist 2. die Trockenfäule, wobei eine trockene mürbe helle Masse entsteht, sowie 3.

## Schwindmaße der wichtigsten Holzarten.

Holzarten	Größe des Schwindens in der Richtung		
	der Achse	des Halbmessers	der Sehne
	vH	vH	vH
Ahorn . . . . .	0,072	3,35	6,59
Apfelbaum . . . . .	0,109	3,00	7,39
Birke . . . . .	0,222	3,86	9,30
„ , russische . . . . .	0,065	7,19	8,17
Birnbaum . . . . .	0,228	3,94	12,70
Buchsbaum . . . . .	0,026	6,02	10,20
Ebenholz . . . . .	0,010	2,13	4,07
Eiche, jung . . . . .	0,400	3,90	7,55
„ , 300 Jahre altes Bauholz . . . . .	0,130	3,13	7,78
Erle . . . . .	0,369	2,91	5,07
Esche, jung . . . . .	0,821	4,05	6,56
„ , 300 Jahre altes Bauholz . . . . .	0,187	3,84	7,02
Fichte (Rottanne) . . . . .	0,076	2,41	6,18
Guajak (Pockholz) . . . . .	0,625	5,18	7,50
Kiefer (Föhre) . . . . .	0,120	3,04	5,72
Kirschbaum . . . . .	0,112	2,85	6,95
Lärche . . . . .	0,075	2,17	6,32
Linde . . . . .	0,208	7,79	11,50
Mahagoni . . . . .	0,110	1,09	1,79
Nußbaum . . . . .	0,223	3,53	6,25
Pappel . . . . .	0,125	2,59	6,40
Pflaumbaum . . . . .	0,025	2,02	5,22
Rofskastanie . . . . .	0,088	1,84	5,82
Rotbuche . . . . .	0,200	5,03	8,06
Tanne (Weißtanne), jung . . . . .	0,122	2,91	6,72
„ , 300 Jahre altes Bauholz . . . . .	0,086	4,82	8,13
Ulme (Rüster) . . . . .	0,124	2,94	6,22
Weide . . . . .	0,697	2,48	7,31
Weimutskiefer (Strobe) . . . . .	0,160	1,80	5,00
Weißbuche . . . . .	0,400	6,66	10,30
Zeder . . . . .	0,017	1,30	3,38

die Humifizierung (beginnende Kohlebildung, Braunkohle, Torf), durch Berührung mit Mörtel gefördert. (1. und 3. sind Reduktionsvorgänge, 2. ein Oxydationsvorgang.)

2. Die Schwammbildung,\*) am gefährlichsten vom echten oder tränenden Hausschwamm, meist nur in Häusern vorkommend, neuerdings auch an Kiefernstämmen im Wald (Grunewald bei Berlin) beobachtet, aber auch u. a. vom Lohbeet-Löcherpilz herrührend, wird vor allem durch Feuchtigkeit, stillstehende Luft und Lichtmangel

\*) Vgl. das Merkblatt zur Hausschwammfrage vom Innungsverband Deutscher Baugewerksmeister, Berlin 1910.

begünstigt. Sie wächst äußerst schnell auch durch das Mauerwerk weiter und zerstört alles Holz vollständig, unter Verbreitung gesundheits-schädlichen Geruches. Ein schwammverdächtiges Haus ist unverkäuflich (Reichsgericht).

3. Der Wurmfräfs ist die zerstörende Einwirkung verschiedener Insekten und ihrer Larven: des Bohr- oder Klopfkäfers in Bauholz und Möbeln (Totenuhr); des Borkenkäfers in Nadelholzbäumen; des Spiessbockes in Eichen und des Zimmerbockes in Kiefern; des Weidenbohrers (Schmetterling, dessen Raupe Weiden, Ulmen, Erlen, Eichen, Kiefern anbohrt); der Holzwespe und ihrer Larven; der Bohr- oder Pfahlmuschel, die nur im Seewasser lebt und in den Häfen große Verwüstungen anrichtet.

4. Das Feuer ist besonders für die harzreichen Nadelhölzer gefährlich, weniger für die Eiche, am wenigsten für die Harthölzer Karri und Jarrah s. S. 740.

### **Schutzmittel gegen die Zerstörung des Holzes.**

1. Die Balkenköpfe sind vor der unmittelbaren Berührung mit dem Mauerwerke mit folgenden Mitteln zu schützen: einen mittelbaren Schutz bietet eine gute Trockenschicht, welche die Erdfuchtigkeit am Aufsteigen im Mauerwerk hindert. Gute Mittel dazu sind Asphaltfilzplatten, Ruberoid (S. 733), Bleiblech zwischen Dachpappe (Siebel in Düsseldorf); weniger Gufsasphalt und Zement; ungeeignet Glas oder Schiefer. Das Unterlassen einer wirksamen Isolierung wird u. U. als grober Verstoß anerkannt (Reichsgericht 1905). Wichtig ist ferner das gehörige Austrocknen des Baues, wo nötig künstlich, u. a. durch die hygienische Trockenheizung Patent Türk (Charlottenburg).

Gegen das Reißen durch Einwirkung der Sonnenwärme schützt man Holz durch einen Anstrich aus 2 R.-T. Steinkohlenteer, 1 R.-T. Holzteer, mit etwas Harz aufgeköcht und mit etwas trocken gelöschtem Kalk verührt. Die gewöhnliche Einwirkung von Nafs und Trocken wird durch Einreiben von Wachs (Parkett), durch Anstriche mit Leinölfirnis, guten Oelfarben, Holzteer, Avenarius-Carbolineum usw. ferngehalten; letzteres wohlfeile Mittel ist besonders zu empfehlen (bei einmaligem Anstriche 1 kg für 4 bis 6 qm). Vor dem Anstreichen soll das Holz mindestens lufttrocken, besser künstlich ausgetrocknet sein. — Das Ankohlen von Pfählen usw. ist als zweifelhaft zu verwerfen.

Ein bewährtes Mittel ist die Entfernung des Saftes durch Auswachsen (die weiter grünende Krone des im Frühjahr gefällten Baumes entzieht dem Stamme den Saft) oder durch Auslaugen (indem man die Stämme in fließendes Wasser mit dem Stammende zuberlegt; günstige, auslaugende Wirkung des Wassers beim Flößen), ferner durch Dämpfen des frischen Holzes in geschlossenen Behältern mittels überhitzten Wasserdampfes (60 bis 80 st) und nachheriges Austrocknen.

Sehr erprobt ist ferner die mehr oder weniger tiefgehende Durchdringung des Holzes mit fäulniswidrigen Stoffen: Metallsalzen oder Kreosotöl (schweres Teeröl), durch Imprägnieren (Durchtränken) oder nur durch Eintauchen. Das erstere lohnt sich am meisten bei Buche und bei Kiefer (Holzpflaster).

**Durohränken mit Kresotöl.** Die Hölzer werden, nachdem sie bei 100 bis 140° 3 bis 4 st lang ausgedorrt sind, in einem Kessel 1 st lang in einem Vakuum von  $\frac{1}{10}$  bis  $\frac{1}{5}$  at belassen, worauf das auf etwa 50° vorgewärmte Kresotöl eingeführt und etwa 60 bis 70 min unter einem Drucke von 6 bis 8 at eingepreßt wird. — Der Siedepunkt des Oels soll zwischen 180 und 400° liegen, sein spez. Gew. 1,0 bis 1,1 und sein Gehalt an sauren Bestandteilen 6 bis 10 vH betragen. Oelverbrauch bei Kiefernholz 140 bis 200 kg/cbm, bei Eichenholz 80 bis 90 kg/cbm, bei Buchenholz 270 bis 320 kg/cbm. — Für besondere Zwecke wird jetzt dem obigen Oel 50 vH Rohanthracen zugesetzt und mit dieser dickflüssigeren Masse noch größerer Erfolg erzielt.

Gegen diese Vollimprägnierung sind Oelverbrauch und Kosten gering bei der (von der Preussischen Staatsbahn jetzt allgemein vorgeschriebenen) **Rüpingschen Hohlprägnierung** (Rütgers werke A.-G. Berlin W 35): Die unter Druckluft (5 at) gesetzten Hölzer werden unter verstärktem Druck (15 at) mit dem Oel, soweit angängig, gefüllt, worauf dieses dann beim Nachlassen des Druckes von der inneren Luft größtenteils wieder herausgedrängt wird. Bei gleicher konservierender Wirkung beträchtliche Ersparnis an Oel (z. B. 68 kg statt 320 kg/cbm) und an Kosten (9 *M.* statt 20 bis 23 *M.*/cbm).

**Durohränken mit Zinkchlorid.** Das dem vorigen ganz ähnliche Verfahren, wobei von der 3 vH Zinkchlorid ( $ZnCl_2$ ) haltenden Lösung bei Buchen- und Kiefernholz 160 bis 200 kg/cbm, bei Eichenholz 90 bis 110 kg/cbm verbraucht werden, macht indessen das Holz sehr hygroskopisch; auch wird das Salz leicht ausgewaschen (was bei einem organischen Zinksalz weniger der Fall ist, Patent Wiese, 1901). Die reine Zinkchlorid-Tränkung wird deshalb fast gar nicht mehr angewendet, und auch die mit einer Mischung von Teeröl und Zinkchloridlösung gemachten Versuche (Verbrauch für eine Buchenholzschwelle 15 kg Oel und 18 kg Lösung) haben sich nicht bewährt.

**Durohränken mit Kupfervitriol.** Eine Lösung von 1,5 G.-T. Kupfervitriol auf 100 G.-T. Wasser wird durch den Druck einer Flüssigkeitsäule aus einem 10 bis 12 m höher stehenden Gefäß von der Hirnfäche des Wurzelendes aus durch den (vor höchstens 10 Tagen gefällten) Stamm getrieben; der Zellsaft fließt am Zopfende ab, und schliesslich erscheint die blaue Vitriollösung. Dauer der Tränkung einer 10 m langen Telegraphenstange (Nadelholz) etwa 13 Tage. 1 cbm Holz nimmt 9,5 kg Kupfervitriol auf. Kosten etwa 8 *M.*/cbm. — Geschnittene Hölzer läßt man in einer zementierten Grube 6 bis 14 Tage in der Lösung liegen. Der Kupfervitriol darf keinen Eisenvitriol enthalten, das verwendete Wasser muß kalkfrei sein, alle Eisenteile sind fern zu halten — Dieses Verfahren wird für Telegraphenstangen vielfach (siehe jedoch unten), für Eisenbahnschwellen kaum noch angewendet.

**Aufnahme von Quecksilberchlorid (Sublimat).** In hölzernen Bottichen (keine Eisenteile) wird eine Sublimat-Lösung (1 HgCl<sub>2</sub>: 150 Wasser) hergestellt, in die z. B. Nadelholzschnellen 8 bis 10 Tage, Eichenholzschnellen 12 bis 14 Tage eingelegt werden, wobei jede Schwelle etwa 0,125 kg Sublimat, und zwar bis 2 mm unter der Oberfläche aufnimmt. Kosten für 1 Eisenbahnschwelle 0,75 bis 1,00 *M.* Die Arbeiter sind vor der Einwirkung des höchst giftigen Sublimats zu schützen. Aus demselben Grund ist dieses, übrigens weniger angewendete Verfahren nur für Telegraphenstangen, Grubenhölzer, Schwellen, Dachstühle u. a., nicht für Wohnungen, Ställe u. a. zulässig.

Die Anwendung aller Metallsalze bringt eine gewisse Brüchigkeit hervor und setzt ein langes Austrocknen vor dem Gebrauch voraus. Dagegen leistet die Oelimprägnierung, abgesehen vom schlechten Aussehen und Geruch, die vorzüglichsten Dienste, indem die Festigkeit des Holzes erhöht und die Wasseraufnahme unmöglich gemacht wird.

2. Schwamm in Bauwerken wird verhütet durch sorgfältiges Fernhalten aller Keime (verdächtiger Bauschutt) und alles dessen, was das Wachsen des Pilzes befördert (Wasser, Urin), daher Trockenhalten alles Holzwerkes und Anbringung von Luftgängen um dasselbe herum. — Wird der Schwamm bei seinem Auftreten frühzeitig erkannt, so kann er durch Entziehen von Feuchtigkeit (Heizung und Lüftung), besser durch Anstreichen mit Sublimatlösung oder mit Avenarius-Carbolineum (Preis dieses vorzüglich, aber stark riechenden und dunkel färbenden Mittels 34 bis 36  $\phi$ /kg) oder mit dem wasserlöslichen Antinonin-Carbolineum der Farbenfabriken vorm. Friedr. Bayer & Co. in Elberfeld zerstört werden. Das letztere Mittel, als 2-prozentige wässrige Lösung warm aufgestrichen, was nach 3 Tagen wiederholt wird, eignet sich wegen seiner Geruchlosigkeit besonders im Inneren, zumal dabei die Farbe des Holzes unverändert bleibt. Ebenfalls sehr wirksam ist

das Mikrosol von Rosenzweig & Baumann in Kassel (Preis 7,25 *M*/kg), dessen 2-prozentige Lösung ebenfalls die Farbe des Holzes nicht merklich verändert. Kochsalzlösung, die immer noch empfohlen wird, sowie manche teuren Geheimmittel sind als unwirksam zu verwerfen.

Bei starken Schwammwucherungen ist alles davon Befallene rücksichtslos zu entfernen und zu verbrennen, bevor die Ersatzteile, sorgfältig angestrichen, eingebracht werden.

3. Wurmfräfs wird durch Anstrich mit fettigen und harzigen Stoffen (wie Petroleum, Holzteer u. dgl.) verhindert. Nach alter Erfahrung soll der Wurm nicht in Hölzer gehen, die lotrecht entgegen ihrer Wachstumsrichtung gesetzt sind. — Vom Wurm ergriffenes Holz versieht man mit mehrmaligem Anstrich von Seifensiederlauge (Aetzatronat mit Fett eingekocht) mit Kochsalz [26 R.-T. Lauge : 3 R.-T. Salz] oder von Karbolsäure oder von einem der Schwammvernichtungsmittel. Auch tötet man die Larven durch Benzindämpfe (Vorsicht!), ferner durch Eintropfeln von roher Salzsäure oder Sublimatlösung in die Wurmlöcher. — Pfähle für Seewasser werden sorgfältig imprägniert mit Teeröl; auch mit Kupfervitriol, in festem Zustand eingeführt, hat man (in Norwegen) guten Erfolg gegen die Böhrmuschel gehabt.

4. Schutz gegen Feuer ist insoweit möglich, als das Brennen mit Flamme verhindert wird. Hierzu 5- bis 6-mal wiederholter Anstrich mit sehr dünner Wasserglaslösung, die mit etwas Ton oder Kreide oder Schwerspat versetzt ist; oder mit einer Chlorkalziumlösung, in der man gebrannten Kalk gelöscht hat; oder mit der Feuerschutzmasse von Hülberg & Co., Charlottenburg (bei Brandproben 1901 gut bewährt). Neuer und seit 1904 vom Berliner Polizeipräsidentium zugelassen ist das Verfahren der Deutschen Gautsching-Gesellschaft, Charlottenburg. — Mit einer gesättigten Lösung von schwefel- und phosphorsaurem Ammoniak unter Druck getränktes Holz (englischer Kriegsschiffbau) ist selbst durch Stichflamme nur zum Verkohlen zu bringen.

Das Feuerfangen von Holzverkleidungen und das Durchschlagen des Feuers durch Balkendecken (Speicher) wird verhindert durch Aufnageln oder Einlegen von Asbestpappe, 5 mm bis mehrere cm stark. (Brennproben Stettin 1901.) Ebenfalls wirksam ist der Drahtziegelputz von Staufs & Ruff in Kottbus sowie der Asbestmörtel auf Drahtgewebe von Sauerzapf in Dresden.

**Dauer des Holzes.** In fortwährender Trockenheit sowie immer unter Wasser ist die Dauer des Kiefern-, Lärchen- und auch Fichtenholzes sehr bedeutend, die des Eichenholzes unbegrenzt. Die Grundpfähle werden 30 cm unter dem niedrigsten Grundwasserstand gekappt.

Dagegen hält kein Holz dem Wechsel von Nafs und Trocken, also dem Wetter ausgesetzt, auf die Dauer stand. Man rechnet für Eiche 100, Kiefer und Lärche 40 bis 85, Fichte 40 bis 67, Pappel 20 bis 30 Jahre. Im Boden eingegrabenes Holz hält sich in Ton-, Lehm- oder nassem Sandboden am besten, weniger gut in trockenem Sandboden, am schlechtesten in Kalkboden. Vorzüglichen Schutz gewährt auch hier das *Avenarius-Carbolineum*.

**Holz als Ware.**

1 Festmeter (fm) = 1 cbm fest zusammenhängender Holzmasse;  
1 Raummeter (rm) = 1 cbm geschichteten Holzes = 0,7 bis 0,8 fm.  
Im Walde heißt **Derbholz** alles Holz von 7 bis 14 cm Dmr., **Reiserholz** alles Holz unter 7 cm Dmr.

Zunahme der Stärke eines Baumstammes vom Zopfende an für 1 m Länge: bei Nadelhölzern 1,0 bis 1,5 cm; bei Laubhölzern 1,5 bis 2,5 cm.

**Wald-Nutzholz** wird gehandelt und eingeteilt in

## a. Langholz.

1. Stämme über 14 cm Zopfstärke (Wahlhölzer), ferner Schneidhölzer und gewöhnliche Rundhölzer (in fm);
2. Derbstangen von 7 bis 14 cm Dmr. (in fm) und Lattstämme, Gerüststangen, Leiterbäume, Hopfenstangen usw. 1. bis 3. Klasse (Stückzahl);
3. Reiserstangen [Hopfen- und Bohnenstangen, Baumpfähle, Schricken (für Absteifung und Gerüstzwecke), Zaunstücke usw.] (Stückzahl);

## b. Schichtholz (in rm).

1. Derbholz; 2. Derb-Grubenholz; 3. Reiserholz.

**Handels-Nutzholz** wird gehandelt und eingeteilt in

- a. Rundholz (in fm): 1. Mühlwellen, Hammerachsen, Sägeblöcke usw.; 2. gewöhnliches Rundholz;
- b. Kantholz (in fm): 1. splintfreie Balken; 2. scharfkantige Balken; 3. vollkantige Balken; 4. baumkantige Balken; 5. Pfosten;
- c. Breitschnittholz: 1. Planken, 10 bis 15 cm stark (in fm); 2. Bohlen, 5 bis 10 cm stark (in fm); 3. Bretter, Borde, Dielen, 1,5 bis 4,5 cm stark (kantig nach qm, „preussische“ Stammdielen nach Stückzahl);
- d. Latten (in m): 1. Dachlatten, 2,5 . 5 cm bis 4 . 6 cm stark; 2. Doppellatten, 5 . 8 cm stark; 3. Spalierlatten, 1,5 . 2,5 cm bis 2 . 4 cm stark;
- e. Brennholz: 1. Scheitholz, gespalten, über 14 cm Dmr. (in rm); 2. Knüppelholz, 7 bis 14 cm Dmr. (in rm); 3. Reiserwellen, Hölzer unter 7 cm Dmr. (Stückzahl).

Das Bau-Rundholz (Langholz, unbeschlagenes Ganzholz) zerfällt nach der Stärke und Länge in folgende Arten:

Art	Zopfdurchmesser cm	Länge m
Aufsergewöhnlich starkes Holz . . .	35 und mehr	14 und mehr
Gewöhnliches starkes Holz . . .	25 bis 35	12 bis 14
Mittelbauholz (Riegelholz) . . .	20 „ 25	9 „ 12
Kleinbauholz (Sparrholz) . . .	15 „ 20	9 „ 11
Bohlstämme . . . . .	13 „ 15	7 „ 9
Lattstämme . . . . .	8 „ 13	7 „ 9

Sägeblöcke haben eine mittlere Länge von 8 m bei 35 bis 50 cm Zopfstärke. — Das Ganzholz (beschlagen und unbeschlagen) liefert

gehälftet das Halbholz und geviertelt das Kreuzholz (besonders geschätzt für feine Zimmerarbeiten). Roh mit der Axt beschlagenes Ganzholz (austrocknungs- und versandfähiger als unbeschlagenes) ohne scharfe Kanten wird wahnkantig (waldkantig, baumkantig) genannt. — Spaltholz wird durch Längsteilung der mehrfach quer durchschnittenen Stämme mittels Keile oder Axt erhalten, ist fester und weniger dem Werfen ausgesetzt als Schnittholz; wird u. a. zu Holznägeln, Hammerstielen sowie als Stakholz für Windelböden benutzt.

Das Bau-Kantholz (Verbandholz) ist im Handel in allen Abmessungen von 7.7 cm bis 28.30 cm und mehr erhältlich.

Im Jahre 1898 hat der Innungsverband deutscher Baugewerksmeister (unter Zustimmung der deutschen staatlichen und städtischen Behörden sowie der deutschen Architekten- und Ingenieur-Vereine, folgende Normalien aufgestellt:\*)

### 1. Normalprofile für Bauhölzer in cm.

8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30
8/8	8/10	10/12	10/14	12/16	14/18	14/20	16/22	18/24	20/26	22/28	24/30
.	10/10	12/12	12/14	14/16	16/18	16/20	18/22	20/24	24/26	26/28	28/30
.	.	.	14/14	16/16	18/18	18/20	20/22	24/24	26/26	28/28	.
.	.	.	.	.	.	20/20	.	.	.	.	.

2. Normalien für **Schnittholz** (Bretter, Bohlen, Pfosten, Latten). In Längen von 3,5, 4, 4,5, 5, 5,5, 6, 7 und 8 m. In Stärken von 1,5, 2, 2,5, 3, 3,5, 4, 4,5, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12 und 15 cm. Besäumte Bretter in Breiten von cm zu cm steigend.

**Eisenbahnschwellen.** Näheres s. III. Bd. Eisenbahnbau; über Durchtränkung s. S. 738.\*\*) — Lieferungs-Bedingungen:

Vollständig gesundes, kerniges Holz, frei von Rinde (bei Eichenholz auch frei von Splint), frei von jeder Fäulnis; keine lockere und schwammige Beschaffenheit, kein Drehwuchs, keine Risse und losen Jahresringe. Zulässig sind nur gesunde Aeste, die nicht mehr als  $\frac{1}{6}$  des Querschnittes einnehmen. Dürre Aeste müssen ausgehauen werden, doch darf dabei höchstens  $\frac{1}{12}$  des Querschnittes verloren gehen; die Schienenaufleger müssen hiervon frei und vollständig sein.

Zulässige Längenabweichungen  $\pm 5$  cm; die Mitte des Schienenauflegers höchstens um 3 cm aus der Mittellinie. Schwellen, welche kleine Abweichungen von den verlangten Abmessungen haben, sonst aber gut sind, werden um 20 vH billiger übernommen, jedoch soll die Zahl dieser sogen. Klassenschwellen  $\frac{1}{10}$  der Lieferung nicht überschreiten.

Weichenschwellen müssen im Querschnitt vollständig rechteckig (30.18 cm) sein und dürfen keine Wahnkantung haben.

Die mittlere Dauer der Eisenbahnschwellen in geeigneter Bettung (und ferner bei guter Durchtränkung, vgl. III. Bd., Eisenbahnbau) sowie die Kosten einer ungetränkten Vollbahnschwelle sind folgende:

\*) S. Erlaß des preufs. Ministers der öffentl. Arbeiten vom 5. Juli 1898, Z. d. B. 1898 S. 373.

\*\*) Ueber die Verwendung von **Buchenschwellen** auf preufs. Staats-Eisenbahnen s. Z. d. B. 1898 S. 127 u. f., auf der französ. Ostbahn ebendas. 1898 S. 263.

Holzart	natürlich	getränkt mit Teeröl	Schwellenpreis
Kiefern- und Lärchenholz . .	7 bis 9 Jahre	15 bis 20 Jahre	2,5 bis 3,5 M
Fichten- und Tannenholz . .	4 " 5 "	8 " 15 "	1,5 " 2,5 "
Buchenholz . . . . .	2 1/2 " 3 "	25 " 35 "	3,2 " 4,2 "
Eichenholz . . . . .	15 " 20 "	20 " 30 "	4,5 " 6,0 "

Schwellen aus **Garaboto-Quebrachholz** (in ungeschütztem Zustand) sollen ungleich längere Dauer haben. Versuche damit werden auf preußischen Bahnen angestellt.

**Telegraphenstangen und Masten für elektrische Leitungen** aus Kiefern-, Fichten-, Tannen- und Lärchenholz (Eichenholz selten). Stangenlängen 7, 8,5 und 10 m. Zopfdurchmesser der geschälten Stange 15 cm; Verjüngung vom Stammende zum Zopfende auf 1 m Länge etwa 1 cm. Mindest-Durchmesser am Stammende bei 7 m Stangenlänge 22 cm, bei 8,5 m 23,5 cm und bei 10 m 25 cm.

Für Nebenlinien werden auch 7 m lange Stangen mit 12 cm Zopfstärke benutzt. — Sonstige wesentliche Bedingungen: Gerader Wuchs, gesunder Stamm, keine Astlöcher oder Spaltstellen, wirkliches Stammende eines Baumes. Die Durchtränkung der frischen, noch ungeschälten Stangen mit Kupfervitriol (s. S. 739) ist jetzt seitens der Reichspostverwaltung zugunsten der Rüpingschen Hohlprägung (s. oben) fast ganz verlassen. Ungeschützt haben sie etwa 7,7 Jahre, geschützt mit Kupfervitriol 11,7, mit Sublimat 13,7, mit Teeröl 20,6 Jahre Gebrauchsdauer.

**Holzstiele** für Handwerkszeuge: Hammer-, Hacken-, Picken- und Axtstiele aus Eschen-, Weifsbuchen und amerikanischem Hickoryholz; Beilstiele auch aus Rotbuchenholz. Spaten-, Schaufel- und Gabelstiele sowie Turngeräte und Ruder aus Eschenholz.

**Brennholz.** 1 cbm Scheitholz (Klobenholz) enthält etwa 0,7 fm Holz, 1 cbm Knüppelholz enthält 0,60 bis 0,65 fm Holz. — Weiteres s. S. 475.

### Bauholz-Arten.

Da Deutschland seinen Bedarf mit eigenem Holz nicht decken kann, ist es in steigendem Maße auf andere Länder angewiesen, besonders Rußland, Skandinavien und Nordamerika. Neuerdings werden auch aus Südamerika, Australien und Ostasien Bauhölzer eingeführt.

Die zu Bauzwecken verwendeten wichtigsten Holzarten sind:

**Eiche** (Sommer- oder Stieleiche und Winter- oder Steineiche), wertvollstes Holz überhaupt, in jeder Hinsicht das beste, sowohl für Hoch-, Tief-, wie Mühlen-, Schiff- und Wasserbau.

**Kiefer** (Föhre) vorzüglich im Trockenem (bestes Zwischendecken- und Dachholz), sowie unter Wasser (Grundpfähle), auch verhältnismäßig dauerhaft im Wechsel von naß und trocken (Bauten im Freien).

**Pitchpine** (Pechkiefer) von Kanada (das Kernholz des Baumes) in jeder Hinsicht vorzügliches Holz, zu manchen Zwecken dem Eichenholz gleichgeschätzt, dabei viel billiger als dieses. Für Deutschland nicht mehr zu entbehren. — Das viel hellere Splintholz, als Redpine gehandelt, weniger wertvoll.

**Lärche**, wertvollstes einheimisches Nadelholz; Verwendung (bei uns selten) wie Eiche oder Kiefer, z. B. zu Grundpfählen.

**Fichte** (Rottanne), im Trockenem (einfacherer Hausbau) oder aber ganz unter Wasser haltbar (besonders lange Grundpfähle), dagegen nicht im Wechsel von nafs und trocken. Unterscheidung von Kiefer durch den Wuchs der Aeste.

**Tanne** (Weifstanne, Edeltanne) verhält sich wie Fichte. Seltener.

**Ulme** (Rüster) überall trefflich zu verwenden, besonders im Mühlen-, Wasser- und Schiffbau.

**Rotbuche** hält sich, wenn ganz im Wasser befindlich, sehr gut, aber nicht im Wechsel von nafs und trocken; zu Schiffs- und Grundbauten, sowie Parkett.

**Erlé** vorzüglich zum Grund-, Wasser- und Mühlenbau.

**Ahorn** (besonders der Zuckerahorn) wegen seiner außerordentlichen Härte und Zähigkeit zu Fußböden für Speicher, Karrenbahnen (statt Eisen) u. a. geeignet.

Andere einheimische Hölzer wie Esche, Weifsbuche, Pappel usw. werden nur stellenweise als Bauhölzer verwendet. Von ausländischen sind noch zu nennen das indische Teakholz, noch fester und dauerhafter als Eichenholz, höchst geschätzt für allerbeste Fenster und Türen sowie für den Schiffbau, das Quebrachoholz vom Laplata (s. oben). Die westaustralischen Harthölzer Tallow, Karri und Jarrah (sämtlich Eukalyptusarten) von den ausgezeichnetsten Eigenschaften für alle Bauzwecke u. a. Pflaster, Parkett, Dübel.

## **X. SCHMIERMITTEL.\*)**

Eigenschaften eines guten Schmiermittels sind:

1. Möglichst grose Schlüpfrigkeit (Adhäsion, Klebrigkeit).

Das Mittel muß fest an den Gleitflächen haften, damit es sie möglichst vollständig und nachhaltig voneinander trennt und nur allmählich ihrem Drucke weicht.

2. Hinreichend flüssige Beschaffenheit (geringe Kohäsion).

Die Teilchen müssen äußerst leicht gegeneinander verschiebbar sein, um auch die kleinsten Unebenheiten der Gleitflächen jederzeit auszufüllen, und um nicht ihrerseits durch zu grose innere Reibung ein Hindernis für die Bewegung abzugeben. Je leichtflüssiger aber, um so eher wird das Mittel herausgepreßt, desto größer ist also der Verbrauch sowie auch die Gefahr des Warmlaufens.

3. Möglichste Unveränderlichkeit a) gegenüber der Einwirkung der Luft, b) gegenüber den Druck- und Temperaturänderungen.

a) Verharzung und dadurch Krustenbildung — durch Wärme und Staub begünstigt — besonders bei Harzölen gefährlich, die überhaupt die schlechtesten Schmiermittel sind. b) Verdampfung (z. B. Mineralöle bei etwa 150° im Dampfzylinder und Schieberkasten) und Zersetzung (besonders durch den Wasserdampf). Entwicklung brennbarer Gase aus dem Oel durch Erwärmung, weshalb u. a. Petroleum und Beimischungen desselben ganz unzulässig sind. Wichtigkeit des Entflammungspunktes. — Kältebeständigkeit bei Wintertemperaturen (Eismaschinen).

\*) Näheres s. J. Grofsmann, Die Schmiermittel und Lagermetalle; Wiesbaden 1894, C. W. Kreidels Verlag. — Anleitung zur Einrichtung und Instandhaltung von Triebwerken, herausgegeben von der Berlin-Anhaltischen Maschinenbau-Akt.-Ges. in Berlin NW. und Dessau. — A. Künkler, Die Maschinenschmierung (die Schmiermittel und ihre Untersuchung); Mannheim 1893. — D. Holde, Die Untersuchung der Schmiermittel. 3. Aufl. Berlin 1909. — L. F. Andés, Vegetabilische u. Mineral-Maschinenöle, Wien 1893. — S. Kapff, Wertbestimmung von Schmierölen, Z. d. V. d. I. 1898 S. 553 u. f.

#### 4. Völlige Säurefreiheit.\*)

Die Gleitflächen (wie auch zufällig von dem Schmiermittel berührte Maschinenteile) leiden sehr durch die geringsten Spuren freier unorganischer Säure (Schwefelsäure), die selten bei Mineralölen vorkommt, niemals aber in den pflanzlichen und tierischen (Fett-)Öelen vorkommen soll; organische Säuren, in den Fetten enthalten und daraus bei der Zersetzung sich bildend, sind nicht ganz so gefährlich.

5. Reinheit von festen Beimengungen, ungelösten wie auch gelösten.

Solche Beimengungen (Gewebeteile, Schleim bei Pflanzenölen, Hautteile bei Talg, Koksteile bei Mineralölen, beschwerende Verfälschungen bei allen) erzeugen selbst Reibung und veranlassen Krustenbildung, Verstopfung der Zufuhrkanäle usw. Die von den Gleitflächen unvermeidlich abgeriebenen feinen Metallteilchen machen die Schmiere selbst nach einiger Zeit für die Flächen äußerst gefährlich; deshalb ist die Erneuerung der Schmiere notwendig.

#### 6. Wasserfreiheit.

Die bei der Dochtschmierung verwendeten Öele dürfen höchstens Spuren Wasser enthalten, da dieses die Saugfähigkeit der Dochte vermindert.

Ein wirtschaftlich vorteilhaftes Schmiermittel muß mit möglichst großer Schlüpfrigkeit eine gewisse Zähflüssigkeit verbinden, u. zw. bis zu solchem Grade, daß die dadurch bewirkte Erhöhung der inneren Reibung (Arbeitsverlust und Erwärmung) nicht den Vorteil des geringeren Verbrauches aufhebt.

Bei der **Wahl des Schmiermittels** sind (abgesehen vom Preise) zu berücksichtigen; 1. der spezifische Druck der Flächen, 2. deren Gleitgeschwindigkeit, 3. die Temperatur bei der Schmierwirkung.

Bei einem Zapfen z. B. dessen Belastung mäÙsig und dessen Umdrehungsgeschwindigkeit klein ist, wird dem äußerst schlüpfrigen und dünnflüssigen Rüböl ein noch genügend schlüpfriges, (noch bei 50°) zähflüssiges Mineralöl vorzuziehen sein, weil der Verbrauch an Rüböl zu groß sein würde. Handelt es sich um einen höheren spezifischen Druck (z. B. bei Kurbelzapfen großer Dampfmaschinen), so ist das Rüböl am Platze, weil das entsprechende Mineralöl wegen der geringeren Schlüpfrigkeit dem Drucke nicht widersteht.

Bei geringerem Drucke und großer Geschwindigkeit, z. B. bei den Spindeln der Spinnmaschinen, ist die Dünnflüssigkeit erstes Erfordernis, weil mit der Geschwindigkeit die innere Reibung wächst; daher dünnflüssiges Mineralöl allein oder mit 25 vH Baumöl. — Für die in Dampf gehenden Teile (Kolben, Schieber usw.) ist die höchste Schlüpfrigkeit wesentlich, weil für höhere Temperaturen der Grad der Flüssigkeit den verschiedenen Mitteln sehr wenig abweicht.

Da sich bei niedrigen Temperaturen der Flüssigkeitsgrad der Mineralöle mit dem Wärmegrade stark verändert, so ist bei diesen auch die Beachtung der Temperatur wichtig. Mineralöle, die bei 20° noch sehr dickflüssig sind, erweisen sich bei 35° bis 40° oft halb so dickflüssig und bei 50° bis 60° ganz dünnflüssig.

Die Starrschmiere,\*\*) ein dickflüssiges Fett, empfiehlt sich nur selten als Schmiermittel. Ihre Vorteile (sie tropft nicht ab und bleibt auch beim Stillstande an ihrer Stelle, verhindert den Zutritt von Staub, daher sparsamer Verbrauch, bequeme Bedienung) werden durch die folgenden Nachteile vielfach aufgewogen: Bei geringer Schlüpfrigkeit und äußerst hoher innerer Reibung ist die Abnutzung der Flächen und ebenso der Arbeitsverlust sehr beträchtlich\*\*\*): außerdem UngleichmäÙigkeit und Unsicherheit der Schmierung, Notwendigkeit, die Schmiere durch besonderen Druck den Flächen zuzuführen, völlige Undurchsichtigkeit, welche mechanische Beimengungen nicht erkennen läÙt, großer Verbrauch an Putzlappen, die nur mit Benzin wieder zu reinigen sind. Dagegen ist bei langsam laufenden schwerbelasteten Zapfen, bei ausgedehnten Triebwerkanlagen mit geringen Umlautzahlen, bei Leerscheiben, bei schwer zugänglichen Lagern die Verwendung der Starrschmiere u. Umst. zweckmäÙig.

\*) S. Keller, Z. d. V. d. I. 1888 S. 676.

\*\*) Vgl. Heusinger von Waldegg, Schmiermittel der Eisenbahnen; Wiesbaden 1871.

\*\*\*) Vgl. Woodbury, Measurements of the friction of lubricating oils; New York 1885.

Das in den Abtropfbehältern der Lager aufgefangene Schmieröl ist mit Metallteilchen, Staub usw. so stark verunreinigt, daß es in diesem Zustande nur zu anderen Zwecken (Schmirgeln, Löcherbohren usw.) gebraucht werden darf. Bei der sehr reichlichen Schmierung rasch umlaufender Maschinen (Gasmaschinen, Dynamomaschinen usw.) empfiehlt es sich, das Tropföl durch völlige Reinigung wieder gebrauchsfähig zu machen.

Aus den zur Reinigung verwendeten Putzstoffen läßt sich das Schmieröl durch eine Schleuder zum Teil wiedergewinnen. Eine vollständige Befreiung des Putzstoffes von Oel und Fett geschieht durch Waschen mit Benzin (Rührwerk in geschlossenem Behälter).

### 1. Fette Oele und Fette.

Die Pflanzen- und Tierfette, namentlich die ersteren, zersetzen sich unter dem Einflusse des Sauerstoffes der Luft, enthalten dann freie Fettsäuren und werden ranzig. Bei längerer Wirkung trocknen sie in dünnen Schichten mehr oder weniger schnell ein (harzende und nicht-harzende Oele). Durch Kochen mit Kali- oder Natronlauge werden sie verseift, d. h. in Schmierseifen (Kaliseifen) oder in harte Seifen (Natronseifen) umgewandelt. Alle fetten Oele und Fette zersetzen sich mehr oder weniger leicht bei höheren Temperaturen.

Die rohen **Pflanzenöle**, meist durch Auspressen aus den zerkleinerten Pflanzen, seltener durch Ausziehen mittels Schwefelkohlenstoff, Benzin u. a. gewonnen, sind trübe von Eiweiß- und Schleimstoffen und werden von diesen durch Entsäuern mit Soda- oder Laugenlösung oder Magnesia und Auswaschen mit Wasser gereinigt. Die Farbe der raffinierten Oele ist hellgelb bis wasserhell.

Rüböl (Rapsöl) mit 1,5 vH Schleim- und ähnlichen Stoffen, ist im rohen Zustande nur gut abgelagert (d. h. von den dabei abgesetzten Stoffen getrennt) zu verwenden. Helles (gereinigtes) Rüböl vorteilhafter als weniger helles (rohes). — Rüböl wird leicht ranzig und ist schwach harzend, was aber, falls Wärme und Staub ferngehalten sind, seine Verwendung nicht beeinträchtigt; es ist infolge seiner Schmierfähigkeit und des verhältnismäßig geringen Preises von allen Fetten das häufigst gebrauchte Schmiermittel. Je nach der Preislage wird es mit anderen Pflanzenölen, mit Mineralölen und auch mit Harzöl verschnitten. Spez. Gew. i. M. 0,914; Erstarrungspunkt — 1° bis — 10°.

Olivener oder Baumöl, meist grünlich, besitzt noch größere Schmierfähigkeit als das Rüböl, trocknet nicht und bildet keine Krusten, enthält aber häufig freie Fettsäuren. Am meisten zum Schmieren der Spinnmaschinen verwendet, raffiniert auch für feinere Maschinen. Wegen des hohen Preises selten unvermischt. Verfälschungen mit Hanföl, Leinöl, Mohnöl, die sämtlich stark trocknen, oft aber auch mit Baumwollsaamen-, Sesam- u. a. Oelen. Spez. Gew. i. M. 0,918; Erstarrungspunkt: scheidet schon über 0° Stearin aus.

Rizinusöl, sehr zähflüssig und ziemlich stark trocknend, aber u. Umst. ein gutes Schmiermittel, das sich aber nicht mit Mineralölen mischen läßt; deshalb jetzt gern ersetzt durch das Blown oil.

Baumwollsaamenöl, als schwach trocknendes Oel nur zum Verschneiden anderer Oele, besonders des Olivenöls, gebraucht; dient

auch (neben Rüböl) zur Herstellung des oft sauren Blown oil (oxidized oil), auch mischbares Rizinusöl genannt. Spez. Gew. i. M. 0,926. Erstarrungspunkt: scheidet schon bei  $+ 12^{\circ}$  Palmitin aus.

Süßmandelöl, wenn raffiniert, vorzüglich für feine mechanische Instrumente, Uhrwerke usw.

Die **Tierfette** werden aus dem Rohstoff (Rohtalg, Speck, Klauen) durch Auskochen (Ausschmelzen) über freiem Feuer oder mittels überhitzten Wasserdampfes, oder aber durch Ausziehen mit Benzin u. dgl. gewonnen.

Talg, Rinder- und Hammeltalg, ist nur verwendbar, wenn völlig schwefelsäurefrei. Guter Talg ist hart, enthält wenig Fettsäure, wird nicht leicht ranzig (Hammeltalg leichter als Rindertalg). Vielfach verfälscht mit anderen Fetten oder fremden Stoffen. Spez. Gew. i. M. 0,948, Schmelzpunkt für Rindertalg  $45^{\circ}$ , für Hammeltalg  $47^{\circ}$ .

Anwendung des Rindertalges zum Einfetten der Leder-Treibriemen (s. unter XI) sowie von Maschinenteilen. Friktionsschmiere, Adhäsionsfett usw. sind zu diesem Zwecke nur viel kostspieliger als reiner Rindertalg oder, wie in Amerika, ein Gemisch von 3 T. Tran und 1 T. heißem Talg.

Tran, Wal- und Fischtran, wird ebenfalls als Schmiermittel benutzt. Klauen-(Knochen) Oel, das beste aus Rinds- und Schafsfüßen, weniger gutes aus Pferdehufen gewonnen, wird nicht ranzig und trocknet nicht, ist höchst schlüpfrig. Sehr hoch im Preise, nur für feinere Maschinen, liefert raffiniert das feine Uhrenöl. Sehr häufig verfälscht.

Spermacetiöl, aus dem Walrat, das dünnflüssigste Fett, wird nicht ranzig und trocknet nicht; ausgezeichnetes Schmiermittel für feinere Maschinen.

Schmalzöl und Talgöl aus dem Schweineschmalz bzw. Talg abgepresst, dienen als feine Maschinenöle, für sich oder mit Mineralöl gemischt.

Wollschweifs Fett besitzt im rohen Zustande große Zähflüssigkeit und ist dann nur mit anderen Fetten vermischt zu verwenden; „destilliertes“ Wollschweifs Fett ist säurehaltig und unbrauchbar.

**2. Mineralöle.** Die rohen Mineralöle, unmittelbar aus der Erde gewonnen (Erdöle, Steinöle), werden durch Destillation in leichte, dünne Oele (Brenn-, Gas-, Putzöl) und in schwere zähflüssige (Schmieröle) geschieden. Letztere reinigt man durch Filtrieren (Zylinderschmieröle) oder durch Destillieren, Behandeln mit Schwefelsäure und nachher mit Natronlauge.

Die Mineralöle bleiben an der Luft (bis auf die Farbe) unverändert, d. h., sie bilden keine Säure, verdicken nicht und trocknen nicht ein. In der Wärme verdunsten sie aber mehr oder weniger, namentlich die niedrigsiedenden. Farbe sehr verschieden: hellgelb, gelbrot bis schwarzbraun. Von den Fettölen durch einen andersfarbigen Schimmer, bläulich und grünlich, bei auffallendem Lichte unterscheidbar. Einige (die amerikanischen) scheiden schon bei  $+ 10^{\circ}$  Paraffin aus und sind salbenartig erstarrt bei  $0^{\circ}$ ; andere (die russischen) sind noch bei den niedrigsten Temperaturen flüssig. In höheren Temperaturen werden die Mineralöle sehr dünnflüssig. Spez. Gew. 0,880 bis 0,940.

Während manche Mineralöle nur für untergeordnete Zwecke taugen, kommen einige den besten Fettölen als Schmiermittel mindestens

gleich. Da sich die Fettöle in hohen Temperaturen zersetzen und auch ihr Preis höher ist, haben die russischen und amerikanischen Mineralöle, sämtlich aus Erdölen hergestellt, in Deutschland die Fettöle größtenteils verdrängt.

Aus der Zähflüssigkeit eines Mineralöls läßt sich, wenigstens beim Vergleiche von Oelen gleicher Herkunft, auf seine Schlüpfrigkeit schließen, so daß ein zäherflüssiges Mineralöl auch zugleich eine größere Schlüpfrigkeit besitzt als ein dünneres. Da die Schlüpfrigkeit am wichtigsten, so ist das zäherflüssige Mineralöl in der Regel auch das wirtschaftlich vorteilhafteste, solange der Nachteil der größeren inneren Reibung durch den Vorteil des geringeren Verbrauches aufgewogen wird.

Die Verdampfbarkeit (um so geringer, je höher der Flamm- und der Brennpunkt) ist sehr zu berücksichtigen bei den Mineralölen, die zum Schmieren der unter Dampf gehenden Maschinenteile dienen. Vom Zylinderöl ist außerdem größte Schlüpfrigkeit zu fordern. Als Heißdampföle (12 bis 16 at) haben sich neuerdings\*) reine Mineralöle weniger geeignet erwiesen als solche, die bis zu 5 vH tierische Fette enthalten.

Seit Jahren finden die von der Deutschen Vacuum Oil Co. in Hamburg (Niederlassungen in Berlin, Dresden, Düsseldorf und Nürnberg) mit der Schutzmarke „Gargoyle“ in den Handel gebrachten Schmieröle in Deutschland wachsenden Eingang. Sie werden aus dem rohen Mineralöl durch Destillation nach einem besonderen Verfahren vollständig rein und säurefrei hergestellt und eignen sich wegen ihrer guten Eigenschaften und durch ihre große Mannigfaltigkeit für die verschiedensten Schmierzwecke. In der Raffinerie der Hamburg werden große Mengen des in Wietze gewonnenen deutschen Rohöles verarbeitet.

Als bedeutende Schmierölwerke in Deutschland sind ferner zu nennen: Petroleum-Raffinerie vorm. Aug. Korff, Bremen; Oelwerke Stern-Sonneborn, Hamburg-Köln; Ernst Schlemmings Oelwerke, Hamburg; Salzberger Oelwerke, Salzbergen; Mineralölwerke Albrecht & Co., Hamburg; Deutsche Erdölwerke, Wilhelmsburg a. E.

Die mit den Oelen betriebene Zentral-Sichtschmierung, bei der das Zylinderöl in der Nähe des Kessels dem Dampfrohr zugeführt wird

Beispiele von Mineralölen zeigt folgende Tafel (nach A. Künkler).

Herkunft und Bezeichnung	Spez. Gew. bei 15°	Erstarrt bei ° C	Farbe im		Flamm- punkt ° C	Brenn- punkt ° C	Zähflüssig- keit**) bei	
			durch- fallenden Lichte	auf- fallenden Lichte			500	150°
Amerikanisches Spindelöl . . .	0,885	— 2	hellgelb	grün und wenig blau	174	202	1,8	.
Russisches helles Maschinenöl . .	0,909	unter — 10	gelb	grün und blau	197	234	6,6	.
Russisches dunk- les Zylinderöl .	0,920	— 3	schwarzbraun	grünlich	210	235	.	1,53

\*) Vrgl. Vortrag von Dr. Eger (Bayerische Staatsbahnen) vor dem Deutschen Verband f. d. Mat.-Prüg. d. Technik. Nürnberg 1906.

\*\*) Wasser hat bei 20° die Zähflüssigkeit = 1.

und der so geschmierte Dampf nach den Dampfmaschinen gelangt, so daß die Schmierpumpen bei den einzelnen Zylindern wegfallen, bewährt sich in geeigneten Fällen gut und arbeitet sehr sparsam.

**3. Harzöle**, aus dem Harze der Nadelbäume durch Destillation gewonnen und dann von Säuren befreit, trocken leicht zu harten Krusten ein und besitzen geringe Schlüpfrigkeit, sind daher nur mit Mineral- oder mit Pflanzenölen vermischt, und zwar nur zu untergeordneten Zwecken (Wagenschmiere u. a.) zu verwenden.

**4. Gemischte Öle und Fette**. Die konsistenten Maschinenfette sind meistens Mischungen oder Lösungen von Kalkseife mit Mineralöl. Wegen der großen inneren Reibung als Schmiermittel nur unter Umständen zu empfehlen. Die Zahnradschmiere ist aus Talg und Ölen, gewöhnlich mit Zusatz von Harz und Pechen, von Graphit oder Talk, zusammengemischt.

**5.** Die Beimengung von **Graphit** zu Starrschmiere bietet gegenüber der reinen Fettschmierung Vorteile, aber nur wenn der Graphit rein und sehr fein gemahlen ist. Ein 10-prozentiger Zusatz von besonders hergestelltem Flockengraphit (Amerika) für Lager von Schiffswellen und schweren Transmissionen hat sich bewährt. Für gewisse Zwecke (z. B. bei Kompressoren) wird auch Graphit allein verwendet. Neu ist eine Art Emulsion von Graphit und Glycerin.

**6.** Unter dem Namen: **wasserlösliche Öle** finden milchähnliche Emulsionen von seifen- bzw. ammoniakhaltigen Ölen an Stelle von Seifenwasser beim Bohren zum Kühlen und Schmieren vorteilhafte Verwendung.

Die **Prüfung der Schmiermittel** erfolgt nach vorgeschriebenen physikalisch-chemischen Untersuchungsverfahren wesentlich auf spezifisches Gewicht, Freiheit von Wasser, Säure und fremden Beimengungen, Erstarrungspunkt, Verharzungsfähigkeit, Verdampfbarkeit bei höheren Temperaturen, Flammpunkt (Flammpunktprüfer für verschiedene Zwecke), Flüssigkeitsgrad (Viskosität) bei verschiedenen Temperaturen mit dem Englischen Viskosimeter (die russischen, englischen und amerikanischen Apparate geben andere Resultate!)\*. Da die richtige Wahl des im einzelnen Falle geeignetsten Schmiermittels wirtschaftlich von erheblicher Bedeutung ist, so sollte man bei größeren Bezügen stets die sorgfältigste Untersuchung und Prüfung vorhergehen lassen. — „Grundsätze für die Prüfung von Mineralschmierölen“ hat der Deutsche Verband f. d. Materialprüfungen der Technik 1900 aufgestellt; dieselben sind 1905 ergänzt worden.

Da indessen nicht selten Öle verschiedener Herkunft, die nach den vorgeschriebenen Prüfungen wesentlich gleiche Ergebnisse aufweisen, gleichwohl bei der praktischen Verwendung große Unterschiede zeigen und deshalb wirtschaftlich durchaus verschieden zu bewerten sind, so legt man neuerdings der praktischen Prüfung durch Betriebsversuche großen Wert bei, wie solche u. a. von der D. V. O. C.

\*) Näheres hierüber, sowie auch über die gangbarsten Verfälschungen der Schmiermittel s. A. Künkler, Die Maschinenschmierung usw. Mannheim 1893. — D. Holde, Vergleichende Schmieröl-Untersuchungen 1889/94. Berlin 1895. — D. Holde, Die Untersuchung der Schmiermittel. 3. Aufl. Berlin 1909. — Fr. Schreiber, Z. f. angew. Chemie 1905 S. 726.

in den letzten Jahren an großen und kleinen Betrieben angestellt worden sind. Vgl. den Bericht von Kefslor, Z. f. angew. Chemie 1910 S. 1697; ferner Z. d. V. d. I., Bd. 53, S. 2128.

**Besondere Bedingungen für die Lieferung von Mineralschmieröl** (Rund-Erlafs des preuß. Ministers der öffentl. Arbeiten vom 4. Februar 1892, durch interne Bestimmungen wiederholt erweitert, zuletzt Juni 1910) bestimmen folgendes:\*)

Das Mineralschmieröl soll zum Schmieren von Eisenbahnfahrzeugen, Dampfmaschinen und Werkzeugmaschinen Verwendung finden, als Sommer- und Winteröl geliefert werden und folgenden Bestimmungen genügen: Das spez. Gewicht soll bei 20° nicht unter 0,900 und nicht über 0,940 sein. Der Flüssigkeitsgrad (Zähflüssigkeit), bezogen auf Wasser bei 20° = 1, festgestellt mit geeichtem Englerschen Viskosimeter, soll bei den nachstehenden Wärmegraden zwischen den angegebenen Grenzen liegen:

Wärmegrade		20°	50°	Wärmegrade		20°	50°
<b>Sommeröl</b> , obere Grenze		60	10	<b>Winteröl</b> , obere Grenze		45	7,5
untere „		40	7	untere „		25	4,5

**Flammpunkt:** Im offenen Tiegel bis auf 160° erhitzt, soll das Sommeröl, bis auf 145° das Winteröl keine entflammaren Dämpfe entweichen lassen. **Kältepunkt:** Das Winteröl soll bei -20°, das Sommeröl bei -5° noch fließend sein. d. h., es soll, einem gleichbleibenden Drucke von 50 mm Wassersäule ausgesetzt, in einem Glasröhrchen von 6 mm innerer Weite noch mindestens 10 mm/min steigen (auch hierfür genau vorgeschriebener Apparat). Ferner soll das Öl wasserfrei und frei von Mineralsäuren sein; es darf ferner organische Säuren höchstens 0,3 vH (auf SO<sub>2</sub> berechnet) enthalten und nur schwachen Geruch besitzen. Es soll sich 1 R.-T. Öl in 40 R.-T. eines beglaubigten Petroleumbenzins von 0,70 spez. Gewicht vollkommen lösen lassen. Das Öl darf keine fremdartigen Beimengungen enthalten und selbst nach 24 stündigem Stehen einen Niederschlag von höchstens 0,2 vH bilden; auch darf es kein Trocknungsvermögen besitzen, d. h. in dünnen Lagen längere Zeit der Luft ausgesetzt, weder verharzen noch zu einer firnisartigen Schicht eintrocknen.

Ebenso sind **besondere Bedingungen für die Lieferung von Putzöl, rohem und gereinigtem Rüböl, Stellwerksöl, Rindstalg, Öl zur Gasbereitung, Petroleum und Spiritus** für die preussischen Staatseisenbahnen, zuletzt März 1907, aufgestellt worden.

## XI. LEDERTREIBRIEMEN.

Die fälschlich gewachsene Haut wird durch Zurichten zur flachen Kerntafel ausgestreckt, deren zu Treibriemen benutzbarer Teil 1,2 bis 1,5 m lang und nahezu ebenso breit ist.

Riemen aus Wirbelbahnen (Rückgrat des Tieres, Längsachse) haben rechts und links fast gleiche Streckungsverhältnisse, laufen deshalb am geradesten und ruhigsten und sind somit für große Geschwindigkeiten (> 10 m/sk) zu empfehlen. Bis 200 mm breit sind solche Riemen nur 5 mm (bei besonders schweren Häuten bis rd. 6 mm) stark zu beschaffen, weil die Haut im Mittelrücken (Wirbel) nur dünn ist. Da hierbei der harte und weniger elastische Mittelrücken auf dem Scheitel der balligen Scheibe laufen muß und außerdem der Mittel-

\*) S. Z. d. B. 1892 S. 87; als Sonderdruck zu beziehen von Wilh. Ernst & Sohn, Berlin W 66.

rücken nicht schnurgerade, sondern (veranlaßt, durch das Krummliegen des Rindes beim Wiederkäuen) sichelförmig gewachsen ist, sind für derartige einfache Riemen mit  $> 25$  m/sk Geschwindigkeiten nur Riemscheiben zu verwenden, die in der Mitte etwa 50 mm breit muldenartig vertieft sind, um in dieser Mulde den Mittelrücken aufzunehmen (D. R.-P. von C. Otto Gehrckens).

Doppelriemen aus Mittelrücken lassen sich derartig versetzen, daß ein geeigneter Streifen für den Scheitel der balligen Scheibe entsteht. Seitdem 1 m breite und noch breitere Riemen, mit Geschwindigkeiten von 50 m/sk und darüber, angewendet und durch die Dampfmaschine wahrscheinlich in nächster Zeit Breite und Geschwindigkeit noch erheblich gesteigert werden, ist es geboten, die Riemen mit ganz besonders großer Sorgfalt herzustellen und die Kenntnisse von der Haut und dem Leder zu vermehren.

Einfache Riemen kann man von Mittelstücken schwerster Häute bis  $\approx$  1 m breit schneiden; breitere Riemen müssen als Doppelriemen auch der Breite nach aus zwei oder mehreren Häuten zusammengesetzt werden.

Bei langsamerem Lauf und nicht zu kleinen Scheiben sind die Riemen aus Seitenleder zu benutzen, da unter diesen Bedingungen die verschiedenen Faserspannungen mehr Zeit haben, sich auszugleichen; diese Riemen dürfen aber in der Breite 200 mm nicht viel überschreiten, da sonst die Spannungen der beiden Seiten zu ungleich werden.

Bei Los- und Festscheiben benutzt man die schärfere Spannung der einen Seite, indem man sie beim Laufe auf der Losscheibe zunächst der Festscheibe legt, weil ein Riemen leicht auf die Festscheibe, aber schwer zurück auf die Losscheibe zu führen ist. Die sich einseitig streckenden Teile (Seiten und Flanken) finden vortreffliche Verwendung zu Halbkreuzriemen. Riemen aus quergeschnittener Bullenschulter, für landwirtschaftliche Maschinen wohl geeignet, stellen sich sehr billig im Preise.

Aus der Dicke oder aus dem Gewicht eines Riemens läßt sich nicht auf seine Güte als Uebertragungsmittel schließen; letztere leidet sogar bei kleinen Scheibendurchmessern unter der Dicke. Die Dicke läßt sich durch übertriebene Schwellung, das Gewicht durch Vollstopfen der Poren mit Gerbmateriale vergrößern, was ebenso verwerflich ist wie das Hineinbringen von Beschwerungsmitteln wie Traubenzucker, Schwerspat u. a.

Nach C. Bach\*) ist die Zugfestigkeit des Leders für die Beurteilung der Uebertragungsfähigkeit und des Wertes eines Riemens nicht entscheidend, sondern seine Elastizität. Die Verwendung und Behandlung des Riemens muß derart sein, daß seine Elastizität möglichst erhalten bleibt.

Die Länge der einzelnen Bahnen eines Riemens beträgt 1200 bis 1500 mm. Die Verbindungsstellen breiter Riemen werden (je nach der Beschaffenheit der zu verbindenden Enden) 200 bis 400 mm lang, so daß jede Haut eine Baulänge von 1000 bis 1300 mm liefert.

Die Verbindung erfolgt der Breite (bei Doppelriemen auch der Länge) nach am besten durch Leimen (Leim aus Flechsen mit Zusatz

\*) S. C. Bach, Die Maschinenelemente, 9. Aufl. (unter Riemenbetrieb); Stuttgart 1903. Ferner C. Bach, Elastizität von Treibriemen und Treibseilen, Z. d. V. d. I. 1887 S. 221 und 245.

von Hausenblase), Abschrägen der Enden mittels Lederhobels. Zugfestigkeit der Verbindungsstellen 200 bis 300 kg/qcm. Auch für feuchte Räume hat man jetzt haltbaren Leim. Wenn derselbe auch Uebelstände besitzt, unterbleibt doch das den Riemen bedeutend schwächende Nähen jetzt fast immer. Gliederriemen sind in feuchten Räumen bei nicht zu großer Geschwindigkeit ( $< 15$  m/sk) zu empfehlen.

Eine Reinigung der Riemen nach Jahresfrist ist zu empfehlen: Abbürsten und Abwaschen mit warmem Wasser (Leimstellen schonen!). Auch fette man das Leder dann und wann mit etwas warmem Rindertalg ein, beachte aber, daß es keine harzigen Teile enthalte. Solche erschweren die Bewegung der Fasern, statt sie wie Schmiermittel zu erleichtern, indem dadurch die Fasern zusammenkleben und sich gegenseitig zerreiben.

Der festeste Teil des Leders liegt etwa auf  $\frac{1}{3}$  der Dicke von der Fleischseite aus. Auf der inneren Hälfte der Dicke ist der Angriff aber am größten. Aus diesem Grunde, und weil auch die Haut so ihre natürlichen Biegungsverhältnisse beibehält, soll bei einfachen Riemen im allgemeinen die Fleischseite (und nicht die Haarseite) die Scheibenoberflächen berühren.

Die Dehnung ist in einzelnen Streifen der Kernhaut außerordentlich verschieden und selbst bei benachbarten Streifen an mehreren Stellen des Flankenstücks ungleich, was teilweise daher rührt, daß beim Zurichten zur flachen Kerntafel einzelne Teile gestreckt, andere ungestreckt gelassen werden. Die Herstellung gerader Treibriemen bedingt deshalb eine genaue Kenntnis der Haut und ihrer Streckungsverhältnisse in der Kerntafel.

## SECHSTER ABSCHNITT.

MASCHINENTEILE.<sup>\*)</sup>I. HÜLFSMITTEL  
ZUR VERBINDUNG VON MASCHINENTEILEN.

## A. Keile.

Allgemeines über die Keilkette und die Kräftezerlegung am Keil s. S. 249 u. 250. — Im folgenden sind die Kräfte ausgedrückt in kg, die Längen in cm und die zulässigen Spannungen in kg/qcm.

## a. Querkeile.

## 1. Keile für ruhende Belastung.

Es wird bestimmt (Abb. 1)

der Durchmesser  $d$  durch  $P = k_z \frac{\pi d^3}{4}$ ,

„ „  $D$  „  $P = k'_z \left( \frac{\pi D^3}{4} - s_1 D \right)$ ;

darin bedeutet:

$k_z$  die zulässige Spannung im Stangenquerschnitt  $\frac{1}{4} \pi d^3$ ,

$k'_z$  die zulässige Spannung in dem durch das Keil-  
loch  $s_1 D$  geschwächten Querschnitt des Stangen-  
kopfes  $\frac{1}{4} \pi D^3 - s_1 D$ .

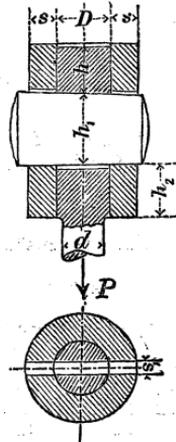
Da im Stangenkopf die Verteilung der Spannungen nicht gleichmäßig ist, so muß  $k'_z < k_z$  gewählt werden. Man setze etwa

$$k'_z = \frac{\pi}{4} k_z.$$

Mit dem üblichen Werte für die Keilstärke  $s_1 = 0,25 D$  folgt alsdann aus den beiden Gleichungen für  $P$ :

$$D \sim \frac{4}{3} d.$$

Abb. 1.



\*) Im wesentlichen nach C. Bach, Die Maschinen-Elemente, 10. Aufl.; Stuttgart. A. Bergsträsser. 1908.

Die Pressung  $k$  in der Berührungsfläche  $s_1 D$  zwischen Keil und Stange ergibt sich dabei aus

$$k_z \frac{\pi d^2}{4} = k s_1 D = k \frac{1}{4} D^2, \quad \text{mit } k \sim 1,75 k_z.$$

Wird dieser Wert auch gegenüber der Hülse, die die Stange umschließt, zugelassen, so folgt aus

$$2 k s s_1 = k D s_1 \quad \text{für: } s = 0,5 D.$$

Für die mittlere Höhe  $h_1$  des auf Biegung\*) beanspruchten Keiles gilt

$$\frac{P}{2} \left( \frac{D}{2} + \frac{s}{2} - \frac{D}{4} \right) = k_b \frac{s_1 h_1^2}{6}, \quad \text{woraus mit}$$

$$s_1 = 0,25 D, \quad s = 0,5 D, \quad P = k_z \frac{\pi d^2}{4}:$$

$$h_1 = d \sqrt{\frac{3 \pi k_z}{2 k_b}} \text{ folgt.}$$

Wird, wie vielfach üblich, für die Stange Schweifs- oder Flusseisen, für den Keil Stahl gewählt, so wird beispielsweise für  $k_z = 900 \text{ kg/qcm}$  und  $k_b = 1350 \text{ kg/qcm}$ :

$$h_1 \sim 1,75 d \sim 1,33 D.$$

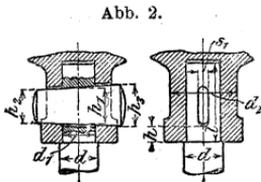


Abb. 2.

Der Anzug des Keiles darf zu  $1/20$  bis  $1/15$  genommen werden. Die Abmessung  $h$  kann man für rechteckige Keile schätzen zu

$$h = 0,67 h_1 \text{ bis } 0,75 h_1.$$

Die Höhe  $h_2$  kann gleich  $h$  genommen werden, sofern die auf die Hülse einwirkenden [auf Ausscheren der beiden Stücke  $s_1 h_2$  (Abb. 1) gerichteten] Kräfte nicht eine größere Abmessung erfordern. Die Hülse kann an dieser Stelle durch einen Ringwulst (vgl. Abb. 2) verstärkt werden.

## 2. Keile für wechselnde Belastung.

Um die zusätzliche Beanspruchung durch das Anziehen des Keiles, die bereits im unbelasteten Zustande bei den **Spannungsverbindungen** vorhanden sein muß (Vorspannung), zu berücksichtigen, kann den Rechnungen die 1,25-fache Stangenkraft zugrunde gelegt werden.

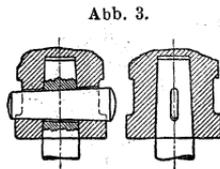


Abb. 3.

Beispiel. Für die in Abb. 2 gezeichnete Verbindung der Kolbenstange A einer Dampfmaschine mit dem Kreuzkopf (vgl. im Abschnitt VI unter Kreuzköpfe) betrage die Kolbenstangenkraft  $P = 10\,000 \text{ kg}$ , der Durchmesser der aus Flusstahl gefertigten Kolbenstange  $d = 8,2 \text{ cm}$ . Kreuzkopf und Keil seien aus dem gleichen Stoff hergestellt.

Die ringförmige Anlagefläche der Stange  $d$  gegen die Hülse (Abb. 2) kann auch durch kegelige Gestaltung des Stangenkopfes ersetzt werden (s. Abb. 3).

\*) Die Proberechnung auf Scherfestigkeit (zwei Querschnitte des Keiles) ergibt in der Regel kleinere Werte als der aus der folgenden Gleichung sich ergebende Keilquerschnitt  $s_1 h_1$ .

Soll in der Ringfläche  $\frac{\pi}{4}(d^2 - d_1^2)$  die Spannung  $k = 1000$  kg/qcm nicht überschritten werden, so muß sein:

$$\frac{\pi}{4}(8,2^2 - d_1^2) 1000 = 1,25 \cdot 10\,000,$$

mithin

$$d_1 \sim 7 \text{ cm.}$$

Für die Keildicke gilt, wenn zwischen Keil und Stange die gleiche Pressung\*) zugelassen wird,

$$s_1 \cdot 7 \cdot 1000 = 1,25 \cdot 10\,000, \text{ also } s_1 = 1,8 \text{ cm.}$$

Der Hülsendurchmesser  $d_2$  folgt aus

$$(d_2 - d_1) s_1 \cdot 1000 = 1,25 \cdot 10\,000 = s_1 d_1 \cdot 1000$$

zu

$$d_2 = 2d_1 = 14 \text{ cm.}$$

Dieses Maß muß in dem Verstärkungswulst vorhanden sein, wenn man die angenommenen Beanspruchungen in der Keilauflegfläche zulassen will, die Hülse nach ihrer sonstigen Beanspruchung durch die Kolbenstangenkraft aber dünnwandiger gehalten sein könnte. — Andererseits kann unter Beibehaltung dieses Maßes  $d_2 = 14$  cm für den Hülsendurchmesser der Ringwulst zur Vergrößerung der Keilauflegfläche und zur Herabminderung des Wertes  $h$  benutzt werden.

Die mittlere Höhe  $h_1$  des auf Biegung beanspruchten Keiles ist bestimmt durch

$$\frac{1}{2} \cdot 1,25 \cdot 10\,000 \left( \frac{7,0 + 3,5}{2} - \frac{3,5}{2} \right) = 1000 \cdot \frac{1,8 h^2}{6},$$

mithin

$$h_1 = 8,6 \text{ cm}]$$

Für  $h$  ergibt sich (nach dem unter 1. Bemerkten) der Mittelwert

$$h = 0,7 h_1 = 6 \text{ cm.}$$

Für die Keilneigung genügt 1 : 25; ferner ist

$$l = 6,0 + 8,6 + 6,0 = 20,6 \text{ cm.}$$

Um die scharfen, einspringenden Ecken in den Keilöchern zu vermeiden, gibt man zweckmäßig dem Keilquerschnitt abgerundete Schmalseiten (Abb. 4), wobei alsdann  $h$  kleiner ( $= 0,4 h_1$  bis  $0,5 h_1$ ) sein darf; doch empfiehlt es sich, den Wert  $h = 0,7 h_1$  beizubehalten.

Keile, die bei voller Belastung eingetrieben (angezogen) werden, müssen solche Abmessungen erhalten, das die Pressung in den Gleitflächen das zulässige Maß nicht überschreitet (Sicherheit gegen Anfressen). Dieses Maß hängt wesentlich ab von der Sorgfalt der Ausführung, von dem Stoffe, sowie davon, ob die Verbindung mehr oder weniger häufig gelöst wird.

Abb. 5 zeigt ein **Gestängeschloß**, entstanden durch Verdoppelung der einfachen Keilverbindung nach Abb. 1, wobei aber die Stangenköpfe beim Anziehen der Keile fest gegeneinander gepreßt werden.

Weitere Keilverbindungen, Keilsicherungen (meist durch Vorstecker, durch Endschraube oder Quer-Druckschraube) usw. finden sich bei den Maschinenteilen, zu denen sie gehören (s. besonders bei Kurbeln, Schubstangen und Kreuzköpfen).

### b. Längskeile.

Für Hohlkeile und Flachkeile (Abb. 6 u. 7) gibt **Bach** folgende Formeln für normale Verhältnisse:

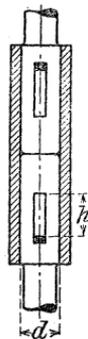
$$b = 0,8 \sqrt{d} \text{ bis } \sqrt{d}; \quad h = 0,4 \sqrt{d}.$$

\*) Bei neueren preussischen  $\frac{4}{4}$  gekuppelten Güterzug-Lokomotiven (Heißdampf) findet man am Keil  $k = 1600$  bis  $1700$  kg/qcm und  $k_b = 2700$  kg/qcm; in der Stange  $k_s = 1120$  kg/qcm.

Abb. 4.



Abb. 5.



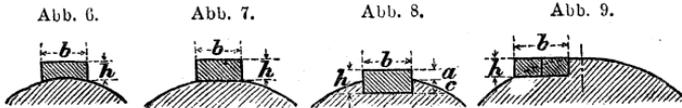
Für **Nutenkeile** (Abb. 8):

$$b = 0,8 \sqrt{d} \text{ bis } \sqrt{d}; \quad h = 0,5 \sqrt{d}.$$

Für **Tangentialkeile** (Abb. 9):

$$b = 0,25 d; \quad h = 0,25 b,$$

worin  $d$  den Durchmesser der Welle,  $b$  die Breite und  $h$  die Höhe der Keile in cm bedeutet.



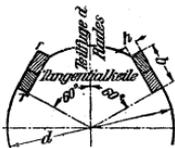
**Keile für normale Wellen.\*)**

Durchmesser der Welle mm	Hohlkeil, Abb. 6		Flachkeil, Abb. 7		Nutenkeil, Abb. 8				Tangentialkeil, Abb. 9	
	$b$ mm	$h$ mm	$b$ mm	$h$ mm	$b$ mm	$h$ mm	$a$ mm	$c$ mm	$b$ mm	$h$ mm
20—29	11	4	11	4	11	5	3	2	.	.
30—39	13	5	13	5	13	6	4	2	.	.
40—49	14	6	14	6	14	7	4	3	.	.
50—64	16	6	16	6	16	8	5	3	.	.
65—79	18	7	18	7	18	9	5	4	.	.
80—89	21	8	21	8	21	10	6	4	.	.
90—99	25	10	25	10	25	12	7	5	.	.
100—119	30	12	30	12	30	15	9	6	32	10
120—139	.	.	.	.	35	18	11	7	38	12
140—159	.	.	.	.	40	20	12	8	46	15
160—179	.	.	.	.	45	23	14	9	50	16
180—200	.	.	.	.	50	25	15	10	57	18

**Keiltafel der Maschinenfabrik Augsburg-Nürnberg für Wellen von 200 bis 980 mm Dmr. Keilanzug 1:100.**

(s. nebenstehende Tabelle).

Abb. 10.



Material: Flusstahl. Wellen von zwischenliegenden Durchmessern erhalten:

1. bei Nutenkeilen (s. Abb. 8) den Keil der nächst schwächeren Welle,
2. bei Tangentialkeilen (Abb. 10) das Maß „ $h$ “ der nächst schwächeren Welle und eine Breite

$$b = \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 - \left(\frac{d}{2} - h\right)^2} = \sqrt{h \cdot (d - h)}.$$

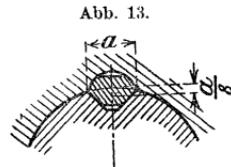
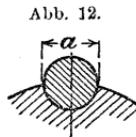
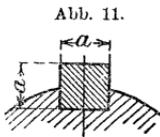
\*) Nach Angaben der B. A. M. A. G. in Dessau. — Die beim Eisenwerk Wülfel, bei Polysius, Dessau und bei der Peniger Maschinenfabrik, Penig i. Sachsen gebräuchlichen Maße weichen davon und unter sich um geringe Unterschiede ab. Näheres ist in den Katalogen der betr. Firmen zu vergleichen.

Wellen- Dmr. <i>d</i>	Nutenkeil				Tangentialkeile		
	<i>b</i>	<i>h</i>	<i>a</i>	<i>c</i>	<i>b</i> *)	<i>h</i>	<i>r</i>
200	50	28	17	11			
220	54	30	18	12			
240	58	32	19	13			
260	62	34	20	14			
280	66	36	22	14			
300	70	37	22	15	74,83	20	2
320	74	38	23	15	80,97	22	2
340	78	40	24	16	83,64	22	2
360	82	42	25	17	89,80	24	2
380	86	44	26	18	95,94	26	2
400	90	46	28	18	102,06	28	3
420	94	48	29	19	104,77	28	3
440	98	50	30	20	110,90	30	3
460	102	52	31	21	113,58	30	3
480	106	54	32	22	119,73	32	3
500	110	56	34	22	125,87	34	3
520	114	58	35	23	132,00	36	3
540	118	60	36	24	134,69	36	3
560	122	62	37	25	140,86	38	3
580	126	64	38	26	146,97	40	3
600	130	66	40	26	149,67	40	4
620	134	68	41	27	155,80	42	4
640	138	70	42	28	161,94	44	4
660	142	72	43	29	164,63	44	4
680	146	74	44	30	170,78	46	4
700	150	76	46	30	176,90	48	4
720	—	—	—	—	179,59	48	4
740	—	—	—	—	185,74	50	4
760	—	—	—	—	191,88	52	4
780	—	—	—	—	194,57	52	4
800	—	—	—	—	200,71	54	5
820	—	—	—	—	203,38	54	5
840	—	—	—	—	209,54	56	5
860	—	—	—	—	212,19	56	5
880	—	—	—	—	218,35	58	5
900	—	—	—	—	220,99	58	5
920	—	—	—	—	223,60	58	5
940	—	—	—	—	229,78	60	5
960	—	—	—	—	232,38	60	5
980	—	—	—	—	234,95	60	5

\*) Die Maße „*b*“ für die Tangentialkeile sind mit Rücksicht auf die Uebereinstimmung mit den Keilschablonen möglichst genau angegeben.

Neben dem flachen Längskeil wird vielfach angewendet der **Quadratkeil** und **Rundkeil** (Abb. 11 u. 12).

Der Quadratkeil schwächt Welle und Nabe mehr als der Flachkeil, bietet aber größere seitliche Anlageflächen und ist in sich widerstandsfähiger gegen Stauchen und Verbiegen. — Der Rundkeil ver-



spannt Nabe und Welle in radialer und tangentialer Richtung, ebenso der die Welle mehr schonende „**Alfkeil**“ von v. Bechtolsheim (Abb. 13).

Für schwere Räder, namentlich auch dann, wenn der Drehsinn wechselt, besonders geeignet ist die Tangentialkeilanordnung nach Abb. 10. Für **Quadrat-** und **Rundkeile**:  $a = 0,6 \sqrt{d}$  bis  $0,7 \sqrt{d}$  in cm. Für **Alfkeile**:  $a \sim 0,25 d$ . Einen **Halbrundkeil** (Keil Woodruff), dessen Nut mit Hilfe eines Spezial-Schlitzfräsers sehr leicht und billig herstellbar ist, zeigen die Abb. 14 u. 15. Die Akt.-Ges. Ludw.

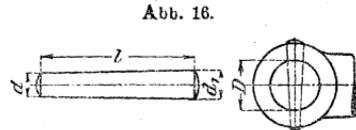
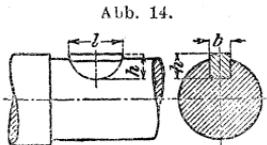
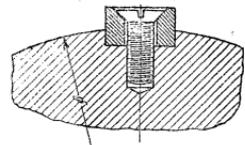
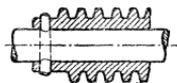
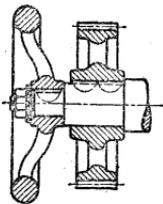


Abb. 15.

Abb. 17.

Abb. 18.



Loewe & Co., Berlin, fabriziert diesen Keil nach ihren Normalien für Wellen von 10 bis 40 mm in Längen  $l$  von 13 bis 38 mm, Höhen  $h$  von 5,8 bis 16,7 mm und Breiten  $b$  von 3 bis 8 mm.

Zur Befestigung leichter Kurbeln und Getriebe (Abb. 16 u. 17) auf ihren Wellen dienen **konische Stifte**, deren gebräuchlichste Größen die nachstehende Tafel nach den Normalien der Akt.-Ges. Ludw. Loewe & Co. in Berlin angibt (Maße mm — s. Abb. 16).

Abb. 18 zeigt einen mit der Welle durch Schraube verbundenen Flachkeil für solche Fälle, wo sich der auf der Welle sitzende Teil gegen diese verschiebt.

## Konische Stifte nach Abb. 16.

D	11-15	14-18	16-22	20-28	24-34	30-45	36-55	46-70	58-90
$d$	2,5	3	4	5	6,5	8	10	12,5	15,5
$l$	20	22	24	26	28	30	32	36	50
$d_1$	2,9	3,44	4,48	5,52	7,06	8,6	10,64	13,22	16,5
$l$	22	24	26	28	30	32	36	40	55
$d_1$	2,94	3,48	4,52	5,56	7,1	8,64	10,72	13,3	16,6
$l$	24	26	28	30	32	36	40	45	60
$d_1$	2,98	3,52	4,56	5,6	7,14	8,72	10,8	13,4	16,7
$l$	26	28	30	32	36	40	45	50	70
$d_1$	3,02	3,56	4,6	5,64	7,22	8,8	10,9	13,5	16,9
$l$	28	30	32	36	40	45	50	55	80
$d_1$	3,06	3,6	4,64	5,72	7,3	8,9	11	13,6	17,1
$l$	30	32	36	40	45	50	55	60	90
$d_1$	3,1	3,64	4,72	5,8	7,4	9	11,1	13,7	17,3
$l$		36	40	45	50	55	60	70	100
$d_1$		3,72	4,8	5,9	7,5	9,1	11,2	13,9	17,5
$l$		40	45	50	55	60	70	80	110
$d_1$		3,8	4,9	6	7,6	9,2	11,4	14,1	17,7
$l$			50	55	60	70	80	90	120
$d_1$			5	6,1	7,7	9,4	11,6	14,3	17,9
$l$				60	70	80	90	100	130
$d_1$				6,2	7,9	9,6	11,8	14,5	18,1
$l$					80	90	100	110	140
$d_1$					8,1	9,8	12	14,7	18,3
$l$						100	110	120	150
$d_1$						10	12,2	14,9	18,5

## B. Schrauben.

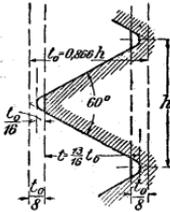
Verzeichnung der Projektion der zylindrischen **Schraubenlinie** s. S. 120. Statt durch einen Punkt (vgl. S. 120 unter 1.) kann man sich die Schraubenlinie auch erzeugt denken durch Aufwickeln der Ebene vom Steigungswinkel  $\alpha$  auf den Mantel des geraden Kreis- zylinders; bildet hierbei der eine Schenkel von  $\alpha$  einen Kreis, recht- winklig zur Zylinderachse, so beschreibt der andere Schenkel die Schraubenlinie.

Ist der Halbmesser des Zylinders  $= r$ , so ist die Ganghöhe (Steigung) der Schraubenlinie  $h = 2\pi r \operatorname{tg} \alpha$ .

**a. Gewindearten.**

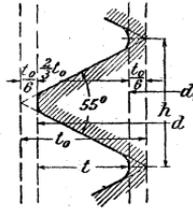
**1. S. I.-Gewinde** (System International) (Abb. 19), vereinbart Oktober 1898 in Zürich von deutschen, schweizerischen, französischen und belgischen Ingenieuren. Dem Gewindequerschnitt liegt das gleichseitige Dreieck (Kantenwinkel  $60^\circ$ ) zugrunde; an der Spitze ist die Dreieckshöhe  $t_0 = 0,866 h$  um  $\frac{1}{8} t_0$  durch Abflachung, im Grunde durch Ausrundung um  $\frac{1}{16} t_0$  verringert, so dafs die wirkliche Gangtiefe einschl. des Spielraumes  $t = \frac{13}{16} t_0$  beträgt. Vrgl. die Tafel S. 762.

Abb. 19.



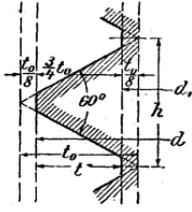
**S. I.**  
(International)

Abb. 20.



**Whitworth.**  
(Englisch)

Abb. 21.



**Sellers.**  
(Amerikanisch)

**2. Whitworthsches Gewinde** (Abb. 20). Dem Gewindequerschnitt liegt ein gleichschenkliges Dreieck mit dem Kantenwinkel  $55^\circ$  zugrunde; Innere und äußere Abrundung um  $\frac{1}{8} t_0$  mit dem Halbmesser  $0,143 t_0$ . ist  $d$  der äußere Durchmesser des Gewindes und  $d_1$  der Kerndurchmesser, so ist die Ganghöhe  $h = n d$  gewählt, wobei für  $d = \frac{1}{4}$  bis  $6$  z. engl. der Zahlenwert  $n$  sich von  $\frac{1}{5}$  bis  $\frac{1}{15}$  ändert. Da

$$t_0 = \frac{1}{2} h \operatorname{ctg} 27\frac{1}{2}^\circ = 0,96049 h \quad \text{und} \quad t = \frac{2}{3} t_0 = 0,64033 h,$$

so ist  $d_1 = d - 2t = d - 1,28065 h = d(1 - 1,28065 n)$ .

Vrgl. hierzu die Tafeln S. 763 bis 766. In manchen (süddeutschen) Werkstätten wird das Whitworthsche Gewinde in abgeänderter Form angewendet, derart, dafs ihm nur die Ganghöhen  $h$  entnommen sind, während die äußeren Durchmesser  $d$  in Abstufungen von 3 mm aufeinander folgen; also:  $d = 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30$  mm, usw.

**Feingewinde.** Für Mutterschrauben mit Feingewinde wird empfohlen:  
bei  $d = 2$   $\frac{2}{4}$   $\frac{3}{6}$   $\frac{3}{4}$   $\frac{3}{5}$   $\frac{4}{4\frac{1}{2}}$   $\frac{4}{4}$   $\frac{5}{4}$   $\frac{5}{3\frac{1}{2}}$   $\frac{8}{3}$ , über 8 Z. engl.  
Gänge auf 1 Z. engl.

**3. Sellersches Gewinde** (Abb. 21). Dem Gewindequerschnitt liegt das gleichseitige Dreieck (Kantenwinkel  $60^\circ$ ) zugrunde mit Abflachung der Spitze wie des Grundes je um  $\frac{1}{8}$  der Dreieckshöhe  $t_0$ . Vrgl. hierzu die Tafel S. 767. Die Ganghöhe ist  $h = n d$ , wobei für  $d = \frac{1}{8}$  bis  $6$  engl. Z. der Zahlenwert  $n$  sich von  $\frac{1}{5}$  bis  $\frac{2}{27}$  ändert. Da

$$t_0 = \frac{1}{2} h \operatorname{ctg} 30^\circ = 0,86603 h \quad \text{und} \quad t = \frac{3}{4} t_0 = 0,64952 h,$$

so ist  $d_1 = d - 2t = d - 1,29904 h = d(1 - 1,29904 n)$ .

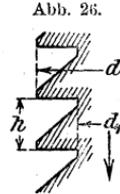
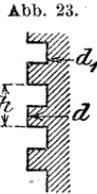
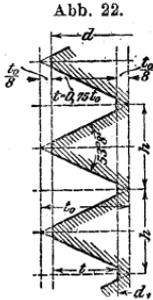
**4. Löwenherzgewinde** für die Schrauben der Feinmechanik von 1 bis 10 mm (Abb. 22). Die Ganghöhe  $h$  ist gleich  $t_0$ ; dem Gewinde-

querschnitt liegt das in das Quadrat  $ht_0$  eingezeichnete gleichschenklige Dreieck mit dem Spitzenwinkel  $53^{\circ}8'$  zugrunde mit Abflachung der Spitze wie des Grundes um je  $\frac{1}{8}$  der Dreieckshöhe  $t_0$ . (Wie bei Sellers.) Es wird also

$$t = 0,75 t_0 = 0,75 h \quad \text{und} \quad d_1 = d - 1,5 t_0 = d - 1,5 h.$$

Vgl. hierzu die Tafel S. 768.

**5. Flachgängiges, trapezförmiges und rundes Gewinde** (für Bewegungs- und Prefsschrauben, s. Abb. 23 bis 26). Man hat hier bei der Bestimmung von  $d$  und  $d_1$  ziemlich freie Hand und braucht sich



im allgemeinen an kein System zu halten, wie bei den scharfgängigen Schrauben. Gewindetiefe  $\sim \frac{d_1}{8}$ .

Trapezförmiger Gewindequerschnitt (Abb. 25 u. 26) wird gewählt, wenn der Druck nur in einer Richtung auf die Schraube wirkt. (Stell- und Prefsschrauben.)

### b. Berechnung der Schrauben.

Es bezeichne

$Q$  die in der Richtung der Schraubenachse wirkende Kraft in kg,  
 $k_z$  die zulässige Zugspannung des Stoffes in kg/qcm,  
 $d_1$  den Kerndurchmesser der Schraube in cm,  
 $d$  den äußeren Gewindedurchmesser (Bolzendurchmesser) in cm.

#### Mutterschrauben\*)

der Akt.-Ges. für Stahl- und Eisenindustrie „Archimedes“ in Berlin u. Breslau.  
 Mutterhöhe = Bolzendurchmesser.

Bolzen- durchm. mm	Schlüssel- weite mm	Kopfhöhe		Bolzen- durchm. mm	Schlüssel- weite mm	Kopfhöhe	
		4-kantig mm	6-kantig mm			4-kantig mm	6-kantig mm
5	9,5	3	3,5	15	25	10,5	12
6	11	4	5	16	27	12	13,5
7	12	4,5	6	18	29,5	13	14
8	14	5,5	7	19	32	14	15
9	15,5	6	7,5	20	32	15	16
10	17	6,5	8	22	36,5	16	17
11	19	7,5	9	25	41,5	18	19
12	20,5	8	9,5	29	47	21	23
13	22	9	10,5	32	52	23	23
14	24	10	11,5				

\*) Ueblich bei den meisten deutschen Schraubenfabriken.

## S. I.-Gewinde.

(Gewindequerschnitt s. Abb. 19 auf S. 760.)

Außere Durchmesser $d$	Kern-durchmesser $d_1$	Gang-höhe $h$	Gang-tiefe $t$	Schlüssel-weite $s_0$	Außere Durchmesser $d$	Kern-durchmesser $d_1$	Gang-höhe $h$	Gang-tiefe $t$	Schlüssel-weite $s_0$
mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm
6	4,59	1	0,705	12	33	28,08	3,5	2,46	50
7	5,59	1	0,705	13	36	30,37	4	2,815	54
8	6,24	1,25	0,88	15	39	33,37	4	2,815	58
9	7,24	1,25	0,88	16	42	35,67	4,5	3,165	63
10	7,89	1,5	1,055	18	45	38,67	4,5	3,165	67
11	8,89	1,5	1,055	19	48	40,96	5	3,52	71
12	9,54	1,75	1,23	21	52	44,96	5	3,52	77
14	11,19	2	1,405	23	56	48,26	5,5	3,87	82
16	13,19	2	1,405	26	60	52,26	5,5	3,87	88
18	14,48	2,5	1,76	29	64	55,56	6	4,22	94
20	16,48	2,5	1,76	32	68	59,56	6	4,22	100
22	18,48	2,5	1,76	35	72	62,85	6,5	4,575	105
24	19,78	3	2,11	38	76	66,85	6,5	4,575	110
27	22,78	3	2,11	42	80	70,15	7	4,925	116
30	25,08	3,5	2,46	46					

## Gewichte schweißeiserner Muttern, Köpfe, Unterlegscheiben und Bolzen. (Whitworthsches Gewinde.)

Gewinde-Durchm.	Gewicht					Gewinde-Durchm.	Gewicht				
	der Mutter	d. sechs-eckigen Kopfes	des quadr. Kopfes	d. Unter-leg-scheibe	von 100 mm Bolzen		der Mutter	d. sechs-eckigen Kopfes	des quadr. Kopfes	d. Unter-leg-scheibe	von 100 mm Bolzen
Z. engl.	kg	kg	kg	kg	kg	Z. engl.	kg	kg	kg	kg	
$\frac{1}{4}$	0,005	0,005	0,005	0,003	0,025						
$\frac{5}{16}$	0,011	0,010	0,012	0,004	0,039	$\frac{2}{4}$	1,788	1,966	2,227	0,487	2,001
$\frac{3}{8}$	0,020	0,018	0,020	0,007	0,056	$\frac{2}{3}$	2,435	2,686	3,101	0,585	2,470
$\frac{7}{16}$	0,026	0,024	0,028	0,009	0,076	$\frac{3}{4}$	3,194	3,512	4,055	0,801	2,989
$\frac{1}{2}$	0,036	0,032	0,037	0,013	0,099	3	3,606	4,491	5,186	1,118	3,557
$\frac{5}{8}$	0,058	0,054	0,063	0,018	0,154	$\frac{3}{4}$	5,150	5,736	6,624	1,311	4,175
$\frac{3}{4}$	0,105	0,096	0,110	0,036	0,233	$\frac{3}{2}$	6,229	7,078	8,173	1,646	4,842
$\frac{7}{8}$	0,137	0,131	0,152	0,049	0,302	$\frac{3}{2}$	7,525	8,619	9,952	1,970	5,558
1	0,187	0,195	0,225	0,058	0,395	4	9,318	10,51	12,14	2,403	6,324
$\frac{1}{8}$	0,274	0,274	0,316	0,062	0,500	$\frac{4}{4}$	10,83	12,49	14,43	2,879	7,139
$\frac{1}{4}$	0,367	0,372	0,429	0,074	0,618	$\frac{4}{2}$	12,72	14,71	16,99	3,454	8,004
$\frac{3}{8}$	0,467	0,473	0,545	0,113	0,747	$\frac{4}{2}$	14,99	17,38	20,07	3,871	8,516
$\frac{1}{2}$	0,572	0,614	0,692	0,170	0,889	5	17,32	20,13	23,25	4,467	9,881
$\frac{5}{8}$	0,736	0,778	0,898	0,196	1,043	$\frac{5}{4}$	19,87	23,16	26,74	5,088	10,90
$\frac{3}{4}$	0,877	0,970	1,120	0,247	1,210	$\frac{5}{2}$	22,90	26,75	30,88	5,954	11,96
$\frac{7}{8}$	1,112	1,191	1,375	0,274	1,389	$\frac{5}{2}$	25,67	30,09	34,75	6,773	13,07
2	1,294	1,405	1,618	0,344	1,581	6	28,98	34,03	39,29	7,664	14,23

Anmerkung. Diese Tafel ist berechnet auf Grund der auf S. 763 gegebenen Abmessungen von Mutter, Kopf und Unterlegscheibe mit einem spez. Gewichte des Schweißeisens = 7,8. [Der in der Mutter und der Unterlegscheibe steckende Teil der Schraube ist in den Gewichtszahlen der vorstehenden Tafel nicht enthalten, sondern als Bolzenlänge mit zu rechnen.]

## Whitworthsches Gewinde.

(Gewindequerschnitt s. Abb. 20 auf S. 760.)

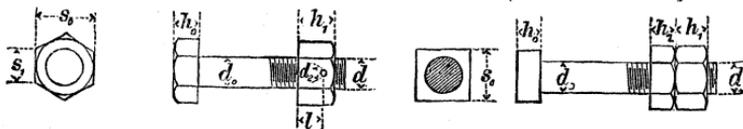
Außerer Durchmesser des Gewindes		Kern-		Anzahl der Gewindgänge		Höhe der Mutter, abgerundet	Höhe des Kopfes, abgerundet	Schlüsselweite, abgerundet	$Q = \frac{1}{4} \pi d_1^2 k_z$ , wenn (in kg/qcm)	
$d$		Durchmesser $d_1$	Querschnitt $\frac{\pi d_1^2}{4}$	auf einen engl. Z.	auf die Länge $d$	$h_1$	$h_0$	$s_0$	$k_z = 480$	$k_z = 600$
engl. Z.	mm	mm	qcm	engl. Z.		mm	mm	mm	kg	kg
$\frac{1}{4}$	6,35	4,72	0,175	20	5	6	4	13	85	105*
$\frac{5}{16}$	7,94	6,13	0,295	18	$5\frac{5}{8}$	8	6	16	140	175*
$\frac{3}{8}$	9,52	7,49	0,441	16	6	10	7	19	210	265*
$\frac{7}{16}$	11,11	8,79	0,607	14	$6\frac{1}{8}$	11	8	21	290	365*
$\frac{1}{2}$	12,70	9,99	0,784	12	6	13	9	23	375	470*
$\frac{5}{8}$	15,87	12,92	1,311	11	$6\frac{1}{8}$	16	11	27	630	785
$\frac{3}{4}$	19,05	15,80	1,961	10	$7\frac{1}{2}$	19	13	33	940	1175
$\frac{7}{8}$	22,22	18,61	2,720	9	$7\frac{7}{8}$	22	15	36	1305	1630
1	25,40	21,33	3,573	8	8	25	18	40	1715	2145
$1\frac{1}{8}$	28,57	23,93	4,498	7	$7\frac{7}{8}$	29	20	45	2160	2700
$1\frac{1}{4}$	31,75	27,10	5,768	7	$8\frac{3}{4}$	32	22	50	2770	3460
$1\frac{3}{8}$	34,92	29,50	6,835	6	$8\frac{1}{4}$	35	24	54	3280	4100
$1\frac{1}{2}$	38,10	32,68	8,388	6	9	38	27	58	4030	5030
$1\frac{5}{8}$	41,27	34,77	9,495	5	$8\frac{1}{8}$	41	29	63	4560	5700
$1\frac{3}{4}$	44,45	37,94	11,31	5	$8\frac{3}{4}$	44	32	67	5430	6780
$1\frac{7}{8}$	47,62	40,40	12,82	$4\frac{1}{2}$	$8\frac{7}{16}$	48	34	72	6150	7690
2	50,80	43,57	14,91	$4\frac{1}{2}$	9	51	36	76	7160	8950
$2\frac{1}{4}$	57,15	49,02	18,87	4	9	57	40	85	9060	11320
$2\frac{1}{2}$	63,50	55,37	24,08	4	10	64	45	94	11560	14450
$2\frac{3}{4}$	69,85	60,55	28,80	$3\frac{1}{2}$	$9\frac{5}{8}$	70	49	103	13820	17280
3	76,20	66,90	35,15	$3\frac{1}{2}$	$10\frac{1}{2}$	76	53	112	16870	21090
$3\frac{1}{4}$	82,55	72,57	41,36	$3\frac{1}{4}$	$10\frac{9}{16}$	83	58	121	19850	24820
$3\frac{1}{2}$	88,90	78,92	48,92	$3\frac{1}{4}$	$11\frac{3}{8}$	89	62	130	23480	29350
$3\frac{3}{4}$	95,25	84,40	55,95	3	$11\frac{1}{4}$	95	67	138	26860	33570
4	101,60	90,75	64,68	3	12	102	71	147	31050	38810
$4\frac{1}{4}$	107,95	96,65	73,37	$2\frac{7}{8}$	$12\frac{7}{32}$	108	76	156	35220	44020
$4\frac{1}{2}$	114,30	102,98	83,29	$2\frac{7}{8}$	$12\frac{15}{16}$	114	80	165	39980	49970
$4\frac{3}{4}$	120,65	108,84	93,04	$2\frac{3}{4}$	$13\frac{1}{16}$	121	85	174	44660	55820
5	127,00	115,19	104,2	$2\frac{3}{4}$	$13\frac{3}{4}$	127	89	183	50020	62530
$5\frac{1}{4}$	133,35	120,96	114,9	$2\frac{5}{8}$	$13\frac{25}{32}$	133	93	192	55159	68940
$5\frac{1}{2}$	139,70	127,31	127,3	$2\frac{5}{8}$	$14\frac{7}{16}$	140	98	201	61102	76378
$5\frac{3}{4}$	146,05	133,05	139,0	$2\frac{1}{2}$	$14\frac{3}{8}$	146	102	209	66740	83420
6	152,40	139,39	152,6	$2\frac{1}{2}$	15	152	106	218	73250	91560

Schlüsselweite  $s_0 = 5 + 1,4 d$ ; Unterlegscheibe Dmr. =  $1,3 s_0$ , Dicke =  $0,1 s_0$ .

Scraubendimensionen der Firma „Archimedes“ s. S. 761.

\*)  $Q$  ist (s. S. 766) für reine Zugbeanspruchung berechnet. — Die für die kleineren Bolzendurchmesser berechneten Belastungen sind mit Vorsicht anzuwenden.

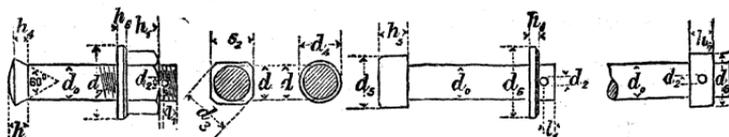
## Abmessungen für gedrehte und ungedrehte Schrauben (Normalien der preussl.)



Nr. der Schrauben	Durchmesser im Schaft		Schraubenbolzen									
	$d_0$		Gewindedurchmesser in den Spitzen	Kerndurchmesser	Zahl der Gänge auf einen engl. Z.	Höhe					des versenkten Kopfes	Schlüsselweite u. Seite des viereckigen Kopfes
	ge-dreht	unge-dreht				des sechs- oder viereckigen Kopfes	der Mutter	der Gegenmutter	im ganzen	in Konus		
	mm	mm	engl. Z.	mm	mm						mm	mm
3	10	10	$\frac{3}{8}$	9,52	7,49	16	7	10	7	6	5	17
4	13	13	$\frac{1}{2}$	12,70	9,99	12	9	13	10	8	7	22
5	16	16	$\frac{5}{8}$	15,87	12,92	11	12	16	12	10	8	28
6	20	19	$\frac{3}{4}$	19,05	15,80	10	14	20	15	12	10	33
7	23	23	$\frac{7}{8}$	22,22	18,61	9	16	23	17	14	11	39
8	26	26	1	25,40	21,33	8	18	26	19	16	13	44
9	30	29	$1\frac{1}{8}$	28,57	23,93	7	20	30	21	18	14	50
10	33	32	$1\frac{1}{4}$	31,75	27,10	7	22	33	24	20	16	55
11	36	35	$1\frac{3}{8}$	34,92	29,50	6	24	36	26	22	18	61
12	40	39	$1\frac{1}{2}$	38,10	32,68	6	26	40	28	24	20	66
13	43	42	$1\frac{5}{8}$	41,27	34,77	5	29	43	31	26	21	72
14	46	45	$1\frac{3}{4}$	44,45	37,94	5	31	46	33	28	23	77
15	50	48	$1\frac{7}{8}$	47,62	40,40	$4\frac{1}{2}$	34	50	36	30	25	83

Das Gewinde über 20 mm Bolzendurchmesser für Stehbolzen und lotrechte Decken-  
gefäßen, Probierhähnen usw. erhält  
Ungedrehte Schrauben mit abweichendem Durchmesser

**und gedrehte Bolzen. (Whitworthsches Gewinde.)**  
schen Staatsbahnen.)



Seite des Sechsecks für den Kopf oder die Mutter	Schraubenbolzen			Stiftschrauben			Glatte Bolzen		Unterlegscheiben			
	Spindeldurchmesser	Entfernung des Splintes durch die Mutter vom Rande der letzteren vor der Mutter vom Ende des Bolzens		Durchmesser des äußeren Kreises	Seite des Vierecks	Durchmesser des Ansatzes bei runden Stiftschrauben	Durchmesser des Kopfes	Höhe des Kopfes	Durchmesser		Höhe des Splintringes	
$s_1$	$d_2$	$l_0$	$l_1$	$d_3$	$s_2$	$d_4$	$d_5$	$h_5$	für gedrehte Bolzen	für Schraubenmutter		Stärke der Unterlegscheibe
mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm
9,8	4	7	6	14	12	13	16	5	16	22	3	10
12,7	5	9	8	20	17	16	22	6	22	28	4	11
16,2	5	12	8	22	17	20	26	7	26	36	4	12
19,1	6	14	9	26	22	23	32	8	32	44	5	13
22,5	6	16	9	34	28	26	36	9	36	50	5	15
25,4	7	18	10	34	28	30	40	10	40	56	6	16
28,9	7	20	12	40	33	33	44	10	44	62	6	17
31,8	8	22	12	40	33	36	48	11	48	68	7	18
35,2	9	24	13	.	.	.	52	11	52	74	7	19
38,1	9	26	14	.	.	.	56	12	56	80	8	20
41,6	10	29	15	.	.	.	60	12	60	86	8	21
44,5	10	31	15	.	.	.	64	13	64	92	9	22
47,9	10	34	16	.	.	.	68	13	68	100	9	23

anker, usgl. das Messinggewinde vom Wasserstande, von den Zylinderhähnen, Schmier-10 Gänge auf einen englischen Zoll. (Feingewinde.)  
erhalten die Steigung der nächsten schwächeren Normalschraube.

### Schrauben mit Pennscher Sicherung [für Schiffsmaschinen]. (Whitworthsches Gewinde.)

Außerer Durchmesser des Gewindes $d$	Schraubenköpfe,				Mutter						Stellschraube		
	6-eckig, quadratisch oder rund		rund, eingelassen		$m$	$n$	$o$	$p$	$q$	$r$	$s$	$t$	$u$
	Flachkant oder Durchmesser	Höhe	Durchmesser	Höhe	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm
engl. Z	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm
$\frac{3}{4}$	31	14	28	13	31	27	35	26	12	12	5	10	8
$\frac{7}{8}$	35	16	32	15	36	31	40	29	15	12	5	10	8
1	40	18	37	17	40	35	46	33	18	12	5	10	8
$1\frac{1}{8}$	45	20	41	19	46	40	50	37	20	13	5	10	8
$1\frac{1}{4}$	49	22	46	21	52	45	57	42	23	13	5	10	8
$1\frac{3}{8}$	54	24	50	23	57	49	62	46	26	13	5	10	8
$1\frac{1}{2}$	58	26	55	25	62	54	68	50	27	15	6	13	10
$1\frac{5}{8}$	63	28	59	27	67	58	73	54	30	15	6	13	10
$1\frac{3}{4}$	67	30	64	29	73	63	79	59	33	15	6	13	10
$1\frac{7}{8}$	72	32	68	31	77	67	85	63	33	18	8	16	11
2	76	34	73	33	83	72	90	68	36	18	8	16	11
$2\frac{1}{4}$	85	38	82	37	93	81	101	77	42	18	8	16	11
$2\frac{1}{2}$	94	42	91	41	104	90	112	86	48	18	8	16	11
$2\frac{3}{4}$	103	46	100	45	114	99	123	95	50	21	10	20	13
3	112	50	109	49	125	108	134	104	55	21	10	20	13
$3\frac{1}{4}$	121	54	118	53	135	117	145	113	60	21	10	20	13
$3\frac{1}{2}$	130	58	127	57	145	126	156	122	61	25	11	22	14
$3\frac{3}{4}$	139	63	136	61	156	135	166	131	66	25	11	22	14
4	148	68	145	65	166	144	177	140	71	25	11	22	14
$4\frac{1}{4}$	157	73	154	69	177	153	188	149	73	28	13	24	16
$4\frac{1}{2}$	166	78	162	73	187	162	200	158	78	28	13	24	16
$4\frac{3}{4}$	175	83	170	77	197	171	210	167	83	28	13	24	16
5	184	88	178	81	207	179	220	175	84	32	14	28	17
$5\frac{1}{4}$	193	93	186	85	216	187	230	183	89	32	14	28	17
$5\frac{1}{2}$	202	98	194	89	225	195	240	191	90	36	16	31	19
$5\frac{3}{4}$	211	103	202	92	234	203	250	199	95	36	16	31	19
6	220	108	210	95	244	211	260	207	98	38	16	31	19

**Bemerkung.** Die Abmessungen der Schrauben verschiedener Fabriken weichen voneinander ab; die Werte der Tafel sind als Mindestmaße für Köpfe, Müttern und Stellschrauben anzusehen.

## Sellerssches Gewinde.

Außerer Gewinde- Durchm.	Gang- höhe	Zahlen- wert	Außerer Gewinde- Durchm.	Gang- höhe	Zahlen- wert	Außerer Gewinde- Durchm.	Gang- höhe	Zahlen- wert
$d$	$h$	$n$	$d$	$h$	$n$	$d$	$h$	$n$
engl. Z.	engl. Z.	(s. u.)	engl. Z.	engl. Z.	(s. u.)	engl. Z.	engl. Z.	(s. u.)
$\frac{1}{8}$	0,0250	0,2000	$1\frac{1}{8}$	0,1429	0,1270	$3\frac{1}{4}$	0,2857	0,0879
$\frac{3}{16}$	0,0417	0,2222	$1\frac{1}{4}$	0,1429	0,1143	$3\frac{1}{2}$	0,3077	0,0879
$\frac{1}{4}$	0,0500	0,2000	$1\frac{3}{8}$	0,1667	0,1212	$3\frac{3}{4}$	0,3333	0,0889
$\frac{5}{16}$	0,0556	0,1778	$1\frac{1}{2}$	0,1667	0,1111	4	0,3333	0,0833
$\frac{3}{8}$	0,0625	0,1667	$1\frac{5}{8}$	0,1818	0,1119	$4\frac{1}{4}$	0,3478	0,0818
$\frac{7}{16}$	0,0714	0,1633	$1\frac{3}{4}$	0,2000	0,1143	$4\frac{1}{2}$	0,3636	0,0808
$\frac{1}{2}$	0,0769	0,1538	$1\frac{7}{8}$	0,2000	0,1067	$4\frac{3}{4}$	0,3810	0,0802
$\frac{9}{16}$	0,0833	0,1481	2	0,2222	0,1111	5	0,4000	0,0800
$\frac{5}{8}$	0,0909	0,1455	$2\frac{1}{4}$	0,2222	0,0988	$5\frac{1}{4}$	0,4000	0,0762
$\frac{3}{4}$	0,1000	0,1333	$2\frac{1}{2}$	0,2500	0,1000	$5\frac{1}{2}$	0,4211	0,0766
$\frac{7}{8}$	0,1111	0,1270	$2\frac{3}{4}$	0,2500	0,0909	$5\frac{3}{4}$	0,4211	0,0732
I	0,1250	0,1250	3	0,2857	0,0952	6	0,4444	0,0741

Gewindequerschnitt s. Abb. 21 auf S. 760; Bedeutung des Zahlenwertes  $n$  s. Text unter 3. S. 760.

## Gewinde für Gasrohre.\*)

Vorgeschlagen vom Vereine deutscher Ingenieure, vom Vereine deutscher Gas- und Wasserfachmänner, vom Vereine deutscher Zentralheizungsindustrieller und vom Verbands deutscher Röhrenwerke, 1903.

Lichter Rohr- durchmesser		Außerer Rohr- und Gewinde- durchm.	Kern- durch- messer	Anzahl der Gänge auf 1 Z. engl.	Lichter Rohr- durchmesser		Außerer Rohr- und Gewinde- durchm.	Kern- durch- messer	Anzahl der Gänge auf 1 Z. engl.
$D$	$d$	$d_1$	$D$		$d$	$d_1$			
engl. Z.	mm	mm	mm	engl. Z.	mm	mm	mm		
$\frac{1}{4}$	6,35	13	11,3	19	$1\frac{1}{2}$	38,10	48	45	II
$\frac{3}{8}$	9,52	16,5	14,8	19	$1\frac{3}{4}$	44,45	52	49	II
$\frac{1}{2}$	12,70	20,5	18,2	14	2	50,80	59	56	II
$\frac{5}{8}$	15,87	23	20,7	14	$2\frac{1}{2}$	63,50	76	73	II
$\frac{3}{4}$	19,05	26,5	24,2	14	3	76,20	89	86	II
I	25,40	33	30	II	$3\frac{1}{2}$	88,90	101,5	98,5	II
$1\frac{1}{4}$	31,75	42	39	II	4	101,60	114	111	II

\*) Vgl. J. G. W. 1903 S. 693 u. Z. d. V. d. I. 1903 S. 1236. Das unabänderliche Maß des Rohres ist sein äußerer Durchmesser. — Verschiedenheiten der Wandstärken werden durch Aenderung des inneren Durchmessers herbeigeführt. Die Bezeichnung nach der lichten Weite in Zoll engl. ist also nur Handelsbezeichnung einer Rohrsorte. Das äußere Maß des (Whitworth)-Gewindes ist gleich dem äußeren Rohrdurchmesser.

**Löwenherzgewinde.**

Gewindequerschnitt s. Abb. 22 auf S. 761.

Außerer Gewinde- Durchm.	Kern- durch- messer	Gang- höhe	Außerer Gewinde- Durchm.	Kern- durch- messer	Gang- höhe	Außerer Gewinde- Durchm.	Kern- durch- messer	Gang- höhe
$d$	$d_1$	$h$	$d$	$d_1$	$h$	$d$	$d_1$	$h$
mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm
1	0,625	0,25	2,6	1,925	0,45	5,5	4,15	0,9
1,2	0,825	0,25	3	2,25	0,5	6	4,5	1
1,4	0,95	0,3	3,5	2,6	0,6	7	5,35	1,1
1,7	1,175	0,35	4	2,95	0,7	8	6,2	1,2
2	1,4	0,4	4,5	3,375	0,75	9	7,05	1,3
2,3	1,7	0,4	5	3,8	0,8	10	7,9	1,4

**1. Der Kern wird nur auf Zug (oder Druck) beansprucht.**

Dies findet statt bei Schrauben, die ohne ihre Last angezogen werden. Hierfür ist zulässig

$$Q = \frac{1}{4} \pi d_1^2 k_z \dots \dots \dots \text{I.}$$

Für schmiedeiserne Schrauben durchschnittlicher Güte nehme man unter Voraussetzung der Belastungsweise II (S. 522 u. 523)

$$k_z = 480 \text{ kg/qcm.}$$

Werden die Schrauben auf der Drehbank oder mittels zweckmäßigen, scharfen Schneidzeuges oder mittels solcher Maschinen hergestellt, bei denen der Stoff gesund bleibt, so darf bei der Belastungsweise II für schmiedeiserne Schrauben gewählt werden

$$k_z = 600 \text{ kg/qcm.}$$

Für Stahlschrauben nehme man unter denselben Verhältnissen

$$k_z = 640 \text{ kg/qcm} \text{ oder } k_z = 800 \text{ kg/qcm.}$$

Für schmiedeiserne Schrauben mittlerer Stärke ( $d = 1,2$  bis  $3,0$  cm) ergibt sich mit  $k_z = 480$  oder  $600$  etwa

$$Q = 240 d^2 \text{ oder } Q = 300 d^2.$$

Die Höhe  $h_1$  der Mutter ergibt sich unter Berücksichtigung der im Gewinde auftretenden Biegungs- und Scherspannungen, wenn Bolzen und Mutter aus gleichem Stoffe sind, zu etwa  $h_1 = d$ ; für die Höhe  $h_0$  des Kopfes genügt  $h_0 = 0,7 d$ . Die Schlüsselweite  $s_0$  ist aus den Tafeln S. 761 bis 766 zu ersehen.

Ist der Bolzen aus Schmiedeisen und die Mutter aus guter Bronze, so darf für sie unter Voraussetzung der Belastungsweise II (S. 522 u. 523)  $k_b = 300 \text{ kg/qcm}$  gesetzt werden darf, so ergibt sich die Mutterhöhe  $h_1 \sim 1,5 d$ . Will man aber in diesem Falle  $h_1 = d$  beibehalten, so ist der Schraubendurchmesser  $d$  um 20 bis 25 vH zu vergrößern.

Gufseisernes Gewinde ist möglichst zu vermeiden. Für Muttern aus Gufseisen ist  $h_1 \geq 1,5 d$ , wenn zugänglich  $h_1 = 2 d$  zu nehmen. — Läfst sich eine so hohe Mutter nicht unterbringen, so muß der Bolzendurchmesser der zulässigen Mutterhöhe entsprechend vergrößert werden.

## 2. Der Kern wird auf Zug (oder Druck) und auf Drehung beansprucht.

1. Diese Beanspruchung findet statt bei Schrauben, die mit der Last angezogen werden. Dabei darf der Flächendruck  $k$  in den Berührungsflächen von Mutter und Schraube eine gewisse Größe nicht überschreiten. Bei  $z$  tragenden Gängen ist zulässig:

$$Q \leq z \frac{1}{4} \pi (d^2 - d_1^2) k. \quad \dots \dots \dots \text{II.}$$

Für Befestigungs- und Stellschrauben sei, wenn Schmiedeisen auf Schmiedeisen oder auf Bronze gleitet,  $k \geq 150$  kg/qcm, wenn Flußstahl auf Flußstahl oder auf Bronze gleitet,  $k \leq 200$  kg/qcm.

Die Pressung zwischen der Mutter aus Schmiedeisen und der aus demselben Stoff bestehenden Unterlage soll nicht über 200 kg/qcm betragen.

Für die Bewegungs- und Preßschrauben ist höchstens die Hälfte vorstehender Werte  $k$  zu rechnen. Je sicherer sich das Schmiermittel zwischen den Gleitflächen erhalten läßt, um so höher darf  $k$  unter sonst gleichen Verhältnissen gewählt werden.

2. Das den Schraubenbolzen auf Drehung beanspruchende Moment ist für **scharfgängige** Schrauben höchstens

$$M_d = Q r \frac{\operatorname{tg} \alpha + 1,12 \mu}{1 - 1,12 \mu \operatorname{tg} \alpha}.$$

Setzt man  $\operatorname{tg} \alpha = 0,04$ ,  $\mu = 0,15$  und  $r = \frac{1}{4} (d + d_1) \sim 0,55 d_1$ , so ergibt sich  $M_d = 0,11 Q d_1$ .

Da  $\sigma = \frac{Q}{\frac{1}{4} \pi d_1^2}$  und  $\tau_{\max} = \frac{M_d}{\frac{1}{16} \pi d_1^3} = \frac{0,11 Q}{\frac{1}{16} \pi d_1^3}$ , so folgt nach S. 605, 3., für

Schweißstahl mit  $k_z = 600$  kg/qcm,  $k_d = 360$  kg/qcm, also  $\alpha_0 = \frac{600}{1,3 \cdot 360} \sim \frac{4}{3}$ :

$$k_z = \frac{Q}{\frac{1}{4} \pi d_1^2} (0,35 + 0,65 \sqrt{2,38}) = \frac{Q}{\frac{1}{4} \pi d_1^2} \cdot \frac{4}{3}, \text{ mithin}$$

$$Q = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} \pi d_1^2 k_z. \quad \dots \dots \dots \text{III.}$$

Die zulässige Belastung ist mithin rund dreiviertel der unter **1.** (Gleichung 1) erlaubten. Will man also bei einer mit der Last anzuziehenden schmiedeisernen Schraube für ein gegebenes  $Q$  den erforderlichen Kerndurchmesser bestimmen, so suche man in der Tafel S. 762 das zu  $\frac{4}{3} Q$  gehörige  $d_1$ ; umgekehrt ist die für ein bekanntes  $d_1$  zulässige Belastung  $Q$  nur das  $\frac{3}{4}$ -fache der in der Tafel S. 762 gegebenen beiden Werte.

Die Höhe der **Mutter** für Schrauben, die mit der Last angezogen werden, sei bei scharfgängigen Befestigungsschrauben  $h_1 = d$ , wenn Mutter und Schraube aus gleichem Stoff sind; für eine schmiedeisernen Schraube mit Bronzemutter genügt  $h_1 \sim 1,2 d$ . Will man im letzteren Falle  $h_1 = d$  beibehalten, so ist der Schraubendurchmesser  $d$  um etwa 10 vH zu vergrößern.

Die meisten Befestigungsschrauben (wie **Fundamentanker, Flanschschrauben** usw.) erleiden dadurch, daß sie bereits von vorher herein angezogen und während des Betriebes auch nachgezogen werden müssen, eine zusätzliche Beanspruchung. Für die gebräuchlichen scharf-

gängigen Schrauben ( $d \geq 1,6$  cm) wähle man, um diesem Umstande Rechnung zu tragen,

$$Q = 135 d^2 \text{ bis } Q = 170 d^2.$$

3. Für den Kerndurchmesser **flachgängiger** Schrauben erlangt man einen Annäherungswert, indem man nach 1. den Kern (bei überschläglicher Berücksichtigung der Drehungsbeanspruchung) mit  $\frac{1}{2} k_z$  bis  $\frac{3}{4} k_z$  auf Zug berechnet. Dann wird für den abgerundeten Wert  $d_1$  das Gewinde usw. bestimmt und nun die Festigkeitsrechnung auf Zug und Drehung nochmals durchgeführt und  $d_1$  nötigenfalls berichtigt. In den meisten Fällen tritt zu dem beanspruchenden Drehmomente

$$M_d = Q r \operatorname{tg}(\alpha + \rho) = Q r \frac{h + 2\pi r \mu}{2\pi r - \mu h} \quad (\text{vgl. S. 257})$$

noch ein zweites, herrührend von den Reibungswiderständen in der Stützfläche der Schraube, das bei der genaueren Rechnung berücksichtigt werden muß.

Erfährt die Schraube Druckbeanspruchung, so ist sinngemäß in gleicher Weise vorzugehen; hierbei darf nicht übersehen werden, ob Knickung [Fall 2), Abb. 5, S. 583] möglich ist.

**Beispiel:** Die flußstählerne, flachgängige **Spindel einer Schraubenpresse** hat einen Kerndurchmesser  $d_1 = 8$  cm, einen äußeren Durchmesser  $d = 10$  cm, also eine Gangtiefe  $t = 1$  cm; ferner ist die Ganghöhe des dreigängigen Gewindes  $h = 2$  engl. Z. = 5,08 cm. — Wie groß ist die Beanspruchung bei einer Druckkraft von 35 t, wenn die Konstruktion derart ist, daß Knickung nicht in Frage kommt, und das die Schraube auf Drehung beanspruchende Moment durch die vorstehende Gleichung bestimmt wird?

Es ist für den mittleren Schraubenhalbmesser  $r = \frac{1}{4}(10 + 8) = 4,5$  cm und die Reibungszahl  $\mu = 0,1$ :

$$M_d = 35\,000 \cdot 4,5 \frac{5,08 + 2\pi \cdot 4,5 \cdot 0,1}{2\pi \cdot 4,5 - 0,1 \cdot 5,08} = 44\,850 \text{ cmkg.}$$

Die im Kernquerschnitte durch dieses Moment hervorgerufene Drehungsbeanspruchung  $\tau_{\max}$  ist nach S. 588:

$$\tau_{\max} = \frac{44\,850}{\frac{1}{16}\pi \cdot 8^3} = 446 \text{ kg/qcm,}$$

die Druckspannung ist

$$\sigma = \frac{35\,000}{\frac{1}{4}\pi \cdot 8^2} = 696 \text{ kg/qcm}$$

und somit nach 3., S. 605 die größte im Querschnitte der Spindel auftretende Hauptspannung [da für die Belastungsweise II, S. 523, unter Voraussetzung vorzüglichen Eisens mit  $k = 1000$  kg/qcm und  $k_d = 800$  kg/qcm,  $\alpha_0 = 1000 : (1,3 \cdot 800) \sim 1$ ]:

$$\sigma_{\max} = 0,35 \cdot 696 + 0,65 \sqrt{696^2 + 4 \cdot 446^2} = 243,6 + 735,4 = 979 \text{ kg/qcm,}$$

also noch etwas unterhalb der zulässigen Normalspannung  $k = 1000$  kg/qcm.

Bei Verwendung von guter Bronze für die Mutter soll nach S. 769 der Druck in der Berührungsfläche  $k \leq \frac{1}{2} \cdot 200$  kg/qcm sein. Wählt man  $k = 95$  kg/qcm, so wird (nach Gleichung II, S. 769) für die Anzahl  $z$  der vollständig tragenden Gewindegänge:

$$35\,000 = z \cdot \frac{1}{4}\pi (10^2 - 8^2) 95, \text{ woraus } z = 13,$$

so daß eine Mutterhöhe  $h_1 = 13 (2:3) = 8\frac{2}{3}$  engl. Z. = 22 cm genügt.

Vgl. auch „Schrauben und Verschraubungen“ II. Bd., S. 100.

**Steinschraube** (mit vier eisernen Beilagen, die sich gegen die Seitenflächen des pyramidenförmigen Ankerschaftes anlegen und deren Zwischenräume durch Zement auszugießen sind) s. Abb. 27.  $l \geq 5d + 5$  cm

Oder auch Befestigung nur mit Blei oder Zement (sogenannter Metall-Zement von Hauser & Co. in Zürich).

**Fundamentanker** (nach A. Pfarr) s. Abb. 28. Unten am Gewinde sind zwei ebene Flächen angefeilt zum Festhalten des Ankerbolzens mit dem Schlüssel.

Abb. 27.

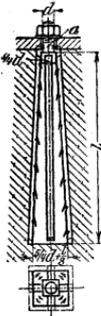


Abb. 28.

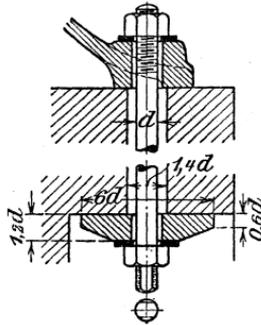


Abb. 29.

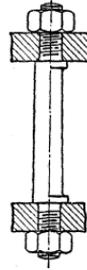


Abb. 30.

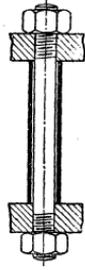


Abb. 31.

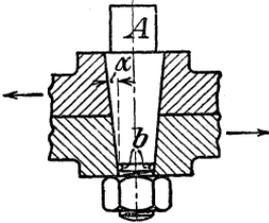


Abb. 33.

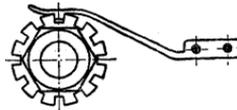


Abb. 36.

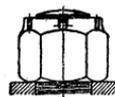


Abb. 32.



Abb. 34.

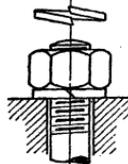


Abb. 37.

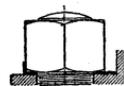
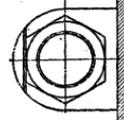
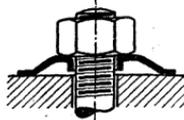


Abb. 35.



**Abstandhaltende Schraubenbolzen** (s. Abb. 29 u. 30).

— **Schraube** (zur Aufnahme von Querkräften) mit kegelig eingeschlifnem Schaft (s. Abb. 31).

**Schraubensicherungen** (s. auch die Skizzen am Kopf der Tafeln S. 764 bis 766) durch Gegenmutter, durchgebohrten Stift und Vorsteckstift oder -keil. — Weitere Mittel zur Sicherung der Mutter gegen

Drehen: Legeschlüssel (s. Abb. 32); auslösbare, in eine Verzahnung an der Mutter einschnappende Federklinke (Abb. 33) oder federnde Unterlegscheiben (Abb. 34 u. 35). — Abb. 36 zeigt die vielfach, beispielsweise auch im Automobilbau angewendete Kronenmutter. —

Abb. 38.



Abb. 39.



Die in Abb. 37 dargestellte Sicherung durch eine Unterlegscheibe, deren einer Rand gegen eine Seitenfläche der Mutter aufgebogen ist, während der andere Rand gegen einen Konstruktionsteil undrehbar anliegt, wird ebenfalls sehr häufig, beispielsweise auch im Dampfturbinenbau, angewendet. Häufig wird der dem aufgebogenen Rand gegenüberliegende Teil der Unterlegscheibe um einen Flansch oder dergl. nach unten umgeschlagen. — Eine selbstsichernde Mutter, die im aufliegenden Teil von zwei Seiten so eingeschnitten ist, daß sie federt und dadurch sichert, stellt die Schraubenfabrik G. Colshorn, Frankfurt a. M., her. \*) — Mittel zur Verhinderung des Drehens des Schraubenbolzens, auch beim Anziehen der Mutter: Vierkant oder Nase am Bolzen (Abb. 38), Anschlagflächen neben dem Bolzenkopf oder Durchsteckkeil (Abb. 39).

## C. Niete.

### a. Allgemeines.

Die **Löcher** für die Vernietung werden durch Lochen (Stanzen) oder durch Bohren hergestellt. Unter allen Umständen ist zu verlangen, daß die Löcher der zu vernietenden Platten gut aufeinander passen.

Das Lochen ist das billigere Verfahren und setzt gutes Eisen von genügender Zähigkeit voraus. Die gestanzten Löcher fallen nicht zylindrisch, sondern etwas kegelförmig aus, u. zw. weiter auf der Blechseite, die sich beim Lochen unten befindet.

Das Bohren der Löcher ermöglicht, besonders durch gemeinsames Bohren der zusammengepaßten Bleche, Träger usw. mit tragbaren Bohrernrichtungen,\*\*) genauere Arbeit und soll da angewandt werden, wo auf diesen Punkt sowie im Falle des Nichtausglühens darauf Wert zu legen ist, daß die Zähigkeit des Eisens in keiner Weise beeinträchtigt wird. Der Durchmesser des Nietloches ist etwa 1,5 bis 2 mm größer als der des Nietschaftes.

Flusseisen soll nur gebohrt werden. — Vgl. hier die Vorschriften unter 5. bis 7., S. 783.

Die **Niete** bestehen aus vorzüglichem, zähem Flußeisen oder Tiegelstahl, selten noch aus Schweisseisen. Formen der Schließköpfe s. Abb. 40 bis 43, wovon Abb. 40 und 42 die Köpfe der Normalniete für Eisenkonstruktionen darstellen.\*\*\*) Den vier Köpfen liegt der gleiche Versenkungswinkel  $\alpha$  (zu der Frage, ob die Niete ein Versenk haben sollen oder nicht, s. weiter unten) zugrunde; es ist  $\text{ctg } \alpha = 1,5$ . C. Bach wählt statt dessen bei übrigen gleichen Abmessungen

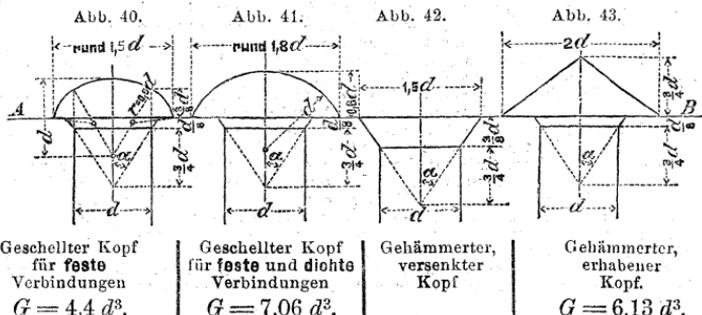
\*) S. Zeitschr. für Werkzeugmaschinen u. Werkzeuge v. 15. Mai 1910.

\*\*\*) Z. d. V. d. I. 1905 S. 696.

\*\*\*\*) S. deutsches Normalprofil-Buch für Walzeisen, 5. Aufl., 1897, S. 25 u. 26.

$\text{ctg } \alpha = 1,2$ . Als Ueberschufs an Schaftlänge zur Bildung des erhabenen Schließkopfes ist erforderlich  $\frac{4}{8}d$  bis  $\frac{7}{4}d$ .

Die in Abb. 42 und 43 dargestellten Köpfe werden ohne Schellhammer erzeugt. Die durch versenkte Niete bewirkte besondere



Schwächung des Blechquerschnittes erfordert u. Umst. eine Vergrößerung der Nietentfernung.

$G$  ist in den drei Formeln (bei Abb. 40, 41, 43) das Gewicht von **1000** Nietköpfen in kg, wenn der Schaftdurchmesser  $d$  in cm ausgedrückt wird.

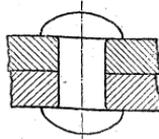
### Gewichte eiserner Schließköpfe.

$d$ in mm	$G$ in kg, entsprechend der Abb.			$d$ in mm	$G$ in kg, entsprechend der Abb.			$d$ in mm	$G$ in kg, entsprechend der Abb.		
	40	41	43		40	41	43		40	41	43
8	2,3	3,6	3,1	18	25,7	41,2	35,8	28	96,6	155,0	134,6
10	4,4	7,0	6,1	20	35,2	56,5	49,0	30	118,8	190,6	165,5
12	7,6	12,2	10,6	22	46,9	75,2	65,3	32	144,2	231,3	200,9
14	12,1	19,4	16,8	24	60,8	97,6	84,7	34	172,9	277,5	240,9
16	18,0	28,9	25,1	26	77,3	124,1	107,7	36	205,3	329,4	286,0

Die üblichen Nietstärken liegen zwischen 8 und 30 mm, bei Schiffskesseln bis 36 mm (Maschinennietung).

**Niete ohne das „kleine Versenk“** (also ohne den kegeligen Uebergang zwischen Schaft und Kopf, nach Abb. 44, 48 u. 52) werden von einer Reihe von Firmen seit Jahren bereits im **Kesselbau** verwendet. Die Nietlöcher werden nur vom Grat befreit, so das das fertige Niet am Nietkopf und am Schließkopf (Setzkopf) nur den naturgemäßen Uebergang zwischen Kopf und Schaft nach Abb. 44 hat.

Abb. 44.



Für **Eisenkonstruktionen** haben die preussischen Minister der öffentlichen Arbeiten und für Handel und Gewerbe übereinstimmend verfügt (s. Stahl und Eisen v. 22. Sept. 1909 S. 1500),

dafs in den Fällen, in denen bisher noch Schweifseisen für die Niete von Eisenkonstruktionen verlangt wurde, Flufseisenniete, u. zw. ohne das kleine Versenk zugelassen werden sollen.

Diesem Erlafs liegen die im Königl. Materialprüfungsamt zu Groß-Lichterfelde-West auf Veranlassung des „Vereins deutscher Brücken- und Eisenbauabriken“ ausgeführten Versuche zugrunde (s. Stahl und Eisen vom 16. Juni 1909 S. 899 u. f.). Diese Versuche erstreckten sich auf zwei Versuchsreihen, von denen die eine Aufschluß geben sollte über den Einfluß des Versenks auf Gleitwiderstand und Abscherfestigkeit von Nietverbindungen, während die andere Versuchsreihe Schlagversuche umfaßte, bei denen das Niet nur in seiner Achsrichtung stofsweise belastet wurde. Zu diesem Zwecke wurden in beiden Versuchsreihen Nietverbindungen untersucht, bei denen die Niete das eine Mal „mit Versenk“, das andere Mal „ohne Versenk“ hergestellt waren. — Zugleich sollte mit diesen Versuchen der Einfluß verschiedener Nietmethoden (Handnietung, Lufthammernietung, Kniehebelnietung — beide mit Druckluft) auf die Haltbarkeit der Verbindung festgestellt werden.

Aus den Versuchen geht unzweifelhaft hervor, dafs das „kleine Versenk“ keinen Einfluß auf die Haltbarkeit der Nietverbindungen hat. Auch sprangen bei den Schlagversuchen die Köpfe weder bei den Nietern mit, noch ohne Versenk ab.

Hiernach wird in dem Bericht über die Versuche dringend empfohlen, in Zukunft das in der Herstellung teure und umständliche, bei Massenerstellung nicht nur nutzlose, sondern oft geradezu schädliche „Versenk“ fortfallen zu lassen, die Niete nur mit der kleinen Ausrundung (Abb. 44) unter dem Kopf zu versehen und die Lochränder nur abzugraten.

Da das Versenk — mindestens das fertige Versenk am Nietkopf — auch auf die Dichtigkeit der Verbindung sicher ohne Einfluß ist, so wird es voraussichtlich auch bei Kesselnietungen mehr und mehr in Fortfall kommen.

Versuche mit Nickelstahlnieten, die Dr.-Ing. E. Preufs in der Materialprüfungsanstalt der Techn. Hochschule zu Darmstadt ausgeführt hat (vgl. Stahl und Eisen v. 28. Juli 1909 S. 1143 u. f.) haben ergeben, dafs die Festigkeit von Ueberlappungsnietungen mit Flufseisenblechen und Nickelstahlnieten etwa 2 bis 2,5 mal so groß war als diejenige von Schweifseisennieten (bei doppelter Laschen-nietung nur etwa 1,5 mal so groß), dafs aber der Gleitwiderstand kaum vergrößert wird. Letzterer wird dagegen dadurch vergrößert, dafs man den Nietstempel nach der Kopfbildung noch auf den Schließkopf einwirken läßt.

### **b. Berechnung der Vernietungen.**

Alle **Längen-Abmessungen** sind im folgenden in **cm** ausgedrückt.

Das heiß eingezogene Niet zieht sich beim Erkalten zusammen; hierdurch werden die Platten aufeinandergedrückt und Längsspannungen im Nietschafte hervorgerufen. Mit der Zusammenziehung in der Richtung der Nietachse ist gleichzeitig eine solche winkelrecht dazu verknüpft, u. zw. aus Anlaß des Erkaltes an sich und infolge der allgemein mit Längsspannungen (Längsdehnungen) verbundenen Quersammenziehung (s. S. 502).

Der Nietschaft könnte mithin selbst dann, wenn er sich im heißen Zustand an die Lochwand anlegen würde, diese nach seinem Erkalten nicht mehr berühren. Solange also kein Gleiten der durch die Niete verbundenen Platten gegeneinander stattgefunden hat, wird der Nietschaft nicht durch Kräfte beansprucht sein können, die von der Lochwand winkelrecht zu seiner Achse geäußert werden müßten. Die Berechnung der Nietverbindungen muß daher nicht von der Berechnung der Niete auf Scherfestigkeit, sondern von dem in der Verbindung vorhandenen Widerstande gegen Gleiten ausgehen.

Nach Versuchen von C. Bach\*) beträgt der mittlere Gleitwiderstand für jedes Paar Berührungsflächen bei sachgemäß ausgeführter Nietung (einreihiger Ueberlappungs-nietung) nach Verstemmung etwa  $R = 1000$  bis  $1800$  kg/qcm Nietquerschnitt. Durch doppelseitige Verstemmung wird der Gleitwiderstand um etwa 30 vH gegenüber unverstemmten Nietungen erhöht.\*\*\*) Näheres über die zulässige Belastung s. S. 776 u. f.)\*\*\*)

### 1. Dampfkessel-Nietungen.

Sie müssen dicht und fest sein. Das Dichthalten einer Nietnaht wird bei Plattendicken von etwa 7 mm aufwärts durch Verstemmen erzielt†). (Abschrägung des Plattenrandes etwa 1:3.)

\*) Vgl. Z. d. V. d. I. 1895 S. 301 u. f., 1892 S. 1142, 1305 u. f., 1894 S. 1231 u. f., auch Bach, Maschinenelemente, 10. Aufl. 1908 S. 188 bis 194.

\*\*) Vgl. a. die Berichte über Versuche von Ch. Frémont über den Gleitwiderstand und über einen längeren Aufsatz desselben Verfassers über Niete und Nietverbindungen in Stahl und Eisen vom 18. Aug. 1909 S. 1289 und vom 11. Mai 1910 S. 795 mit Fortsetzung am 8. Juni 1910 S. 947.

\*\*\*) Bei der bisher üblichen Berechnung der Nietverbindungen wird  $R$  vernachlässigt und (den tatsächlichen Verhältnissen nicht entsprechend) nur die Scherfestigkeit des Nietquerschnitts in Rechnung gezogen. Die vernieteten Platten werden als lediglich durch Zug (oder Druck) beansprucht angesehen und die sich hierbei ergebenden großen Biegungsspannungen des Schaftes und der Bleche außer acht gelassen.

Als Beispiel (vgl. auch Nietungen für eiserne Brücken und Hochbauten S. 780 u. f. für den Gang dieser Berechnungsweise diene die einschneittige, zweireihige Vernietung (Abb. 45). Man denkt sich (nach J. W. Schwedler) zu jedem Niet (vom Durchmesser  $d$ ) einen diesen seitlängs umschlingenden Blechstreifen von der Breite  $\frac{1}{2}b$  und der Dicke  $s$  und nimmt an, daß der Nietschaft, die durchschnittliche Schubspannung  $k_s$  erfahrend, die Kraft  $\frac{1}{4}\pi d^2 k_s$  durch die Lochleitung hindurch auf die beiden Enden des ihn umschlingenden Bandes übertrage und dabei in diesem die Zugspannung  $k_z$  wachrufe, so daß

$$\frac{\pi}{4} d^2 k_s = 2 \frac{b}{2} s k_z.$$

Wird  $k_s \sim k_z$  angenommen und wird das Abrosten der Bleche dadurch berücksichtigt, daß statt der Blechdicke  $s$  nur  $0,8s$  in die Rechnung eingesetzt wird, so ergibt sich

$$b = 1,25 \frac{1}{4} \pi \frac{d^2}{s}; \text{ ferner}$$

$$t = b + d; \quad t_1 = 2b + d; \quad c = \sqrt{t^2 - (\frac{1}{2}t_1)^2}.$$

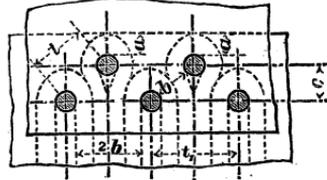
Wird Ausscheren des Randes (statt des beim Bruche tatsächlich stattfindenden Aufreisens) vorausgesetzt, so folgt aus  $\frac{1}{4}\pi d^2 k_s = 2 a s k'_s$  mit  $k'_s$  (Blech) =  $k_s$ :

$$a = \frac{1}{4} \pi \frac{d^2}{2s}.$$

Wird die Kraft, welche die Nietverbindung beansprucht, fortgesetzt gesteigert, so überschreitet sie den Widerstand  $R$ : die Platten gleiten, der Nietschaft gelangt zur Anlage, und schieflich wird nach vorhergegangener, meist ziemlich weitreichender Formänderung (Streckung der Löcher in Richtung der Zugkraft, Rissigwerden der Lochränder, Abscheren der Niete oder Reifsen der Platten) die Verbindung durch Bruch zerstört.

†) Ueber „Versuche mit autogen geschweißten Blechen und Kesselteilen“ vgl. den Bericht von Bach in Z. d. V. d. I. 1910 S. 831, sowie Heft 83 u. 84 der Mitteilungen über Forschungsarbeiten.

Abb. 45.



Die Allgemeinen Polizeilichen Bestimmungen\*) über die Anlegung von Land- und Schiffsdampfkesseln vom 17. Dezember 1908 (für das Reich) [im folgenden A. P. B. genannt, s. II. Bd. S. 78 u. f.] gestatten Schweiseseisen- wie Flußeisenbleche und Schweiseseisen- wie Flußeisenniete. Sie enthalten genaue Bestimmungen über die aus Betriebsüberdruck und Zugfestigkeit des Bleches folgenden Blechdicken, über die zulässige Belastung des Nietschaftes (höchstens 7 kg/qmm für Nietmaterial bis zu 38 kg/qmm Zugfestigkeit), über Zug- und Biegeproben, über Zugfestigkeit der Bleche, Stauchproben der Niete usw., ferner über Vernietung, Schweisung und Bearbeitung im Feuer und Berechnung der Abmessungen (s. II. Bd. S. 94).

Die Festigkeit gut und mittels Ueberspannung geschweißter Nähte kann nach A. P. B. zu 0,7 des vollen Bleches gerechnet werden.

Ferner darf nach A. P. B. die Zugbeanspruchung des Bleches unter Annahme gleichmäßiger Spannungsverteilung über den Querschnitt in keiner Nietreihe die Grenze  $\frac{K}{x}$  überschreiten.

Darin ist zu wählen:

$K=33$  kg/qmm bei Schweiseseisen,

$K=36$  „ „ Flußeisen von 34 bis 41 kg/qmm Zugfestigkeit,

$K=40$  „ „ „ „ 40 „ 47 „ „ „

$K=44$  „ „ „ „ 43 „ 51 „ „ „

$x=4,75$  bei überlappten oder einseitig gelaschten, handgenieteten Nähten,

$x=4,5$  bei überlappten oder einseitig gelaschten, maschinengenieteten Nähten und bei geschweißten Nähten (unter Beachtung von Abschnitt II Ziffer 3 bis 6),

$x=4,35$  bei zweireihigen, doppeltgelaschten, handgenieteten Nähten, deren eine Lasche nur einreihig genietet ist,

$x=4,25$  bei doppeltgelaschten, handgenieteten Nähten,

$x=4,1$  bei zweireihigen, doppeltgelaschten, maschinengenieteten Nähten, deren eine Lasche nur einreihig genietet ist,

$x=4$  bei doppeltgelaschten, maschinengenieteten Nähten.

Die Werte  $x=4,25$  und  $x=4$  können auch dann in die Rechnung eingeführt werden, wenn bei drei- und mehrreihigen Doppellaschen- nietungen die eine Lasche eine Nietreihe weniger besitzt als die anderen.

Die Blechdicke soll nicht geringer als 7 mm genommen werden; nur bei kleinen Kesseln (z. B. für Feuerspritzen oder Krafifahrzeuge) sind allenfalls dünnere Bleche zulässig.

Bleche, bei denen eine höhere Zugfestigkeit als 36 kg/qmm in Anspruch genommen werden soll, dürfen zu Mantelteilen nur verwendet werden, wenn die Verarbeitung kalt oder rotwarm stattfindet, wenn ihre Verbindung in den Längsnieten durch Doppellaschen- nietung erfolgt und die Nietung maschinell hergestellt wird.

\*) Vrgl. die „Vorschriften betr. die Anlegung, Untersuchung und den Betrieb von Land- und Schiffsdampfkesseln mit Bau- und Materialvorschriften“. Sechste vermehrte Auflage. Hagen i. Westf. Verlag von Otto Ham- merschmidt 1910.

### I. Ueberlappungs-Nietungen.

Hierfür wähle man auf Grund bewährter Ausführungen,\*) wenn  $s$  die Blechdicke (in cm), den Nietdurchmesser

$$d = \sqrt{5s} - 0,4 \text{ cm};$$

für  $s = 0,8$  | 1,0 | 1,2 | 1,4 | 1,6 | 1,8 | 2,0 | 2,2 | 2,4 | 2,6 | 2,8 | 3,0 | 3,2 cm  
 wird  $d = 1,6$  | 1,8 | 2,0 | 2,2 | 2,4 | 2,6 | 2,8 | 2,9 | 3,0 | 3,2 | 3,3 | 3,5 | 3,6 cm

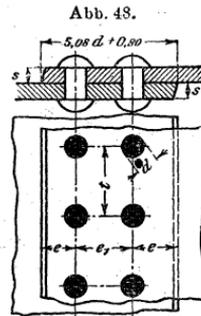
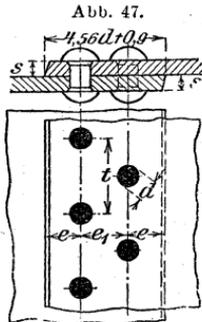
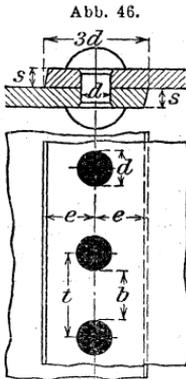
#### 1. Einschnittige, einreihige Vernietung (Abb. 46).

Man wähle die Nietteilung  $t = 2d + 0,8$  cm und die Entfernung der Lochmitten vom Blechrande  $e = 1,5d$ . Diese Angaben gelten auch für einseitig gelaschte Nietverbindungen. Die zulässige Belastung der Niete im Betriebe soll bei Verwendung guten Nieteisens und sachgemäßer Ausführung 600 bis 700 kg/qcm im Nietquerschnitt betragen, so daß die im vollen Bleche (unter Voraussetzung gleichmäßiger Verteilung) eintretende Spannung (in kg/qcm) höchstens

$$\sigma_v = 700 \frac{1/4 \pi d^2}{st} \text{ beträgt.}$$

Beispiel. Ein Dampfkessel von 120 cm innerem Durchmesser und 5,8 kg/qcm innerem Ueberdruck soll einschnittige, einreihige Vernietung erhalten. Nach der Tafel der Blechdicken der Dampfkessel mit einreihiger Längsnaht wird geschätzt  $s = 10$  mm. Für  $s = 1,0$  cm ist  $d = 1,8$  cm  $t = 4,4$  cm und  $\sigma_v = 348$  kg/qcm. Die Schätzung von  $s$  erweist sich als richtig, da für 1 cm Kessellänge folgt:

$$120 \cdot 5,8 = 348 \cdot 2s \text{ oder } s = \frac{120 \cdot 5,8}{2 \cdot 348} = 1,0 \text{ cm.}$$



#### 2. Einschnittige, zweireihige Vernietung (Abb. 47: Niete mit Versenk und Abb. 48: Niete ohne Versenk).

Man wähle den Nietdurchmesser  $d$  und den Randabstand  $e$  wie vorstehend unter I.; ferner sei für die Zickzacknietung (Abb. 47)

\*) Hierzu und für die folgenden Abb. 46 bis 53 vgl. Bach, Maschinenelemente 10. Aufl. 1908, S. 196 u. ff.

die Nietteilung

$$t = 2,6d + 1,5 \text{ cm}$$

und die Entfernung

$$e_1 = 0,6t;$$

für die Kettennietung (Abb. 48) nehme man dagegen

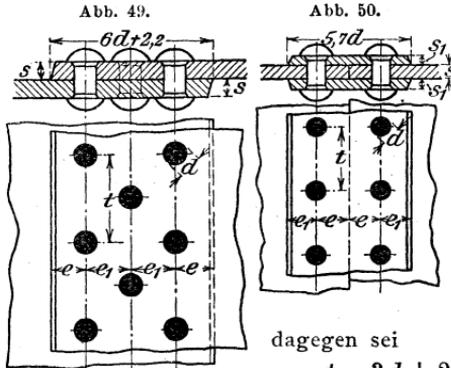
die Nietteilung  $t = 2,6d + 1,0 \text{ cm}$  und die Entfernung  $e_1 = 0,8t$ .

Abb. 49.

Abb. 50.

In beiden Fällen soll die zulässige Belastung der Niete im Betriebe 550 bis 650 kg/qcm Nietquerschnitt nicht überschreiten (vgl. unter I.), so dafs

$$\sigma_v \leq 650 \cdot \frac{1}{4} \pi d^2 : (\frac{1}{2} s t).$$

**3. Einschnittige, dreireihige Vernietung** (Abb. 49).

Man wähle  $d$  und  $e$  wie vorstehend unter 1.;

dagegen sei

$$t = 3d + 2,2 \text{ cm}, \quad e_1 = 0,5t;$$

$$\sigma_v = 500 \cdot \frac{1}{4} \pi d^2 : (\frac{1}{3} s t) \text{ bis } 600 \cdot \frac{1}{4} \pi d^2 : (\frac{1}{3} s t).$$

## II. Zweiseitige Laschen-Nietungen.

### 1. Zweischnittige, einreihige Vernietung (Abb. 50).

Die Laschendicke sei mit Rücksicht auf Verstemmen und Abrosten

$$s_1 = \frac{5}{8}s \text{ bis } \frac{2}{3}s.$$

Man wählt auch wohl die Lasche im Kesselinnern etwas stärker als die Aufsenlasche wegen der verschiedenen Abnutzung. Ferner sei

$$d = \sqrt{5s} - 0,5 \text{ cm};$$

$$t = 2,6d + 1,0 \text{ cm}; \quad e = 1,5d; \quad e_1 = 0,9e.$$

Da der Gleitwiderstand hier in zwei Paar Flächen, also doppelt auftritt, kann man die zulässige Belastung der Niete im Betriebe zu 1000 bis 1200 kg/qcm im Nietquerschnitt annehmen, so dafs (vgl. S. 775)

$$\sigma_v = 1000 \frac{\frac{1}{4} \pi d^2}{s t} \text{ bis } 1200 \frac{\frac{1}{4} \pi d^2}{s t}.$$

Dabei soll nach den A. P. B. für doppeltgelaschte, maschinengenietete Nähte die Zugbeanspruchung des Bleches (s. II. Bd. S. 95)

$$\leq \frac{K}{4} \text{ sein.}$$

Man geht hier bis zu  $\frac{1}{4}$  der tatsächlichen Zugfestigkeit des Bleches, weil das Blech in der Lochlinie gegen Rosten geschützt ist und die Biegebungsbeanspruchung wegfällt. Hierin liegt ein wesentlicher Vorzug der zweiseitigen Laschennietung gegenüber der Ueberlappennietung.

**2. Zweischnittige, zweireihige Vernietung (Abb. 51).**

Es kann gewählt werden:

$$d = \sqrt{5s} - 0,6 \text{ cm}; \quad t = 3,5d + 1,5 \text{ cm}; \quad e = 1,5d;$$

$$e_1 = 0,5t; \quad \text{Randabstand} = 0,9e; \quad s_1 = \frac{5}{8}s \text{ bis } \frac{2}{3}s;$$

$$\sigma_v = 950 \frac{\frac{1}{4} \pi d^2}{\frac{1}{2} st} \text{ bis } 1150 \frac{\frac{1}{4} \pi d^2}{\frac{1}{2} st}.$$

Die wellenförmige Begrenzungslinie der Laschen, in Abb. 51 nur links gezeichnet, bezweckt, die Ueberlaschung an jeder Stelle so weit zu vermindern, daß das Verstemmen zu einer dichten Verbindung führt. Bei genügender Dicke der Laschen empfiehlt es sich, die gerade Begrenzung, weil einfacher, beizubehalten.

Wird in der äußeren Naht nach Abb. 51 jedes zweite Niet fortgelassen, so wähle man  $d = \sqrt{5s} - 0,6 \text{ cm}; \quad t = 5d + 1,5 \text{ cm}; \quad e = 1,5d;$   
 $e_1 = 0,4t; \quad \text{Randabstand} = 1,5d; \quad s_1 = 0,8s; \quad \sigma_v$  wie vorstehend.  
 Ganze Laschenbreite  $10d + 1,2 \text{ cm}.$

Abb. 51.

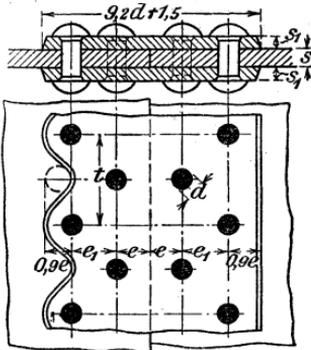
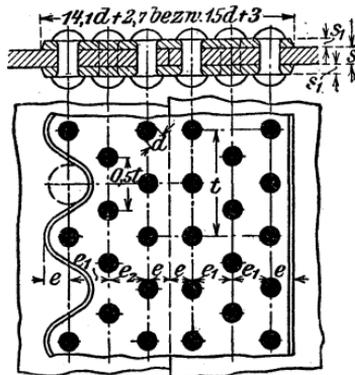


Abb. 52.



**3. Zweischnittige, dreireihige Vernietung (Abb. 52).**

Es kann gewählt werden:

$$d = \sqrt{5s} - 0,7 \text{ cm}; \quad t = 6d + 2,0 \text{ cm};$$

$$e = 1,5d; \quad e_1 = \frac{3}{8}t, \quad e_2 = 0,3t; \quad \text{Laschendicke } s_1 = 0,8s$$

$$\sigma_v = 900 \frac{\frac{1}{4} \pi d^2}{nst} \text{ bis } 1100 \frac{\frac{1}{4} \pi d^2}{nst},$$

wobei für die linke Seite der Abb. 52  $n = \frac{1}{5}$ , für die rechte  $n = \frac{1}{6}$  gilt. Die vorstehende Bemerkung über die wellenförmige Begrenzung unter 2. gilt auch hier.

**III. Zweiseitige Laschennietung mit ungleich breiten Laschen.\*)**

Um das kostspielige wellenförmige Ausschneiden der Laschen (Abb. 51 u. 52) zu vermeiden, macht man vielfach die äußere Lasche

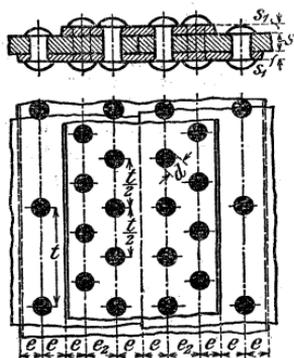
\*) S. Herm. Haeder, Die Dampfkessel. — Entwurf, Berechnung, Ausführung und Betrieb. 5. Aufl. Wiesbaden 1910. — Erster Teil, S. 155 u. f. — Auch Bach, 10. Aufl. 1908 S. 215.

schmäler als die innere. Es entsteht dann die sogenannte zweieinhalbfache Nietung, bei der die inneren vier Nietreihen zweischnittig, die äußeren einschnittig sind (Abb. 53). Die Maße für  $d$ ,  $t$ ,  $e$ ,  $e_2$  und  $s_1$  sind dieselben wie für die zweischnittige dreireihige Nietung (Abb. 52).

— Angewendet z. B. bei den neuen  $\frac{2}{5}$  gekuppelten Schnellzuglokomotiven der Preussischen Staatsbahn.\*)

Weiteres über Dampfessel-Nietungen, insbesondere über die Wahl der Vernietung s. II. Bd., Abschn. Kraftmaschinen (Teile der Dampfessel).

Abb. 53.



## 2. Nietungen für Flüssigkeits- und Gasbehälter usw.

Meist einschnittige, einreihige Vernietung (s. S. 777). Die Blechdicke  $s$  wird hierbei in der Regel mehr durch Rücksicht auf Abrosten u. dgl. als durch den inneren Druck bestimmt. Es kann gewählt werden:

$$d = \sqrt{5s} - 0,4 \text{ cm};$$

$$\text{Nietteilung } t = 3d + 0,5 \text{ cm}; \quad \text{Randabstand } e = 0,5t.$$

Niete von 0,8 cm Durchmesser an abwärts werden meist kalt eingezogen und vernietet. — Platten unter 0,5 cm lassen sich erfahrungsmäßig nicht mehr verstemmen. Gewöhnlich wird dann ein mit Mennige getränkter Leinwand- oder Papierstreifen von der Breite der Ueberlappung zwischen die abzudichtenden Flächen gelegt. Zuweilen verwendet man auch mit Mennigekitt behandelte Lederschnur u. dgl.

## 3. Nietungen für eiserne Brücken und Hochbauten.

Hier kann nach Maßgabe des auf S. 774 u. f. Gesagten vorgegangen werden. Von einem Verstemmen wird bei diesen Nietungen abgesehen. Den Nietdurchmesser wähle man im allgemeinen zu

$$d = \sqrt{5s} - 0,2 \text{ cm},$$

wenn  $s$  die Plattendicke in cm bedeutet.

Die Mehrzahl der Mitglieder des Vereins deutscher Brücken- und Eisenbaufabriken hat sich dahin geeinigt, in der Regel nur noch Niete von 12, 16, 20, 23 und 26 mm Dmr. zu verwenden. — Die Vorschläge des Vereins sind von vielen Behörden, u. a. vom Preufs. Min. der öffentlichen Arbeiten, angenommen.\*\*)

Für einreihige, einschnittige Vernietung mit 600 kg/qcm Nietquerschnitt zu übertragender Kraft wird die Nietteilung

$$t = \frac{\pi d^2}{4s} + d$$

\*) S. den entsprechenden Aufsatz von Metzeltin in der Z. d. V. d. I. 1909 S. 643.

\*\*) Vgl. Z. d. V. d. I. 20. August 1910 S. 1403, wo auch die Zeichen angegeben sind, durch die sich die fünf Nietarten in der Zeichnung unterscheiden sollen.

mit der Beschränkung, daß  $t \geq 2,5 d$  und der Randabstand

$$e = 1,5 d \text{ bis } 2,0 d.$$

Zwei- und mehrreihige Vernietungen pflegt man auf Grund des Vorstehenden nach dem Schwedlerschen Verfahren (vgl. Fußnote S. 775) zu bestimmen. — Ist  $k_z$  die zulässige Zugspannung des Flußeisens, aus dem die Niete hergestellt sind (gewöhnlich  $k_z = 750 \text{ kg/qcm}$ ), so wählt man  $k_s = 0,8 k_z = 600 \text{ kg/qcm}$  als zulässige Schubspannung im Nietschaft und nimmt an, daß  $n$  Niete von  $d$  cm Durchmesser, wenn sie in  $m$  Querschnitten (meist ein- oder zweischnittig) beansprucht werden, eine Kraft (in kg) übertragen von

$$P \geq 600 \cdot \frac{1}{4} \pi d^2 m n.$$

Bei mehrschnittigen Vernietungen ist auch darauf zu achten, daß der **Leibungsdruck**  $k$  (Druck zwischen Nietschaft und Lochwand) das für zulässig erachtete Maß nicht überschreitet. Empfohlen wird hierfür  $k = 1,8 k_z$  bis  $2,2 k_z$ , im Mittel  $k = 2 k_z$ . Es muß also sein

$$P \leq k s_s d n,$$

wenn hierbei  $s_s$  die in der einen der beiden Krafrichtungen beanspruchte geringste Gesamt-Plattendicke (in cm) bedeutet. Das sich aus den beiden letzten Formeln ergebende größere  $n$  ist der Ausführung zugrunde zu legen.

Heftniete halten die verbundenen Teile nur zusammen und übertragen keine Kräfte. Ihr Abstand ist bei den der Witterung ausgesetzten Eisenverbindungen wegen des wasserdichten Fugenschlusses und zur Vermeidung von Rost nicht zu groß zu wählen. Bei Verbindung zweier Winkeleisen oder zweier solcher mit zwischenliegendem Stähbleche sei der Abstand der Heftniete höchstens  $8 d$ ; bei Verbindung eines Bleches oder Flacheisens mit einem Winkeleisen darf bei einer Blechdicke  $s = 8$  bis  $11$  mm die Heftnietentfernung höchstens  $5 d$  betragen und bei  $s > 11$  mm höchstens  $6 d$ . — Der größte Abstand der Randniete vom Blechrande soll bei Blechdicken  $s \geq 14$  mm nicht mehr als  $2,5 d$  und bei  $s > 14$  mm höchstens  $2,8 d$  sein.\*)

Falls sich die Stäbe, die durch die Vernietung Kräfte aufeinander übertragen sollen, nicht unmittelbar berühren, sind entsprechend mehr Niete anzuordnen. — Sämtliche auf Zug beanspruchten Verbindungsstücke sind mit Spannung einzusetzen.

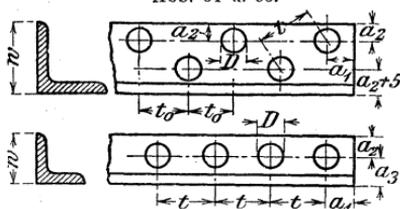
Die Summe der Dicken der zu vernietenden Teile soll  $3 d$  bis  $4 d$  nicht überschreiten, da bei größerer Nietlage als etwa  $5,5 d$  ein Stauchen durch den ganzen Nietschaft hindurch nicht möglich ist und beim Erkalten sich die Längsspannungen leicht bis zum Absprengen des Kopfes steigern.

Können längere Niete nicht vermieden werden, so sind sie nur so weit zu erwärmen, als es die Bildung des Schließkopfes und die Erzeugung des Widerstandes gegen Gleiten erfordert.

\*) S. A. Meyerhof, Die Schwedlerbrücken zu Breslau, Z. d. V. d. I. 1906 S. 202 u. f.

Stählerne kegelförmige Schraubenbolzen mit aufgesetztem Vierkant zum sauberen Einschleifen des Kegels (mit  $\frac{1}{20}$  bis  $\frac{1}{10}$  Anzug) bilden einen guten, aber teuren Ersatz langer Niets (vgl. Abb. 31, S. 771).

Abb. 54 u. 55.



Für Winkelisen empfiehlt es sich, folgende Mafse innezuhalten [auf andere Profile sinngemäfs anzuwenden]. (Abb. 54 u. 55.) Abb. 54 gilt nur für Winkelisen von  $w \geq 100$  mm. Der Durchmesser  $D$  des Nietkopfes ist

$$D \sim 1,5 d$$

(s. Abb. 40, S. 773).

Niet-durchm.	$D$	$t_{\min}$	$t$	$t_{\max}$	$t_{0\min}$	$a_{1\min}$	$a_1$	$a_{2\min}$
mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm
$d = 16$	24	40	50	100—120	35	25	30	25
$d = 18$	27	45	55	110—135	40	27	35	27
$d = 20$	30	50	60	120—150	40	30	40	30
$d = 22$	33	55	65	130—165	45	33	45	33
$d = 24$	36	60	70	140—180	45	36	50	36
$d = 26$	39	65	75	150—195	50	40	55	40

$$a_3 = 0,5 w + 5 \text{ mm}; \quad w_{\min} = 3 d.$$

Von dem Verbande deutscher Architekten und Ingenieur-Vereine, dem Vereine deutscher Ingenieure und dem Vereine deutscher Eisenhüttenleute sind im Jahre 1910 Normalbedingungen für die Lieferung von Eisenkonstruktionen, für Brücken und Hochbau aufgestellt werden.

Diese Normalbedingungen gliedern sich in folgende vier Abschnitte:

- I. Das Prüfungsverfahren;
- II. Güte der Materialien;
- III. Herstellung der Eisenkonstruktion;
- IV. Abnahme.

Davon sind unter Mitwirkung des Deutschen Verbandes für die Materialprüfungen der Technik und des Vereins deutscher Brücken- und Eisenbau-Fabriken im Jahre 1910 abgeändert die Abschnitte I und II, unverändert geblieben sind die Abschnitte III und IV der in 11. Auf. 1908 in Otto Meißners Verlag, Hamburg, erschienenen Normalbedingungen. Der für die Herstellung der Nietverbindungen wichtigste § 6 Bearbeitung des Teiles III lautet:

Die sämtlichen Konstruktionsteile müssen genau den Zeichnungen entsprechen und folgende Bedingungen erfüllen:

1. Die durch Nietung oder Verschraubung zu vereinigenden Eisenteile sind genau auszurichten, so daß die Fugen dicht schließen. — Das Verstemmen der Fugen vor Prüfung und Abnahme ist nicht gestattet.

2. Sämtliche Eisenteile müssen, entsprechend den in den Zeichnungen angegebenen Abmessungen, aus dem Ganzen gewalzt bzw. geschmiedet oder gegossen sein und dürfen nicht durch Zusammenschweißen einzelner Teile gebildet werden. Ausnahmen sind besonders festzustellen.

3. Jede Bearbeitung des Materials, insbesondere des Flußeisens und Flußstahls, hat entweder im kalten oder mindestens im rotwarmen Zustande zu erfolgen. Jede Bearbeitung oder Materialbeanspruchung in einem zwischenliegenden Wärmezustande (sogen. Blauwärme) ist tunlichst zu vermeiden. Hat trotzdem eine solche stattgefunden, so ist das fertige Gebrauchstück in geeigneter Weise auszuglühen.

4. Wird Flußeisen mit der Schere geschnitten, so ist das neben dem Schnitte befindliche Eisen in mindestens 2 mm Breite durch Hobeln oder Fräsen zu beseitigen; ausgenommen sind unwesentliche Teile, Futterstücke usw.

5. Alle Schrauben- und Nietlöcher, mit Ausnahme derjenigen in Futterplatten, welche gelocht werden dürfen, sind zu bohren. Der an den Löchern entstandene Grat muß vor dem Zusammenlegen und Nieten der Stücke sorgfältig entfernt werden.

6. Die Nietlöcher müssen den vorgeschriebenen Durchmesser und die in der Zeichnung vorgeschriebene Stellung und Versenkung erhalten.

7. Die zusammengehörigen Nietlöcher müssen gut aufeinander passen. Verschiebungen sind bis höchstens 5 vH des Lochdurchmessers zulässig; sie müssen jedoch durch Aufreiben mit der Reibahle ausgeglichen werden. In derartig aufgetriebene Löcher sind entsprechend stärkere Nietbolzen einzuziehen.

8. Die Niete sind im hellrotwarmen Zustande, nach Befreiung von dem etwa anhaftenden Glühspan, in die gehörig gereinigten Nietlöcher unter gutem Vorhalten (wo tunlich mit Nietwinden) einzuschlagen. Sie müssen die Löcher nach der Stauchung vollständig ausfüllen. — Setz- und Schließkopf müssen zentrale Lage haben, gut und vollanliegend ausgeschlagen sein, und es darf dabei keine Vertiefung entstehen. Der etwa entstandene Bart ist sorgfältig zu entfernen. Die Nietköpfe dürfen keinerlei Risse zeigen.

Die Niete zu verstemmen, ist nicht gestattet. — Nach dem Vernieten ist zu untersuchen, ob die Niete vollkommen festsitzen und nicht prellen. Alle nicht fest eingezogenen oder den sonstigen vorstehenden Bedingungen nicht entsprechenden Niete sind wieder herauszuschlagen und durch vorschriftsmäßige zu ersetzen. In keinem Falle ist es gestattet, die Niete im kalten Zustande nachzutreiben.

9. Die vorkommenden Schraubengewinde müssen nach der Whitworthschen Skala rein ausgeschnitten sein. Die Muttern dürfen weder schlottern, noch zu festen Gang haben. Die Köpfe und Muttern müssen mit der ganzen zur Anlage bestimmten Fläche aufliegen. — Bei schiefen Anlageflächen sind die Köpfe, soweit sie nicht genau angepaßt werden, ebenso wie die Muttern, mit entsprechend schiefen Unterlegplatten zu versehen. — Sind nach Angabe der Zeichnungen oder der Bedingungen gedrehte Schraubenbolzen zu verwenden, so müssen diese in die für sie bestimmten Bohrlöcher genau passen.

10. Die Konstruktionsteile sind auf sicheren Unterlagen zusammenzupassen. Hierbei ist darauf zu achten, daß keiner dieser Teile in eine einseitige Spannung gezwängt wird, daß ihre Verbindung vielmehr gelöst werden kann, ohne daß die bezüglichen Stücke auseinander federn. Sollten sich bei der Vernietung einzelne Konstruktionsteile verziehen, so müssen die Verbindungen gelöst und die vorhandenen Fehler sorgfältig beseitigt werden.

Das Nieten auf dem Bauplatze ist soviel wie irgend möglich zu beschränken.

**4. Nietungen für Maschinenteile** zur Uebertragung von Kräften mit fortwährend wechselnder Richtung. Solche Verbindungen werden (nach Bach\*) z. B. bei Wasserradwellen) hergestellt durch Einziehen von Nieten im kalten Zustande derart, daß der Nietschaft nicht nur das Loch ausfüllt, sondern sich auch mit einem gewissen Drucke gegen die Lochwand legt.

Diese Art der Nietung ist teuer und wird meist ersetzt durch Verwendung kegelförmiger Schraubenbolzen nach Abb. 31, S. 771.

\*) S. Bach, Maschinenelemente, 10. Aufl. 1908 S. 219

## II. MASCHINENTEILE DER DREHENDEN BEWEGUNG.

### A. Zahnräder.

Nach der gegenseitigen Stellung der Wellen sind drei Fälle zu unterscheiden:

1. Für **parallele** Wellen: zylindrische Räder, Stirnräder.
2. Für **sich schneidende** Wellen: Kegelräder.
3. Für **sich kreuzende** Wellen: hyperboloidische oder zylindrische Schraubenräder **oder** Schnecke und Schraubenrad.

#### a. Verzahnung.

##### 1. Allgemeines.

Die gemeinsame Berührungsnormale der Zahnprofile, d. h. die Zahndruckrichtung, teilt in jedem Augenblicke des Eingriffes die Räderzentrale im umgekehrten Verhältnis der Achsenwinkelgeschwindigkeiten  $\omega_1$  und  $\omega_2$ . (Ueber  $\omega$  s. S. 149 u. f.)

Für jedes Räderpaar ist das Verhältnis  $\omega_1 : \omega_2$  in der Regel unveränderlich; nur ausnahmsweise (bei unrunder Rädern, vgl. S. 799) ist  $\omega_1 : \omega_2$  periodisch veränderlich. Für gleichbleibende Verhältnisse der Winkelgeschwindigkeiten geht die Zahndruckrichtung stets durch den Berührungspunkt der beiden Teilkreise; diese wälzen sich aufeinander ab, ohne zu gleiten. Bei unrunder Rädern treten an die Stelle der Teilkreise andere Wälzungskurven, deren Form von dem Veränderlichkeitsgesetze der Uebersetzung abhängt.

Ist  $t$  die Teilung, d. h. der Abstand von Zahnmitte zu Zahnmitte, gemessen als Bogen auf dem Teilkreise, so ist bei  $z$  Zähnen und dem Teilkreishalbmesser  $r$ :

$$2\pi r = zt. \quad (\text{Tafel s. S. 785.})$$

Damit sich für den Teilkreishalbmesser  $r$  und damit für den Achsenabstand zweier Räder ein möglichst rundes Maß ergibt, wählt man die Teilung  $t$  in einfachem Verhältnis zu  $\pi$ , also  $t = m\pi$  mm, dann ist

$$2r = zm.$$

Man nennt  $m = t : \pi$  den **Modul** der Teilung.

**Beispiel:** Zwei Räder haben 20 und 80 Zähne, der Modul  $m = \frac{t}{\pi}$  sei 8. Dann ist der Halbmesser des ersten Rades:

$$r_1 = \frac{z_1 \cdot m}{2} = \frac{20 \cdot 8}{2} = 80 \text{ mm,}$$

des zweiten Rades:

$$r_2 = \frac{z_2 \cdot m}{2} = \frac{80 \cdot 8}{2} = 320 \text{ mm.}$$

$$\text{Tafel von } \left(\frac{r}{l}\right) = \frac{z}{2\pi}$$

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0,000	0,159	0,318	0,477	0,637	0,796	0,955	1,114	1,273	1,432
10	1,592	1,751	1,910	2,069	2,228	2,387	2,546	2,706	2,865	3,024
20	3,183	3,342	3,501	3,661	3,820	3,979	4,138	4,297	4,456	4,615
30	4,773	4,934	5,093	5,252	5,411	5,570	5,730	5,889	6,048	6,207
40	6,366	6,525	6,685	6,844	7,003	7,162	7,321	7,480	7,639	7,799
50	7,958	8,117	8,276	8,435	8,594	8,754	8,913	9,072	9,231	9,390
60	9,549	9,708	9,868	10,027	10,186	10,345	10,504	10,663	10,823	10,982
70	11,141	11,300	11,459	11,618	11,777	11,937	12,096	12,255	12,414	12,573
80	12,732	12,892	13,051	13,210	13,369	13,528	13,687	13,846	14,006	14,165
90	14,324	14,483	14,642	14,801	14,960	15,120	15,279	15,438	15,597	15,756
100	15,916	16,075	16,234	16,393	16,552	16,711	16,870	17,030	17,189	17,348
110	17,507	17,666	17,825	17,985	18,144	18,303	18,462	18,621	18,780	18,939
120	19,099	19,258	19,417	19,576	19,735	19,894	20,053	20,213	20,372	20,531
130	20,690	20,849	21,008	21,168	21,327	21,486	21,645	21,804	21,963	22,122
140	22,282	22,441	22,600	22,759	22,918	23,077	23,237	23,396	23,555	23,714
150	23,873	24,032	24,192	24,351	24,510	24,669	24,828	24,987	25,146	25,306
160	25,465	25,624	25,783	25,942	26,101	26,261	26,420	26,579	26,738	26,897
170	27,056	27,216	27,375	27,534	27,693	27,852	28,011	28,170	28,330	28,489
180	28,648	28,807	28,966	29,125	29,285	29,444	29,603	29,762	29,921	30,080
190	30,239	30,399	30,558	30,717	30,876	31,035	31,194	31,354	31,513	31,672
200	31,831	31,990	32,149	32,308	32,468	32,627	32,786	32,945	33,104	33,263
210	33,423	33,582	33,741	33,900	34,059	34,218	34,377	34,537	34,696	34,855
220	35,014	35,173	35,332	35,492	35,651	35,810	35,969	36,128	36,287	36,446
230	36,606	36,765	36,924	37,083	37,242	37,401	37,560	37,720	37,879	38,038
240	38,197	38,356	38,515	38,675	38,834	38,993	39,152	39,311	39,470	39,629
250	39,789	39,948	40,107	40,266	40,425	40,585	40,744	40,903	41,062	41,221
260	41,380	41,539	41,699	41,858	42,017	42,176	42,335	42,494	42,654	42,813
270	44,972	43,131	43,290	43,449	43,608	43,768	43,927	44,086	44,245	44,404
280	44,563	44,722	44,882	45,041	45,200	45,359	45,518	45,677	45,837	45,996
290	46,155	46,314	46,473	46,632	46,792	46,951	47,110	47,269	47,428	47,587
300	47,747	47,906	48,065	48,224	48,383	48,542	48,701	48,861	49,020	49,179
310	49,338	49,497	49,656	49,816	49,975	50,134	50,293	50,452	50,611	50,770
320	50,930	51,089	51,248	51,407	51,566	51,725	51,885	52,044	52,203	52,362
330	52,521	52,680	52,839	52,999	53,158	53,317	53,476	53,635	53,794	53,954
340	54,113	54,272	54,431	54,590	54,749	54,908	55,068	55,227	55,386	55,545
350	55,704	55,864	56,023	56,182	56,341	56,500	56,659	56,818	56,978	57,137
360	57,296	57,455	57,614	57,773	57,932	58,092	58,251	58,410	58,569	58,728
370	58,887	59,047	59,206	59,365	59,524	59,683	59,842	60,001	60,161	60,320
380	60,479	60,638	60,797	60,956	61,115	61,275	61,434	61,593	61,752	61,911
390	62,070	62,230	62,389	62,548	62,707	62,866	63,025	63,185	63,344	63,503

Der Achsenabstand beider Räder ist also

$$r_1 + r_2 = 80 + 320 = 400 \text{ mm.}$$

Teilung  $t =$  Zahnstärke  $s +$  Zahnlückenweite. Für unbearbeitete Räder wählt man

$$\text{Zahnstärke } s = \frac{19}{40} t, \quad \text{Lückenweite} = \frac{21}{40} t,$$

entsprechend einem Flankenspielraum  $= \frac{1}{20} t$ , der bei bearbeiteten Rädern auf die Hälfte oder bis auf null vermindert werden kann, so daß die Zahnstärke  $s = \frac{39}{80} t$  bis  $s = \frac{1}{2} t$  wird.

Die Kopfhöhe macht man gewöhnlich  $= 0,3 t$ , die Fußhöhe  $= 0,4 t$ , die gesamte Zahnhöhe oder Zahnlänge also  $= 0,7 t$ .

Vielfach werden Zahnräder nur durch die Zähnezah  $z$  und durch den Modul  $m$  bestimmt. Die Kopfhöhe des Zahnes wird dann gleich  $m$ , die Fußhöhe gleich  $1,16 m$  genommen.

### Uebersetzungsverhältnis:

Zähnezah des treibenden Rades  $\frac{\text{Umlaufzahl des getriebenen Rades}}{\text{Zähnezah des getriebenen Rades}} = \frac{\text{Umlaufzahl des treibenden Rades}}{\text{zweier zusammen arbeitenden Räder}}$

$$\varphi = r_1 : r_2 = z_1 : z_2 = n_2 : n_1 = \omega_2 : \omega_1,$$

worin  $r_1$  und  $r_2$  die Teilkreishalbmesser,

$z_1$  „ „  $z_2$  die Zähnezahlen,

$n_1$  „ „  $n_2$  die minutlichen Umdrehungszahlen und

$\omega_1$  „ „  $\omega_2$  die Winkelgeschwindigkeiten des treibenden und des getriebenen Rades bedeuten.

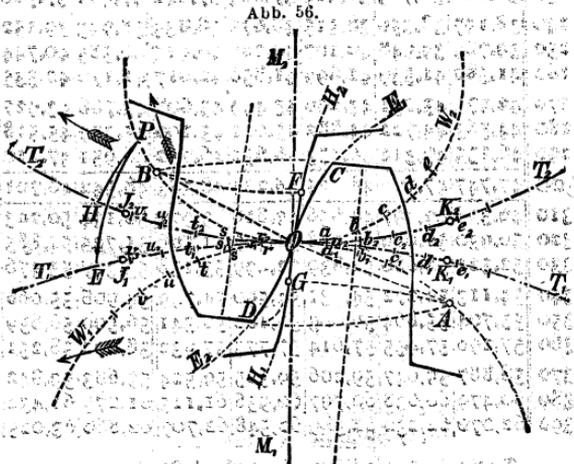
## 2. Stirnräder mit Zykloidenverzahnung.

(Kreisbogenförmige Eingrifflinie.)

### 1. Bestimmung der Zahnprofile (Abb. 56).

$T_1$  und  $T_2$  sind die durch  $z, t$  gegebenen Teilkreise;  $W_1$  und  $W_2$  die gewählten Wälzkreise oder Rollkreise. (Größe der Wälzkreise s. S. 788 unter Ziffer 4.)

Wälzt man Wälzkreis  $W_1$  auf Teilkreis  $T_1$  ab, so beschreibt Punkt  $O$  das Fußprofil  $OH_1$  (eine Hypozykloide); wälzt man  $W_1$  auf dem anderen Teilkreis  $T_2$  ab so



beschreibt  $O$  das zugehörige Kopfprofil  $OE_2$  (eine Epizykloide) des anderen Rades. Wälzt man  $W_2$  auf  $T_1$  und auf  $T_2$  ab, so ergeben sich die Epizykloide  $OE_1$  als Kopfprofil des ersten Rades und die Hypozykloide  $OH_2$  als zugehöriges Fußprofil des anderen Rades.

Hierzu trage man auf beiden Teilkreisen und auf dem Wälzungskreise  $W_2$  gleiche Bögen  $Oa_1 = Oa_2 = Oa$ ,  $a_1b_1 = a_2b_2 = ab \dots$  ab und beschreibe mit  $aO$ ,  $bO$ ,  $cO \dots$  der Reihe nach um die Punkte  $a_1$ ,  $b_1$ ,  $c_1 \dots$  auf  $T_1$  und um die entsprechenden Punkte  $a_2$ ,  $b_2$ ,  $c_2 \dots$  auf  $T_2$  Kreisbögen, die als Umhüllung die Epizykloide  $OE_1$  und die Hypozykloide  $OH_2$  abgrenzen, sobald man  $ab$ ,  $bc \dots$  genügend klein wählt.

Wird entsprechend auf der anderen Seite mit dem Wälzungskreise  $W_1$  verfahren, so ergeben sich die Epizykloide  $OE_2$  und die Hypozykloide  $OH_1$  unter Benutzung der zusammengehörigen Teilpunkte  $r$ ,  $s$ ,  $t \dots$ ,  $r_2$ ,  $s_2$ ,  $t_2 \dots$  und  $r_1$ ,  $s_1$ ,  $t_1 \dots$ .

Zahneingriff zu beiden Seiten der Zentralen  $M_1M_2$ , wie er durch Benutzung von zwei Wälzungskreisen erzielt wird, liefert unter sonst gleichen Verhältnissen stets günstigere Verzahnungen als einseitiger Eingriff, da bei gleicher Länge der Eingriffstrecke die Zahndruckrichtungen weniger weit von der gemeinsamen Tangente der Teilkreise abweichen, für die der Zahndruck am kleinsten wird.

Die Kopfkreise schneiden auf der **Eingriffslinie**, die bei der Zykloidenverzahnung das zur Räderzentralen symmetrisch gelegene Spiegelbild des abgewälzten Teiles vom Wälzungskreise ist, die benutzte **Eingriffstrecke**  $BOA$  ab. Dieser entspricht der gleich große **Eingriffbogen**  $J_1OK_1$  bzw.  $J_2OK_2$  der Teilkreise, der größer als  $t$  sein muß. **Eingriffdauer**  $\tau = \frac{\text{Eingriffbogen}}{\text{Teilung}} > 1$  (möglichst  $\geq 1,2 t$ ) ist bei der ge-

wählten Zahnlänge  $0,7 t$  im allgemeinen gesichert. Bei Trieblingen mit geringer Zähnezahl (3 bis 5) ist die Zahnlänge nach Bedarf aus dem Eingriffbogen zu bestimmen.

2. **Zahnreibung.\***) Die Zahnköpfe gelangen ganz zum Eingriff, die Zahnfüße nur auf einer kurzen Strecke  $OG$  und  $OF$ . Zur Ermittlung von  $G$  und  $F$  dienen die Kreisbahnen der Punkte  $A$  und  $B$  um ihre Radmittelpunkte.

Bezeichnet  $P$  den mittleren Zahndruck, der durch die Grenzrichtungen  $OA$  und  $OB$  bestimmt ist,  $\mu$  die Reibungszahl, so ist der verhältnismäßige **Arbeitsverlust** durch gleitende Reibung in Teilen der Nutzarbeit

$$\mathfrak{B} = \mu \frac{(OD - OG + OC - OF) P}{(OA + OB) P}$$

Diese Formel setzt die Zahnform als bekannt voraus; sie liefert gute Näherungswerte, berücksichtigt aber nicht den Wechsel in der Größe des Zahndruckes und den Umstand, daß abwechselnd ein und zwei, oder zwei und drei Zähne im Eingriffe stehen. Vrgl. das Verfahren auf S. 259 u. f.

\* S. auch M. Kohn, Zahnreibung, Z. d. V. d. I. 1895 S. 1114; ferner J. Goebel, Die Reibung der Zahnräder, Z. d. V. d. I. 1896 S. 459.

3. **Gleiten.** Die durch die Reibungsarbeit erzeugte Abnutzung ist am Zahnfuß bedeutender als am Kopf, weil sie sich am Kopf auf eine größere Strecke verteilt. Ein Bild von der Aenderung des Gleitens erhält man nach Lasche\*) gemäß

Abb. 57.

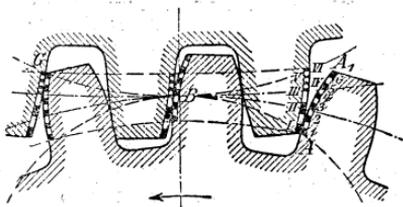


Abb. 57. Man teilt das arbeitende Profil  $AA_1$  des treibenden Zahns in eine Anzahl gleich langer Strecken 1 2 3 usw. Zu diesen Flankenteilen bestimmt man die entsprechenden Strecken auf der angetriebenen Zahnflanke I II III usw. Das Verhältnis der Längen je zweier zusammenarbeitenden Strecken bestimmt das Maß des dabei stattfindenden Gleitens.

Bei Zykloidenzähnen ist dieses Verhältnis auf jeder Seite der Teilkreise über die ganze Länge der zusammenarbeitenden Profile unveränderlich.

4. **Wahl der Wälzkreise.** Vergrößerung der Wälzkreise vergrößert die Eingriffstrecke und verkleinert den Normaldruck  $P$ ; anderseits verkleinert sich dadurch die benutzbare Fußprofilstrecke unter Vergrößerung des Reibungsweges. Die günstigsten Verhältnisse ergeben sich im allgemeinen für Wälzkreise, deren Durchmesser etwas kleiner ist als der Halbmesser des umschließenden Teilkreises.

Vergrößerung des Wälzkreisdurchmessers bis zum Halbmesser des umschließenden Teilkreises liefert geradlinige, radiale Fußprofile, weitere Vergrößerung konvex unterschrittene Zahnwurzeln von abnehmender Länge bis zur Beschränkung auf einen Punkt für den Grenzfall: Wälzkreis = Teilkreis (vgl. S. 789 Abb. 58). Ueberschreitungen des Falles: Wälzkreisdurchmesser = Teilkreishalbmesser sind selbst bei kleinen Trieblingen für Handbetrieb möglichst zu vermeiden.

5. **Satzräder.** Wählt man bei Rädern gleicher Teilung beide Wälzkreise von gleicher Größe für alle Zähnezahlen, so erhält man einen Rädersatz, dessen einzelne Räder, ganz beliebig miteinander gepaart, richtig arbeiten können, da ihre Eingriffslinien kongruent sind und der Teilkreis (oder die Zentrale) jede der beiden Eingriffslinien in zwei sich deckende Teile zerlegt.

Für Satzräder macht man gewöhnlich den Halbmesser der Wälzkreise

$$= 0,875 t = 2,75 \frac{t}{\pi}.$$

Hierbei wird für  $z = 11$  das Fußprofil gerade, für  $z < 11$  unterschritten; die Verzahnung ist indes (für Satzräder) bis  $z = 7$  herunter brauchbar.  $\tau = 1,22$  bis 1,60.

Die Abhängigkeit der Krümmung der benutzten Eingriffslinie von dem kleinsten Rade im Satze liefert ungünstige Verzahnungsverhältnisse für die größeren Räder und verbietet eine allgemeine Durchführung der Satzräderverzahnung.

\*) S. Z. d. V. d. I. 1899 S. 1417 u. f.

Aus diesem Grunde sind auch wichtige Triebwerkräder stets als **Einzelräder** zu konstruieren; sie erfordern für ruhigen Gang eine Eingriffdauer  $\tau \geq 2$  und dementsprechend große Zähnezahzahl, je nach Umständen in der Regel = 24 bis 36. Bei Rädern mit Handbetrieb begnügt man sich mit 10 Zähnen als der unteren Grenze und geht bei Zahnstangentriebingen für Wagenwinden sogar auf  $z=4$  herab, bei etwa  $\tau=1,2$ .

**6. Künstliche Lückenprofilierung.** Nimmt man den Wälzungskreis mit dem Teilkreise zusammenfallend an, so schrumpft das Fußprofil auf einen Punkt zusammen, und der Gegenzahnkopf erfordert eine künstliche Vertiefung der Lücke für seine Bahn. Auch sonst kann jederzeit das Zahnwurzelprofil von dem äußersten Punkte seines Eingriffes ab ausschließlich mit Rücksicht auf die Bahn des Eckpunktes des Gegenzahnkopfes ausgebildet werden, wovon bei stark unterschnittenen Zahnwurzeln Gebrauch zu machen ist. Die untere Kopfbahn  $GD$  (s. Abb. 56 S. 786) wird eingehüllt durch Kreisbögen, die mit den Halbmessern  $OD$ ,  $r_2 D$ ,  $s_2 D$ ,  $t_2 D \dots$  um die Mittelpunkte  $O$ ,  $r_1$ ,  $s_1$ ,  $t_1 \dots$  beschrieben sind. Das wirkliche Zahnfußprofil  $GHI$  muß noch einigen Spielraum lassen, wodurch eine etwaige kleine Verschiebung des Rades in Richtung der Zentralen berücksichtigt wird; jedenfalls läßt sich eine erhebliche Verstärkung des Fußprofils erreichen, das in  $G$  in die benutzte Profilstrecke  $OG$  übergeht.

**7. Hohlräder** erhalten bei der Zykloidenverzahnung umgekehrt wie Vollräder Hypozykloiden als Zahnköpfe, Epizykloiden als Zahnfüße.

**8. Zahnstangen** mit Zykloidenverzahnung werden kaum noch hergestellt. — Es wird dafür allgemein Evolventenverzahnung gewählt.

**9. Triebstockverzahnung** (Abb. 58) entsteht bei Wahl einseitiger Eingriffslinie, sobald der eine benutzte Wälzungskreis gleich dem umschließenden Teilkreis ist und das hierdurch auf einen Punkt beschränkte Fußprofil durch einen gleichachsigen Kreis zu einem Zylinder erweitert wird. Durchmesser dieses Kreises =  $\frac{19}{40} t$ . Dies ergibt für das Gegenprofil die der Epizykloide entsprechende Aequidistante. Zahnkopfhöhe durch Eingriffbogen  $OG > t$  bestimmt. Die Verzahnung läßt sich für Voll- und Hohlräder wie für Zahnstangen anwenden, ist aber wegen ungünstiger Druck- und Abnutzungsverhältnisse nur notgedrungen zu wählen.

Bei allen Zykloidenrädern sind die Zahnformen nach Schablonen auszuführen.

**10. Grisson-Getriebe** (D. R. P. 93 236, ausgeführt von E. Becker, Berlin-Reinickendorf-Ost) als Ersatz für Schneckengetriebe, doppelte oder dreifache Vorgelege, für große Uebersetzungen (1:5 bis 1:50), eine Form von Stirnrädern mit Triebstockverzahnung. Das große Rad  $M_1$  (Abb. 59) enthält zwischen seinen drei Kranzscheiben zwei um eine halbe Teilung gegeneinander versetzte Reihen von (z. B. je sechs) Triebstöcken, die zur Verminderung der Reibung als Hohl-

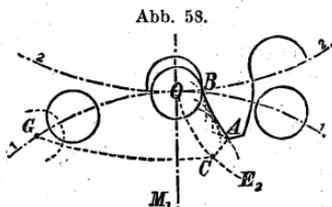
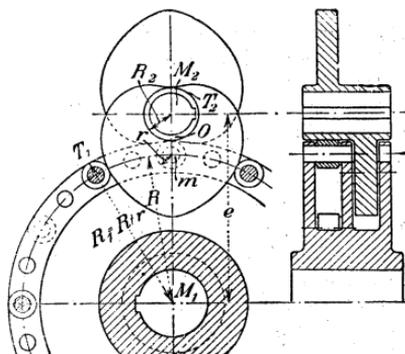


Abb. 58.

zylinder um schwächere Zapfen drehbar sind. Rollen und Bolzen sind aus hartem Stahl gefertigt und werden nach dem Härten nach Grenzlehren mit 0,01 mm Toleranz geschliffen. Das kleine Rad  $M_2$ , ebenfalls aus hartem Stahl, hat nur zwei um  $180^\circ$  gegeneinander versetzte

Abb. 59.



Daumen, die je ein einzahniges Rad darstellen. Die Daumenkurve ist die dem Abstände  $r$  entsprechende Aequidistante zu der verkürzten Epizykloide, die der Mittelpunkt  $m$  der Triebstockrollen beim Abwälzen des Rollenkrees ( $R_1 = R + r$ ) auf dem Daumenkreise ( $R_2 = e - R_1$ , wobei  $e$  der Achsenabstand) beschreibt. Teilkreise  $R_1, R_2$ . Die Eingriffslinie ist, abgesehen von einer kurzen Anfangsstrecke, nahezu eine Gerade, daher die Richtung, in der der Daumen auf die Rollen wirkt, nahezu unveränderlich. Ueber-

setzungsverhältnis in Abb. 59 = 1 : 6. Nach der Preisliste werden Daumenräder mit Bohrungen von 10 bis 100 mm Dmr. und entsprechende Triebstockräder mit 5 bis 30 Bolzen geliefert.

Wirkungsgrad nach Versuchen von E. Roser\*) = 0,86 bis 0,96 bei 1 : 18 Uebersetzung ins Langsame; 0,53 bis 0,90 ins Schnelle. Die höchste zulässige Umfangskraft  $P$  (am Halbmesser  $R$  wirkend) mußt mit der minütl. Umlaufzahl  $n$  des Rades für Dauerbetrieb in der Beziehung stehen  $Pn \leq 200000$ . (Größtwerte von  $Pn$  für Stahl-daumen 274 000, für Daumen aus Stahlgufs 314 000.)

Grisson-Getriebe sind besonders vorteilhaft anwendbar bei Uebersetzungen von Schnellen ins Langsame (Antrieb durch Elektromotoren, Dampfturbinen usw.); auch angewendet für Uebersetzung ins Schnelle (Antrieb durch Wasserräder usw.).

Bei hoher Umlaufzahl ist zweiseitige Lagerung des Daumenrades erforderlich. — Das Getriebe wird von E. Becker bei Umfangsgeschwindigkeiten über 1 m/sk in eisernen Oelkästen eingebaut mit Ringschmierlagern geliefert.

### 3. Stirnräder mit Evolventenverzahnung.

(Gerade Eingriffslinie.)

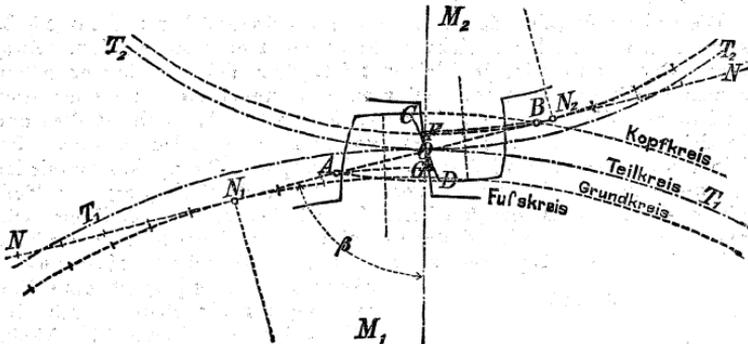
1.  $T_1$  und  $T_2$  sind die gegebenen Teilkreise; die Zahnprofile werden durch Abwälzen der Geraden  $NON$  (Abb. 60) auf den beiden Grundkreisen erzeugt.

Zu dem Zwecke sind auf  $NN$  und auf den Grundkreisen zu beiden Seiten der Berührungspunkte  $N_1$  und  $N_2$  der Linie  $NN$  mit den Grundkreisen gleiche Teilstrecken aufzutragen. Die Teilpunkte auf den

\*) Vrgl. E. Roser, Untersuchung des Grisson-Getriebes, Stuttgart 1901.

Grundkreisen liefern die Mittelpunkte für die Umhüllungskreisbogen der Evolventen, die Abstände zwischen  $O$  und den aufeinanderfolgenden Teilpunkten auf  $NN$  die zugehörigen Halbmesser. Kopf- und Fußkreise im Abstände  $0,3t$  und  $0,4t$  von den Teilkreisen. Liegt der Fußkreis innerhalb des Grundkreises, so werden die Evolventen bis auf den Grund der Lücke durch radiale Ansätze verlängert (für  $\beta = 75^\circ$  stets, wenn  $z < 74$ ).

Abb. 60.



Die Erzeugende  $NN$  ist die **Eingriffslinie**; Begrenzung der Eingriffstrecke durch die Schnittpunkte  $A$  und  $B$  der beiden Kopfkreise.

Zahnstärke, Ermittlung der benutzten Fußprofilstrecken  $OF$  und  $OG$ , sowie Bestimmung der Zahnreibung wie bei Zykloidenverzahnung.

$$\text{Eingriffdauer } \tau = \frac{\text{Eingriffstrecke} \times \text{Teilkreishalbmesser}}{\text{Grundkreishalbmesser} \times \text{Teilung}} > 1.$$

Aus der Entstehung der Profile ergibt sich:

1) Die benutzbare Eingriffstrecke muß zwischen  $N_1 N_2$  liegen, weil der Fortsetzung des Eingriffes über  $N_1$  oder  $N_2$  hinaus als Zahnprofil ein neuer Evolventenzweig entsprechen würde, der von  $N_1$  oder  $N_2$  aus in die benachbarte Lücke hineinragt und deshalb nicht ausgeführt werden kann.

2) Tritt dieser Fall beim Entwerfen ein, so ist die Eingriffdauer oder, wenn dies nicht statthaft, der Winkel  $\beta$  zu verkleinern. Die hiermit verbundene Verschlechterung der Verzahnung bestimmt die kleinste zulässige Zähnezahl.

3) Der Winkel  $\beta$  muß stets kleiner sein als  $90^\circ$ , weil für  $\beta = 90^\circ$  die Strecke  $N_1 N_2 = 0$  wird. Meist wählt man  $\beta = 75^\circ (= 45^\circ + 30^\circ)$ . Dann ist  $z_{\min} = 14$  und  $\tau = 1$  bis  $2,5$ .

4) Der Eingriff reicht nie über den Grundkreis hinaus; daher sind radiale Verlängerungen der Fußprofile innerhalb der Grundkreise für den richtigen Eingriff ohne Einfluß.

5) Die jedesmalige gemeinschaftliche Tangente beider Grundkreise wird die neue Eingriffslinie; die Gestalt der erzeugten Evolventen und das Übersetzungsverhältnis bleiben ungeändert. Daher gestatten

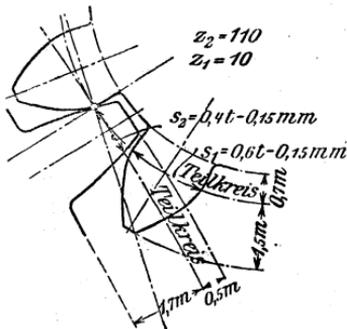
Evolventenräder die Entfernung der Achsen zu ändern, solange die Eingriffdauer  $\tau > 1$  erhalten bleibt.

Hingewiesen sei an dieser Stelle auf die sehr einfache Methode zur Aufzeichnung normaler Evolventenverzahnung nach „Grants Odontograph.“\*)

Alle Evolventenräder mit gleicher Teilung sind **Satzräder**, sobald die Erzeugende gegen die gemeinsame Mittellinie dieselbe Neigung hat.

Die frühere Angabe, das Evolventen als Satzräder nur für  $z \geq 30$  zu empfehlen sind, kann nicht mehr aufrecht erhalten werden. Zwar kommt der Grundkreis, je kleiner  $z$  ist, dem Teilkreis immer näher, so daß die Zähne (mit radialen Flanken) immer mehr unterschritten werden, und die nutzbare Zahnflanke kleiner wird, doch ist dies und die Schwächung des Zahnfußes bis zu  $z = 20$  bedeutungslos. Bei kleineren Zähnezahlen wird die Schwächung des Zahnfußes vermieden und die nutzbare Zahnflanke vergrößert durch Verlegung des Teilkreises derart, daß bei kleinen Triebrädern der Teilkreis sehr nahe an den Fußkreis, dagegen bei den großen Rädern der Teilkreis nahe an den Kopfkreis rückt. Abb. 61 [über die Gleitverhältnisse s. unter 4.] zeigt eine Verzahnung für ein Radpaar mit den Zähnezahlen von 10 und 110. Modul

Abb. 61.

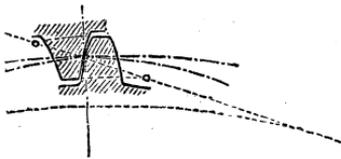


$m = \frac{t}{\pi} = 16$ ; Teilung  $t = 16\pi = 50,265$  mm; Zahnhöhe  $h = 2,2$  mm. Die Lage der Fuß- und Kopfkreise ist in Modulmaß in der Abbildung bestimmt. Zahnstärke des kleinen Rades im Teilkreis  $s_1 = 0,6t - 0,15$  mm, des großen Rades  $s_2 = 0,4t - 0,15$  mm. — Allgemein wird angegeben, wenn der Teilkreis  $= zm$  ist, für den Fußkreis des kleinen Rades:  $d = (z - 1,4)m$ ; für den Kopfkreis  $d = (z + 3)m$ , dagegen

für das große Rad: Fußkreis  $d = (z - 3,4)m$ , Kopfkreis  $d = (z + 1)m$ .

2. **Hohlräder** werden mehr und mehr angewendet. Vorteile (bei richtiger Ausführung): längerer Zahn-eingriff, geräuschloser Gang - ferner Raumersparnis, u. U. auch durch Ausnutzung des großen Rades als Riemenscheibe, Zahnrad mit Aufsenverzahnung usw. Im übrigen wie Vollräder zu behandeln; erhalten konkav gekrümmte Zahnflanken (Abb. 62).

Abb. 62.



\*) Beschrieben und für metrische Modulteilungen zurechtgemacht im Katalog der Firma Friedrich Stolzenberg u. Co. G. m. b. H. in Berlin-Reinickendorf (West).

3. **Zahnstangen** erhalten, ihren unendlich grofsen Teil- und Grundkreisen entsprechend, auch Evolverenten von unendlich grofser Krümmung, d. h. geradlinige Profile, winkelrecht zur gewählten Eingriffslinie.

Evolverentenprofile lassen sich unter Benutzung einer Schablone für den Grundkreis durch eine Uhrfeder mit zwei Nadelfüfsen, von denen man den einen am Umfange der Schablone einsetzt, den anderen zur Erzeugung der Kurve benutzt, unmittelbar am Arbeitstücker vorrollen.

4. **Gleitverhältnisse.** Die Untersuchung nach S. 788 führt hier zu Abb. 63.

Man erkennt, dafs das Gleiten am Kopfende des gröfseren Rades besonders stark ist. Die Allgem. Elektrizitäts-Gesellschaft\*) zu Berlin

Abb. 63.

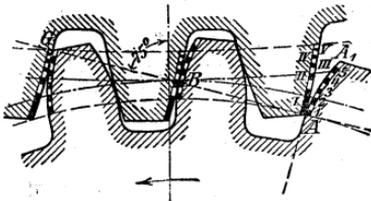
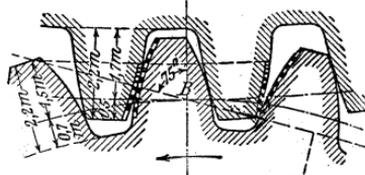


Abb. 64.



kürzt daher die Kopfhöhe des grofsen Rades unter  $0,3 t$  und verkleinert damit die Eingriffstrecke vor der Zentrale; Umgekehrtes findet statt bei dem kleinen Rade (s. z. B. Abb. 64, vgl. auch Abb. 61).

### Wahl zwischen Evolverenten und Zykloiden.

**Evolverenten** liefern einfachere und daher leichter herstellbare Zahnformen. Evolverentenzähne gestatten im neuen Zustande Aenderung der Achsenentfernungen der Räder [s. o. unter 5.] auf welchen Umstand u. a. bei Zahnradlokomotiven, bei Stirnrädern für Blechwalzen, bei Wechsellrädern für Drehbänke usw. Rücksicht genommen werden mufs. Bei gleicher Teilung ist der Fufs des Evolverentenzahnes stärker als der des Zykloidenzahnes, daher ersterer von Vorteil, wenn die Festigkeit die Teilung bestimmt. (Krafräder, z. B. für Winden, Krane u. dgl.)

**Zykloiden** ergeben zwar unter sonst gleichen Verhältnissen geringere spezifische Zahnpressungen, weil sich ein konvexes Profil in ein konkaves einschmiegt, doch sind bei **Evolverenterrädern** die Vorteile der einfacheren Zahnform (Erzeugung der Evolverente an Sondermaschinen im Abwälzungsverfahren, wobei für alle Zähnezahlen einer Teilung nur ein Schraubenfräser gebraucht wird, während bei **Zykloiden** für jede Zähnezahl ein Werkzeug angefertigt werden mufs, von dessen Genauigkeit die Richtigkeit der Zahnform abhängt) und der gröfseren Unempfindlichkeit gegen Unterschiede in der Achsenentfernung so grofs, dafs oft fast ausschliesslich Evolverenterräder angewendet werden.\*\*)

\*) S. Lasche in Z. d. V. d. I. 1899 S. 1417, 1487 u. f.

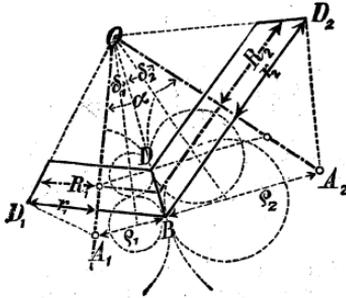
\*\*) Ueber die Vorteile und Nachteile des Teilverfahrens und des Abwälzverfahrens ist zu vergleichen: Werkstattstechnik 1908, S. 295 u. f., S. 318 u. f., und S. 546 u. f., sowie die Zeitschrift f. Werkzeugmaschinen u. Werkzeuge 1910, S. 297 u. f.

## 4. Kegelhäder.

Zusammenarbeitende Kegelhäder müssen sich in einer gemeinsamen Kegelseite berühren; die Spitzen der Kegel müssen zusammenfallen. Als Teilkreise werden die Grundkreise der sich berührenden Kegeltümpfe (**Grundkegel**) benutzt (Abb. 65).

Nach dem gebräuchlichen Näherungsverfahren erfolgt die Verzahnung auf den Mantelflächen der **Ergänzungskegel**  $A_1D_1B$  und  $A_2D_2B$ , deren Erzeugende  $A_1B$  und  $A_2B$  winkelrecht auf der Erzeugenden  $BO$  der Grundkegel stehen, indem man diese Mantelflächen als Kreisabschnitte in die Zeichenebene abwickelt und dann die Kreise mit den Halbmessern  $\rho_1$  und  $\rho_2$  wie die Teilkreise von Stirnrädern benutzt. Das Verfahren ist nur hinreichend genau für nicht zu kleine Zähnezahlen ( $> 24$ ); streng genommen sind die Zahnprofile auf Kugelflächen zu verzeichnen.

Abb. 65.



die Zahnweite  $b = BD$  in der Richtung  $BO$  gemessen. Die Zahnstärke wird für die mittleren Grundkegelstumpfkreise mit den Halbmessern  $R_1$  und  $R_2$  mittels der Beziehung

$$2 \pi R = z t \text{ berechnet.}$$

Bezeichnen  $z_1$  und  $z_2$  die zugehörigen Zähnezahlen, so ist das Uebersetzungsverhältnis  $\varphi = z_1 : z_2 = r_1 : r_2 = \sin \delta_1 : \sin \delta_2$ , ferner

$$\frac{\rho_1}{r_1} = \frac{\sqrt{z_1^2 + z_2^2 + 2 z_1 z_2 \cos \alpha}}{z_2 + z_1 \cos \alpha} \quad \text{und} \quad \frac{\rho_2}{r_2} = \frac{\sqrt{z_1^2 + z_2^2 + 2 z_1 z_2 \cos \alpha}}{z_1 + z_2 \cos \alpha},$$

$$r_1 = R_1 + \frac{b}{2} \sin \delta_1 \quad \text{und} \quad \sin \delta_1 = \frac{z_1 \sin \alpha}{\sqrt{z_1^2 + z_2^2 + 2 z_1 z_2 \cos \alpha}}.$$

Für  $\alpha = 90^\circ$  (**Winkelräder**) ist

$$\frac{\rho_1}{r_1} = \frac{\sqrt{z_1^2 + z_2^2}}{z_2}, \quad \frac{\rho_2}{r_2} = \frac{\sqrt{z_1^2 + z_2^2}}{z_1},$$

$$\sin \delta_1 = \frac{z_1}{\sqrt{z_1^2 + z_2^2}}, \quad \frac{\rho_1}{\rho_2} = \left( \frac{z_1}{z_2} \right)^2 = \left( \frac{r_1}{r_2} \right)^2.$$

Die Zähne selbst ergeben sich als abgestumpfte Pyramiden und verjüngen sich sämtlich nach der gemeinsamen Kegelspitze  $O$ . Es empfiehlt sich, die Zahnprofile auch für den Punkt  $D$  zu verzeichnen, indem man die zugehörigen Halbmessern der Hilfsverzahnungskreise

ermittelt unter Wahl entsprechender Eingriffslinien, proportional denen für die Grundkreise.

Kegelräder (Abb. 66) sind als Einzelräder mit Zykloiden- oder meist Evolventenverzahnung (mit  $z > 20$ ) zu konstruieren.\* Ueber Kegelräder mit gefrästen Pfeilzähnen ist z. B. zu vergleichen die Zeit-

Abb. 66.

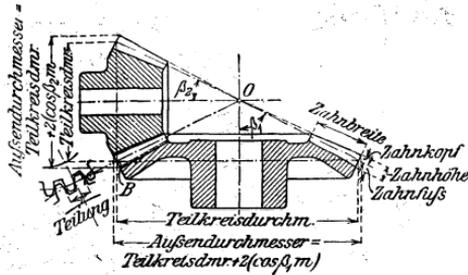
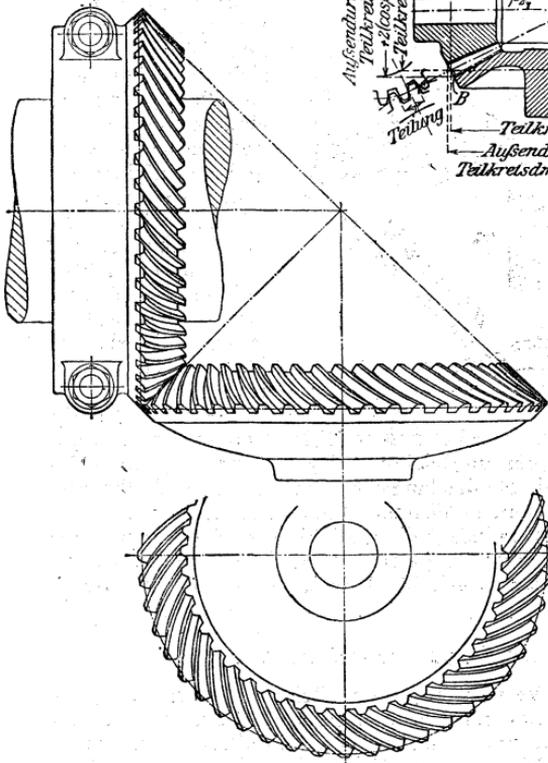


Abb. 67.



schrift für Werkzeugmaschinen u. Werkzeuge v. 5. Juni 1910, S. 342.

Kegelräder mit spiraligen Zähnen (s. Abb. 67) gefräst nach Patent Polanowsky fertigt die Zahnradfabrik Augsburg vormals Joh. Renk, A.-G., seit Jahren mit gutem Erfolge an. Die Räder haben äußerst ruhigen Gang und werden besonders als Steuerräder verwendet.

### 5. Räder für sich kreuzende Wellen.

Grundform entweder das Hyperboloid oder der Zylinder. **Hyperbel-**

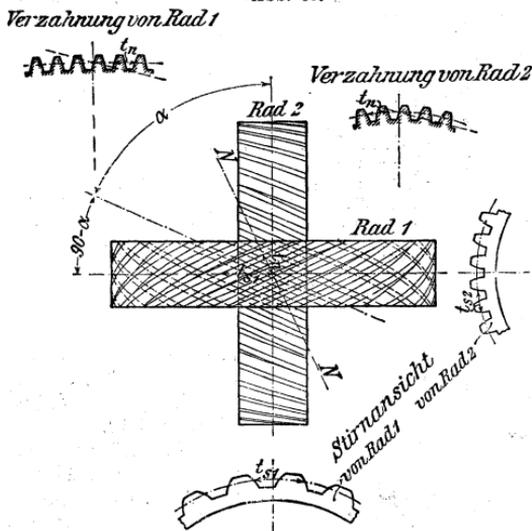
räder werden wegen der teuren Herstellung, des großen Arbeits-

\*) Ueber die Bestimmung des Winkels für beliebige konische Räder s. Zeitschrift f. Werkzeugmaschinen u. Werkzeuge v. 25. Dezember 1907, sowie v. 15. März 1910, S. 237; ferner die Zeitschrift für praktischen Maschinenbau v. 27. April 1910, S. 371.

Zu beachten ist auch Stolzenbergs Rechenwinkel zur Bemessung von Kegelrädern, der in dem Kataloge der mehrfach erwähnten Firma beschrieben und dargestellt ist.

verlustes und der starken Abnutzung fast stets durch Einschaltung einer Hilfswelle (zwei Paar Kegelräder oder ein Kegel- und ein Stirnräderpaar) vermieden.

Abb. 68.



Bei zylindrischer Grundform ergeben sich **zylindrische**

**Schraubenräder** (Abb. 68), d. s. zylindrische Räder mit schraubenförmig gewundenen Zähnen.\*) Die Zähne berühren sich auch bei guter Ausführung nur in einer kleinen Fläche und arbeiten stark gleitend aufeinander; bei erheblichem Zahndruck daher rasche Abnutzung.

Proportionalität zwischen Durchmesser und Zähnezahlen, wie sie bei Stirn- und Kegelrädern immer vorhanden ist, besteht

hier nur, wenn der Steigungswinkel **beider** Räder  $\alpha = 45^\circ$  ist. Für das schneller laufende Rad (bei ungleichen Steigungswinkeln) empfiehlt Stolzenberg & Co. Stahl, für das langsamer laufende Phosphorbronze; für höchste Geschwindigkeiten gehärteten Stahl. Gufseisen ist nur verwendbar für geringe Geschwindigkeit und kleinen Zahndruck. Ursprünglich fast ausschließlich angewendet als Steuerungsräder an Motoren, werden sie jetzt vielfach, beispielsweise an Werkzeugmaschinen benutzt.

## 6. Schnecke und Schneckenrad.

Durch die vermehrte Verwendung von Elektromotoren haben die Schneckenantriebe als Mittel zur Verminderung der Umlaufzahlen erhöhte Bedeutung erhalten, um so mehr als einwandfreie Versuche\*\*) gezeigt haben, daß bei Wahl richtiger Konstruktionsverhältnisse Nutzeffekte von 90 vH erreichbar sind. — Die Zähnezahl ist vorteilhaft größer als 25 zu wählen, damit mehr als 2 Zähne des Schneckenrades in Eingriff sind. Je größer die Zähnezahl des Schneckenrades, um so besser wird die Wärmeabfuhr. Je höher die Gangzahl der Schnecke (ein- bis fünfzäh), um so besser ist in der Regel der Wirkungsgrad.

\*) S. C. Bach, Masch.-Elem., 10. Aufl. 1908 S. 333 ff. — Gefräste Schraubenräder liefert u. a. die Räderfabrik von Friedrich Stolzenberg & Co., G. m. b. H., Berlin-Reinickendorf.

\*\*) Z. d. V. d. I. 1902 S. 915, Schneckengetriebe mit hohem Wirkungsgrad.

Eine wertvolle Anleitung zum Entwerfen von Schnecken-Antrieben gibt die Firma Otto Gruson & Co., Magdeburg-Buckau in ihrem entsprechend benannten Katalog.

Zykloidenverzahnung wird kaum noch angewendet. — Ernst sagt darüber in seinem bekannten Aufsatz „Ueber die Eingriffsverhältnisse der Schneckengetriebe mit Evolventen- und Zykloidenverzahnung und ihr Einfluß auf die Lebensdauer der Triebwerke“<sup>\*)</sup>: „Evolventenschnecken sind den Zykloidenschnecken nicht nur wegen der leichteren genauen Herstellung, sondern auch wegen der günstigeren und störungs-freieren Eingriffsverhältnisse vorzuziehen“. — Allerdings ist die Evolventenverzahnung für Abänderungen des Achsenabstandes, wie sie für

Stirnräder zulässig sind (s. S. 793), nicht unempfindlich, da hier nur die Mittelebene eine reine Evolventenverzahnung hat, in allen übrigen Eingriffsebenen aber die Schnittprofile dem Evolventengesetze nicht entsprechen. Die genaue Lage der Radmittelebenen ist auch beim Betriebe dauernd zu sichern.

Evolventenverzahnung s. Abb. 69 u. 70. Die Verzahnung z. B. für die durch die Schneckenachse gehende Schnittebene  $A_1C$  (Abb. 69) erfolgt so, daß der Eingriff der einer Zahnstange, deren Mittelebene in  $A_1C$  liegt, mit einem Stirnrade vom Halbmesser  $CE$  ist; die Verzahnung für die Stirnfläche ist also mit den Teilkreishalbmessern  $CE$  und  $A_1E$  zu entwerfen unter Beachtung des bereits vorliegenden Schraubengangprofils, zu dem hiernach die gesuchte Zahnform das Gegenprofil bildet. Entsprechend die Verzahnung für die beliebige Schnittebene  $A_1G$ . Reichlicher Spielraum der Räder ist notwendig; die Zähne liegen anfangs nur mit den Ecken an. Durch Ausfräsen der Zahnlücken mittels einer Frässhnecke, deren Profil dem der Betriebsschnecke entspricht, wird eine gute Zahnform für das Schneckenrad sicher erzielt.<sup>\*\*)</sup>

Gerade Zähne (Abb. 69 oben) nur für untergeordnete Zwecke; sie gewähren nur geringe Anlage an die Schneckengänge. Bei großen

Abb. 69.

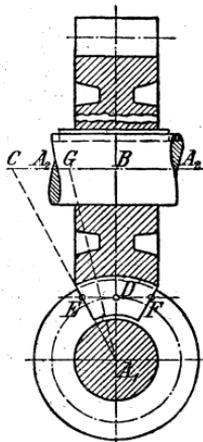
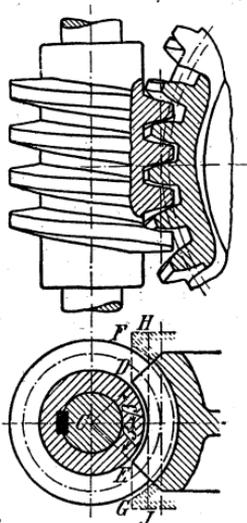


Abb. 70.



<sup>\*)</sup> Z. d. V. d. I. 1900 S. 1229 u. f., insbesondere S. 1473.

<sup>\*\*)</sup> Zu vergleichen ist als grundlegend für Schneckengetriebe, außer dem oben schon genannten Aufsatz von Ernst die Arbeit von Striebeck in der Z. d. V. d. I. 1897 S. 936 u. f. und 1898 S. 1156 u. f.

Kräften allgemein konkave Zähne (Abb. 69 unten und 70); dabei ist der Zentriwinkel  $2\beta$  (Abb. 70) so groß zu wählen, als es die Rücksicht auf Vermeidung zu spitzer Zahnformen in den durch  $D$  und  $E$  bestimmten Schnitten gestattet. Die Begrenzung der Zahnköpfe nach  $DF$  und  $DG$  (punktirt) vergrößert das sogen. Eingriffsfeld\*) des Zahnes und der Schnecke ein wenig.

Begrenzung nach  $HJ$  (Abb. 70), d. i. Abdrehen des Schneckenrades bis auf den Halbmesser des Mittelschnitts, ermöglicht die Ausnutzung nur der günstigsten Teile des Eingriffs, setzt aber große Räder mit reichlicher Zähnezahls voraus, wenn die spez. Zahnpressung in zulässigen Grenzen bleiben soll.

Nach Stribeck (s. Fußnote auf S. 797) wird der Zentriwinkel  $2\beta$  des Schneckenrades (s. Abb. 70) wie folgt bestimmt:

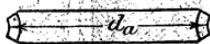
$$\operatorname{tg} \beta = \frac{a}{r:t + 0,6}$$

Darin ist  $r$  der Teilkreisradius der Schnecke in cm,  $t$  die Teilung in cm und  $a$  ein Zahlenwert, der wie folgt von der Zähnezahls  $z$  abhängt:

$z = 28$	36	45	56	62	68	76	84
$a = 1,9$	2,1	2,3	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9.

**Evolventenschnecken** mit einer Kopfhöhe bis  $0,25 t$  ergeben bei Rädern mit mindestens 30 Zähnen günstige Eingriffsfelder für Schraubensteigungen bis  $18^\circ$  (im Teilkreis gemessen) und gestatten die Ausnutzung des größeren Wirkungsgrades steilgängiger Schnecken ohne erhebliche Zunahme der spez. Pressung.

Abb. 71.



Für Schraubenträder mit 30 und mehr Zähnen wird der Teilkreisdurchmesser gewählt  $d = \frac{z t}{\pi}$  und der Durchmesser  $d_a$  (Abb. 71) des **Aufsenkreises**

$$d_a = d + \frac{2 t}{\pi} \quad \dots \quad 1).$$

Für Räder mit  $z < 30$  würde dabei der Zahnfuß, je kleiner  $z$  ist, umso mehr unterschritten. Um das zu vermeiden, empfiehlt Stolzenberg & Co. die folgenden Formeln:

$$\left. \begin{array}{l} \text{statt Teilkreis} \quad \text{Hülfskreis: } d_1 = \frac{z t}{\pi} \cdot 0,937 + \frac{2 t}{\pi} \\ \text{und Aufsenskreis: } d_{a1} = d_1 + \frac{2 t}{\pi} \end{array} \right\} \quad \dots \quad 2).$$

Der Durchmesser  $d_{a1}$  des Aufsenskreises ist um  $\frac{2 t}{\pi}$  größer als der Durchmesser  $d_1$  des Hülfskreises, da der Zahnkopf, gemessen vom

\*) Vgl. außer den Arbeiten von Stribeck und Ernst auch C. Bach, Masch.-Elem., 10. Aufl. 1908 S. 337 u. f.

Hilfskreis ab, gleich  $\frac{t}{\pi}$ , d. h. wie üblich gleich dem Modul  $m$  gemacht wird.

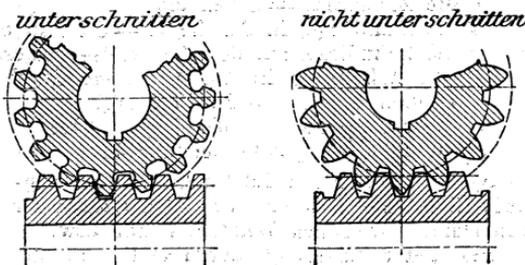
Die Abb. 72 zeigt links ein Schneckenrad von 15 Zähnen, wie es nach Gleichung 1)

mit  $\bar{d} = \frac{zt}{\pi}$  aussehen

würde, und rechts das nach 2) mit Hilfskreis vom Durchmesser  $d_1$  ausgeführte Rad mit gleicher Zähnezahl. (Ueber Material von Schnecke und Schneckenrad,

Aufnahme des Achsialdruckes usw. s. S. 807 u. f.)

Abb. 72.



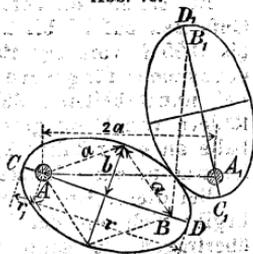
### 7. Elliptische Räder.

Nur als Stirnräder zur Uebertragung periodisch wechselnder Winkelgeschwindigkeiten ausführbar. Die Zähne werden zweckmäÙig so gestellt, dafs ihre Mittellinien in die Normalen der Ellipse fallen. Zahnform wie bei Kreisrädern, wobei die Ellipsen der Abb. 73 an die Stelle der Teilkreise treten.

Es bezeichne

- $A$  den Drehpunkt des treibenden Rades,
- $A_1$  den Drehpunkt des getriebenen Rades,
- $a$  die halbe groÙe Achse,  $b$  die halbe-kleine Achse der beiden Ellipsen,
- $A, B, A_1, B_1$  die Brennpunkte der Ellipsen,
- $\omega$  die unveränderliche Winkelgeschwindigkeit des treibenden Rades  $A$ ,
- $\omega_1$  die gröÙte,  $\omega_2$  die kleinste Winkelgeschwindigkeit des getriebenen Rades  $A_1$ ,
- $r$  und  $r_1$  s. Abb. 73.

Abb. 73.



#### 1. Uebersetzungsverhältnis für die Berührung im Punkte $D$ ist

$$\varphi_1 = \frac{AD}{A_1C_1} = \frac{r}{r_1} = \frac{\omega_1}{\omega}$$

im Punkte  $C$

$$\varphi_2 = \frac{AC}{A_1D_1} = \frac{r_1}{r} = \frac{\omega_2}{\omega} \quad \text{und} \quad \frac{\varphi_1}{\varphi_2} = \frac{r^2}{r_1^2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = V.$$

2. Wenn die Entfernung der beiden Wellen  $AA_1 = 2a$  und das Verhältnis  $V$  gegeben ist, so findet man  $b$  und somit die Form der elliptischen Räder durch die Gleichung

$$b = \frac{2a\sqrt[4]{V}}{\sqrt{V+1}}.$$

**b. Berechnung der Zähne.)\*****1. Stirnräder mit geraden Zähnen.**

Es bezeichne

$r$  den Teilkreisradius in cm, }  $z$  die Zähnezahl  $= 2\pi r : t$ ,

$t$  die Teilung in cm,

$b$  die Zahnbreite  $= \psi t$  in cm,

$l$  die Zahnlänge, in der Regel  $= 0,7 t$  in cm,

$s$  die Zahndicke, auf dem Teilkreise gemessen, in cm,

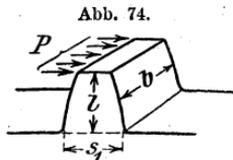
$P$  den Zahndruck in kg, bestimmt durch das zu übertragende Drehmoment  $M_d = Pr$  in cmkg,

$n$  die minutliche Umlaufzahl des Rades,

$N$  die zu übertragende Leistung in PS.

α) Berechnung mit Rücksicht auf Festigkeit (**Krafträder**), wie z. B. bei den Rädern der von Hand betriebenen Winden, Krane usw.

Bei guter Lagerung der Räder und geschnittenen Zähnen ist der Zahndruck über die ganze Breite  $b$  gleichmäßig verteilt. Beim ungünstigsten Angriff von  $P$  (an der Spitze des Zahnes, Abb. 74) ist



$$Pl = Wkb$$

$$P \cdot 0,7 t = \frac{1}{6} b s_1^2 k_b. \quad \text{Hierbei sei } s_1 \sim \frac{t}{2} \quad P = 0,06 \text{ bis } 0,07 k_b b t$$

$$P = c b t.$$

Für Gußeisen ( $k_b = 300 \text{ kg/cm}^2$ )  $c = 0,06$  bis  $0,07 \cdot 300 = 21$  bis  $24$ .

Bei selten voll beanspruchten Winden ist eine Steigerung von  $c$  für Gußeisen auf  $24$  bis  $28$  zulässig, wobei die Zahnwurzelstärke mit  $0,5 t$  bis  $0,55 t$  vorausgesetzt ist. Die **Zahnbreite**  $b$  wird vielfach  $= 2 t$  genommen; für genaue Ausführung und Lagerung oft  $b \leq 3 t$  (s. S. 803). Bei un bearbeiteten Zähnen und schlechter Lagerung, z. B. bei den Rädern von Hand getriebener Winden usw., greift  $P$  im ungünstigsten Falle an einer Zahnecke an. Dann trägt der Zahn, auch wenn  $b > 2 t$  ist, nur in einer Länge von  $b \sim 2 t$ . \*

Bei dieser Ermittlung ist angenommen, daß nur ein Zahn kämmt. Ergibt sich aus der Verzahnung, daß dauernd zwei Zähne die Kraft übertragen, so kann dies berücksichtigt werden. Weicht  $l$  erheblich von der angenommenen Größe  $0,7 t$  ab, so ist dies besonders zu berücksichtigen. Mit Rücksicht auf zufällige Mehrbelastungen sei bei Windenrädern  $t \geq 2,5 \text{ cm}$ .

Für andere Stoffe ist  $c$  nach folgendem Verhältnis zu wählen (Gußeisen = 1 gesetzt):

Gußstahl =  $3,0$  bis  $3,3$ ; Stahlguß =  $2$ ; Deltametall  $\sim 2,5$ ; Phosphorbronze, Rotguß  $1,7$  bis  $1,3$ , Rohhaut etwa gleich  $1$  bis  $0,8$ .

Im Automobilbau und für Luftschiffmotoren wird hochwertiger Spezialstahl verwendet, s. S. 508. Für Nickelstahl (naturhart) kann das Verhältnis (Gußeisen mit  $21$  bis  $24$  gleich  $1$  gesetzt) angenommen werden mit  $6$ , für Chromnickelstahl (Räder in Oel gehärtet) mit  $8$  bis  $10$ .

\*) Vgl. auch Strubeck, Berechnung der Zahnräder, Z. d. V. d. I. 1894 S. 1182.

Nach Angabe der Neuen Automobil-Gesellschaft in Oberschöneweide bei Berlin ergeben sich aus dem Maximalmoment des Motors oder beim Bremsen aus dem Maximalmoment der Treibräder bei Personen- und Lastwagen Biegungsbeanspruchungen der Zähne bis zu 8000, ja 11 000 kg/qcm. Das entspricht in der obigen Formel  $P = c \cdot b \cdot t$  Werten von  $c \sim 490$  bis 700.

Verwendet wird für diese Räder ein Chromnickelstahl, der in Oel gehärtet eine Festigkeit von 12 000 bis 15 000 kg/qcm bei einer Dehnung von 10 bis 6 vH hat.

$\beta$ ) Berechnung mit Rücksicht auf Abnutzung (**Triebwerkkräder, Arbeitsräder**). Auch hier gilt  $P = c b t$ .

Der Wert von  $c$  wird hier beeinflusst durch die spezifische Pressung, durch das Gleiten, durch die Schmierung und durch die Umfangsgeschwindigkeit.

Die Firma Fried. Krupp, Grusonwerk, Magdeburg-Buckau, legt der Berechnung nach der Biegungsformel ( $P \cdot l = W \cdot k_b$ ) die aus der folgenden Tafel ersichtlichen, mit zunehmender Umfangsgeschwindigkeit abnehmenden Werte von  $k_b$  zugrunde.

Tafel der Werte für  $k_b$ .

Zulässige Biegungsbeanspruchung des Baustoffes in kg f. 1 qcm bei den verschiedenen Umfangsgeschwindigkeiten von Stirn- und Kegelrädern.

Baustoff	Umfangsgeschwindigkeit $v$ in m in 1 sk														
	0,25	0,5	0,75	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Gufseisen . . .	345	330	320	310	300	275	250	225	200	188	175	162	150	135	120
Stahlgufs . . .	862	825	800	775	750	688	625	563	500	470	438	405	375	338	300
Geschm. S.-M.-St.	1035	990	960	930	900	825	750	675	600	564	525	486	450	405	360
Phosphorbronze.	620	590	570	558	540	495	450	405	360	338	315	290	270	243	220
Rotgufs . . .	450	430	416	403	390	357	325	293	260	244	228	210	195	175	156
Deltametall . . .	862	825	800	775	750	688	625	563	500	470	438	405	375	338	300
Rohhaut . . .	345	330	320	310	300	275	250	225	200	188	175	162	150	135	120
Holz . . . . .	217	198	192	186	180	165	150	135	120	113	105	97	90	81	72

Aus dieser Tafel ergeben sich durch Multiplikation mit 0,06 die folgenden für die Formel  $P = c \cdot b \cdot t$  benutzbaren Werte von  $c$ :

Tafel der Werte von  $c$  für Stirn- und Kegelräder.

Baustoff	Umfangsgeschwindigkeit $v$ in m in 1 sk														
	0,25	0,5	0,75	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Gufseisen	20,7	19,8	19,2	18,6	18,0	16,5	15,0	13,5	12,0	11,3	10,5	9,7	9,0	8,1	7,2
Stahlgufs	51,7	49,5	48,0	46,5	45,0	41,3	37,5	33,8	30,0	28,2	26,3	24,3	22,5	20,3	18,0
Geschmie- deter S.-M.-Stahl	62,1	59,4	57,6	55,8	54,0	49,5	45,0	40,5	36,0	33,8	31,5	29,2	27,0	24,3	21,6

Baustoff	Umfangsgeschwindigkeit $v$ in m in 1 sk														
	0,25	0,5	0,75	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	15
Phosphor- bronze .	37,2	35,4	34,2	33,5	32,4	29,7	27,0	24,3	21,6	20,3	18,9	17,4	16,2	14,6	13,
Rotgufs .	27,0	25,8	25,0	24,2	23,4	21,4	19,5	17,6	15,6	14,6	13,7	12,6	11,7	10,5	9,
Delta- metall. .	51,7	49,5	48,0	46,5	45,0	41,3	37,5	33,8	30,0	28,2	26,3	24,3	22,5	20,3	18,
Rohhaut .	20,7	19,8	19,2	18,6	18,0	16,5	15,0	13,5	12,0	11,3	10,5	9,7	9,0	8,1	7,
Holz . . .	13,0	11,9	11,5	11,2	10,8	9,9	9,0	8,1	7,2	6,8	6,3	5,8	5,4	4,9	4,

Bei vorzüglicher Ausführung und Montage, bei dauernd guter Instandhaltung werden vielfach höhere Werte für  $c$  gewählt, so nach Fr. Stolzenberg & Co., für Gußeisen ebenfalls abhängig von der Umfangsgeschwindigkeit:

$$\text{bei } v = 0,25 \quad 0,5 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 5 \quad 7 \quad 9 \quad 11 \quad 13 \quad 15 \text{ m} \\ c = 28 \quad 27,5 \quad 26 \quad 24 \quad 22,5 \quad 20 \quad 17,5 \quad 15 \quad 14 \quad 13 \quad 12$$

Für die oben unter  $\alpha$ ) genannten Stoffe gelten auch hier gleiche Verhältniszahlen, je nach Ausführung und Wartung.

Rädern, deren Zähne zuweilen die Eingriff flanken wechseln, oder die sehr stoßen, überhaupt solchen Rädern, deren Zähne dem Einflusse starker Schwankungen der lebendigen Kräfte in den getriebenen und treibenden Massen ausgesetzt sind, gibt man möglichst reichliche Abmessungen. Teilweise aus diesem Grunde werden z. B. Räder zum Betriebe der Mahlgänge bei Holz auf Eisen mit  $c = 2$  bis  $3$  entworfen, während ein gewöhnliches Triebwerkrad bei demselben  $v$  vielleicht mit  $c = 6$  bis  $9$  zu belasten sein würde.

Hingewiesen sei an dieser Stelle darauf, daß bei großen Uebersetzungen mit hintereinander geschalteten Zahnrädern zwischen den einzelnen Triebwerken **elastische Zwischenglieder** einzuschalten sind. Starre Verbindungen haben vielfach Brüche von Zahnrädern, die an sich richtig berechnet und bemessen sind, im Gefolge. Als solche **elastischen Zwischenglieder** werden benutzt elastische Kupplungen — vielfach genügen lange, mit dem Motor fest gekuppelte Wellen. (Vrgl. den immer noch zu wenig beachteten Aufsatz von Lasche, „Elektrischer Antrieb mittels Zahnradübertragung.“\*)

2. Aus dem zu übertragenden Drehmomente  $M_d$  (in cmkg) oder aus der zu übertragenden Leistung  $N$  (in PS) bestimmt sich die Teilung  $t$  (in cm), wie folgt. Nach S. 221 ist

$$Pr = M_d = 71\,620 \frac{N}{n} \text{ in cmkg.}$$

Da  $P = cbt = c\psi t^2$  und  $r = zt : 2\pi$ , so ergibt sich

$$t = \sqrt[3]{\frac{2\pi M_d}{c\psi z}} \quad \text{oder} \quad t = 10 \sqrt[3]{\frac{450 N}{c\psi z n}}$$

\* Z. d. V. d. I. 1899 S. 1417 u. f., insbesondere S. 1531 u. 1565.

3. **Zahnbreite**  $b = \psi t$ . Das **Verhältnis**  $\psi$  wähle man

$\psi = 2$  für Krafträder (Windenräder u. dgl.),

$\psi = 2$  bis  $3$  für gewöhnliche Triebwerkträder,

$\psi = 3$  bis  $5$  für Triebwerkträder, die große Mengen mechanischer Arbeit zu übertragen haben (z. B. verzahnte Schwungräder der Dampfmaschinen).

$t = 130$  und  $b = 600$  mm sind Werte, die für gewöhnlich nicht überschritten werden, doch kommen Räder bis  $t = 250$  und  $b = 900$  mm vor.

4. Für die **Zähnezahl**  $z$  gilt

$z \geq 10$  bis  $11$  für Krafträder (unter bes. Umst. noch weniger),

$z \geq 24$  für Arbeitsräder; je größer hierbei die Zähnezahl, um so ruhiger der Gang. — Bei Rädern mit Holzzähnen und bei geteilten Rädern muß  $z$  meist ein Vielfaches der Armzahl sein. Wünschenswert, wenn auch nicht gerade notwendig, ist dies auch bei den übrigen Rädern.

Das **Uebersetzungsverhältnis** zweier Räder sei bei **gleichmäßigem Zahndruck** möglichst  $1:2$ ,  $1:3$ ,  $1:4$  usw., um ein gutes Einarbeiten der Zähne herbeizuführen.

Bei **periodischer Veränderlichkeit** des Zahndruckes (wie z. B. bei verzahnten Schwungrädern, dem Rade eines Hammerwerkes, Antrieben von Pumpen usw.) erscheint es dagegen rätlich, um ungleichmäßige Abnutzung zu vermeiden, Verhältnisse wie  $1:2$ ,  $1:3$  usw. nicht zu wählen, sondern etwa  $2:3$ ,  $2:5$  usw. oder  $3:4$ ,  $3:5$  usw. oder gar die bei gleichmäßigem Zahndruck durchaus zu verwerfenden Zähnezahlen, wie z. B.  $29:45$  oder  $23:48$  usw.

Mit dem Uebersetzungsverhältnis geht man nicht ohne Not unter  $1:10$ , doch wird es heute vielfach schon  $1:15$  und kleiner angenommen (vgl. Abb. 61, S. 792 mit  $1:11$ ); für Arbeitsräder bei langsamem Gange, wenn möglich, nicht unter  $1:6$  (wobei dann für das kleine Rad  $z_{\min} = 36$  bis  $40$ ), bei raschem Gange etwa nur bis  $1:5$ . Uebersetzung von der Dampfmaschinenkurbelwelle in der Regel etwa  $1:4$  (wobei  $z_{\min} = 54$  bis  $72$ ).

5. **Holzzähne** (Kämme) (s. Abb. auf S. 812) gibt man dem einen Rade des Paares, z. B. bei Wasserturbinenantrieb und anderen Haupttransmissionen, bei größerer Geschwindigkeit in der Absicht, einen ruhigen, womöglich geräuschlosen Gang zu erzielen. In der Regel erhält das größere der beiden Räder die Holzzähne; nur dann nicht, wenn die Kraftübertragung periodisch stark veränderlich ist und die Ursache hierzu von der Welle ausgeht, auf der das größere Rad sitzt.

Die Teilung ist bei Kammrädern etwa  $\frac{1}{10}$  stärker zu wählen als für gußeiserne Räder gleicher Leistungsfähigkeit.

6. **Rohhauträder.** Zur Erzielung eines möglichst ruhigen Ganges bei hohen Umfangsgeschwindigkeiten bis  $12$  m ( $n = 400$  bis  $1000$ ) werden Zahnräder und Kämme aus Leder derart angefertigt, daß Stücke aus besonders hergerichteter Rohhaut unter hohem Drucke und bei Verwendung eines besonderen Bindemittels zusammengepreßt und dann wie ein Eisenrad oder wie ein Holzkamm bearbeitet werden. Die Räder erhalten Seitenscheiben aus Stahl, manchmal auch aus Bronze, die miteinander vernietet oder verschraubt werden. Die

Räder müssen ausgebucht werden (s. Abb. 75 u. 76 nach Konstruktionen der Zahnradfabrik Augsburg vormals Joh. Renk). Die Keilbüchse (Abb. 75) wurde gewählt, um genaues Rundlaufen zu erzielen.

Rohhaut muß stets mit einem Gegenrade (meist aus Gußeisen, selten Stahl) arbeiten, das sauber gefräste Zähne hat. Bronze ver-

Abb. 75.

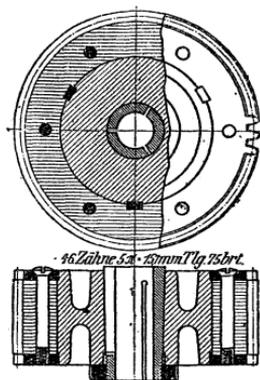
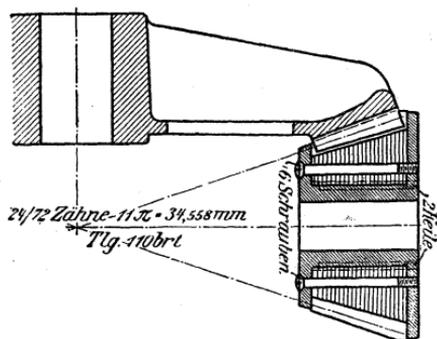


Abb. 76.



meidet man als Gegenrad. Manchmal werden die Rohhautzähne, ähnlich wie bei Holzkämmen, stärker gemacht als die Eisenzähne des Gegenrades. — Rohhauträder sind gegen Nässe und Hitze, auch gegen Mineralöl empfindlich; sie dürfen nur mit Oliven- oder Rüböl geschmiert werden. — Reserveräder aus Rohhaut werden am besten in geschlossenen Blechbüchsen, mit Rüböl übergossen, an einem kühlen Orte aufbewahrt.

Berechnung s. oben unter 1.  $\alpha$ ) und  $\beta$ ).

Die Firma C. A. Loewe, Berlin N, gibt auf 1 cm Zahnbreite die folgende Belastung  $k_1$  als zulässig an:

für $t = 2$ bis 3	3 bis 5	bis 8	10	12	15	18	22	26	$\pi$	
$k_1 = 8$	„ 10	„ 10	„ 12	14	16	18	20	24	30	40 kg

und erachtet in der Biegungsformel  $P \cdot l = W \cdot k_b$  eine Biegungsbelastung  $k_b$  von 100 bis 120 kg/qcm<sup>2</sup> noch für zulässig.

Mit der Zähnezahl geht man nicht gern unter 11, mit der Teilung nicht unter 7 bis 8 mm. Das größte Rad von C. A. Loewe hatte 700 mm Dmr. und 300 mm Breite.

**Vulkanfiber** wird für Räder kleiner Teilung noch gelegentlich verwendet, hat aber kaum halb so grofse Festigkeit als Rohhaut.

Zu erwähnen sind als Ersatz für Rohhaut Räder aus geprefstem Holzstoff und die von Otto Gruson & Co., Magdeburg, gefertigten Räder aus **Unica-Papierstoff**.

Die Firma gibt an, dafs das Material von hornartiger Beschaffenheit, auferordentlich fest und elastisch ist und eine um 50 vH

größere Biegefestigkeit hat als Rohhaut. — Räder aus Unica-Papierstoff erhalten Seitenscheiben wie Rohhaut-Getriebe; Naben oder Buchsen aus Metall sind bei der Härte des Stoffes nicht erforderlich. Für hochbeanspruchte Getriebe (Walzwerke usw.) werden zwischen die Lagen der Unicastoff-Räder Stahlscheiben eingefügt. Diese als (Panzergetriebe) bezeichneten Räder laufen zwar nicht so geräuschlos wie die reinen Unica- oder Rohhauträder, haben aber erheblich höhere Festigkeit.

7. Die **Zahnstärke** (im Teilkreise gemessen) wird genommen bei Eisen auf Eisen:

für roh bleibende Zähne . . . . .  $s = 19/40 t$ ,  
für bearbeitete Zähne . . . . .  $s = 19/40 t$  bis  $39/80 t$ ,  
[bei Werkzeugmaschinen usw. geht man bis  $s = 1/2 t$ ];

bei Holz auf Eisen entweder für den Eisenzahn  $s = 19/40 t$  und für den hölzernen Zahn  $s = 19/40 t$  bis  $39/80 t$ , oder

für den Eisenzahn . . . . .  $s = 16/40 t = 0,4 t$ ,  
für den Holzzahn . . . . .  $s = 23/40 t$  bis nahe  $0,6 t$ .

Den Zahnfuß (die Zahnwurzel) macht man in der Regel  $0,4 t$ , den Zahnkopf (die Zahnkrone)  $0,3 t$  hoch, so daß die Zahnlänge  $l = 0,7 t$ , oder in Modulmaß  $l = 2,16 m$  (s. S. 786). Hiernach beträgt der Spielraum in der Richtung des Umfanges zwischen zwei unbearbeiteten Zähnen  $1/20 t$ , zwischen zwei bearbeiteten Zähnen  $1/40 t$  (bis herab auf null), der Spielraum in der Richtung des Halbmessers  $1/10 t$  für beide Fälle.

Abweichungen von der normalen Zahnlänge s. S. 792.

## 2. Stirnräder mit einfach schrägen Zähnen und mit Winkelzähnen.

Ruhiger Gang (große Eingriffdauer), daher für Präzisionsräder sehr geeignet, sowie große Widerstandsfähigkeit. Die Zähne sitzen schraubenförmig auf dem Grundzylinder.

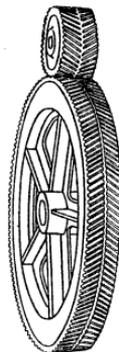
1. **Einfach schräge Zähne** erhalten Evolventenverzahnung wie gerade Zähne. Sprung ( $t_0$ ) ist der Teilkreisbogen, um den die beiden Stirnflächen eines Zahnes gegeneinander versetzt sind. Ist  $\gamma$  der zum Sprung gehörige Zentriwinkel,  $r$  der Teilkreishalbmesser, also  $t_0 = r\gamma$ , so ergibt sich der Neigungswinkel der Schraubenlinie im Teilkreise aus

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{b}{t_0} = \frac{b}{r\gamma}.$$

Zahnreibung s. S. 259. Außerdem Arbeitsverluste durch den von der Schrägstellung der Zähne herrührenden seitlichen Druck (Lagerreibungen). Zur Verringerung des letzteren  $\beta$  groß, mindestens  $70$  bis  $80^\circ$ , sogar  $86\frac{1}{2}^\circ$  ( $t_0 = 0,06 b$ ).

Räder mit **zweifach** (links und rechts) **schrägen** Zähnen, die im Aussehen völlig den unter 2. noch zu besprechenden Pfeilrädern gleichen, werden **in der Mitte** der Radbreite **geteilt**, genau

Abb. 77.

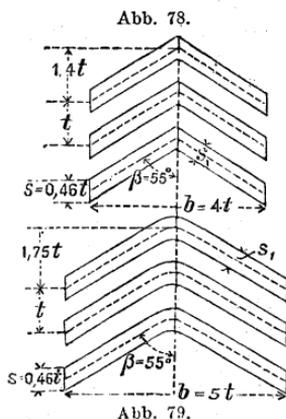


zentriert und zusammengeschraubt hergestellt; sie haben den Vorteil, daß der Achsialdruck aufgehoben ist.

Die Zahnradfabrik Augsburg vorm. Joh. Renk (A.-G.) fertigt unter dem Namen Wüst-Getriebe Zahnräder mit links und rechts schräg stehenden, um die halbe Teilung gegeneinander versetzten Zähnen, bei denen der Achsialdruck ebenfalls aufgehoben ist. Der Gang soll sehr ruhig bei langer Eingriffdauer sein (Abb. 77).

Derartige Räder oder auch getrennt auf gleicher Welle sitzende Räder mit links und rechts schrägen Zähnen werden neuerdings zur Herabsetzung der Umlaufzahl der Schraubenwelle bei Turbinenantrieb verwendet. So ist in „La Nature“ vom 7. Mai 1910 ein „réducteur de vitesse Westinghouse“ beschrieben, bei dem zwei kleine Räder von 35 Zähnen mit unter  $20^\circ$  links und rechts schräg stehenden Zähnen (angehlich mit 30 m/sk Umfangsgeschwindigkeit) auf zwei entsprechende Räder von 176 Zähnen arbeiten. — Tourenzahlen: 1500 und 300 bei 6000 PS. — Eine ähnliche Anlage, aber mit Uebersetzung von 1:20, ist kurz beschrieben in Z. d. V. d. I. 1910 S. 992 u. 1132; dabei haben die großen Räder etwa 2600 mm Dmr., die kleinen 127 mm.

**2. Winkelzähne (Pfeilräder).** Der bei den Rädern mit einfach schrägen Zähnen auftretende Achsialdruck ist hierbei wie bei den Rädern mit zweifach schrägen Zähnen aufgehoben, die Festigkeit der Zähne ist durch das Zusammenlaufen in der Pfeilspitze größer als bei einfach oder zweifach schrägen Zähnen. Bestimmung der Teilung  $t$  wie üblich, mit  $c=40$  für Gußstahl.



Zahnhöhe 0,6 bis 0,7  $t$ , Zahnfuß 0,35 bis 0,4  $t$ , Zahnkopf 0,25 bis 0,3  $t$ . Zahnstärke im Teilkreise  $s = 0,46 t$ , wirkliche Zahnstärke  $s_1 = s \sin \beta$  ( $\approx$  rd. 0,377  $t$  bei  $\beta = 55^\circ$ ).

Gebräuchliche Zahnbreite  $b = 4 t$ , Sprung  $t_0 = r\gamma = 1,4 t$  (gemessen im Teilkreise), daraus  $\beta = 55^\circ$  (s. Abb. 78); bei Kraus- oder Kammwalzen mit wenigen Zähnen (s. Abb. 79):

$$b = 5 t, \quad t_0 = 1,75 t, \quad \beta = 55^\circ.$$

Bei gewähltem Sprung ist die Zahnform so auszuführen, und insbesondere für Evolventenverzahnung der Winkel zwischen der Erzeugenden und der Räderzentralen (etwa  $68$  bis  $72^\circ$ ) so klein zu wählen, daß beim Formen das Modell für die Zahnücke herausgezogen werden kann; bei gegebener Zahnform ist der Sprung entsprechend klein zu wählen.\*)

Pfeilräder mit gefrästen Winkelzähnen werden ausgeführt mit Zähnezahlen bis herab zu 5, ja 3. Das kleine Rad (aus Stahl) erscheint dann als Doppelschnecke (Abb. 80). Versuche von Bach\*\*) mit zwei

\*) Ueber Stirnräder mit gefrästen Pfeilzähnen s. Zeitschr. f. Werkzeugmaschinen u. Werkzeuge, 25. Mai 1910, S. 329.

\*\*) S. Z. d. V. d. I. 1908 S. 661,

Räderpaaren von 5 und 50 bzw. 3 und 30 Zähnen der Zahnradfabrik Augsburg vorm. Joh. Renk haben Nutzeffekte von 91,7 bis 93,9 vH ergeben bei Umlaufzahlen von 277 bis 824 bis 1670, entsprechend 0,5 m bis 1,51 m bis 3,07 m Umfangsgeschwindigkeit im Teilkreis. Das Radpaar von 5 und 50 Zähnen hatte 21,98 mm Teilung, Radbreite 86 mm, Teilkreisdurchmesser 34,98 und 349,8 mm, der halbe Winkel an der Spitze betrug  $29^{\circ} 45' 40''$ . Bei dem anderen Radpaar  $z=3$  und 30 war Radbreite und Teilkreisdurchmesser

Abb. 80.

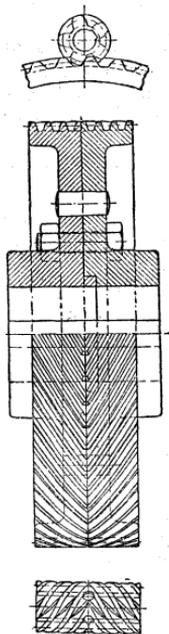
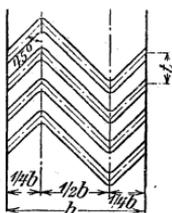


Abb. 81.



wie vor, die Teilung 36,62 mm, der halbe Winkel an der Spitze  $18^{\circ} 56' 30''$ . Die kleinen Räder sind aus Stahl, die großen (geteilt) aus Gußeisen.

Die Zahnradfabrik Augsburg, vorm. Joh. Renk gibt für die Berechnung von Pfeilrädern auch bei großen Übersetzungen (bis 1:15), wenn das größere Rad aus Gußeisen besteht, folgende Werte von  $c$  an:

bei einer Umfangsgeschwindigkeit im Teilkreis

$v = 0,25$	1	3	5	7	9	11	13	15	m/sk
$c = 32$	28	24	22	20	18	16	14	12.	

Für Phosphorbronze können die Werte um 70 bis 100 vH höher angenommen werden.

Bei der Drehung mit voreilender Winkelspitze sind die Zähne widerstandsfähiger als bei der entgegengesetzten Drehung. Muß das Rad wechselweise nach beiden Seiten umlaufen, so ist durch Anordnung von Seitenscheiben die Widerstandsfähigkeit der Zähne nach außen hin zu erhöhen, auch empfiehlt sich seitliche Abschrägung des Zahnkopfes, oder es wird, wie bei dem System Citroën, ausgeführt von der Bergischen Stahlindustrie in Remscheid, die aus Abb. 81 ersichtliche Zahnform gewählt, die bis zu einer vollständigen W-Form der Zähne ausgebildet werden kann. Nach diesem System werden von derselben Firma auch Kegelräder mit Pfeilverzahnung hergestellt.

### 3. Kegelräder.

Die Zahnstärke der Kegelräder wird für die mittleren Halbmesser  $R_1$  und  $R_2$  (Abb. 65, S. 794) in derselben Weise berechnet, wie dies unter 1. für die Stirnräder gezeigt worden ist.

### 4. Schnecke und Schneckenräder.\*)

Verhältnismäßiger Arbeitsverlust  $\mathfrak{B}_s$  s. S. 261. Verzahnung vgl. S. 797. — Bei der Berechnung der Teilung  $t$  ist von der Gleichung

$$P = cbt$$

\*) S. auch die oben schon erwähnten Aufsätze von Striebeck (Z. d. V. d. I. 1897 S. 936 u. f.; 1898 S. 1156 u. f.) und von Ernst (Z. d. V. d. I. 1900 S. 1229); ferner Ernst, Hebezeuge, 4. Aufl., Bd. 1, S. 201.

(vgl. S. 800) auszugehen und im Mittel (bei unvollkommenen Zähnen) die Zahnbreite zu wählen  $b = 1,5 t$ , bei kleinem Schneckendurchmesser weniger, bis auf etwa  $b = t$  herab; bei richtig gestalteten Zähnen sei (im Zahngrunde)  $b = 2,5 t$  und mehr; für Gußeisen ist bei geschrittener Verzahnung

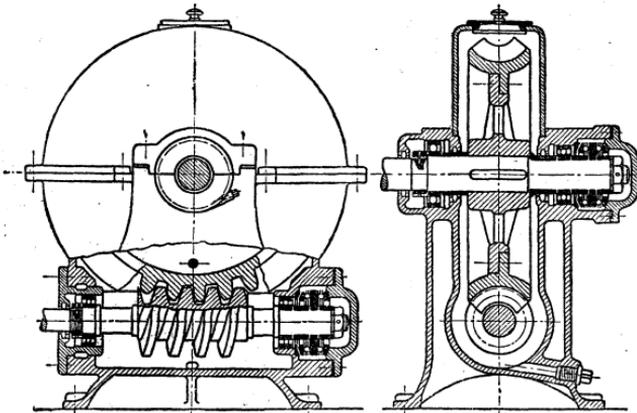
$c = 20$  bis  $30$  kg/qcm, wenn nur die Festigkeit in Betracht kommt (bei Schraubenflaschenzügen und ähnlichem stark intermittierenden Betrieb, bei dem zugleich selten mit der Höchstlast gearbeitet wird, kann  $c$  noch erheblich größer werden).

Nach Striebeck ist bei Gleitgeschwindigkeiten von  $4$  m/sk im eingelaufenen Zustande der Räder  $c = 20$  noch zulässig.

Für gute Phosphorbronze für das Rad und harten Stahl für die Schnecke, bei großen Umdrehungszahlen benutzt, ist, wenn die Festigkeit maßgebend ist,  $c = 32$  bis  $50$  zu setzen.

Für Dauerbetrieb, wenn also die Rücksicht auf Erwärmung und Abnutzung maßgebend ist, gibt Stolzenberg & Co., wenn die Schnecke im Oelbad (s. Abb. 82 nach einer Konstruktion der

Abb. 82.



Deutschen Waffen- u. Munitionsfabriken) läuft und für gute Wärmeabfuhr gesorgt ist, folgende Zahlen:

Umfangs-Geschwindigkeit  $v$  der Schnecke:

1	2,5	4	5,5	7	m/sk
c = 30 bis 40	25 bis 30	20 bis 24	15 bis 18	10 bis 12.	

Für Dauerbetrieb empfiehlt sich nur Phosphorbronze für das Rad und am besten naturharter Stahl (möglichst poliert) für die Schnecke.

Man wird auch bei Dauerbetrieb, wenn die Wärmeabfuhr so groß ist, daß die Temperatur des Oels nicht über  $60^{\circ}$  steigt, mit

diesen Zahlen höher gehen können. — Zu berücksichtigen ist auch, daß bei Schneckenrädern mit großer Zahnzahl mehr Zähne mit der Schnecke in Eingriff sind als bei kleiner Zahnzahl.

Das zum Drehen der Schnecke (Schneckenwelle) erforderliche Moment. (Antriebsmoment) beträgt nach S. 257 (mit einem Zuschlage von 2 bis 10 vH für die Reibung in den Lagern) in cmkg

$$M_d = (1,02 \text{ bis } 1,1) Pr \frac{h + 2\pi r \mu}{2\pi r - \mu h},$$

worin bezeichnet

$P$  den Zahndruck des Schneckenrades in kg, am Radius des Schneckenrades als Hebelarm wirkend (s. Abb. 83),

$r$  den mittleren Schneckenhalbmesser bis zum Teilkreise des Schraubenrades in cm,

$h$  die Ganghöhe der Schnecke in cm, und zwar für die eingängige Schraube  $h = t$ , für die  $m$ -gängige Schnecke  $h = mt$ ,

$\mu$  die Reibungszahl (bei guter Oelung und glatten Oberflächen für Gußeisen = 0,1, für Stahl auf Phosphorbronze = 0,03, sonst höher).

Ist  $z$  die Zahnzahl des Schneckenrades, so ist bei  $m$ -gängiger treibender Schnecke das Uebersetzungsverhältnis

$$\varphi = m : z = n_2 : n_1,$$

Abb. 83.

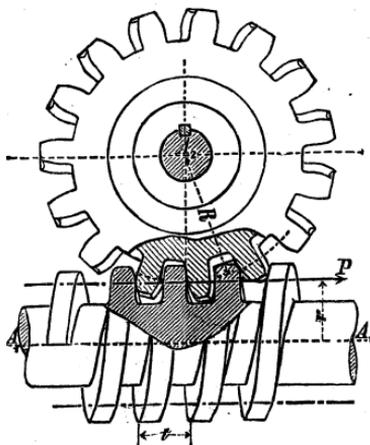
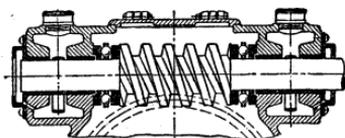


Abb. 84.



worin entsprechend S. 786  $n_1$  die Umlaufzahl der treibenden und  $n_2$  die der getriebenen Welle bedeutet.

Das Uebersetzungsverhältnis soll nicht kleiner sein als 1:6 oder 1:7, als günstigste Zahlen werden angegeben 1:10 bis 1:20.

Soll die Anordnung selbsthemmend sein, so muß (vgl. S. 257)

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{2\pi r} \geq \mu,$$

also für Gußeisen  $\geq 0,1$  sein.

Sind Erzitterungen zu befürchten, z. B. bei Fahrstühlen, so muß für die Selbsthemmung  $\operatorname{tg} \alpha$  noch geringer gewählt werden, bis auf  $\frac{1}{12}$  herab; der Wirkungsgrad sinkt hierbei auf  $\eta \geq 0,40$ , und die Folge dieser großen Arbeitsverluste ist starke Abnutzung der aufeinander gleitenden Flanken. Soll das Getriebe nur für den Ruhezustand selbsthemmend sein, so ergibt sich  $\eta$  bis 0,70.

Größere Wirkungsgrade des Schneckengetriebes ( $\eta = 0,80$  bis  $0,90$ ) werden erzielt bei Anordnung von Schrauben mit größerer Steigung, also solchen von zwei- bis fünffacher Gangzahl.

Zur Aufnahme des Achsialdruckes der Schnecke werden auf ihrer Welle Kamm- oder Kugellager angeordnet\*) (s. Abb. 82 u. 84).

### c. Radkörper.

1. Für die **Stärke des Zahnkranzes** ist bei größeren Teilungen 0,5 *t* ausreichend, mit schwacher Verjüngung (1:40 bis 1:60) nach außen, um das Herausheben des Modelles aus der Form zu erleichtern (Abb. 85 u. 86); bei geringer Armzahl oder großem Rad-durchmesser empfiehlt sich eine mittlere Verstärkungsrippe. Für Kamm-räder vrgl. Abb. 92 bis 95.

Abb. 85.

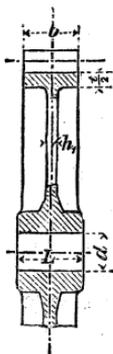


Abb. 86.

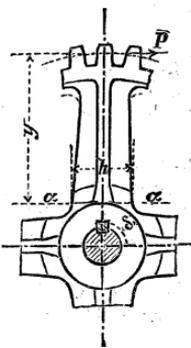
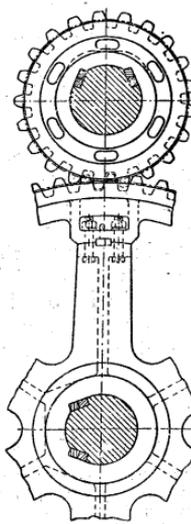
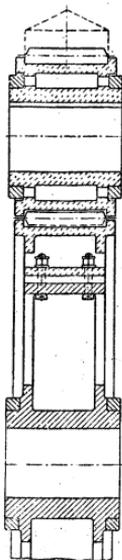


Abb. 87.



2. Unverletzte **Wandstärke der guf-eisernen Nabe** (Abb. 85, 86 u. 88):

$$\delta = \frac{1}{5} (d_0 + \frac{1}{3} d) + 1 \text{ cm bis } \frac{1}{4} (d_0 + \frac{1}{2} d) + 1 \text{ cm,}$$

worin bedeutet

*d* die Bohrung der Nabe in cm,  
*d*<sub>0</sub> die Wellendicke (in cm), die dem zu übertragenden Drehungsmomente  $M_d = Pr = k_d 0,2 d_0^3$  (vrgl. S. 588 unter 1) entspricht und aus diesem zu bestimmen ist.

#### Nabenlänge:

$L = 1,2 d$  bis  $1,5 d$  und mehr,  
 oder  $L \geq b + 0,05 r$ , wenn *r* = Teil-kreishalbmesser.

Lange Naben erhalten Aussparung (s. Abb. 88), dabei

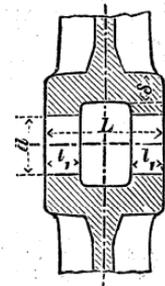
$$l_1 = 0,4 d \text{ bis } 0,5 d.$$

3. **Anzahl der Arme** eines Rades etwa

$$i = \frac{1}{7} \sqrt{D} \text{ bis } \frac{1}{8} \sqrt{D},$$

worin *D* den Teilkreis-durchmesser in mm bedeutet.

Abb. 88.



4. Der **Querschnitt** der auf Biegung beanspruchten Arme ergibt sich für gewöhnlich, unter Bezugnahme auf Abb. 85 bis 87, aus

$$Py = kbW \frac{i}{4},$$

worin *W* das dem

\*) S. Frölich, Maschinelle Einrichtungen für das Eisenhüttenwesen, Z. d. V. d. I. 1906 S. 1856 u. f.

Biegemomente  $Py$  entsprechende Widerstandsmoment des Armquerschnitts bezeichnet. Für gewöhnliche Kraft und Triebwerkräder ist bei Wahl von  $kb$  die Belastungsweise II, S. 522, zugrunde zu legen.

Für den kreuzförmigen Armquerschnitt mit  $h_1 = \frac{1}{5} h$  (s. Abb. 85 u. 86) wird für  $kb \sim 300 \text{ kg/qcm}$

$$h = \sqrt[3]{\frac{Py}{2,5 i}}$$

$h$  verjüngt sich nach dem Kranze auf etwa  $0,8 h$ .

Größere Räder\*) werden aus mehreren Teilen zusammengeschrubt (s. Abb. 87 u. 95). Das Rad nach Abb. 87 hat übrigens Pfeilzähne nach dem aus der Linie über dem Schnitt angegebenen Winkel; Abb. 95 hat Holzkämme.

Die Abb. 89, 90 u. 91 zeigen die Abmessungen normaler Stirnräder von **Otto Gruson & Co.**, Magdeburg-Buckau. Räder ohne und

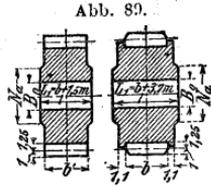


Abb. 89.

Abb. 90.

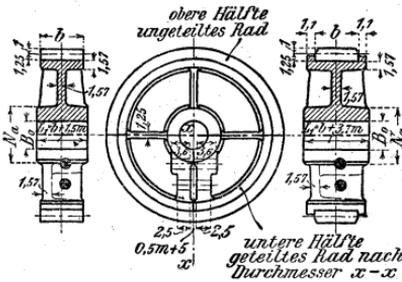
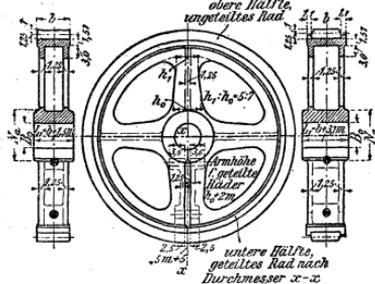


Abb. 91.



mit Bordscheiben, und zwar in der oberen Hälfte bei Abb. 90 u. 91 ungeteilt, in der unteren Hälfte geteilt. — Zur Bestimmung der Maße in mm sind die eingeschriebenen Zahlen mit dem jeweiligen

Modul  $\left(m = \frac{t}{\pi}\right)$  zu multiplizieren. — Breite der Zähne  $b$  von  $2,5 t$  wachsend um  $0,5 t$  bis  $5 t$ ; Nabendurchmesser  $N_d = 1,7 B_0 + 20 \text{ mm}$ .

Zur Vermeidung des Tönens großer Räder kann der Radkranz kastenförmig ausgebildet und mit Zement ausgefüllt werden, oder es werden, wie z. B. von der A. E. G. die Wandungen und Arme des Rades mit Filz bekleidet.

Zur Vermeidung starker Beanspruchungen durch Stöße werden nach J. D. Weitzer\*\*) elastische Zwischenglieder (Druckfedern und Druckwasserkolben) zwischen Zahnkranz und Nabe, die gesondert ausgeführt sind, eingeschaltet.

Für die Abmessungen der **Holzzähne** s. Abb. 92 bis 95. Der Kamm wird in zwei Teile (Abb. 94 u. 95) geteilt, je nach den Abmessungen

\*) Vgl. Bach, 10. Aufl. 1908 S. 366 u. f.

\*\*) Vgl. Z. d. V. d. I. 1903 S. 1355 u. f.

der vorhandenen Kämme für  $b \geq 18$  cm. Befestigung der Kämme entweder mit Stiften (Abb. 92 u. 93) oder mit Holzkeilen (Abb. 94 u. 95). Sorgfältiges Einpassen und reichliche Kranzstärken sowie

Abb. 92.

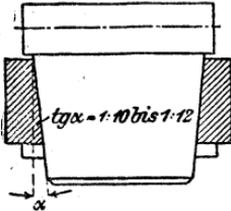


Abb. 93.

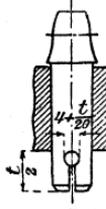


Abb. 94.

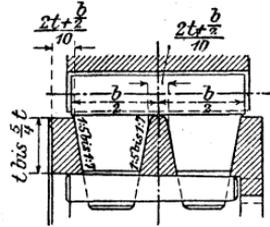
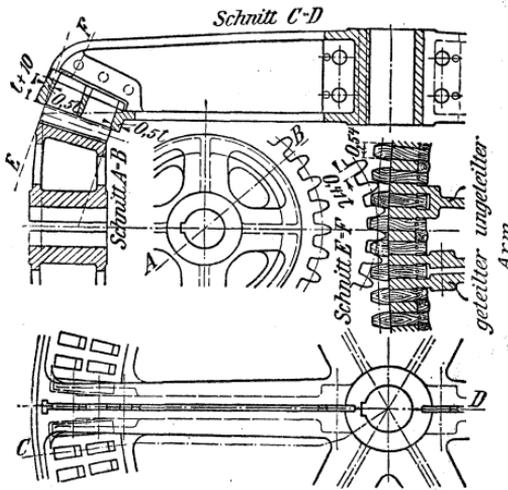


Abb. 95.



völlig trockene Kämme (Weißbuchenholz) sind nötig zum sicheren Betriebe. — Bei Rädern mit Holzzähnen muß die Zähnezah ein Vielfaches der Armzahl sein.

**Compoundverzahnung** von H. Michaelis in Chemnitz. Die arbeitende Zahnflanke ist mit Holz ausgerüstet, wodurch das Ganggeräusch der Eisenzähne und die geringe Festigkeit (Federung) der Holzkämme ohne Hinzufügung neuer Teile beseitigt wird. Solche Räder haben sich für

große Umfangsgeschwindigkeiten und große Zahndrücke als dauerhaft bewährt.

### 5. Gewichte der Zahnräder.

Die nebenstehende **Gewichtstafel** liefert die annähernden Gewichte der gußeisernen Stirnräder gewöhnlicher Bauart mit geraden Zähnen.

Holzkammräder, Schraubenräder und Stirnräder mit Winkelzähnen (Pfeilräder) wiegen annähernd so viel wie Stirnräder mit Eisenzähnen gleicher Teilung, Zähnezah und Breite.

Kegelräder wiegen rd. 0,9mal so viel wie Stirnräder.

Das Gewicht der Stahlgußräder ist etwa um 8,5 vH größer als das der gußeisernen Räder gleicher Abmessungen.

**Gewichte der Zahnräder.**

Nach Otto Gruson &amp; Co. in Magdeburg-Buckau.

Gewicht  $G = z(\alpha + \beta b) - \gamma \text{ kg.}$

 $z = \text{Zähnezahl.} \quad b = \text{Zahnbreite in mm.}$ 

Teilung $z$ mm	4 Arme			6 Arme			8 Arme			10 Arme		
	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$									
15	0,03	.	0,3	0,04	.	0,5	0,05	.	1,1	0,07	.	1,3
20	0,08	.	0,8	0,10	.	1,3	0,13	.	2,3	0,15	.	3,4
25	0,15	0,01	1,5	0,20	0,01	3,2	0,25	0,01	4,9	0,30	0,01	6,5
30	0,25	0,01	2,7	0,34	0,01	5,2	0,43	0,01	8,5	0,51	0,01	11,1
35	0,40	0,01	4,3	0,54	0,01	8,0	0,68	0,01	12,6	0,81	0,01	17,2
40	0,60	0,01	5,5	0,81	0,01	12,7	1,01	0,02	19,9	1,21	0,02	26,2
45	0,86	0,02	8,1	1,15	0,02	17,5	1,44	0,02	28,0	1,73	0,02	37,3
50	1,18	0,02	11,5	1,58	0,02	24,7	1,98	0,03	38,0	2,38	0,03	51,2
55	1,56	0,02	15,6	2,10	0,03	33,3	2,63	0,03	51,0	3,16	0,03	67,4
60	2,03	0,03	20,5	2,72	0,03	42,0	3,41	0,04	65,5	4,10	0,04	88,8
65	2,58	0,03	24,8	3,46	0,04	54,1	4,34	0,04	83,4	5,22	0,05	112,7
70	3,22	0,04	31,4	4,32	0,05	68,1	5,42	0,05	104,1	6,52	0,05	141,4
75	3,97	0,05	39,3	5,32	0,05	83,7	6,67	0,06	128,3	8,02	0,06	172,7
80	4,81	0,05	46,2	6,42	0,06	102,0	8,09	0,07	155,8	9,73	0,07	209,6
85	5,77	0,06	56,2	7,74	0,07	122,2	9,70	0,07	186,1	11,67	0,08	252,0
90	6,85	0,07	67,6	9,19	0,07	144,9	11,52	0,08	222,3	13,85	0,09	299,7
95	8,06	0,07	77,8	10,80	0,08	170,4	13,55	0,09	260,6	16,29	0,10	353,2
100	9,40	0,08	92,0	12,60	0,09	198,0	15,80	0,10	304,0	19,00	0,11	410,0

Beispiel. Ein Kegelrad aus Stahlguss mit 1,53 m mittlerem Durchmesser und 96 Zähnen von 150 mm Breite hat eine Teilung von

$$765 : 15,279 = \text{rd. } 50 \text{ mm}$$

und (S. 810 entsprechend)  $\frac{1}{7}\sqrt{1530} = \text{rd. } 6$  Arme. Mithin ist

$$G = [96(1,58 + 0,02 \cdot 150) - 24,7] \cdot 0,9 \cdot 1,09 = 415 \cdot 0,9 \cdot 1,09 = 413 \text{ kg.}$$

**B. Reib- und Keilräder.\*)**

1. Es bezeichne

$Q$  den Druck, mit dem die beiden zylindrischen **Reibräder** radial gegeneinander gepreßt werden, in kg,

$P$  die durch das Räderpaar zu übertragende Umfangskraft in kg,

$\mu = \text{tg } \rho$  die Reibungszahl (vgl. S. 243 u. f.); man setze:

$\mu = 0,10$  bis  $0,15$  bei Gufseisen auf Gufseisen,

$\mu = 0,15$  „  $0,20$  „ „ „ Papier,

$\mu = 0,20$  „  $0,30$  „ „ „ Leder,

$\mu = 0,20$  „  $0,50$  „ „ „ Holz,

\*) Ueber den Wirkungsgrad von Reibrädergetrieben (Leder, gepreßtes Papier, Pockholz auf Gufseisen) auf Grund von Versuchen, s. Z. d. V. d. I. 1897 S. 1862, sowie Mitteilungen über Forschungsarbeiten, herausgegeben vom V. d. I., Heft 10, S. 41 u. f.

und zwar sind die kleineren Werte zu benutzen, wenn die Reibflächen glatt und fest sind, was gewöhnlich der Fall ist. Es ist alsdann

$$P \approx Q \mu.$$

Zur Aenderung des Uebersetzungsverhältnisses während des Ganges (**Wechselgetriebe**) dienen zwei Reibräder in der Anordnung nach Abb. 96, wobei die Scheibe  $a$  mit ihrer Welle oder auf ihrer (durchlaufenden) Welle verschiebbar ist. Die Planscheibe  $b$  besteht meist aus Gufseisen, die andere  $a$  aus Rohhaut (seltener aus Holz, von dem möglichst die Stirnseite arbeiten muß).

Kann die Scheibe  $a$  über die Achsenmitte von  $b$  hinaus verschoben werden, so wird mit dem Uebersetzungsverhältnis zugleich bei gleichbleibender Drehrichtung der treibenden Welle, der Drehsinn der angetriebenen Welle geändert. Angewendet beispielsweise auch im Auto-

Abb. 96.

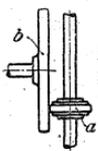


Abb. 97.

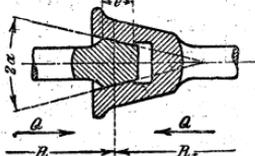
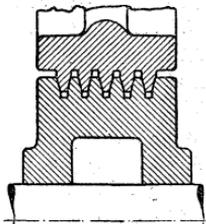


Abb. 98.



mobilmob von Martin Fischer, Zürich-Enge bis zu etwa 20 PS (**Wendegerieße** s. auch Abb. 102.)

2. Für **Keilräder** (Abb. 97), zur Uebertragung größerer Kräfte dienend, ergibt sich bei dem Keilnutenwinkel  $2\alpha$  mit den vorstehenden Bezeichnungen nach Bach:

$$P \approx Q \frac{\mu}{\sin \alpha + \mu \cos \alpha} = Q \mu',$$

woraus beispielsweise für  $\alpha = 15^\circ$  und  $\mu = 0,1$  (Gufseisen auf Gufseisen)  $\mu' = 0,28$  folgt, also  $Q \sim 3,5 P$  und  $\mu' : \mu = 1 : 0,36$ . In letzterem Verhältnis wird das zur Uebertragung einer bestimmten Kraft  $P$  nötige bei  $Q$  Keilrädern geringer als bei zylindrischen Reibrädern. Ein Nachteil (u. zw. die Ursache starker Abnutzung) ist bei Keilrädern, daß nur in einem zylindrischen Schnitte durch jeden Kranz, dem Berührungspunkte der Teilkreise entsprechend, ein Rollen stattfinden kann. Dieser Fehler wird um so kleiner, je kleiner die Kopflängen der Keile im Verhältnis zu  $R$  und  $R_1$  sind, und je geringer die radiale Eingrifftiefe  $e$  der Räder ist (möglichst nicht über 0,5 cm).

Zur Verminderung des Flächenendrucks  $f$  1 cm Länge der Berührungslinie der Räder macht man diese mehrspurig (s. Abb. 98). Läßt man nach Bach für  $\alpha = 15^\circ$  bei Gufseisen auf Gufseisen die Eingrifftiefe = 1 cm zu und ist  $z$  (meist = 3 bis 6) die Anzahl der Keilrillen eines Rades, so setze man als Umfangskraft (in kg):

$$P \approx 20 z.$$

So kann bei dem Räderpaar nach Abb. 98 der Maschinenfabrik Rud. Dinglinger, Cöthen, die Umfangskraft gleich 100 kg (bei einem Anpressungsdruck von rund 335 kg und einer Tourenzahl des kleinen Rades von 240 bis 360) gesetzt werden.

**Wirkungsgrad** der Keilräder (nach Ernst)  $\eta = 0,88$  bis  $0,90$ .

**3. Kegelförmige Reibräder** (Abb. 99). Mit den Bezeichnungen unter 1 und 2 gilt auch hier die Beziehung unter 2, wobei  $\alpha$  der halbe Spitzenwinkel des kleineren, glatten Kegels ist, gegeben durch das Uebersetzungsverhältnis

$$\operatorname{tg} \alpha = r : R.$$

Für  $\operatorname{tg} \alpha = 1 : 4$  bis  $1 : 6$  wird  $Q = 3,3$  bis  $2,8 P$ , also nicht ungünstiger als bei zylindrischen Keilrädern; hierbei ist nach Ernst  $\eta = 0,85$  bis  $0,92$ . Für kleinere Uebersetzungen bis  $1 : 1$  wird  $Q$  bis  $6,5 P$ , also sehr groß.

Holz (Abb. 100) wird nur noch selten angewendet; meist wird Rohhaut oder Papierstoff (Abb. 101) auf Gußeisen verwendet. — Die Bauart der Räder aus Rohhaut entspricht im übrigen derjenigen der Zahnräder (s. Abb. 75 u. 76 auf S. 804).

Abb. 102 zeigt ein **Wendegetriebe** unter Benutzung eines verschiebbaren Räderpaares  $aa$ .

**4. Reibräder unter Vermittlung eines dritten, den Druck durch sich fortpflanzenden Körpers.\***

(Trieb von Stevens, Evans, Seybold und C. Hoppe). Zwischen den beiden Reibscheiben liegt ein geschlossener, dicker, leicht auswechselbarer Riemen, der eine geringere spez. Pressung ergibt und die Abnutzung aufnimmt (Abb. 103).

Auf diesem Grundsatz beruht ein Wechselgetriebe (**Reibungsvorgelege** des Eisenwerkes Wülfel, Hannover-Wülfel). Es besteht aus zwei konischen Trommeln  $bb$ , die so gegeneinander gepreßt werden können, daß ein endloser Lederriemen  $a$ , der zwischen ihnen läuft, die Bewegung überträgt (Abb. 104). Zwecks Aenderung der Umlaufzahl der getriebenen Trommel wird der Lederring durch Ziehen an einer Schnur oder durch Handrad und Schraubenspindel verschoben.

C. Hoppe drückt zwischen den beiden Scheiben zwei elastisch durch Gummibänder oder dergl. miteinander verbundene Rollen an (Abb. 105); Kraftübertragung an zwei Stellen.

Abb. 99.

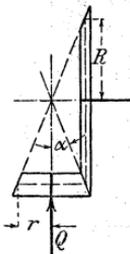


Abb. 100.

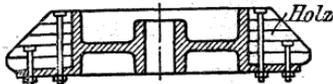


Abb. 102.

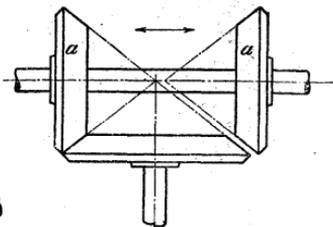


Abb. 101.

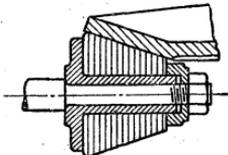
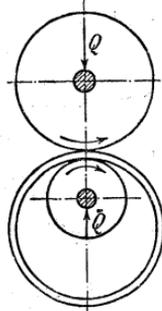


Abb. 103.



\* Näheres s. C. Bach, Die Maschinen-Elemente, 10. Aufl. 1908 S. 338 ff.

5. Ein **Reibrädergetriebe**, das zum Antrieb langsam laufender Wellen von der gleichachsig angeordneten, schnellaufenden Welle, z. B. eines Elektromotors, dient, ist unter dem Namen **Zentrator-Kupplung** bekannt

Abb. 104.

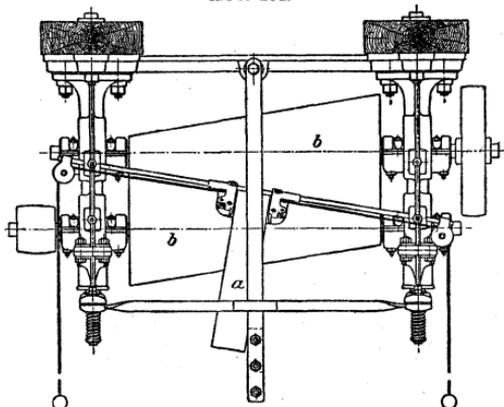
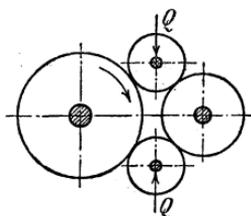


Abb. 105.



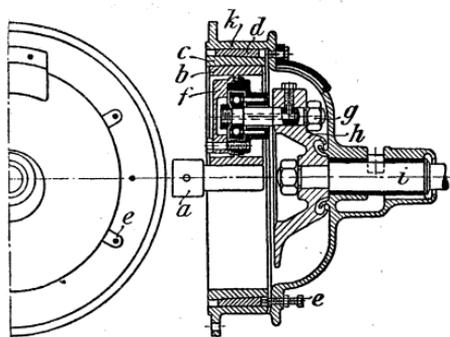
geworden. Das Getriebe wird für kleinere Leistungen (höchstens etwa 7 bis 10 PS) vielfach, beispielsweise auch von der A.E.G. angewendet und von W. H. Hilger & Cie., Ma-

schinenfabrik in Bonn a. Rh. für Uebersetzungen von 12:1 bis 7:1 gebaut. Die beste Uebersetzung ist  $\sim 9:1$ .

Gegen den Zapfen der schnellaufenden Welle *a* (s. Abb. 106) liegen vier oder drei Ringe *b* unter dem Druck der Stahlklemmringe *c* und des gußeisernen Druckrings *d* an. Die Ringe *c* und *d* be-

berühren sich in Kegelflächen. Der Druckring *d* kann durch die Schrauben *e* vorge-trieben werden, um die erforderliche Anpressung der Ringe *b* bis zur Höchstleistung herzustellen. In den rotierenden Ringen *b* liegen Leitrollen *f*, die an der Rollbewegung teilnehmen und durch Eingreifen mit einem Ringwulst das Verlaufen der Ringe *b* verhindern. Die Uebertragung der Bewegung mit verminderter Umlaufzahl auf die Welle *i* ge-

Abb. 106.



schieht durch die Mitnehmerbolzen *g* und die Mitnehmerscheibe *h*. Das Ganze ist staub- und wasserdicht in das (stillstehende) Gehäuse *k* eingekapselt.

### C. Riemen- und Seilbetrieb.

Ueber den durch Gleiten des Riemens oder Seiles auf den Scheiben entstehenden **Arbeits- und Geschwindigkeitsverlust** *§* s. S. 263 u. f.

### a. Allgemeines.

Ueber die auf Grund der (nicht zutreffenden) Voraussetzung, daß der Faden vollkommen biegsam sei, aufgestellte Art der Berechnung der Spannkraft  $S_1$  im ziehenden Faden und  $S_2$  im gezogenen Faden, sowie der darauf aufgebauten Berechnung der Riemenleistung vgl. Bach, Maschinenelemente, 10. Aufl. 1908 S. 401 u. f.

### b. Riemenbetrieb.

Die Anordnung muß — Ausnahme s. Halbkreuztrieb (Abb. 108) und Winkeltrieb (Abb. 109) — stets derartig sein, daß bei jeder Scheibe die Mittellinie des auflaufenden Riementeiltes in die Mittellinie der Scheibe fällt.

Sind die beiden Wellen parallel und liegen die Scheiben in derselben Ebene, so haben die Scheiben gleiche Drehrichtung beim offenen, dagegen entgegengesetzte Drehrichtung beim gekreuzten (ganz geschränkten) Riemen (s. Abb. 111 auf S. 822). Kreuzen sich die Wellen und stehen dabei die Mittelebenen der Scheiben winkelrecht aufeinander, so ist der Riemen halbgeshränkt (Halbkreuzriemen) (s. Abb. 108 auf S. 821). Diese drei Riemenarten sind selbstleitend, während bei sich schneidenden Wellenrichtungen, d. h. bei dem sogen. Winkeltrieb (vgl. Abb. 109 S. 821), außer den beiden Scheiben noch zwei Leitrollen für die Führung des Riemens erforderlich sind.

## 1. Riemenberechnung.

Die Riemendicke  $s$  ist allein für die zulässige Belastung des Riemens und für die von ihm übertragene Umfangskraft  $P$  nicht maßgebend, weil ein Riemen aus bestem, meist etwa 0,5 cm dickem (und 20 bis 30 cm breitem) Mittelrücken bei schnellerem Laufe ebenso stark beansprucht werden darf als das weniger gleichmäßige, 0,8 bis 0,9 cm starke Seitenleder derselben Kernhaut. Hierzu kommt noch, daß infolge der Krümmung der Scheiben der Riemen über den Querschnitt nicht gleichmäßig beansprucht wird und daß dicke Riemen auf kleinen Scheiben eine erheblich andere Beanspruchung erfahren als dünne Riemen auf großen Scheiben. Endlich wächst mit der Riemendicke der Unterschied der Wege der Außenseite und der Laufseite beim Rundlaufe auf der Scheibe; bei geringer Geschwindigkeit ( $v \sim 3$  m/sk) haben die Faserspannungen innen und außen Zeit, sich auszugleichen, um so mehr als hierbei das gezogene (lose) Riemenstück gespannter ist als bei schnellem Laufe ( $v \geq 10$  m/sk);\*) bei dicken Riemen und großen Geschwindigkeiten sind daher möglichst große Scheiben zu wählen.

Hiernach ist es gerechtfertigt, die zulässige Belastung des Riemens nicht auf 1 qcm Querschnitt, sondern (unter Berücksichtigung der Riemengeschwindigkeit) auf 1 cm Breite zu beziehen.

### Zulässige Riemenbelastung $p$ in kg f. 1 cm Riemenbreite.

(Nach C. Bach, 10. Aufl. 1908 S. 431.)

Einfacher offener Riemen aus gutem Kernleder auf gußeisernen Scheiben, nahezu wagenrechter Betrieb mit hinreichend großem Achsenabstand; der ziehende Riementrieb liegt unten, der gezogene oben (vgl. S. 820).

D m	v =				
	3	10	20	30	40 m/sk
0,120	2	.	.	.	.
0,200	3,5	.	.	.	.
0,500	5	7	9	10	10
1,000	6	8,5	11	12	12
2,000	6,5	9,5	12	13	13

\*) Statt des gewöhnlich angenommenen Wertes  $S_1 \sim 2 S_2$  findet sich bei  $v = 15$  bis 20 m/sk  $S_1 \sim 50 S_2$  und mehr (vgl. Gehreckens, Z. d. V. d. I. 1893 S. 15 ff.)

C. Otto Gehrckens\*) in Hamburg empfiehlt für günstige Betriebsverhältnisse (s. S. 820) und für Riemen aus ausgewählten Häuten folgende Werte für  $p$ , wobei die **fett** gedruckten für Doppelriemen, die übrigen für **einfache** Riemen gelten. (Zwischenwerte, z. B. für 15 und 25 m/sk sind als Mittel der Werte für 10, 20 und 30 m/sk zu nehmen.)

mm Durchm.	3	5	10	20	30	40	50 m/sk
100	2	2,5	3	3,5	3,5	3,5	3
200	3	4	5	6	6,5	6,5	6,5
300	4	<b>5</b>	5	<b>6</b>	7,5	<b>9</b>	10
400	5	<b>6,5</b>	6	<b>8</b>	9	<b>11</b>	10
500	6	<b>8</b>	7	<b>9,5</b>	10	<b>13</b>	11
600	7	<b>9,5</b>	8	<b>11</b>	11	<b>15</b>	12,5
750	8	<b>11</b>	9	<b>12,5</b>	12,5	<b>16</b>	14
1000	9	<b>13</b>	10	<b>15</b>	12	<b>17,5</b>	15
1500	10	<b>15</b>	11	<b>17</b>	13	<b>21</b>	16
2000	11	<b>17</b>	12	<b>19</b>	13,5	<b>23</b>	17
					14	<b>25</b>	18
					15	<b>26</b>	19
					15,5	<b>27</b>	20
					16	<b>28</b>	21
					16,5	<b>29</b>	22
					17	<b>30</b>	23
					17,5	<b>31</b>	24
					18	<b>32</b>	25
					18,5	<b>33</b>	26
					19	<b>34</b>	27
					19,5	<b>35</b>	28
					20	<b>36</b>	29
					20,5	<b>37</b>	30
					21	<b>38</b>	31
					21,5	<b>39</b>	32
					22	<b>40</b>	33
					22,5	<b>41</b>	34
					23	<b>42</b>	35
					23,5	<b>43</b>	36
					24	<b>44</b>	37
					24,5	<b>45</b>	38
					25	<b>46</b>	39
					25,5	<b>47</b>	40
					26	<b>48</b>	41
					26,5	<b>49</b>	42
					27	<b>50</b>	43
					27,5	<b>51</b>	44
					28	<b>52</b>	45
					28,5	<b>53</b>	46
					29	<b>54</b>	47
					29,5	<b>55</b>	48
					30	<b>56</b>	49
					30,5	<b>57</b>	50
					31	<b>58</b>	51
					31,5	<b>59</b>	52
					32	<b>60</b>	53
					32,5	<b>61</b>	54
					33	<b>62</b>	55
					33,5	<b>63</b>	56
					34	<b>64</b>	57
					34,5	<b>65</b>	58
					35	<b>66</b>	59
					35,5	<b>67</b>	60
					36	<b>68</b>	61
					36,5	<b>69</b>	62
					37	<b>70</b>	63
					37,5	<b>71</b>	64
					38	<b>72</b>	65
					38,5	<b>73</b>	66
					39	<b>74</b>	67
					39,5	<b>75</b>	68
					40	<b>76</b>	69
					40,5	<b>77</b>	70
					41	<b>78</b>	71
					41,5	<b>79</b>	72
					42	<b>80</b>	73
					42,5	<b>81</b>	74
					43	<b>82</b>	75
					43,5	<b>83</b>	76
					44	<b>84</b>	77
					44,5	<b>85</b>	78
					45	<b>86</b>	79
					45,5	<b>87</b>	80
					46	<b>88</b>	81
					46,5	<b>89</b>	82
					47	<b>90</b>	83
					47,5	<b>91</b>	84
					48	<b>92</b>	85
					48,5	<b>93</b>	86
					49	<b>94</b>	87
					49,5	<b>95</b>	88
					50	<b>96</b>	89
					50,5	<b>97</b>	90
					51	<b>98</b>	91
					51,5	<b>99</b>	92
					52	<b>100</b>	93

Mafsgebend für die Wahl von  $p$  ist (neben der Geschwindigkeit) der Durchmesser der **kleineren** Riemenscheibe. Erfahrungsgemäfs werden bei langsamem Lauf die Riemen meist zu knapp gerechnet. Für steilen Betrieb oder bei kleinem Achsenabstande sind vorstehende Zahlen um etwa 20 vH zu vermindern.

Für Doppelriemen von 10 mm Dicke sind die Zahlen der nach C. Bach gegebenen Tafel, wenn  $D > 1,00$  m, um 50 bis 60 vH; und wenn  $D > 2,00$  m, bis um 70 vH zu erhöhen.

Bei Uebersetzungen ins Langsame und bei geringer Riemen-  
geschwindigkeit (3 und 5 m/sk) sind geringere Werte für  $p$  zu wählen, u. U. nach C. Bach bis herab auf 0,5  $p$ , sogar 0,33  $p$ . Bei hoher Geschwindigkeit  $v > 30$  m/sk hält aber Gehrckens die Uebertragung ins Langsamere für bedeutend günstiger, als bisher angenommen ist.

Bei stark ungleichförmigem Betriebe (Fallhämmer, Sägegatter, Walzenstrafen usw.) ist die Maximalbelastung zugrunde zu legen und  $p$ , der Ungleichförmigkeit entsprechend, bis zu 50 vH und mehr niedriger zu wählen; auch empfiehlt es sich in diesen Fällen nach Gehrckens, den Riemen nicht beliebig in die Breite wachsen zu lassen, sondern ihn lieber doppelt zu nehmen, damit ihm für den Fall der stofswisen Ueberanstrengung bei genügendem Querschnitt der Ausgleich durch zeitweises Gleiten ermöglicht wird.

Riemen, die durch Gabeln geführt und oft verschoben werden, sind entsprechend geringer zu belasten. Zu beachten ist dabei übrigens, dafs Riemen leicht auf die Festscheibe, aber schwer auf die Los-scheibe zu verschieben sind.

Für gekreuzte Riemen vermindere man nach C. Bach die Werte von  $p$  für offene Riemen je nach Achsenabstand und Riemenbreite um 10 bis 30 vH. Gehrckens beansprucht gekreuzte Riemen bei langsamem Lauf mindestens wie offene wegen des gröfseren Umfassungs-

\*) Vrgl. auch Z. d. V. d. I. 1893 S. 15, 1900 S. 1509, 1905 S. 1446 u. 1910 S. 159.

bogens. — Achsenabstand  $e \geq 20$  mal Riemenbreite. Bei schnellem Laufe sowie bei breiten Riemen ist die Kreuzung möglichst zu vermeiden. — Für Halbkreuz-Riemen nehme man je nach Achsenabstand und Riemenbreite  $p$  geringer als bei offenen Riemen (vgl. S. 821).

Die mittels eines einfachen Riemens **übertragbare Leistung** in PS ist, wenn  $P$  = Riemenbreite in cm mal  $p$  und  $D$  der Scheibendurchmesser in **m**:

$$N = \frac{Pv}{75} = \frac{pb \pi D n}{60 \cdot 75}; \quad \text{mithin } bD = \frac{4500 N}{\pi p n} = \frac{1432,4 N}{p n}.$$

Für mittlere Verhältnisse ( $p = 7,5$ ) ergibt sich hieraus die Formel

$$N = b R n,$$

worin  $b$  und  $R$  (Scheibenhalmmesser) in **m** auszudrücken sind.

**Riemengeschwindigkeit** gewöhnlich zwischen  $v = 5$  bis  $30$  m/sk;  $v = 40$  m/sk bei Elektromotoren und Dampfturbinen nicht mehr selten, notwendig ist dabei bestes Leder aus Mittelrücken (Wirbelstück der Kernhaut). — Auf der Versuchsmaschine der Technischen Hochschule zu Charlottenburg lief ein Riemen von 9 cm Breite von Gehrckens anstandslos mit 60 m/sk. Bei 40 m/sk leistete er 110 PS.

Beispiele. I. Auf einer Riemenscheibe von 2 m Durchmesser überträgt ein einfacher offener, wagerechter Riemen von  $b = 20$  cm Breite bei einer Geschwindigkeit von  $v = 25$  m/sk, da nach der Tafel S. 817 von C. Bach hierfür  $p = \frac{1}{2} (12 + 13) = 12,5$  kg/cm ist:

$$N = 12,5 \cdot 20 \cdot 25 : 75 = 83,3 \text{ PS.}$$

II. Ein offener Doppelriemen erfordert auf einer Scheibe von 1 m Durchmesser bei  $v = 15$  m/sk, also nach der Tafel mit  $p = 1,50 \cdot \frac{8,5 + 11}{2} = 14,6$  kg/cm für Uebertragung von 80 PS eine Riemenbreite  $b$  ( $75 \cdot 80$ ) : ( $14,6 \cdot 15$ ) = 28 cm.

III. Ein 50 cm breiter Doppelriemen leistet nach Gehrckens bei 50 m/sk mit  $p = 30$ , Scheibendurchmesser 2 m:

$$N = \frac{P \cdot v}{75} = \frac{30 \cdot 50 \cdot 50}{75} = 1000 \text{ PS.}$$

Einfache Riemen sind nicht über 50 bis höchstens 60 cm Breite zu empfehlen, von da ab verdienen **Doppelriemen** den Vorzug. Dabei lege man die Fleischseiten aufeinander und nicht die glatten Haarseiten. (Lage des einfachen Riemens s. S. 751.) Doppelriemen leisten bei kleinen Scheiben wenig mehr als einfache Riemen, bei großen Scheiben ( $R > 1$  m) dagegen zeigen sie eine Mehrleistung von 70 vH und darüber.

**Achsdruck.** Der Druck, den der gespannte Riemen während des Betriebes auf die Welle ausübt und der diese auf Biegung beansprucht und die Zapfenreibung erzeugt, kann für mittlere Verhältnisse etwa mit der doppelten Spannkraft, mit der der Riemen aufgelegt werden muß, oder **gleich 3 P** angenommen werden. (Für schnelllaufende Riemen ist der Achsdruck erheblich kleiner.) Will man sicher gehen, so ist dieser Wert bei Festigkeitsrechnungen, bei Ermittlung der Durchbiegung der Welle sowie bei Bestimmung des Arbeitsverlustes zu erhöhen, da der frisch aufgelegte Riemen gewöhnlich stärker gespannt wird, als zur Uebertragung von  $P$  kg erforderlich ist.

Folgende **günstige Betriebsverhältnisse** sind für **offene Riemen** anzustreben. Uebersetzung ins Schnelle: höchste Punkte der Scheiben in wagerechter Linie (oder zu dieser unter höchstens  $45^\circ$ ); unteres Riemenstück das ziehende (oberes das schlaaffe); Scheibendurchmesser-Verhältnis 1:1 bis 2:1, höchstens bis 5:1; Scheibendurchmesser (auch bei Doppelriemen) womöglich  $D \geq 100 \times$  (Gesamt-)Riemen-dicke. Wellenabstand für schmale Riemen (bis  $b = 10$  cm)  $e = 5$  m, für breitere  $e = 10$  m, so dafs schmale Riemen bei wagerechtem Laufe 50 bis 100 mm, breite 100 bis 200 mm durchhängen (über  $e = 15$  bis 18 m hinaus geht man nicht); Scheiben (zumal bei schnellem Laufe) genau zentriert und winkelrecht zur Wellenachse, sorgfältig abgedreht und ausgewogen; ausgewogene Riemen von überall gleicher Biegungsfähigkeit (auch in der Schlufsverbindung).

Bei Uebersetzung ins Langsame wähle man, wenn der Riemen ohne Spannrolle läuft (womöglich) für die treibende Scheibe nicht unter 0,5 m, besser nicht unter 1 m Dmr.

Hat sich der eingelaufene Riemen über das zulässige Mafs gedehnt, so empfiehlt es sich nicht, ihn sofort zu kürzen; besser ist es, die auflaufende Fleischseite mit Rindertalg einzufetten. Zunächst beginnt hiernach der Riemen zu gleiten; die eintretende Erwärmung aber macht das Fett flüssig, so dafs es vom Riemen aufgesogen wird und diesen durch Anschwellen bis zu 2 vH kürzt und zum Durchziehen veranlaßt. — Kolophonium und dgl. ist als Mittel gegen das Gleiten des Riemens zu vermeiden.

Die beste **Schlufsverbindung** (s. S. 751) für Riemen ist, diesen endlos zu machen, also den geleimten Riemen zu leimen, den genähten zu nähen; für gewöhnlichen offenen und gekreuzten Lauf ist dieses wünschenswert, für Halbkreuz-, Winkel- und Kegelscheiben-Trieb sowie für schnellen Lauf aber geboten. — Die Kralle hat sich bei  $v \geq 10$  m/sk als einfache Verbindung bewährt. — Zum Nähen mit Drahtspiralen wird die Riemenverbindemaschine der Falkenauer Maschinenfabrik mit Vorteil verwendet.

Dicke Ansätze im Riemen wirken schädlich durch Stöße gegen die Scheiben, durch Steifheit und größeres Gewicht, hauptsächlich aber, weil der Riemen gezerrt wird, wenn sich eine längere klumpige Verbindung auf die kleine Scheibe legt. Wird das ziehende Riemenstück plötzlich um etwa 5 bis 6 mm gedehnt, so tritt ein Stoß in der Kraftleitung ein, der sich z. B. bei elektrischem Licht bemerkbar macht und bei der häufigen Wiederholung zum Bruche des Riemens führt.

Bedingung für jede Riemenverbindung ist, dafs sie nicht dicker als der Riemen selbst sei, gleiches Gewicht und gleiche Biegungsverhältnisse habe, deshalb ist Endlosmachen des Riemens durch Leimen (bei gutem Zuschreifen beider Enden) am besten.

Bei **Halbkreuz-Riementrieb** soll nach Völckers der Wellenabstand (in m)  $e \geq 10\sqrt{bD}$  sein, worin  $b$  und  $D$  ebenfalls in m zu nehmen ist; dabei soll  $e$  mindestens das Doppelte des Durchmessers der größeren Scheibe, nach Gehrckens aber mindestens dafs Vierfache des Scheibendurchmessers oder die zwanzigfache Riemenbreite betragen. — Gehrckens verwendet bei **Halbkreuztrieb** einen Riemen, der aus zwei ungleich breiten, treppenförmig über einander gelegten Riemen (Abb. 107) besteht. Damit wird bezweckt, das die einfache Kante sich dehnen kann, während ein Einreißfen durch die zurückliegende Verdopplung verhindert wird.

Abb. 107.



Durch den Treppenriemen wird der Durchmesser der Scheibe bis  $a$  vergrößert, so dafs der Riemen hier einen größeren Weg zurücklegen muß; damit wird der größte Zug im Riemen von

der an sich ungünstig gezerrten Kante fort und nach dem Doppelriemen bis  $a$  verlegt.

Anordnung der genau zylindrisch gedrehten Scheiben nach Bach

Abb. 108.

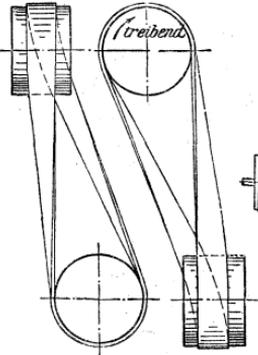
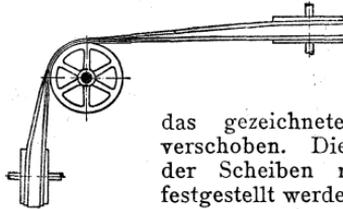


Abb. 109.



gemäfs Abb. 108; darin ist die treibende Scheibe um etwa  $e_1 = 0,1$  bis  $0,2 b$ , die getriebene um:  $e_2 = 0,5$  bis  $0,6 b$  gegen das gezeichnete Mittellinienkreuz verschoben. Die genaue Stellung der Scheiben mufs im Betriebe festgestellt werden. Die getriebene Scheibe mufs sehr breit sein, weil der Riemen im Betriebe auf ihr hin und her wandert. Die Uebertragungskraft ist je nach Umständen bis zu 25 vH geringer als bei offenem Riemen.

Für **Winkeltrieb** sind Leitrollen erforderlich (Abb. 109), dabei soll die Leitrolle des ziehenden Riementeiles mindestens den Durchmesser der treibenden Scheibe und deren 1,5-fache Breite, dagegen die Leitrolle des losen Riementeiles mindestens den Durchmesser der getriebenen Scheibe und deren 2- bis 2,5-fache Breite erhalten. Gehrckens verwendet für Winkeltrieb einen Mittel-leisten-Riemen, bei dem die Mittellinie durch Auflage eines schmäleren Riemens verstärkt ist, weil die Aufsenkanten wechselseitig stärker gezerrt sind als die Mittellinie des Riemens. Als Riemenverbindung hier ganz besonders Leimen zu empfehlen; bei genähten Verbindungen reifen die Löcher an den Kanten aus.

**Kegelscheiben-Trieb**, namentlich offener, verlangt eine bestimmte Riemen-geschwindigkeit, deren Mindestmafs sich nach der Steigung des Kegels richtet. Diese Steigung sei so klein wie möglich, jedenfalls nicht mehr als 10 vH ( $\operatorname{tg} \alpha < 0,1$ ). Die auflaufenden Riemen sind (am besten durch Rollen) zu führen. Gekreuzter Trieb ist nach Gehrckens dem offenen vorzuziehen, zumal bei Geschwindigkeiten unter 10 m.

Bei offenem Lauf (Abb. 110) verwendet Gehrckens einen in der Mittellinie verstärkten Riemen, bei gekreuztem Lauf einen dreifach treppenartig übereinander liegenden. (Abb. 111.) — Die Uebertragungskraft bei Kegelscheiben mufs wesentlich ungünstiger als bei gewöhnlichen zylindrischen oder balligen Scheiben angenommen werden.

Mit zwei Paar konischen Trommeln, auf denen (gekreuzt) endlose Riemen laufen, die durch Riemen-gabeln gleichzeitig verschoben werden können, arbeitet das **Saxonia-Vorgelege** der Peniger Maschinenfabrik und Eisengießerei, Penig i. Sachsen. Die getriebene Trommel des ersten Trommelpaares ist durch Zahnräder mit einer

Trommel des zweiten Paares verbunden. Das Vorgelege ergibt einen Wechsel der Umlaufzahl in den Grenzen von 1:16.

Als neuerer Ersatz für Kegelscheiben dient der **Umdrehungsregler** von G. Polysius, Dessau (s. Abb. 112). Er dient auch als Ersatz für Stufenscheibenvorgelege und ist besonders geeignet zum Antriebe

Abb. 110.

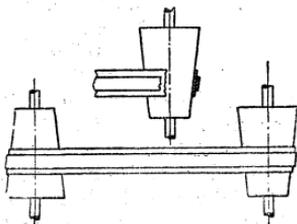


Abb. 111.

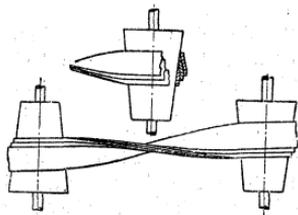
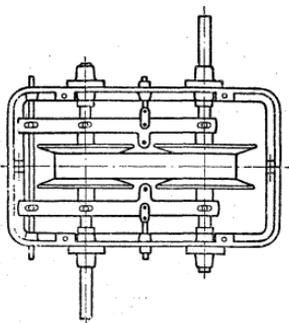
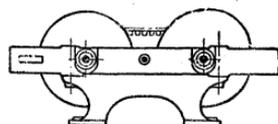


Abb. 112.

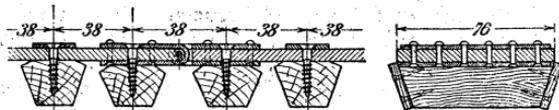


von Werkzeugmaschinen. Aenderung der Umlaufzahl während des Ganges der Maschine dadurch, daß die Kegelscheiben durch zwei doppelarmige Hebel paarweise einander genähert und voneinander entfernt werden, wodurch der Treibgurt seine Höhenlage zwischen den Scheibenpaaren ändert.

Der Treibgurt besteht aus einem Gummiriemen mit Baumwoll-einlage, der mit Rotbuchenholzklötzen besetzt ist; diese sind seitlich

an den Teilen, wo sie mit den Kegelscheiben in Berührung sind, mit Leder besetzt (Abb. 113). Der

Abb. 113.



Umdrehungsregler wird gebaut für Uebersetzungsverhältnisse bis 1:10, wobei die Umlaufzahl der getriebenen Welle bis zu 320 betragen kann und für Uebertragungen bis zu 110 PS (bei  $u/\text{min} = 100$ ).

**Spannrollen.** Richtig bemessen und gelagert — dicht an der kleinen Scheibe, am gezogenen Riemenstück und mit Durchmesser mindestens gleich der getriebenen Scheibe (wenn möglich 1,5 bis 2 mal so groß) —, verringert die Spannrolle nach Kammerer den

Wirkungsgrad nur wenig (bis um etwa  $v = 30$  m/sk) erhöht aber infolge des größeren umspannenden Bogens die übertragbare Nutzleistung. Auch wird der Riemen geschont, da die richtig angeordnete Spannrolle gestattet, den Riemen jederzeit mit dem zulässigen Mindestwert der Vorspannung zu betreiben und ihn bei längeren Betriebspausen (über Nacht) ganz zu entspannen.

Nach Gehrckens soll der Durchmesser der **Spannrolle** — unabhängig von der Größe der getriebenen oder überhaupt der kleinen Scheibe — mindestens gleich dem Hundertfachen der Riemenstärke sein.

Als Beispiel ist das **Lenix-Spannrollengetriebe** der B.-A. M.-A.-G. anzuführen, das auch bei senkrechtem Riemen, kleiner Achsenentfernung und großem Uebersetzungsverhältnis (bis 15:1) vorteilhaft arbeitet.\*) (Abb. 114.)

Die Spannrolle würde nach neueren Erfahrungen (s. oben) wohl größer gewählt werden, als in Abb. 114 angedeutet.

Mit einem **Schwingungsdämpfer** (Oelbremse) arbeitet die Spannrolle des Eisenwerkes Wülfel (Abb. 115). Die Rolle ist bis zu

Abb. 114.

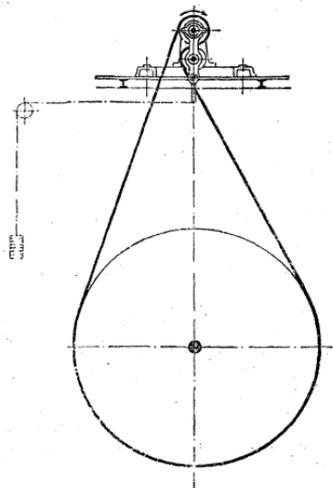
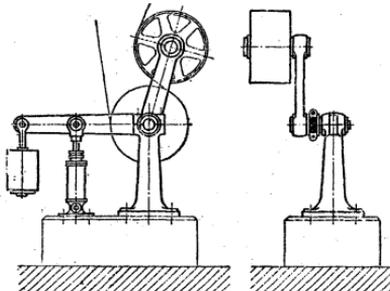


Abb. 115.



einer Riemenbreite von 300 mm fliegend gelagert, um den Riemen leicht auflegen und abwerfen zu können. Die Spannrolle ist mit selbsttätigem Oelumlaufl versehen.

Für feuchte Räume, kurzen Achsenabstand und starke Uebersetzung sind **Glieder-Riemen** (ähnlich wie Gelenkketten aus Lederlaschen und stählernen Gelenkstiften bestehend) zu empfehlen, des Gewichtes halber aber nur bei wagrechtem oder annähernd wagrechtem Laufe. Auch sind **Gummi-Riemen** hier am Platze. — **Baumwollen-Riemen** strecken sich im Betriebe meist stärker als Leder-Riemen, sind jedoch geschmeidiger und von gleichmäßigerer Dicke. Sie müssen sorgfältig durchfettet sein, damit der wechselnde Feuchtigkeitsgehalt der Luft nicht zu sehr auf die Länge einwirkt.

\*) Z. d. V. d. I. 1907 S. 636.

Gehrckens\*) empfiehlt gut eingefettete Lederriemen, möglichst leichte Doppelriemen, bei denen die Verbindungsteile der beiden Riemenbahnen einander decken.

**Gummi-, Balata- und Baumwollriemen** können nach Bach mit  $P=8$  bis  $10b$  s belastet werden, worin  $b$  die Breite,  $s$  die Dicke des Riemen in cm bedeutet. — Eingehende Versuche mit diesen Riemen fehlen noch.

Für **Kameelhaarriemen\*\*)** kann nach Angabe der mechanischen Treibriemen- und Schlauch-Weberei C. Vollrath & Sohn in Blankenburg (Schwarzatal) folgende Erfahrungsformel benutzt werden:

$$N = \frac{v \cdot b}{3} \text{ (PS).}$$

Darin bedeutet  $v$  die Riemengeschwindigkeit in der **Minute**,  $b$  die Riemenbreite in **Meter**. — Für breitere Riemen, von 400 mm aufwärts, gilt

$$N = \frac{v \cdot b}{2,5}.$$

Als übliche Geschwindigkeiten können angenommen werden 1200 bis 1500 in der Minute, also 20 bis 25 m/sk. — Größte Breite bis 1,50 m; übliche Lagerbreiten bis 0,80 m.

Beispiel: Ein Kameelhaarriemen von 0,75 m Breite hat 25 m/sk Geschwindigkeit. — Er überträgt also

$$N = \frac{v \cdot b}{2,5} = \frac{1500 \cdot 0,75}{2,5} = 450 \text{ PS.}$$

Endlos gewebte Kamelhaarriemen können verwendet werden, wenn (z. B. für Dynamos) ein Spannschlitten vorhanden ist.

Mufs der Riemen oft ein- und ausgerückt werden, so ist Baumwoll- und Kameelhaarriemen **nicht** am Platz.

**Stahlbänder** (Kraftbänder) aus gehärtetem Spezialstahl werden in den Breiten von 12 bis 150 mm (übertragbare Umfangskraft 20 bis 1000 kg) geliefert von der Eloesser-Kraftband-G. m. b. H. in Berlin-Charlottenburg.

Als Vorteile werden angegeben in erster Linie die geringe Breite der Bänder, ihre große Leichtigkeit und hoher Nutzeffekt (99 vH), sowie die aus der Schmalheit des Bandes folgende Gewichtersparnis an der Riemenscheibe usw. Die Bänder sind fast unempfindlich gegen Temperaturschwankungen und Luftfeuchtigkeit, geeignet für die höchsten Geschwindigkeiten; sie laufen auf Korkbelag.

Der Achsenabstand kann sehr gering sein [angegeben wird  $1,4 \cdot (d_1 - d_2)$ , worin  $d_1$  den Durchmesser der größeren,  $d_2$  den der kleineren bedeutet]; er kann aber nach Angabe selbst größer werden als bei Drahtseilen, da bei dem geringen Gewicht des Bandes der Durchhang klein bleibt. — Das Band wird bei fliegend gelagerten Scheiben geschlossen geleitert.

### Zusammenfassung der Versuche Kammerers\*\*\*) mit Riementrieben.

1. Die Vorspannung  $k_v$  kann wesentlich kleiner sein, als die übliche Rechnung annimmt, weil der Reibungswert sich bis auf das Doppelte der üblichen Zahl

\*) Z. d. V. d. I. 1899 S. 1631.

\*\*) Auch hergestellt von der Treibriemen-Weberei F. C. Danzfuß, Schöningen, Braunschweig.

\*\*\*) Z. d. V. d. I. 1907 S. 1085 und Mitteilungen über Forschungsarbeiten, herausgegeben vom V. d. I. Heft 155; vgl. ferner auch die Versuche von Niethammer und Czepek, Z. d. V. d. I. 1908, S. 668 u. f.

steigend erwiesen hat. Damit fällt die Gesamtspannung des Riemens kleiner aus, oder bei gleicher Gesamtspannung kann die Nutzspannung  $k_n$  entsprechend erhöht werden.

Dieser Vorteil kann nur dann voll ausgenutzt werden, wenn eine Spannvorrichtung (Spannschlitten der Elektromotoren oder die Spannrolle, vgl. unter 9) vorhanden ist, welche die Vorspannung genau ein- und nachzustellen erlaubt.

2. Die Gesamtspannung  $k_v + \frac{1}{2} k_n$  ruft nicht diejenige Riemendehnung hervor, die sich rechnermäßig aus Vorspannung und Nutzspannung ergeben würde, sondern die Dehnung bleibt um so mehr hinter diesem Wert zurück, je größer die Geschwindigkeit ist, weil der Dehnungswechsel im belasteten Riemen anscheinend dem raschen Spannungswechsel nicht zu folgen vermag.

3. Der Wirkungsgrad  $\eta$  steigt mit zunehmender Nutzspannung sehr rasch an, bleibt bis zu einer gewissen Nutzspannung nahezu unveränderlich und fällt mit noch weiter zunehmender Nutzspannung ganz langsam ab (vgl. Abb. 116 u. 117). Der Höchstwert des Wirkungsgrades bewegt sich innerhalb der Nutzspannungen von 2 bis 6 kg auf 1 cm Riemenbreite zwischen 0,94 und 0,98. Innerhalb der Auflaufspannung des ziehenden Trums von 5 bis 15 kg/cm bleibt der Höchstwert des Wirkungsgrades zwischen 0,95 und 0,98. Die angegebenen Werte beziehen sich auf die Verluste durch Schlupf, Steifigkeit und durch den Luftwiderstand des Riemens selbst; nicht enthalten sind darin Lagerreibung und Luftwiderstand der Scheiben.

4. Der Reibungswert  $\mu$  hat sich wesentlich größer ergeben, als vorausgesetzt wird: die beobachteten Grenzwerte, bei denen der Gleitschlupf beginnt, liegen zwischen 0,6 und 0,8, während unmittelbare Reibungsversuche Grenzwerte von nur 0,16 bis 0,28 bei Doppelriemen und von 0,24 bis 0,46 bei einfachen Riemen liefern (s. auch unter 6. 7. 8). Die hohen Betriebswerte von  $\mu$  sind nur dadurch zu erklären, daß der Riemen nicht nur durch seine Eigenspannung, sondern auch durch Adhäsionswirkung an die Scheibe angepreßt wird, indem das Längen auf der getriebenen Scheibe und das Einkriechen auf der treibenden Scheibe den Riemen an die Scheibe innig ansaugt.

5. Der scheinbare Schlupf  $\sigma$  steigt in gleichem Verhältnis mit der Nutzspannung  $k_n$ , entsprechend der von Bach aufgestellten Beziehung

$$\sigma = \alpha k_n \text{ at } = \frac{\alpha k_n \text{ kg/cm}}{s \text{ cm}},$$

wobei sich  $\alpha$  zu  $1/1100$  ergeben hat. Erst wenn das Spannungsverhältnis

$$\frac{k_v + \frac{1}{2} k_n}{k_v - \frac{1}{2} k_n} = e^{\mu \omega}$$

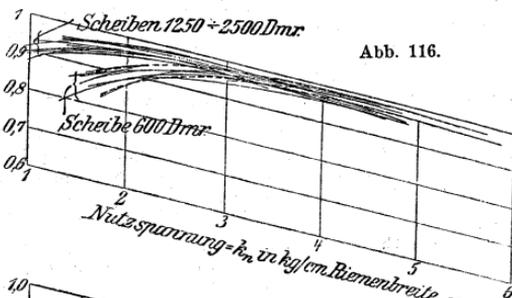


Abb. 116.

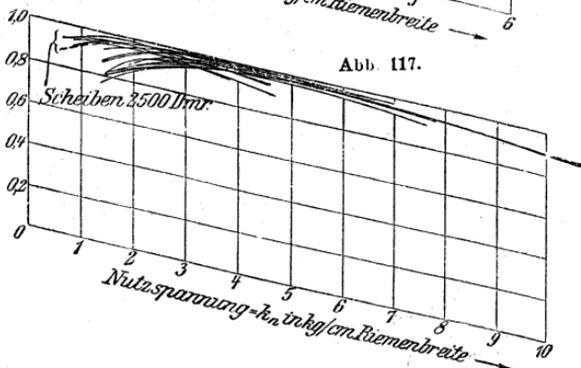


Abb. 117.

so groß geworden ist, daß  $\mu$  den Wert 0,6 bis 0,8 erreicht hat, vergrößert sich der scheinbare Schlupf plötzlich auf einen Gleitschlupf.

Aus der Schlupfmessung bei verschiedener Uebersetzung ergab sich, daß der Durchmesser  $D_r = D + s$  als der für die Uebersetzung maßgebende zu betrachten ist. Dabei ist  $s$  die Riemendicke.

6. Die Geschwindigkeit  $v$  des Riemens übt einen Einfluss sowohl auf die Gesamtspannung als auch auf den Reibungswert aus. Bei Geschwindigkeiten von mehr als 20 m/s fällt die gemessene Auflaufspannung des ziehenden Trums  $k_a + \frac{1}{2}k_n$  um so größer als die rechnermäßige Auflaufspannung  $k_v - k_f + \frac{1}{2}k_n$  aus, je größer die Geschwindigkeit ist (s. unter 2). Bei höherer Geschwindigkeit sind ferner um so größere Grenzwerte von  $\mu$  festgestellt worden (s. unter 4). Ansaugen des Riemens, das um so mehr eintritt, je größer die Geschwindigkeit ist. Beide Umstände wirken in dem Sinne, daß bei gleichbleibender Gesamtspannung die zulässige Nutzschnurspannung, d. h. die Uebertragungsfähigkeit des Riemens, bei höherer Geschwindigkeit größer ist, als es nach der bisher üblichen Rechnung erwartet werden dürfte.

7. Der Scheibendurchmesser beeinflusst den Reibungswert  $\mu$  in dem Sinne, daß  $\mu$  um so höher ausfällt, je größer der Scheibendurchmesser ist. Diese Beobachtung läßt es im Zusammenhang mit der unter 4) und 6) genannten Erscheinung zweckmäßig erscheinen, Riementreibe mit großen Scheibendurchmessern und hohen Geschwindigkeiten auszuführen.

8. Das Scheibenmaterial kommt insofern sehr merkbar zur Geltung, als Scheiben nach den Versuchen bis zu 600 mm Durchmesser aus Holz beträchtlich höhere Werte von  $\mu$  ergeben haben als eiserne Scheiben; dieser Einfluss des Materials ist so groß, daß er den des Scheibendurchmessers überwiegt. Es empfiehlt sich daher um so mehr, die Scheiben aus Holz auszuführen, je kleiner sie sind. Ob die Abnutzung des Leders auf Holzscheiben nicht größer ist als auf Eisenscheiben, muß noch durch ausgedehnte Dauerversuche festgestellt werden.

9. Eine Spannrolle, richtig bemessen und gelagert (in unmittelbarer Nähe der kleinen Scheibe, am gezogenen Trum, und von einem Durchmesser gleich dem anderthalbfachen bis doppelten der kleinen Scheibe), verringert bei Geschwindigkeiten bis zu etwa 30 m/s den Wirkungsgrad nur sehr wenig, erhöht aber infolge des größeren umspannten Bogens das Spannungsverhältnis und mit ihm die übertragbare Nutzleistung. Entgegen dem herrschenden Vorurteil gegen Spannrollen, das auf schlechte Ausführungen zurückzuführen ist, ist daher die Einschaltung einer Spannrolle immer dann zu empfehlen, wenn eine große Uebersetzung angestrebt wird (vgl. z. B. das Lenixgetriebe Abb. 114).

Da die Spannrolle gestattet, den Riemen jederzeit mit dem zulässigen Mindestwert der Vorspannung zu betreiben, so wird der Riemen sehr geschont.

10. Die zulässige Nutzschnurspannung  $k_n$  ist abhängig von der dem Riemen zuträglichen Gesamtspannung  $k_T = k_v + \frac{1}{2}k_n$ , von der Riemengeschwindigkeit  $v$ , von dem Reibungswert  $\mu$  und von dem Scheibendurchmesser  $D$ .

Zunächst hat sich ergeben, daß die Dehnung des Riemens nicht den Wert erreicht, der rechnermäßig der Gesamtspannung  $k_v + \frac{1}{2}k_n$  entspricht, und zwar um so weniger, je höher die Geschwindigkeit ist. Man wird daher die zulässige Gesamtspannung nicht als eine gleichbleibende Größe einführen dürfen, sondern wird sie für größere Geschwindigkeiten etwas höher, für kleinere etwas niedriger wählen müssen (Bach, Maschinenelemente, 10. Aufl. S. 428). In Abb. 118 ist willkürlich  $k_v + \frac{1}{2}k_n$  für  $v = 0$  zu 5 kg/cm und für  $v = 40$  zu 25 kg/cm für einfache Riemen auf Scheiben von 1000 mm Dmr. gewählt worden. Von der Linie, die diese Gesamtspannung darstellt, ist zunächst die Fliedspannung  $k_f$  in Abzug gebracht worden, so daß die Ordinate der neuen Linie dem Wert  $k_v + \frac{1}{2}k_n - k_f$ , also der Auflaufspannung des ziehenden Trums entspricht.

Ferner ist nach Punkt 4. der Reibungswert  $\mu$  wesentlich höher, als bisher vorausgesetzt. Dementsprechend sind nicht mehr der Reibungswert  $\mu = 0,28$ , das Spannungsverhältnis  $e^{\mu\omega} = 2$  und der Quotient

$$\frac{e^{\mu\omega} - 1}{e^{\mu\omega}} = 0,5,$$

sondern der Wert  $\mu = 0,5$ , das Spannungsverhältnis  $e^{\mu\omega} = 3,5$  und der Quotient

$$\frac{e^{\mu\omega} - 1}{e^{\mu\omega}} = 0,7$$

der Abb. 118 zugrunde gelegt worden. Aus der Linie für  $k_v + 1/2 k_n - k_f$  ergibt sich dann die Kurve für

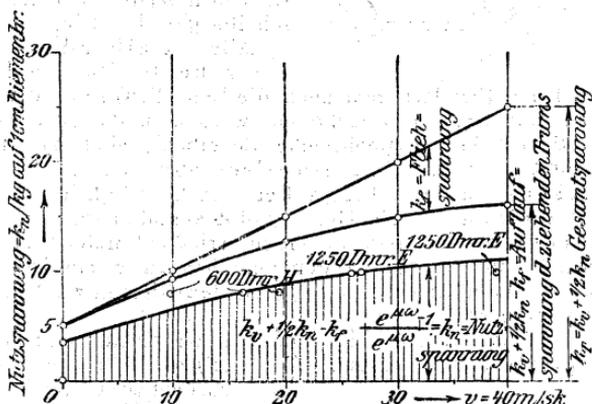
$$[k_v + 1/2 k_n - k_f] \frac{e^{\mu\omega} - 1}{e^{\mu\omega}}$$

deren Ordinate nichts anderes als die zulässige Nutzspeisung  $k_n$  darstellt.

Diese letztere Linie für  $k_n$  umschließt die Werte aller Versuche, die bisher ausgeführt wurden. Da diese Versuche mit großer Vorsicht angestellt wurden, um die Vergleichsriemen nicht zu schädigen, so ist zu erwarten, daß weitergehende Dauerversuche eine Höherlegung der Linie für  $k_n$  zulassen werden. Für größere Scheibendurchmesser sind die Werte für  $k_n$  dem größeren beobachteten  $\mu$  entsprechend zu erhöhen, für kleinere Durchmesser entsprechend zu erniedrigen.

Jedenfalls stimmt aber der Verlauf der Linie für  $k_n$  recht gut mit den Werten überein, die aus den Erfahrungen der Praxis durch die Veröffentlichungen von C. Otto Gehrckens in Hamburg bekannt geworden sind.

Abb. 118.



11. Dauerversuche mit verschiedenartigem Riemenmaterial (Chromleder, Gummi, Balata, Baumwolle, Kamelhaar) müssen noch durchgeführt werden, um die für dauernden Betrieb zulässige Gesamtspannung  $k_v + 1/2 k_n$  festzustellen.

12. Die bisher übliche Prüfung von Riemen durch Festigkeitsversuche liefert keinen Maßstab für die Brauchbarkeit des Riemens im Betrieb.

## 2. Riemenscheiben.

Meist aus Gußeisen, in neuerer Zeit vielfach auch aus Holz, schmiedeiserne Scheiben (Nabe aus Gußeisen oder Stahlguss, Arme aus schmiedeisernen Rundstäben, Kranz aus Blech oder aus Blech gedrückt mit gußeiserner Nabe) sind wenig beliebt. Die folgenden Angaben gelten für Gußeisen.

**Breite** des Scheibenkranzes (s. Abb. 119) für gerade und ruhig laufende Riemen

$$B = 1,1 b + 1,0 \text{ cm,}$$

für geschränkte oder unruhig laufende Riemen etwas mehr, bei der getriebenen Scheibe in diesem Falle  $B = 2 b$  und darüber.

**Randdicke** des Kranzes

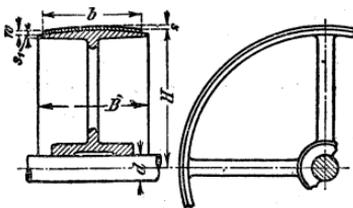
$$s_1 = 0,01 R + 0,3 \text{ cm.}$$

**Wölbungshöhe**  $w$  des Kranzes, wenn  $w$  und  $B$  mm:

$$w = \frac{1}{4} \sqrt{B} \text{ bis } \frac{1}{3} \sqrt{B}.$$

Die Wölbung sollte sich im übrigen nach dem Achsenabstand, dem Uebersehungsverhältnis, der Höhe der Belastung, Art des Betriebes und nach dem Riemenmaterial richten; sie hat den Zweck, die kleinen, unvermeidlichen Aufstellungsfehler der Triebwerkanlage auszugleichen.\*)

Abb. 119.



Bei offenem und bei gekreuztem Riemen muß die **getriebene** Riemenscheibe **gewölbt** sein.

Alle treibenden Scheiben, ferner beide Scheiben bei Kreuz- und Winkeltrieb (bei letzterem auch die Leitrollen) sowie die Scheiben, auf denen der Riemen verschoben werden muß oder auf denen mehrere Riemen laufen (mehrfache Scheiben), sind nicht gewölbt (ballig), sondern flach, d. h. zylindrisch abzdrehen.

Gehrckens empfiehlt bei großer Geschwindigkeit ( $v > 30$  m/sk) auch die treibende Scheibe gewölbt auszuführen.

Wagerecht angeordnete Scheiben erhalten notgedrungen einen **Rand**; sonst sind Ränder an den Scheiben zu vermeiden, da sie nicht nur nichts nützen, sondern auch den Riemen zerstören, sobald er die Ränder berührt.

Die Scheiben seien **glatt**, weil der elastische Riemen auf der Scheibe gleitet, d. h. gegen die Scheibe voreilt (sich längt) oder zurückbleibt (einkriecht), je nachdem er vom gezogenen Riemenstück in das ziehende oder vom ziehenden in das gezogene übergeht; auch ergeben glatte Scheiben geringere Abnutzung des Riemens als raue Scheiben.

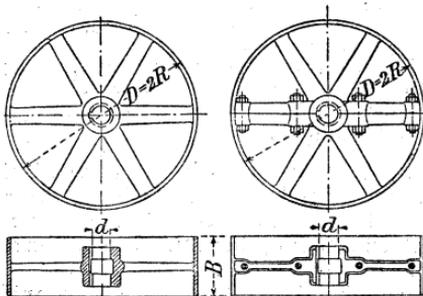
Die **Anzahl der Arme** sei, wenn  $D$  der Scheibendurchmesser in mm ist, etwa

$$i = \frac{1}{7} \sqrt{D}.$$

Die Arme werden (bei genügend schwachem Kranze) nur noch gerade hergestellt

(Abb. 120); die früher übliche geschwungene Form vergrößert nur das

Abb. 120.



\*) Vgl. auch Gehrckens, Z. d. V. d. I. 1889 S. 133.

## Gewichte fertig gedrehter und gebohrter Riemenscheiben nach Abb. 120 in kg.

(Angaben der B.-A. M.-A.-G., Dessau.)

Die obere Gewichtsangabe gilt für die ungeteilte, die untere für die geteilte, gebrauchsfertige Scheibe. Die Scheiben sind flach (nicht ballig) gedreht. Bohrung  $< 0,1D + 20$  mm.

D in mm	Breite B der Scheiben in mm											
	75	100	125	150	200	250	300	350	400	450	500	600
200	6,5 7,5	7,5 8,5	8,5 10,0	10,0 11,5	12 14	14,5 16,5	18 21	25 28	30 33	.	.	.
300	10,0 11,0	11,5 12,5	13,0 14,5	15,0 16,5	17 19	22,0 26,5	27 31	37 43	43 53	.	.	.
400	15,0 16,0	16,5 18,0	18,0 19,5	20,0 21,5	23 28	32,0 36,5	37 44	52 61	58 73	.	.	.
500	20,0 21,5	21,5 23,5	23,0 25,0	28,0 31,0	33 38	42,0 47,0	49 59	67 81	74 95	86 96	98 108	.
600	24,0 26,0	25,5 28,5	27,0 30,0	35,0 39,0	42 48	50,0 59,0	61 71	83 99	92 117	106 120	122 136	.
700	28,5 31,0 31,0	31,0 34,0 34,0	34,0 38,0	43,0 48,0	52 59	62,0 71,0	75 85	100 121	112 141	130 148	146 164	.
800	.	39,0 43,0	42,0 47,0	51,0 58,0	62 71	76,0 85,0	89 101	120 145	132 165	154 178	174 192	.
900	.	47,0 52,0	50,0 56,0	59,0 68,0	72 84	90,0 99,0	105 119	141 171	154 191	182 210	204 224	.
1000	.	55,0 61,0	58,0 65,0	69,0 79,0	84 98	104 115	123 137	165 199	178 217	212 244	236 260	.
1100	.	64,0 71,0	68,0 76,0	79,0 91,0	96 113	122 131	142 157	189 229	202 247	244 280	268 298	.
1200	.	74,0 82,0	80,0 89,0	91,0 103	110 129	140 149	162 177	217 261	230 279	280 318	304 338	.
1300	.	84,0 93,0	92,0 102	105 117	126 146	160 169	184 198	245 295	260 313	316 358	344 382	.
1400	.	.	.	119 133	142 164	182 191	207 222	277 331	292 349	354 400	388 428	.
1500	.	.	.	135 151	162 183	204 215	231 248	310 369	326 387	394 444	432 478	.
1600	.	.	.	153 171	182 203	226 241	258 276	346 409	364 427	438 490	480 530	.
1700	.	.	.	171 191	202 225	248 269	286 306	382 451	404 469	480 540	528 586	.
1800	.	.	.	191 213	222 249	274 299	316 338	420 495	446 515	534 594	580 642	.
1900	.	.	.	211 237	246 275	302 331	346 372	462 541	490 565	586 652	634 704	.
2000	.	.	.	270 303	330 365	378 408	506 589	538 619	642 714	692 768	766	.
2500	.	.	.	416 473	496 561	560 618	776 889	828 927	914 1078	1034 1136	1254 1376	.
3000	.	.	.	608 693	706 791	784 878	1116 1259	1188 1327	1372 1510	1456 1596	1748 1904	.
3500	.	.	.	838 963	956 1071	1048 1188	1512 1685	1604 1797	1838 2034	2318 2134	2318 2508	.
4000	.	.	.	1006 1269	1234 1383	1346 1532	1932 2169	2050 2303	2334 2590	2486 2738	2938 3160	.

Gewicht der Scheibe nachteilig, nicht aber deren Festigkeit, beseitigt auch nicht etwaige Gußspannungen.

Der nach dem Kranze zu im Verhältnis von etwa 5:4 sich verjüngende **Armquerschnitt** ist meist ellipsenförmig (Achsenverhältnis 1:2 bis 1:2,5). Ist bei dem bis zur Wellenachse verlängert gedachten Arme  $h$  (in cm) die große und  $0,4h$  die kleine Achse des Ellipsenquerschnittes und erfolgt die Kraftübertragung durch  $\frac{1}{3}i$  Arme, so findet sich mit  $c = 10$  und  $kb = 300$ :

$$h = \sqrt[3]{\frac{2,5}{i} b s R},$$

worin  $b$ ,  $s$  und  $R$  in cm und für  $bs$  mindestens 3 qcm einzuführen sind.

Die **Naben** können ein wenig schwächer, als für Räder (S. 810) angegeben, gemacht werden und eine Länge  $= B$  erhalten, sofern dabei  $B \geq 1,2d$  bis  $1,5d$  ( $d =$  Wellendurchmesser). Breitere Scheiben erhalten meist kleinere Nabenlänge als  $B$ . Bei Doppelscheiben genügt als Nabenlänge  $\frac{1}{2}B$ , wenn  $\frac{1}{2}B \geq \frac{5}{4}d$  bis  $\frac{7}{4}d$ . Für  $B > 30$  cm gibt man der Scheibe zwei Armsterne.

Bei **Los- oder Leerscheiben** ist das auflaufende Riemenstück zu verschieben. — **Losscheiben** erhalten eine Nabenlänge  $= 2d$  und mehr. Achsiale Schubbegrenzung ist vorzusehen. — Bei größerem Riemenzug

Abb. 121.

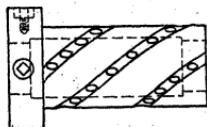
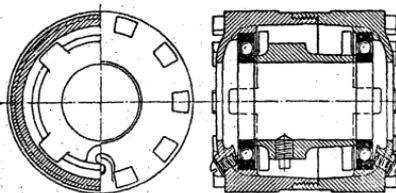


Abb. 122.



und langanhaltendem Leerlauf entsteht leicht starke Erwärmung und Abnutzung. Um dies zu vermeiden und die Gleitflächen genügend mit Oel zu versorgen werden Leerlaufbüchsen verwendet (vgl. Abb. 121). Eine **selbstschmierende Kugellagerlaufbüchse** von G. Polysius in Dessau bei der zwischen den Kugellaufingen eine Büchse sitzt, die mit Arme zum Heben und Abstreifen des Oels versehen ist, zeigt Abb. 122. Der äußere Oelbehälter besteht aus zwei ineinander geschraubte Muffen.\*)

### 3. Stufenscheiben.\*\*)

Bedingung: Riemenlänge  $L = \text{konst.}$  — Man ordnet die Stufenscheiben vielfach so an, daß die verschiedenen Umlaufzahlen der getriebenen Welle eine geometrische Reihe bilden.

\*) Vgl. Volk, Maschinenteile, Z. d. V. d. I. 1907 S. 1767.

\*\*\*) Vgl. J. Barth, Zivilingenieur, Bd. XXVI, Heft 1; ferner Kohn, Z. d. V. d. 1886 S. 1004.

Im allgemeinen sind gegeben: der Achsenabstand  $e$ , die Stufenzahl, die minutlichen Umlaufzahlen  $n_{\max}$  und  $n_{\min}$  der getriebenen Welle, die gleichbleibende minutliche Umlaufzahl  $n$  der treibenden Welle und deren grösster Scheibenhalmesser  $r_1$ , dem also auf der getriebenen Welle als kleinster Halbmesser entspricht:

$$r_2 = r_1 (n : n_{\max}).$$

Die theoretische Riemenlänge ist:

$$L = \pi (r_1 + r_2) + 2\beta \frac{\pi}{180} (r_1 \mp r_2) + 2e \sqrt{1 - \left(\frac{r_1 \mp r_2}{e}\right)^2} \quad \text{I.}$$

$$L \sim \pi (r_1 + r_2) + 2e + \frac{(r_1 \mp r_2)^2}{e} \quad \text{II.}$$

worin  $-$  für offene und  $+$  für gekreuzte Riemen gilt und der Winkel  $\beta$  in Grad auszudrücken ist, so dafs

$$\sin \beta = \frac{r_1 \mp r_2}{e}.$$

Darin ist  $\beta$  derjenige Winkel, um den der halbe Umfassungswinkel der grösseren Scheibe grösser ist als  $90^\circ$ .

Soll nun  $L$  für ein anderes Halbmesserpaar ( $R_1, R_2$ ) denselben Wert besitzen wie für ( $r_1, r_2$ ), so mufs für den **gekreuzten** Riemen

$$R_1 + R_2 = r_1 + r_2,$$

d. h. die Summe je zweier zusammengehörigen Halbmesser mufs bei miteinander arbeitenden Stufenscheiben unveränderlich sein.

Daher müssen auch im Falle des gekreuzten Kegeltriebes die Kegelseiten beider Trommeln gleiche Achsenwinkel bilden. — In manchen Fällen können die beiden [einander entgegengesetzt gelagerten] Stufenscheiben (bzw. Kegeltrömmeln) ganz gleich, unter Benutzung desselben Modelles, ausgeführt werden.

Wenn für **offene** Riemen  $e \geq 20 (r_1 - r_2)$  ist, so genügt ebenfalls  $R_1 + R_2 = r_1 + r_2 = \text{konst.}$  Ist  $e$  aber kleiner und wird z. B. das Uebersetzungsverhältnis  $\varphi = R_1 : R_2$  beabsichtigt, so ermittle man (unter Benutzung des Wertes  $L$  aus Gleichung II)  $R_2$  aus der ange-näherten Gleichung:

$$R_2^2 (\varphi - 1)^2 + \pi (\varphi + 1 e R_2) + 2e^2 = eL,$$

alsdann

$$R_1 = \varphi R_2 \quad \text{usw.}$$

Auszuführen ist hierbei das genaue  $L$  nach Gleichung I. — Mittels der für die verschiedenen Scheibenpaare anzurechnenden  $L$  lassen sich die gefundenen Halbmesser prüfen. — Bei kleinem  $e$  und offenem Riemen kann, streng genommen, ein zusammengehöriges Stufenscheibenpaar nicht gleich ausfallen; auch empfiehlt es sich, im Falle des offenen Kegeltriebes die eine Trommel etwas bauchig auszuführen.

### c. Drahtseilbetrieb.

Zur eigentlichen Kraftübertragung (Transmission) auf kleinere Entfernung neuerdings seltener angewendet. Bei grösseren Entfernungen (schon von 50 m ab) mehr und mehr durch elektrische Kraftübertragung verdrängt.

**Triebwerk-Drahtseile**

von Felten &amp; Guilleaume-Carlswerk in Mülheim (Rhein), Wien und Budapest.

I.

Für normale Seilscheiben-  
Durchmesser: $D = 150 d$  bis  $175 d$ .

Durchmesser des Seiles mm	Zahl der Drähte im Seile		Dicke mm	Ungef. Gewicht des Seiles kg/m
	Stück	mm		
9	36	1,0	0,26	
10	42	1,0	0,31	
11	36	1,2	0,38	
12	42	1,2	0,45	
13	36	1,4	0,51	
14	42	1,4	0,61	
15	48	1,4	0,70	
16	42	1,6	0,79	
18	48	1,6	0,91	
20	48	1,8	1,15	
22	54	1,8	1,30	
24	60	1,8	1,46	
26	60	2,0	1,80	

II.

Für kleine Seilscheiben-  
Durchmesser: $D = 120 d$  bis  $150 d$ .

Durchmesser des Seiles mm	Zahl der Drähte im Seile		Dicke mm	Ungef. Gewicht des Seiles kg/m
	Stück	mm		
11	48	1,0	0,36	
12	54	1,0	0,40	
13	60	1,0	0,45	
14	64	1,0	0,48	
15	72	1,0	0,55	
16	64	1,2	0,69	
18	72	1,2	0,79	
20	80	1,2	0,88	
22	80	1,4	1,20	
24	88	1,4	1,33	
26	80	1,6	1,56	
28	88	1,6	1,73	
30	80	1,8	1,98	
32	88	1,8	2,19	
34	96	1,8	2,41	

III.

**Eisendraht (statt Hanf) in den Litzen.**

(Nur für große Achsenabstände und große Seilscheiben.)

Kleinster zulässig. Seil- scheiben- Durchm. mm	Draht- dicke mm	Durch- messer des Seiles mm	Zahl der Drähte im Seile	Ungef. Gewicht des Seiles kg/m	Kleinster zulässig. Seil- scheiben- Durchm. mm	Draht- dicke mm	Durch- messer des Seiles mm	Zahl der Drähte im Seile	Ungef. Gewicht des Seiles kg/m
		9	42	0,32			14	42	0,71
		12	56	0,42			18	56	0,95
1100	1,1	7,5	24	0,22	1600	1,6	11	24	0,46
		10	42	0,38			15	42	0,81
		13	56	0,51			19	56	1,08
1200	1,2	8,5	24	0,26	1700	1,7	12	24	0,52
		11	42	0,46			16	42	0,92
		14	56	0,60			20	56	1,21
1300	1,3	9	24	0,30	1800	1,8	13	24	0,58
		12	42	0,54			17	42	1,03
		15	56	0,71			21	56	1,36
1400	1,4	10	24	0,35	2000	2,0	14	24	0,72
		13	42	0,62			19	42	1,27
		17	56	0,82			23	56	1,68

In Tafel III ist für jede Drahtdicke ein Zwischendurchmesser fortgelassen.

**Drahtseiltransmission** ist nur zu empfehlen, wenn die treibende und die getriebene Achse möglichst in derselben horizontalen und genau in derselben vertikalen Ebene liegen. — Spannrollen (wie bei Riemen) oder Spannwagen (wie bei Hanfseilen) sind ebenso unbedingt zu verwerfen wie starkes Anspannen des Seiles überhaupt. Die erforderlichen Seilspannungen werden nur durch das Gewicht des Seiles erzeugt. — Leit- und Tragrollen sind auch zu vermeiden, höchstens dürfen u. U. Tragscheiben verwendet werden, die ebenso groß sind wie die Treibscheiben.

Antriebscheibe und getriebene Scheiben müssen möglichst gleichen Durchmesser haben. — Uebersetzung muß also durch Riemenvorgelege hergestellt werden. — Seilscheibendurchmesser in der Regel  $\geq 150$ mal Seildurchmesser; Scheiben mindestens 1 m groß.

**Gewichte gußeiserner Drahtseil-Scheiben**  
 von Felten & Guilleaume in Mülheim (Rhein), Wien und Budapest.

6 Arme. Teilung erfolgt in einem Armpaare	Ungeteilte Scheiben								Geteilte Scheiben			
	Scheiben-Durchmesser } mm	1000	1250	1500	1750	2000	2250	2500	2750	3000	3250	3500
Gewicht der einrilligen Scheiben } kg	106	135	160	215	270	330	400	575	1015	1200	1410	1600
Gewicht der zweirilligen Scheiben } kg	170	210	255	315	395	510	645	825	1270	1580	1950	2300

Der Seilscheibenrille (Abb. 123 u. 125) gibt man die doppelte Seildicke als Tiefe, so daß das Seil (mittels des Seilauflegers) leicht aufzulegen und abzuschlagen ist; doch wird (s. Abb. 124) die Rille häufig viel tiefer gemacht. (Ausführung von G. Polysius, Dessau.) Ausfütterung der Rille bei Trieb- und Zwischenrollen mit Stückchen Hirnleder, seitlich eingeschoben (Abb. 123) oder schräg eingesteckt und dicht aneinander getrieben und abgedreht (Abb. 124 u. 125). Dauer des Lederfutters 3 Jahre und darüber.

Abb. 123.



Abb. 124.

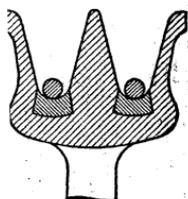


Abb. 125.

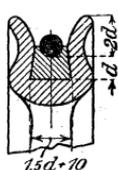
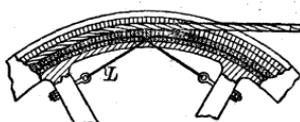


Abb. 126.



Abb. 127.



Auch Holzfutter (mit radialer Faserrichtung). Die Rillen sind stets glatt auszu-drehen, auf dem Grunde genau nach dem Durchmesser des Seiles und so, daß dieses mit einem Drittel seines Umfanges aufliegt.

Bei der Bauart „Heckel“ (ausgeführt von Felten & Guilleaume) sind die Lederplättchen P auf eine Drahtlitze L (Abb. 126 u. 127) aufgereiht, die an drei Armen der Scheibe befestigt ist.

Bei Bestellung von Triebwerk-Drahtseilen und deren Seilscheiben empfiehlt sich die Angabe der Anzahl der zu übertragenden PS, ferner des Achsenabstandes, der Umdrehungszahlen, der Scheibendurchmesser, der Scheibenbohrungen, des Rillenquerschnittes; endlich ist anzugeben, ob die Scheiben mit oder ohne Ledereinlage, und ob sie geteilt oder ungeteilt zu liefern sind.

Kleinster Achsenabstand der Triebrollen 15 bis 20 m, grösster 80 bis 125 m. — Seilgeschwindigkeit bei kleineren Kräften 6 bis 10 m/sk; bei grossen Kräften bis 25 m/sk. Dabei liegt die Umlaufzahl zweckmässig bei 120, und der Scheibendurchmesser ist entsprechend gross zu wählen. — Die Seilscheiben dürfen nicht schlagen und werden deshalb nicht aufgekeilt, sondern mit gespaltener Nabe aufgeklemt.

Berechnung der Seilstärke: Umfangskraft  $P = \frac{N \cdot 75}{v}$  kg.

Dann ist zu wählen

für $P =$	50	60	70	85	100	120	140	160	180
ein Seil von	9	10	11	12	13	14	15	16	18
$P =$	210	240	270	300	330	365	400	445	500
	20	22	24	26	28	30	32	34	37

Im Freien laufende Seile aus verzinktem Draht. Verbindung der Seilenden am besten durch Verspleissen, u. U. auch durch Seilschlösser.

#### d. Hanfseil- und Baumwollseiltrieb.

**1. Seile.** Die geschlagenen Rundseile bestehen meist aus drei Litzen, deren jede aus einer grösseren Zahl schraubenförmig gewundener Fäden zusammengesetzt ist. Ist  $d$  der Seildurchmesser und  $\delta$  der Litzendurchmesser, so ist  $d \sim 2,2 \delta$ , mithin der Gesamtquerschnitt der Litzen etwa nur das 0,62-fache der Fläche  $\frac{1}{4} \pi d^2$ . Ganghöhe der

#### Leistung in PS von runden Hanf nach Felten & Guilleaume

Uebertragungsfähigkeit eines Seiles von Durchmesser	Seilgeschwindigkeit 10 m für 1 sk				Seilgeschwindigkeit 15 m für 1 sk			
	7 kg	8 kg	9 kg	10 kg	7 kg	8 kg	9 kg	10 kg
Beanspruchung auf 1 qcm von								
25 mm	4 $\frac{1}{2}$	<b>5</b>	6	6 $\frac{1}{2}$	7	<b>8</b>	9	10
30 "	6 $\frac{1}{2}$	<b>7<math>\frac{1}{3}</math></b>	8 $\frac{1}{2}$	9 $\frac{1}{2}$	10	<b>11<math>\frac{1}{3}</math></b>	13	14
35 "	9	<b>10</b>	11 $\frac{1}{2}$	13	13 $\frac{1}{3}$	<b>15<math>\frac{1}{3}</math></b>	17	19
40 "	12	<b>13<math>\frac{1}{3}</math></b>	15	16 $\frac{1}{2}$	17 $\frac{1}{2}$	<b>20</b>	22 $\frac{1}{3}$	25
45 "	15	<b>17</b>	19	21	22	<b>25<math>\frac{1}{2}</math></b>	28 $\frac{1}{2}$	32
50 "	18	<b>21</b>	23 $\frac{1}{2}$	26	27 $\frac{1}{2}$	<b>31</b>	35	39
55 "	22	<b>25</b>	28 $\frac{1}{2}$	32	33	<b>38</b>	42 $\frac{1}{2}$	48
60 "	26	<b>30</b>	34	38 $\frac{1}{2}$	40	<b>45</b>	51	56 $\frac{1}{2}$

Litzenschraubenlinien im Mittel etwa 5  $\delta$ . Manilahanfseile sind weniger geschmeidig und verlangen daher grössere Scheibendurchmesser.

**Runde Treibseile aus Hanf oder Baumwolle**  
von Felten & Guilleaume in Cöln (Rhein).

Seil-Gewicht  $q$  in kg/m.

Seildurchmesser $d$ in mm	25	30	35	40	45	50	55
Gehechelter Schleifshanf . . . . .	0,51	0,71	1,00	1,30	1,60	1,90	2,24
Hellster Manilahanf . . . . .	0,45	0,65	0,83	1,10	1,35	1,75	2,04
Amerikanische Baumwolle . . . . .	0,47	0,67	0,93	1,20	1,50	1,85	2,10

Zur Verbindung der Seilenden durch Verspleißen ist 3 bis 4 m Mehrlänge nötig; Seilschlösser haben sich nicht bewährt. Das Nachspleißen der im Betriebe gelangten Seile ist kostspielig und zeitraubend; deshalb sind die Seile vor dem Gebrauche gut auszurecken und zu trocknen. — Dauer der Seile bei sachgemäßem Betriebe und guter Behandlung (Einfettung alle 2 bis 3 Monate, anfangs öfter) bis 6 Jahre und mehr.

**Dreikantseile**, geflochtene, von derselben Fabrik, ebenso **Achtkantseile** ergeben durch die große, gleichmäßige Auflagerfläche an beiden Rillenseiten gute Kraftausnutzung ohne erhebliche Formänderung des Seiles.

**Dreikantseile:**

Seildurchmesser . . . . .	35	40	45	50	mm
Querschnitt . . . . .	9	12	15	19,5	qcm
Gewicht . . . . .	1,00	1,25	1,50	1,75	kg/m

**und Baumwoll-Transmissionsseilen**  
Cöln (Rhein).

Seilgeschwindigkeit 20 m für 1 sk				Seilgeschwindigkeit 25 m für 1 sk				Seilgeschwindigkeit 30 m für 1 sk			
7 kg	8 kg	9 kg	10 kg	7 kg	8 kg	9 kg	10 kg	7 kg	8 kg	9 kg	10 kg
9	10 $\frac{1}{2}$	12	13	11 $\frac{1}{2}$	13	15	16 $\frac{1}{2}$	14	15 $\frac{1}{2}$	17 $\frac{1}{2}$	19 $\frac{1}{2}$
13	15	17	19	16 $\frac{1}{2}$	19	21	23 $\frac{1}{2}$	20	22 $\frac{1}{2}$	25 $\frac{1}{2}$	28
18	20 $\frac{1}{2}$	23	25 $\frac{1}{2}$	22 $\frac{1}{2}$	26	29	32	27	30 $\frac{1}{2}$	34 $\frac{1}{2}$	38
23 $\frac{1}{2}$	27	30	33	29	33 $\frac{1}{2}$	38	42	35	40	45	50
30	34	38	42	37	42 $\frac{1}{2}$	47 $\frac{1}{2}$	53	44 $\frac{1}{2}$	51	57	63 $\frac{1}{2}$
36 $\frac{1}{2}$	42	47	52 $\frac{1}{2}$	46	52	59	65	55	63	71	79
44	50	57	63	55 $\frac{1}{2}$	63	71	79	66 $\frac{1}{2}$	76	85 $\frac{1}{2}$	95
53	60	68	75	66	75	85	94	79	90	102	113

**Achtkantseile:**

Seildurchmesser . . . . .	30	35	40	45	50	55	mm
Querschnitt . . . . .	6,3	9,1	12,3	16,1	20,3	25,1	qcm
Gewicht . . . . .	0,50	0,80	1,05	1,30	1,60	1,95	kg/m

**Quadratseile der Quadratseilfabrik „Patent Bek“ in Mannheim-Neckarau.**

Seildicke . . . . .	25	30	35	40	45	50	55	mm
Querschnitt . . . . .	6,25	9,0	12,25	16,0	20,25	25,0	30,25	qcm
Gewicht . . . . .	0,55	0,90	1,10	1,45	1,75	2,15	2,70	kg/m
Scheibendurchmesser, kleinster . . . . .	0,375	0,45	0,7	0,8	0,9	1,1	1,4	m.

Die geflochtenen Quadratseile zeigen grofse Geschmeidigkeit, haben keine Neigung zu Drehbewegungen, weil drallfrei; sehr geringe Längenänderung.

Die A.-G. für Seil-Industrie, vorm. Ferdinand Wolff, Mannheim-Neckarau, gibt für ihre **Sexagonseile** folgendes an:

Stärke . . . . .	30	35	40	45	50	55	60	mm
Querschnitt . . . . .	7,79	10,60	13,86	17,54	21,65	26,20	31,17	qcm
Gewicht . . . . .	0,66	0,95	1,18	1,49	1,84	2,22	2,65	kg/m

Leistung bei 8 kg/qcm

Belastung u. 20 m/sk

Seilgeschwindigkeit 16,5 22,5 29,5 37 46 56 66,5 PS

Die Seilgeschwindigkeit liegt am besten in den Grenzen von 15 bis 30 m/sk; die Beanspruchung auf 1 qcm Querschnitt kann bei normalen Verhältnissen auf 9 kg/qcm gesteigert werden.

**Gewichte gufseiserner Hanfseilscheiben in kg.**

Eisenwerk Wülfel vor Hannover.

Die oberen Gewichte gelten für ungeteilte, die unteren für geteilte, fertig bearbeitete Scheiben.

Scheiben- Durchmesser mm	Anzahl der Rillen für 45 mm Seildurchmesser									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1100	140	200	270	330	390	460	545	620	695	765
	160	230	315	390	460	545	630	715	795	875
1200	155	220	290	360	430	500	605	680	755	835
	175	250	335	420	500	585	670	755	835	945
1300	170	245	315	390	470	545	665	745	825	920
	195	280	365	455	545	640	760	850	935	1030
1400	190	270	345	425	510	590	730	810	900	985
	215	305	395	490	585	685	825	915	1010	1105
1500	205	295	375	460	550	635	790	880	970	1065
	230	335	430	530	635	740	895	995	1090	1200
2000	305	420	535	655	770	885	1125	1255	1370	1495
	335	470	605	740	870	1010	1250	1395	1515	1655
2500	420	575	730	885	1040	1200	1545	1705	1865	2015
	460	640	820	995	1170	1355	1700	1875	2045	2215
3000	.	770	970	1175	1380	1585	2055	2260	2465	2670
	.	845	1070	1300	1530	1760	2230	2450	2670	2895

Die angegebenen Gewichte gelten bis 20 m Seilgeschwindigkeit.

**2. Seilscheiben.** Gewöhnlich aus Gufseisen, geteilt oder ungeteilt, meist mit 6 geraden Armen, die bei über 300 mm breiten Scheiben als Doppelarme ausgebildet sind; Scheiben von mehr als 3 m Durchmesser erhalten 8 und 10 Arme. Armquerschnitt ellipsenförmig (vgl. S. 830). Ueber Teilung der Scheiben vgl. S. 823 u. 833. Abb. 128 zeigt

Abb. 128.

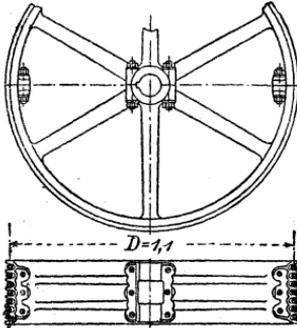


Abb. 129.

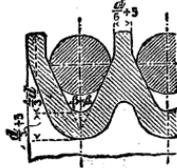


Abb. 130.

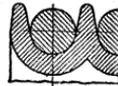
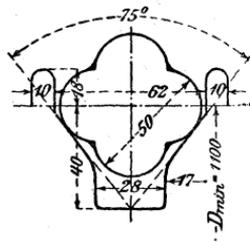


Abb. 131.



eine zwischen den Armen geteilte Hanfseilscheibe (von  $D = 1,1$  m) der B.-A. M.-A.-G. zu Dessau.

Die Rillen einer Scheibe sollen möglichst glatt, mit gleichem Durchmesser und Querschnitte gedreht sein. Für die Treib- und Zwischenrollen wähle man die Rillenform nach Abb. 129, wobei  $d$  der Seildurchmesser in mm und  $\operatorname{tg} \beta = \frac{8}{20}$  bis  $\frac{9}{20}$ , oder  $2\beta = 43,5$  bis  $45^\circ$ ; die Tragrollen erhalten auf dem Grunde nach dem Durchmesser  $d$  kreisförmig ausgedrehte Rillen (Abb. 130). Dreikantseile erhalten die Rillenform nach Abb. 129, ebenso Quadratseile; für letztere wird indessen bei Kreisseiltrieb die Rille nach Abb. 131 empfohlen.

**3. Anordnung des Betriebes.** Hanfseil (oder Baumwollseil-)betrieb ist da zweckmäßig, wo Riemen durch große Länge und Breite zu kostspielig ausfallen; besonders vorteilhaft dann, wenn von einer Hauptscheibe aus durch einzelne Seile oder Gruppen von Seilen nach verschiedenen Stellen Kraft abzugeben ist. Zumeist Betriebe mit Dehnungsspannung, neuerdings mehr und mehr auch solche mit Belastungsspannung.

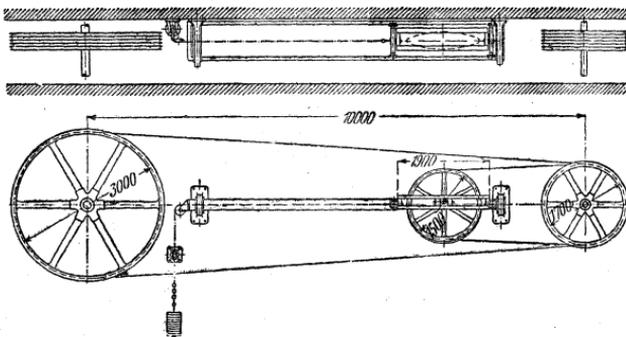
Bei dem Betriebe mit Dehnungsspannung wird die Kraft auf mehrere Seile (von höchstens 50 bis 55 mm Durchmesser) verteilt, die sie dann, je nach Bedarf, wieder gesondert abgeben können. Von der Antriebscheibe aus treiben einzelne Seilgruppen die verschiedenen Wellenstränge. Die erforderlichen Seilspannungen werden durch das Seil-Eigengewicht und durch straffes Anspannen der Seile erzeugt, die vorher gut ausgetrockneten Seile müssen daher in einer 3 bis 5 mal kürzeren Länge gepleißt werden, als der Achsenentfernung und den Scheibendurchmessern entspricht. Der Achsdruck steigert sich bei

einem neu aufgelegten Seile bis  $40 d^2$  ( $d$  in cm) und darüber, wodurch die Scheiben, Wellen, Zapfen und Lager u. Umst. stark beansprucht werden. Gegen die das Seil verkürzende Feuchtigkeit der Luft helfen reichliche Seildurchsenkungen. Das untere Seilstück sei das ziehende. Lotrechter oder nahezu lotrechter Betrieb mit Dehnungsspannung ist nur mit sehr elastischen Seilen und bei größerem Achsenabstände möglich, aber wenig empfehlenswert. Abstand der Scheibenachsen zwischen 6 bis 8 m und 20 bis 25 m, bei größeren Abständen Zwischenrollen. Durchmesser der Seilscheiben bei Rundseilen mindestens  $D = 30 d$ , besser 40 bis  $50 d$ . Bei kleinem Achsenabstände und kleinem  $d$  besser Baumwollseile (s. w. unten). Abweichungen der Scheibenmittelebenen, abgesehen vom Leitrollenbetriebe, bis etwa  $6\frac{1}{2}^0$  zulässig.

Bei dem Betriebe mit Belastungsspannung wird, wenn die Kraftabgabe auf mehrere Wellenstränge erfolgt, ein endloses Seil (bis zu 500 und 600 m Länge) über die verschiedenen Scheiben geführt, u. zw. leitet man am besten das Seil nach jeder Umschlingung einer Arbeitscheibe auf die gemeinsame Treibscheibe zurück, um es jedesmal zu entlasten, bevor es aufs neue Kraft überträgt. Die durch die dauernde Inanspruchnahme, den Temperatur- und den Feuchtigkeitswechsel erzeugte Längenänderung des Seiles wird von einer Stelle aus durch einen Spannschlitten (Spannwagen) ausgeglichen, so daß fortwährend eine gleichmäßige Seilspannung vorhanden ist. Derartige einseitige sogen. **Kreisseiltriebe** lassen sich auch zwei- oder mehrseitig einrichten; auch sind im Freien befindliche sowie lotrechte Antriebe hierbei leicht möglich. Die **Spannrolle**, wie sie bei Riemen mit Erfolg benutzt wird, ist bei Seilen zu vermeiden.

Der Spannschlitten ist an eine gezogene Seilschlingung anzuschließen, besonders bei stark wechselnder Kraftübertragung (s. Abb. 132).

Abb. 132.



Anordnungen, bei denen das Seil abwechselnd in entgegengesetztem Sinne gebogen wird, sind möglichst zu vermeiden, besonders bei kleineren Seillängen. Durchmesser der Spann- und Leitrollen  $D \geq 30 d$ ;

Rillenform so, daß das Seil im Grunde aufrucht und nicht klemmt (Abb. 133); Rillen der Treibrollen nach Abb. 129 (S. 837) mit  $\operatorname{tg} \beta = 0.4$ . Weglänge des Spanntrages bei Antrieben in Gebäuden etwa 2,5 vH, bei solchen im Freien 3 bis 3,5 vH der ganzen Seillänge (entspr. 5 bzw. 6 bis 7 vH Seilverlängerung); gestatten die örtlichen Verhältnisse diese Gleislänge nicht, so muß das Seil später gekürzt werden. Belastungsgewicht regelbar aus einer größeren Zahl von Scheiben herzustellen.\*)

Abb. 133.



#### 4. Berechnung der Hanfseile.

1. Betrieb mit Dehnungsspannung. Für Hanfseile wähle man  $D = 30 d$  bis  $50 d$ . Darin bedeutet  $D$  den Scheibendurchmesser,  $d$  den Seildurchmesser,  $\alpha$  den kleinsten Umfassungswinkel in Bogenmaß. Seilgeschwindigkeit  $v = 15$  bis 20 m/sk; darüber hinaus geht man selten. Für  $d$  in cm ist bei einem Hanfseile die übertragbare Kraft in kg:

$$P = 3 d^3 \text{ bis } 4 d^3, \text{ wenn } D \geq 30 d \text{ und } \alpha \geq 2,5;$$

$$P = 5 d^3 \text{ bis } 6 d^3, \text{ wenn } D \geq 50 d \text{ und } \alpha \geq 3,0.$$

Die größeren Werte von  $P$  sind nur dann zulässig, wenn der Betrieb wagrecht oder nur wenig schief, der Achsenabstand genügend, der Wechsel in der Größe von  $P$  nicht zu bedeutend ist, die Scheibendurchmesser reichlich bemessen sind, die Geschwindigkeit  $v$  etwa 20 m/sk nicht überschreitet, das Seil aus vorzüglichem Schleifhanf gefertigt ist und die Spießstellen mit Sorgfalt hergestellt wurden.

Bei Verwendung von  $z$  Seilen folgt aus  $Pz v = 75 N$  und  $P = 6 d^3$  bis  $3 d^3$ :

$$z d^3 = 12,5 \frac{N}{v} \text{ bis } 25 \frac{N}{v}.$$

Dreikantseile (s. S. 835) gestatten  $P = 6 d^3$ , bei ruhigem, nicht stoßweise arbeitendem Betriebe bis  $P = 7,5 d^3$  ( $d =$  Seildrm.)

Quadratseile „Patent Bek“ (s. S. 836) ergeben für  $v = 10$  bis 25 m/sk

$$P = 6 s^2 \text{ bis } 8 s^2,$$

worin  $s$  die Seildicke in cm.

2. Betrieb mit Belastungsspannung. Für die Anordnung, wobei das Seil nach jeder Umschlingung der getriebenen Scheibe auf die treibende zurückgeführt wird, gelten die Gleichungen unter 1., dabei können die Zahlenbeiwerte bis um 25 vH höher gewählt werden. Empfohlen wird

$$P = 5 d^3, \quad D = 30 d \text{ für Leit- und Spannrollen,}$$

$$D \geq 30 \text{ bis } 40 d \text{ für Treibrollen.}$$

5. Baumwollseile (s. Tafel S. 834 u. f.) für Triebwerke berechne man wie Hanfseile (s. 4.). Für Laufkrane geht man mit der übertragbaren Kraft wohl bis

$$P_{\max} = 9 d^3 \text{ bei } D \geq 30 d,$$

so daß bei dem üblichen  $v_{\max} = 25$  m/sk und dem Seildurchmesser  $d = 16 \text{ mm } \frac{1}{75} \cdot 9 \cdot 1,6^3 \cdot 25 = \text{rd. } 8 \text{ PS}$  übertragen werden können.

Für den Antrieb von Schiebebühnen, Laufkränen usw. werden Baumwollseile in Dicken von 16 bis 22 mm benutzt. Baumwollseile

\*) Näheres s. Bach, Maschinenelemente, 10. Aufl. 1908 S. 465.

sind auch bei stoßendem Betriebe (z. B. bei Walzwerken) empfehlenswert. Bei ihnen ist  $E$  kleiner als bei Hanfseilen, daher ergeben sie ein erheblich größeres  $\mathfrak{B}$  (vgl. S. 264). Man wähle  $D = 20 d$  bis  $30 d$ ; zulässig sind noch Scheiben unter 1 m Durchmesser.

Die Kraftübertragung erfolgt durch Dehnungsspannung wie beim Riemenbetriebe; das dort Gesagte gilt also auch hier. Bei großen Seillängen sind Tragrollen anzuordnen. Der Achsenabstand kann wegen der Geschwindigkeit und großen Elastizität der Seile bis auf das 1,5fache der Scheibendurchmesser-Summe verkleinert werden.

Treibrollen erhalten Rillen nach Abb. 129 (S. 837), bei Laufkranen  $\beta \sim 15^\circ$ ; Leitrollen erhalten Rillen nach Abb. 133 (S. 839).

### Zusammenfassung der Versuche Kammerers mit Hanfseilen.

1. Die Vorspannung  $K_v$  kann beträchtlich unter den rechnungsmäßigen Wert sinken, ohne das Gleiten eintritt. Bei gleicher Gesamtspannung  $K_T$  kann dementsprechend die Nutzspannung bis zu einem Höchstwert von etwa  $0,8 K_T$  steigen, statt  $0,5 K_T$ , wie bei der üblichen Rechnung angenommen.

Dieser Vorteil kann indessen nur durch eine Spannvorrichtung ausgenutzt werden welche die Vorrichtung richtig ein- und nachzustellen erlaubt. Seiltriebe ohne Spannvorrichtung werden im allgemeinen immer mit zu hohen Vorspannungen arbeiten. Im Durchschnitt wird für Seiltriebe mit Spannvorrichtung eine Vorspannung von

$$K_v = 200 \text{ kg für 1 Rundseil von 50 mm Dmr.}$$

und für Seiltriebe ohne Spannvorrichtung eine Vorspannung von

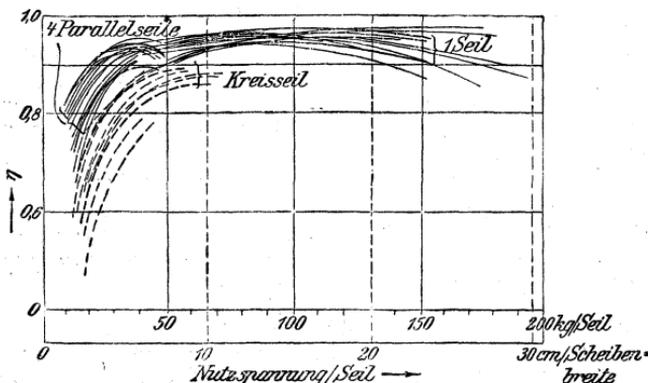
$$K_v = 400 \text{ kg für 1 Rundseil von 50 mm Dmr.}$$

genügen.

2. Die Gesamtspannung  $K_v + \frac{1}{2} K_n$  ruft nicht diejenige Dehnung hervor, die dem Dehnungskoeffizienten entsprechen würde; die Dehnung bleibt vielmehr stark hinter diesem Wert zurück, wenn die Seilgeschwindigkeit mehr als 20 m/sk beträgt, u. zw. sowohl bei geringer wie bei großer Belastung.

3. Der Wirkungsgrad  $\eta$  steigt in allen Fällen mit zunehmender Nutzspannung sehr rasch an. Bei Anwendung von nur einem Seil bleibt  $\eta$  bis zu

Abb. 134.



einem hohen Wert der Nutzspannung nahezu unveränderlich und fällt dann langsam ab. Bei Parallelschaltung von vier Seilen dagegen fällt der Wirkungsgrad unmittelbar nach Erreichung des Höchstwertes wieder merklich ab. Die Grenzen der Höchstwerte

liegen bei einem Seil zwischen  $\eta = 0,94$  bis  $0,96$ , u. zw. bei  $K_n = 80$  bis  $120$  kg; bei vier Seilen liegen sie zwischen  $\eta = 0,89$  bis  $0,94$  bei  $K_n = 35$  bis  $45$ ; bei dem Kreis-seiltrieb liegt  $\eta$  zwischen  $0,86$  und  $0,90$  bei  $K_n = 50$  bis  $60$  kg. In Abb. 134 sind die beobachteten Wirkungsgrade übereinander gezeichnet und die so erhaltenen Linienbündel durch Grenzlinien umhüllt. — Die gemessenen Werte von  $\eta$  gelten für die Verluste durch Schlupf, Steifigkeit und durch den Luftwiderstand der Seile selbst; nicht enthalten sind darin Lagerreibung und Luftwiderstand der Scheiben. Die Lagerreibung ist bei den Seiltrieben beträchtlich größer als bei den Riementrieben, weil Seile im Durchschnitt mit größerer Vorspannung aufgelegt werden als Riemen, damit sie glatten Lauf zeigen.

Ein Vergleich zwischen den Wirkungsgraden der Riemen und der Seile läßt sich nur von Fall zu Fall stellen. Leistung, Geschwindigkeit, Scheibendurchmesser, Achsenabstand, Übersetzung und Betriebseigentümlichkeiten werden in jedem einzelnen Fall berücksichtigt werden müssen.

Mit zunehmender Geschwindigkeit und mit abnehmendem Scheibendurchmesser nimmt bei Seiltrieben der Wirkungsgrad rasch ab. Für große Geschwindigkeiten und bei kleinen Scheibendurchmessern wird man daher wirtschaftlicher Riemen verwenden.

Spannvorrichtungen sind für die Wirtschaftlichkeit sowohl der Riemen als auch der Seile zweckmäßig, weil sie gestatten, mit geringster, d. h. günstigster Vorspannung zu arbeiten. Während aber bei Riemen sowohl der Spannschlitten als auch die Spannrolle wirtschaftlich arbeitet, trifft dies bei Seilen nur für den Spannschlitten zu.

Der Höchstwert des Wirkungsgrades steigt beim einfachen und beim Doppelriemen auf  $0,98$ , beim einseitigen Trieb auf  $0,97$ , bei Rundseilen in Parallelschaltung auf  $0,95$  und bei 4 Rundseilen in Kreisseilschaltung auf  $0,90$ , bei günstigster Vorspannung und Nutzspannung in allen Fällen. Aus dem Schaubild ist ersichtlich, daß diejenige Nutzspannung, bei welcher der Wirkungsgrad einen Höchstwert erreicht, bei Parallelseilen und beim Kreisseil wesentlich geringer ist als bei einem Seil.

Zu den gemessenen Verlusten kommt noch die Lagerreibung (im allgemeinen bei Rundseilen größer als bei Riemen und bei Trapezseilen größer als bei Rundseilen).

4. Der Reibungswert  $\mu$  ist bis zu  $\mu = 0,6$  wiederholt beobachtet worden, ohne daß Gleitschlupf eingetreten ist. Eine Ausnutzung dieser Beobachtung wird nur bei Seiltrieben, mit Spannschlitten ausgerüstet, möglich sein.

5. Der scheinbare Schlupf  $\sigma$  ist bei Seiltrieben verschwindend klein; man muß daher annehmen, daß der Dehnungswechsel sich nicht wie bei Riementrieben auf der Scheibe vollzieht, sondern im wesentlichen erst beim Ablauf von der Scheibe eintritt.

6. Die Geschwindigkeit  $v$  beeinflusst die Anlaufspannungen in dem Sinne, daß diese tatsächlich größer beobachtet werden, als die Rechnung erwarten läßt. Bei Geschwindigkeiten über  $20$  m/sk vermag der Dehnungswechsel dem Spannungswechsel nicht zu folgen; es treten kleinere Dehnungen ein, als Spannung und Dehnungskoeffizient sie bedingen würden. Infolgedessen kann die Gesamtspannung bei größeren Geschwindigkeiten größer gewählt werden als bei geringen, ohne daß schädliche Dehnungen zu befürchten sind.

7. Der Scheibendurchmesser bewirkt bei Anwendung von einem Seil, daß der Höchstwert des Wirkungsgrades bei größerem Durchmesser zwar derselbe ist wie bei kleinerem, daß er aber bei größerem Durchmesser schon bei geringerer Nutzspannung erreicht wird. Bei Verwendung von vier Seilen bewirkt die Vergrößerung des Scheibendurchmessers eine beträchtliche Erhöhung des Wirkungsgrades.

8. Eine Spannrolle bewirkt bei Seilen in Parallelschaltung beträchtliche Verminderung des Wirkungsgrades und erhöht die Reibungswerte nur im Verhältnis der umspannten Bogen, während bei Riementrieben mit Spannrolle der Wirkungsgrad auf voller Höhe bleibt. Es wäre daher die Anwendung von Spannrollen bei Seilen in Parallelschaltung unzweckmäßig.

9. Die Seilzahl beeinflusst den Wirkungsgrad in der Weise, daß bei einem Seil  $\eta$  seinen Höchstwert innerhalb sehr weiter Grenzen der Nutzspannung beibehält, während bei vier Seilen der Höchstwert bereits bei  $K_n = 40$  kg erreicht wird und dann ein merkliches Fallen eintritt. Dies läßt darauf schließen, daß die Belastung nicht ganz gleichmäßig verteilt ist, sondern daß das straffste Seil eine höhere Belastung erfährt. Diese Vermutung wird bestärkt durch die Versuche über die gegenseitige Wanderung der Seile.

10. Die Schaltung der Seile übt einen sehr großen Einfluß auf den Wirkungsgrad aus: bei dem Kreisseiltrieb liegt  $\eta$  durchweg beträchtlich tiefer als bei parallel geschalteten Seilen: Höchstwert der letzteren  $\eta = 0,95$  gegen  $0,90$  beim Kreisseil.

11. Die Art der Seile macht sich insofern geltend, als der Wirkungsgrad der Trapeuseile um ein geringes tiefer liegt als der der Rundseile, weil erstere eine beträchtlich höhere Vorspannung erhalten müssen, um schwankungsfrei zu laufen.

12. Die Größe der Uebersetzung und die Lage des ziehenden Trums haben beim Seittrieb keinen meßbaren Einfluß auf den Wirkungsgrad. Diese Bemerkung gilt natürlich wie alle anderen nur für den Bereich, in dessen Grenzen die Versuche lagen.

13. Die Nutzspannung  $K_n$  ist abhängig von der dem Seil zutraglichen Gesamtspannung  $K_T = K_v + \frac{1}{2} K_n$ , von der Seilgeschwindigkeit  $v$ , von dem Reibungswert  $\gamma$ , und von dem Scheibendurchmesser  $D$ .

Bei großer Seilgeschwindigkeit erreicht nach den Versuchsergebnissen die Dehnung des Seiles nicht den Wert, der rechnermäßig der Gesamtspannung  $K_v + \frac{1}{2} K_n$  entspricht. Man wird daher die Gesamtspannung für größere Geschwindigkeiten höher wählen dürfen als für geringere Geschwindigkeiten. In Abb. 135 ist die Gesamtspannung  $K_v + \frac{1}{2} K_n$  zunächst willkürlich für  $v = 0$  zu 100 kg und für  $v = 40$  m/sk zu 400 kg für Seile auf Scheiben von 1000 mm Dmr. gewählt worden. Von dieser Linie ist die Fliehspannung  $K_f$  in Abzug gebracht worden; die Ordinaten der neuen Linie stellen den Wert  $K_v + \frac{1}{2} K_n - K_f$ , d. h. die Auflaufspannung des ziehenden Trums dar.

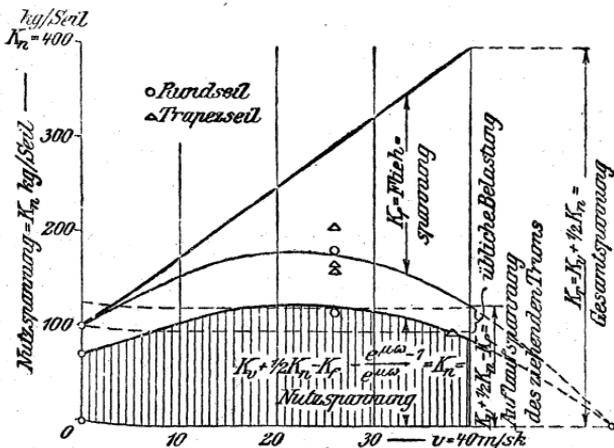
Der Reibungswert hat sich bei den Versuchen bis zu  $\mu = 0,6$  erwiesen; legt man einen Wert von  $\mu = 0,5$  und einen umspannten Bogen  $= 0,4$  des ganzen Umfanges zugrunde, so wird das Spannungsverhältnis  $e^{\mu\omega} = 3,5$ . Die zulässige Nutzspannung ergibt sich dann zu

$$K_n = [K_v + \frac{1}{2} K_n - K_f] \frac{3,5 - 1}{3,5} = [K_v + \frac{1}{2} K_n - K_f] 0,7,$$

d. h. die Ordinaten der vorher gezogenen Kurve sind im Verhältnis 0,7 : 1 zu teilen; die so entstandene neue Linie gibt die höchste zulässige Nutzspannung für jede Seilgeschwindigkeit an.

Die tatsächlich gemessenen Versuchswerte liegen zum Teil beträchtlich über der genannten Linie. Zu beachten ist, daß bei diesen Versuchen immer nur ein Seil auf den Scheiben lag.

Abb. 135.



Für größere Scheibendurchmesser können die zulässigen Werte für  $K_n$  im Verhältnis der gefundenen  $\mu$ -Werte erhöht werden, bei kleinerem Durchmesser ist  $K_n$  in der gleichen Weise niedriger zu halten.

14. Dauerversuche werden auch für Seile noch angestellt werden müssen, um die Grenzen für  $K_n$  für Seile verschiedenen Ursprunges festzustellen, da kurzzeitige

Versuche wohl über Wirkungsgrad und Reibungswert zuverlässigen Aufschluss geben. nicht aber über die bleibende Dehnung.

15. Eine Prüfung von Seilen kann in einwandfreier Weise ebenso wie bei Riemen nur in der Weise bewirkt werden, daß die Seile in ganzer Länge auf die Versuchsmaschine aufgelegt und einem Dauerversuch mit steigender Belastung unterzogen werden, bis die bleibende Dehnung so groß wird, daß ein Beharrungszustand nicht mehr eintritt.

**e. Treibketten.**

(Ketten, Gelenkketten usw. für Hebezeuge s. III. Maschinenteile für Hebemachines.)

**1. Zobelsche Treibkette** aus Stahl (vgl. Tafel u. Abb. 136 u. 137).

Diese Ketten lassen sich nur in gerader Gliederzahl ohne Ende verbinden. Die mit Scheiben versplinteten Ketten (nach Abb. 137) werden auf Wunsch mit hohlem Innenbolzen geliefert. Die kleinen Löcher in den Stahlhülsen dienen zur Schmierung.

Abb. 136.

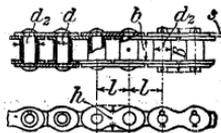
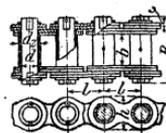


Abb. 137.



**Zobelsche Treib-Gelenkketten.**

$P$  bedeutet die durch die Kette übertragbare Kraft in kg,  $i$  die Plattenzahl und  $q$  das Gewicht der Kette in kg/m; alles andere enthält Abb. 136.

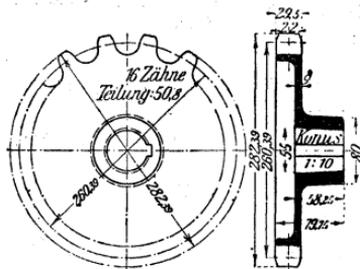
$P$ kg	$l$ mm	$i$	$s$ mm	$h$ mm	$d$ mm	$d_2$ mm	$b$ mm	$B$ mm	$q$ kg/m	Bemerkungen
100	20	2	2	14	6	10	14	30	1,6	} Vernietete Bolzen.
150	20	2	3	16	7,5	12	16	38	2,2	
200	25	2	3	21	9	14	18	40	2,5	
300	30	2	3,5	25	11	17	20	46	3,9	
400	35	2	4	27	12	18	22	50	4,2	
500	40	2	4	30	14	20	25	54	4,6	
750	45	2	5	35	16	22	30	64	6,7	
1000	50	2	6	38	18	26	35	72	9,0	
1500	55	4	4	40	20	28	45	97	13,0	
2000	60	4	5	46	24	32	50	113	14,0	
2500	65	4	5	53	28	36	55	120	18,0	
3000	70	4	5	60	32	40	60	125	19,5	
4000	80	6	4,5	65	34	44	70	146	27,2	
5000	90	6	4,5	75	36	48	80	156	33,0	

Die kleineren Ketten (bis  $l = 55$  mm) haben vernietete Bolzen und erhalten ein versplintetes Schlufsglied zum Verbinden der Kette ohne Ende. Kettenrad s. Abb. 138.

Das dargestellte Kettenrad wird (aus Stahlgufs hergestellt) von der Neuen Automobil-Gesellschaft in Ober-Schöneweide für ihre Kettenriebe an Personen- und Lastwagen benutzt. — Der Berechnung wird zugrunde gelegt entweder das Maximal-Drehmoment des Motors oder das beim Bremsen entstehende maximale Drehmoment der Treibräder, wobei der Reibungskoeffizient zwischen Radbereifung und Fahrdamm mit 0.5 angenommen werden kann. (Ebenso werden übrigens

die Stirn- und Kegelräder des Getriebes berechnet.) Als zulässig wird für Kette und Kettenrad  $\frac{1}{4}$  der aus dem Bremsen berechneten Bruchbelastung erachtet. Kettengeschwindigkeit bis 4 m/sk. (Nur bei Spezialrennwagen bis 6 m/sk.)

Abb. 138.



Allgemein wird für Kettenräder die Zähnezahl  $> 7$ , gewöhnlich 10 bis 30 genommen. — Für den Antrieb im Maschinenbau wird als größte Kettengeschwindigkeit in der Regel  $v = 3$  m/sk angegeben. Doch soll neuerdings mit gutem Erfolge  $v = 5$  bis 6 m/sk versucht sein.

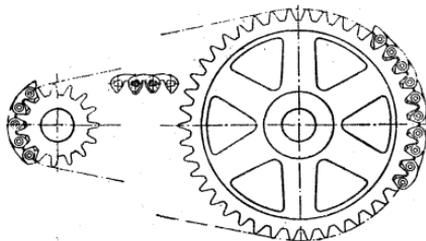
## 2. Stotzsche Kette. Die Treibketten der Elevatoren-Bauanstalt

A. Stotz in Stuttgart erstreben tunlichste Beschränkung des Flächendruckes in den Gelenken, die Glieder sind außerdem leicht zerlegbar und auswechselbar. Sie bestehen aus zähem, schmiedbarem Guß; Bolzen aus Stahl. Geschwindigkeit für leichtere Ketten bis 3,5, für stärkere bis 2,5 m/sk. Kommen die Ketten mit Säuren (Dämpfen) in Berührung, so werden sie verzinkt oder aus Phosphorbronze gefertigt. Es wird im übrigen auf die Preislisten der Firma verwiesen.\*)

## 3. Das Renoldsche geräuschlose Zahnketten-Getriebe (für elektrischen Antrieb von Pumpen, Werkzeugmaschinen, Ventilatoren usw.)

wird gebaut von der Spezialfabrik für Zahnräder von Fried. Stolzenberg & Co., Berlin-Reinickendorf. Zahnräder und Zahnkette (Abb. 139) arbeiten derart miteinander, dafs, ungeachtet der im Betriebe unvermeidlichen Streckung der Kettenglieder, die Berührung zwischen Kette und Radzahn dauernd erhalten bleibt. Ein stofsweises Abgleiten der Kette vom Zahn ist ausgeschlossen.

Abb. 139.



Dehnt sich das Kettenglied, so nimmt es zwischen den Zähnen nur eine etwas höhere Lage ein.

Kettengeschwindigkeit möglichst nicht höher als 6,5 m/sk. Zähnezahlen zwischen 15 und 90, so dafs das größte Uebersetzungsverhältnis 6:1 ist. Abstand der Wellen nicht über 3 bis 3,5 m und nicht kleiner als 1,5 vom Durchmesser des grossen Rades. Kette möglichst wagerecht. Die Räder führen die Kette entweder in der Mitte des Rades durch eine Rille, in welche die Kette mit Führungsgliedern

\*) Vgl. auch C. Bach, Masch.-Elemente, 10. Aufl. 1908 S. 706 u. f. u. Z. d. V. d. I. 1904 S. 1742 (Morsekette). — Gelenkketten und zerlegbare Treibketten dieser Art werden auch von Wilhelm Stöhr in Offenbach a. Main hergestellt (s. Preislisten der Firma).

eingreift, oder durch Seitenscheiben. Die Mittenföhrung wird bevorzugt.

Für Geschwindigkeiten von 1 bis 2 m stellt die Firma Stolzenberg neuerdings eine Renoldsche Blockkette her (s. Preisliste).

### D. Zapfen.

Ueber die Zapfenreibung s. S. 251 u. f. — Maßgebend für die Zapfenberechnung sind: 1. die Festigkeit und das gleichmäßige Aufliegen des Zapfens über die ganze Länge der Lagerschale, 2. die Sicherheit gegen zu große Reibung und gegen das Anfressen der Gleitflächen, 3. die Sicherheit gegen das Heißlaufen des Zapfens und Lagers, erzeugt durch den in Wärme umgesetzten Teil der Reibungsarbeit. Es bezeichne

- $P$  den größten Zapfendruck in kg,
- $d$  den Durchmesser und  $l$  die Länge des Zapfens in cm,
- $W$  das Widerstandsmoment des Zapfenquerschnittes in ccm,
- $k$  die zulässige Biegungsspannung des Stoffes in kg/qcm,
- $k$  den zulässigen Flächendruck in kg/qcm,
- $v$  die Umfangsgeschwindigkeit des Zapfens in m/sk,
- $\mu_1$  die Zapfenreibungszahl,\*)
- $n$  die Zahl der Umdrehungen in 1 Minute.

#### a. Tragzapfen.

##### 1. Zylindrischer Tragzapfen (Stirn- und Halszapfen).

**Gang der Berechnung.** Aus Gl. III (s. unten) wird  $l : d$  bestimmt, dann nach Gl. II  $d$  und  $l$ . Genügt das so erhaltene  $l$  der Bedingung nach Gl. IV, so werden die Werte von  $d$  und  $l$  beibehalten; ist das nicht der Fall, so ist  $l$  aus Gl. IV zu ermitteln und hiermit aus Gl. I der Wert von  $d$ .

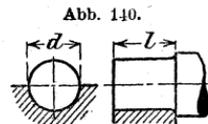


Abb. 140.

1.  $P$  wirkt bei diesen Zapfen winkelrecht zur Drehachse (s. Abb. 140). Die Rücksicht auf Festigkeit ergibt für den vollen Stirnzapfen:

$$P \cdot 0,5 l = W k_b \sim 0,1 d^3 k_b \quad (\text{vgl. S. 554}),$$

$$d = \sqrt[3]{\frac{5 P l}{k_b}} \quad \dots \dots \dots \text{I.}$$

und für den hohlzylindrischen Stirnzapfen, dessen äußerer Durchmesser  $d_2$  cm, dessen innerer  $d_1$  cm beträgt,

$$P \cdot 0,5 l = W k_b \sim 0,1 \frac{d_2^4 - d_1^4}{d_2} k_b \quad (\text{vgl. S. 554}).$$

Die Rücksicht auf die Größe des zulässigen Flächendruckes ergibt, wenn der Zapfen zur Hälfte vom Lager umschlossen ist,

$$P = k l d \quad \text{bzw.} \quad P = k l d_2 \quad \dots \dots \dots \text{II.}$$

\*) S. S. 251 u. f. — Für Stahlzapfen in Metallagern ist  $\mu_1$  im Mittel =  $1/16$ . — Vgl. auch die Versuche von Stribeck (Z. d. V. d. I. 1902 S. 1341 u. f.).

Aus den beiden Gleichungen für den vollen Zapfen folgt

$$\frac{l}{d} = \sqrt{\frac{0,2 kb}{k}} \dots \dots \dots \text{III.}$$

Häufig wird  $l : d$  für Kreuzkopfzapfen u. dgl. mit rund 3:2 angenommen\*) (s. S. 848), für rasch laufende Wellen).

Die Schulterhöhe des Zapfens sei

$$\frac{1}{16}d + 0,5 \text{ cm bis } \frac{1}{10}d + 0,5 \text{ cm.}$$

2. In vielen Fällen ist die Belastungsweise III auf S. 522 vorhanden, so daß bei Wahl der zulässigen **Biegungsspannung**  $k_b$  zugrunde zu legen ist für

Flußstahl	$k_b = 400$ bis 500 kg/qcm
Schmiedeeisen	" = 300 " 400 "
Stahlguß	" = 250 " 350 "
Gufseisen	" = 150 " 250 "

Wechselt die Beanspruchung nicht vollständig, so kann die Spannung  $k_b$  größer als diese Werte genommen werden.

Für die Wahl des **Flächendruckes**  $k$  sind außer dem Stoffe des Zapfens und der Lagerschale maßgebend die Vollkommenheit der Schmierung, die Stärke der Wärmeentziehung, die minutliche Umdrehungszahl  $n$  bzw. die Umfangsgeschwindigkeit  $v$  des Zapfens, die Güte der Ausführung usw. Der Flächendruck  $k$  kann für beständig sich in nachstellbaren Lagern drehende Zapfen unter gewöhnlichen Verhältnissen betragen:

bei gehärtetem Tiegelstahl auf gehärtetem Tiegelstahl	bis 150 kg/qcm
„ gehärtetem Tiegelstahl auf Bronze	90 „
„ ungehärtetem Tiegelstahl auf Bronze	60 „
„ Flußeisen, Schweifeseisen mit glatter, dichter Oberfläche auf Bronze	40 „
„ Schweifeseisen mit nicht ganz reiner Oberfläche, oder für Gufseisen auf Bronze	30 „
„ Schweifeseisen mit nicht ganz reiner Oberfläche auf Gufseisen	25 „
„ Flußeisen, Schweifeseisen auf Pockholz bei Wasser-schmierung	25 „

Behält  $P$  auch im Ruhezustande des Zapfens annähernd Größe und Richtung (z. B. durch stark belastete Wellen, schwere Räder usw.) so wähle man  $k$  kleiner als vorstehend angegeben.

Für Zapfen (oder Lager), die nur schwingen, kann man  $k$  erheblich höher nehmen. Für Zapfen von Seil-, Kettenrollen usw., die sich nur zeitweise drehen, und bei denen die Abnutzung entweder gering ist oder nicht ins Gewicht fällt, können die oben angegebener Werte  $k = 60$  bis herab auf 25 kg/qcm um das Doppelte bis Dreifache überschritten werden.

\*) Vrgl. Volk, Maschinenteile, Z. d. V. d. I. 1908 S. 490, Abb. 19.

Für die aus Tiegelstahl bestehenden und auf Bronze laufenden Kurbel- und Kreuzkopfpfzapfen normaler Dampfmaschinen wählt man  $k=60$  bis  $70$  bzw.  $75$  bis  $80$  kg/qcm; bei Lokomotiven findet man hierfür  $k=100$  bzw.  $150$  kg/qcm, bei Dampfmaschinen mit großer Umdrehungszahl  $k=40$  bzw.  $50$  kg/qcm. Bei den Schwungradwellenzapfen von Dampfmaschinen sei  $k=15$  bis  $16$  kg/qcm.

Für die Kurbelzapfen von Lochmaschinen und Scheren nimmt man  $k$  bis  $200$  kg/qcm und darüber.

3. Damit der Zapfen nicht heiß läuft, muß sein:

$$l \geq \frac{Pn}{w} \quad \text{oder} \quad n \leq w \frac{l}{P} \quad \dots \dots \dots \text{IV.}$$

Hierin ist  $P$  der mittlere Zapfendruck in kg und  $w$  eine Erfahrungszahl, die um so größer ausfällt, je kleiner die Reibung und je größer die Wärmeableitung ist. Es ist  $w = \frac{1500 A_s}{\mu}$ , wo  $A_s$  die Reibungsarbeit in mkg/sk f. l qcm der Zapfengrundfläche  $ld$ ,  $\mu$  die Reibungszahl bedeutet.

Für die Kurbelzapfen (s. o.) mit Stahl- oder Bronzelagern, bei denen beide Lagerschalen durch den Luftzug gleichmäßig abgekühlt werden, findet sich  $w$  bis  $90\,000$  (unter sehr günstigen Verhältnissen: kleinem  $l$  und  $k$ , Weißmetallern und vorzüglicher Schmierung auch  $w > 90\,000$ ). Für gewöhnlich sei  $w < 90\,000$ .

Für die Zapfen der Schwungrad- oder Kurbelwellen (Wärmeabfuhr nur durch die untere Lagerschale, der kühlende Luftzug fehlt) geht man (bei Weißmetall) bis  $w = 40\,000$  und darüber; bei Wasserkühlung noch wesentlich höher.

Bei den Achsen der Eisenbahn-Personenwagen findet sich  $w$  bis  $80\,000$ , bei den Laufachsen dreiachsiger Lokomotiven  $w$  bis  $150\,000$ , bei äußeren Lokomotivkurbelzapfen  $w$  bis  $250\,000$ ; hier ist jedoch die zugelassene Abnutzung größer als bei Betriebsdampfmaschinen, ferner auch die Wärmeentziehung durch den gesteigerten Luftzug größer.

4. Für die Berechnung der Zapfen empfiehlt sich nach Kammerer auch folgendes Verfahren, bei dem die Größe der Reibungsleistung zugrunde gelegt ist. Mit

$$k \text{ kg qcm} = \frac{P}{ld}$$

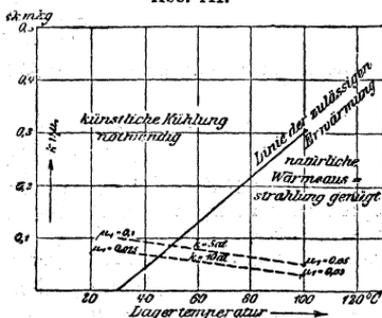
und

$$v \text{ m/sk} = \frac{\pi dn}{60}$$

ist  $k v \mu_1 = \rho$  skmkg/qcm die Reibungsleistung in m/kg oder  $\frac{1}{424} \rho$  WE/qcm in Wärmeeinheiten in l sk.

Erzeugt die Reibung eine über der Linie der zulässigen Erwärmung (vgl. Abb. 141) liegende Lagertemperatur, so muß für künstliche Wärme-

Abb. 141.



abfuhr durch Wasser oder Oel gesorgt werden. 100°C ist als obere Grenze der Lagertemperatur anzusehen mit Rücksicht auf die Erhaltung des Lagermetalls und des Schmiermittels.

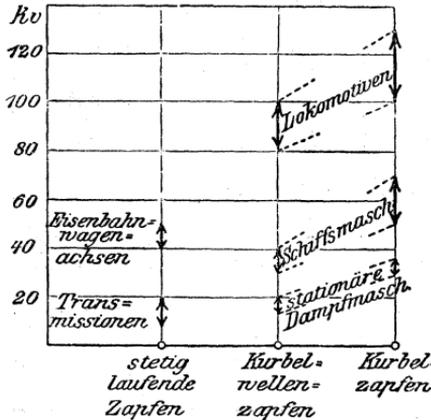
Bei hohen Umlaufzahlen müssen die Zapfen länger genommen werden:

$$\begin{array}{ll} n < 100 & l \sim 1,5d \\ n < 200 & l \sim 2d \\ n > 200 & l \sim 3 \text{ bis } 4d. *) \end{array}$$

Der Gefahr der damit wachsenden Durchbiegung wegen darf man mit dieser Verlängerung aber nicht zu weit gehen, sondern es hat dann künstliche Kühlung einzutreten, die man sonst im allgemeinen gern vermeidet, weil sie versagen kann.

Da  $\mu_1$  für gewisse Fälle konstant bleibt, so kann man nach Kammerer, wie Abb. 142 zeigt, der Zapfenberechnung auch den Wert  $kv$  zugrunde legen.

Abb. 142.



## 2. Kugelförmiger Tragzapfen.

Meist als Kurbelzapfen verwendet. Bezeichnet für diesen Fall  $d_1$  den Kugeldurchmesser in cm, so gilt, wenn Tiegelstahl auf Bronze gleitet,

$$P = 40 d_1^2$$

und mit Rücksicht auf das Heißlaufen unter Voraussetzung genauer Kugelform (vgl. Gleichung IV, S. 847):

$$d_1 \geq \frac{Pn}{30000}$$

Der Durchmesser am Halse des Kugelzapfens sei etwa  $\frac{5}{8} d_1$ .

## b. Spurzapfen (Stützzapfen).

### 1. Ebener Spurzapfen.

Bezeichnet  $P$  den in der Richtung der Drehachse wirksamen größten Zapfendruck in kg,  $d$  den Durchmesser des Zapfens in cm und  $k$  den zulässigen Flächendruck in kg/qcm, so gilt bei Vernachlässigung der Schmiernuten, welche die Auflagerfläche um 10 bis 20 vH verkleinern,

$$P = \frac{1}{4} \pi d^2 k \sim 0,8 d^2 k.$$

$k$  ist hierin gemäß S. 846 zu wählen; dann ergibt sich für gehärteten Tiegelstahl auf Bronze  $P \leq 70 d^2$ . Für Tiegelstahlzapfen auf dichtem, hartem Gußeisen (Turbinezapfen) sei  $k$  etwa wie für Bronze.

\*) Vgl. Niethammer, Elektrotechnik und Maschinenbau 1906 S. 739, Z. d. V. d. I. 1906 S. 218 u. f.

Mit Rücksicht auf das Heislaufen sei

$$\bar{d} \geq \frac{Pn}{w} \quad \text{oder} \quad n \geq w \frac{\bar{d}}{P},$$

worin  $n$  die minutliche Umdrehungszahl des Zapfens,  $P$  der mittlere Zapfendruck in kg und  $w$  eine Erfahrungszahl ist, die bei Triebwerken nicht ohne Not größer als 40 000 gewählt wird; dabei darf keine Reibung an der Mantelfläche des Spurzapfens auftreten. Bei Turbinenzapfen von vorzüglicher Ausführung und mit sorgfältiger Schmiering findet sich  $w$  bis 125 600.

## 2. Ringförmiger Spurzapfen.

Ist  $\bar{d}_2$  der äußere und  $\bar{d}_1$  der innere Zapfendurchmesser in cm, so gilt hier

$$P = \frac{1}{4} \pi (\bar{d}_2^2 - \bar{d}_1^2) k \sim 0,8 (\bar{d}_2^2 - \bar{d}_1^2) k;$$

$$\bar{d}_2 - \bar{d}_1 \geq \frac{Pn}{w}.$$

Für  $k$  und  $w$  gilt das vorstehend für ebene Spurzapfen Bemerkte.

## 3. Kammzapfen (Abb. 143).

Mit  $\bar{d}_m = \frac{1}{2} (\bar{d}_1 + \bar{d}_2)$  und  $b = \frac{1}{2} (\bar{d}_2 - \bar{d}_1) \sim 0,1 \bar{d}_1$  bis  $0,15 \bar{d}_1$  ist, wenn  $z$  die Anzahl der tragenden Ringe, für den Kammzapfen:

$$P = \pi \bar{d}_m b z k, \quad \text{also} \quad b z = \frac{P}{\pi k \bar{d}_m},$$

und

$$b z \geq \frac{Pn}{w}, \quad \text{worin (bei Luftkühlung) } w = 20\,000.$$

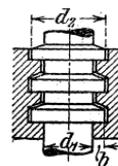
Bei Kammzapfen hält es schwer, für größere Zapfendrucke die gleichmäſsige Berührung sämtlicher Ringflächen zu sichern; daher ist es ratsam,  $k$  und  $w$  mit wachsendem  $z$  höchstens 0,5 bis 0,3mal so gros zu wählen wie für ebene Spurzapfen. Die Wärmeableitung durch den Körper des Kammzapfenlagers nach aufsen ist verhltnismig schwierig. Deshalb nimmt man z. B. bei Wasserturbinen vielfach lieber ebene Spur- und Ringzapfen von beträchtlicher Größe, ehe man sich zu einem Kammzapfen entschließt.

Höhe eines Ringes =  $b$  bis  $1,5 b$ .

Neuerdings bei Hebezeugen mit Schneckenantrieb\*) vielfach verwendet, da Umkehr der Zapfendruckrichtung zulässig; dann sind die Kämme meist nicht trapezförmig, wie in Abb. 143, sondern rechteckig im Querschnitt und liegen mit beiden Seiten eingeschliffen an.

Bei senkrechten Wellen (Turbinen) ist meist unter dem Kammzapfen ein Halslager angeordnet. — Bei wagerechter Welle nimmt der Kammzapfen nur den Achschub auf, so das auch hier Traglager angeordnet sind.

Abb. 143.



\*) Vrgl. Frölich, Maschinelle Einrichtungen für das Eisenhüttenwesen. Z. d. V. d. I. 1906 S. 1856.

Kammzapfen der Betriebswellen von Schraubenschiffen s. Abschn. Schiffbau.

### c. Wagenschneiden.

Aus glashartem, nicht (oder nur strohgelb) angelassenem Stahl. Schneidenwinkel  $\alpha = 120^\circ$  (bei hohem Drucke und kleinem Ausschlage) bis  $\alpha = 45^\circ$  (bei feineren Wagen); im ersten Falle ist das eigentliche Lager eine Ebene, im zweiten eine Kerbe (Winkelfläche), deren Ebenen einen Winkel von etwa  $105^\circ$  bilden.

Zulässiger Druck für 1 mm Schneidenlänge keinesfalls über 200 kg; besser ist es, nicht über 100 kg zu gehen. Bei feinen Wagen sinkt der Druck bis auf 0,2 kg/mm und darunter. Mit dem Drucke wächst die erforderliche Abrundung der Schneidenkante, wodurch die Empfindlichkeit der Wage abnimmt.

Drücke bis zu 300 kg für 1 mm Schneidenlänge, wie sie sich bei den Schneiden großer Festigkeitsmaschinen (bei einer Abrundung der Kante mit etwa 0,75 mm Durchmesser) finden, sind nicht zu empfehlen.

## E. Achsen und Wellen.

Es bedeutet

$M_b$  das Biegemoment und  $M_d$  das Drehmoment in cmkg,

$k_b$  die zulässige Biegungsspannung in kg/qcm,

$k_d$  die zulässige Drehungsspannung in kg/qcm,

$d$  den Durchmesser einer vollen Welle (Achse) in cm,

$d_1$  den inneren und  $d_2$  den äußeren Durchmesser einer hohlen Welle (Achse) in cm, wobei  $d_m = \frac{1}{2}(d_2 + d_1)$  und  $s = \frac{1}{2}(d_2 - d_1)$ ,

$W$  das Widerstandsmoment des Achsenquerschnittes in  $\text{cm}^3$  (s. S. 552 bis 555),

$N$  die zu übertragende Leistung in PS,

$n$  die Zahl der minutlichen Umdrehungen der Achse (Welle).

### a. Achsen.

Die hier allein in Rechnung zu ziehende **Biegebbeanspruchung** ergibt für die vollen Achsen ( $W$  s. S. 556):

$$M_b = W k_b \sim 0,1 d^3 k_b,$$

für die Hohlachsen ( $W$  s. S. 557 u. 558):

$$M_b = W k_b \sim 0,1 \frac{d_2^4 - d_1^4}{d_2} k_b,$$

und wenn deren Wandstärke  $s$  gering ist (vgl. S. 556),

$$M_b \sim 0,8 d_m^2 s k_b.$$

In den meisten Fällen wechselt die Krafrichtung vollständig, so dafs für die zulässige **Biegungsspannung**  $k_b$  gemäfs III in der Tafel S. 523 etwa zu wählen ist für:

Schweißseisen	$\sim 300$ kg/qcm	Stahlgufs	$\sim 250-300$ kg/qcm
Flufseisen	$\sim 300-400$ "	Gufseisen	$\sim 130-250$ "
Flufsstahl	$\sim 400-600$ "	Eichenholz	$\sim 60$ "

Bei Gufseisen ist die Bemerkung <sup>3)</sup> auf S. 523 zu beachten.

Wechselt die Krafrichtung nicht vollständig oder überhaupt nicht so sind die Werte für  $k_b$  gemäfs S. 522 höher zu wählen.

## b. Wellen.

## 1. Drehungs- (und Biegungs-)beanspruchung maßgebend.

Ueber die Berechnung auf **Biegung** und **Drehung** ist zu vergleichen S. 605 u. f.

Bezeichnungen s. o. — Bei Beanspruchung auf Drehung allein ist (vgl. S. 588) für volle Wellen

$$M_d = 2 W k_d = \frac{\pi}{16} d^3 k_d \sim 0,2 d^3 k_d,$$

für hohle Wellen

$$M_d = 2 W k_d \sim 0,2 \frac{d_2^4 - d_1^4}{d_2} k_d \sim 1,6 d_m^2 s k_d.$$

Für die Wahl der zulässigen **Drehungsspannung**  $k_d$  aus der Tafel S. 523 (nebst Bemerkungen <sup>1)</sup> und <sup>2)</sup>) gilt folgendes:

I. In den Fällen, in denen das Drehmoment  $M_d$  unveränderlich und stoßfrei ist, sind für  $k_d$  die Werte I zu nehmen.

II. Schwankt  $M_d$  ohne Stoß abwechselnd (oder wenigstens oft) zwischen null und seinem größten Betrage, so wähle man für  $k_d$  die Werte II.

III. Wechselt das Drehmoment ohne Stoß abwechselnd (oder wenigstens oft) zwischen einem größten  $+M_d$  und einem gleichen oder doch nahezu gleichgroßen  $-M_d$ , so sind für  $k_d$  die Werte III zu nehmen.

Stoßwirkungen sind besonders zu berücksichtigen. (Vgl. S. 522.)

Die Belastungsweise I kommt bei den üblichen Wellen kaum vor. Am nächsten stehen z. B. die Wellen von **Turbinen** und **Wasserrädern**, falls die Arbeitsmaschinen ihren Kraftbedarf nicht stark verändern; bei derartigen Wellen liegt  $k_d$  zwischen den Werten I und II. Für **eichene** Wasserradwellen sei  $k_d = 50$  bis 60 kg/qcm.

Die meisten Wellen entsprechen einer Belastungsweise zwischen II und III.

Für **Gufseisen** ist  $k_d$  [unter Beachtung der Bemerkung <sup>4)</sup> auf S. 524] bei der Belastungsweise I:  $k_d = 240$  bis 300 kg/qcm, bei II:  $k_d = 160$  bis 200 kg/qcm und bei III (wobei indessen Gufseisen besser ganz zu vermeiden ist):  $k_d = 80$  bis 100 kg/qcm.

Nach S. 221 ist das drehende Moment

$$M_d = 71\,620 \frac{N}{n} \text{ cmkg};$$

mithin ergibt sich der zur Uebertragung von  $N$  PS bei  $n$  Umdrehungen i. d. Minute erforderliche Wellendurchmesser (in cm)

$$d \sim \sqrt[3]{\frac{360\,000}{k_d} \frac{N}{n}}.$$

Um für **Triebwerkwellen** aus gewöhnlichem Walzeisen auch dem erfahrungsmäßig gleichzeitig mit  $M_d$  auftretenden  $M_b$  (durch Gewicht, Raddruck, Seilzug usw.) Rechnung zu tragen, wähle man in vorstehender Formel  $k_d = 120$  kg/qcm, so daß

$$d = \sqrt[3]{3000 \frac{N}{n}} = 14,42 \sqrt[3]{\frac{N}{n}}, \text{ bzw. } M_d = 24 d^3 \text{ wird [s. f. Tafel].}$$

**Leistung normaler Triebwerkwellen.**

$d$	$M_d$	$\frac{N}{n}$	$d$	$M_d$	$\frac{N}{n}$	$d$	$M_d$	$\frac{N}{n}$	$d$	$M_d$	$\frac{N}{n}$
cm	cmkg	$n$	cm	cmkg	$n$	cm	cmkg	$n$	cm	cmkg	$n$
3,0	648	0,009	6,0	5184	0,072	9,0	17496	0,243	14	65856	0,915
3,5	1029	0,014	6,5	6591	0,092	9,5	20577	0,286	15	81000	1,125
4,0	1536	0,021	7,0	8232	0,114	10,0	24000	0,333	16	98304	1,365
4,5	2187	0,030	7,5	10125	0,141	11,0	31944	0,444	17	117912	1,638
5,0	3000	0,042	8,0	12288	0,171	12,0	41472	0,576	18	139968	1,944
5,5	3993	0,055	8,5	14739	0,205	13,0	52728	0,732	20	192000	2,666

**Durchmesser  $d$  normaler Triebwerkwellen in mm.**

N PS	Minutliche Umlaufzahl = $n$														
	40	60	80	100	120	140	160	180	200	225	250	275	300	350	400
1	50	45	45	40	40	35	35	35	35	35	35	30	30	30	30
2	60	55	50	50	45	45	40	40	40	40	40	35	35	35	35
3	65	60	55	50	50	50	45	45	45	45	40	40	40	40	40
4	70	65	60	55	55	50	50	50	50	50	45	45	45	40	40
5	75	65	60	60	55	55	55	50	50	50	50	45	45	45	45
6	75	70	65	60	60	55	55	55	50	50	50	50	50	45	45
8	85	75	70	65	65	60	60	55	55	55	55	50	50	50	50
10	85	80	75	70	65	65	60	60	60	60	55	55	55	50	50
12	90	85	75	75	70	65	65	65	60	60	60	55	55	55	50
14	95	85	80	75	75	70	70	65	65	60	60	60	60	55	55
15	95	85	80	75	75	70	70	65	65	65	60	60	60	55	55
16	100	90	85	80	75	70	70	70	65	65	65	60	60	60	55
18	100	90	85	80	75	75	70	70	70	65	65	65	60	60	60
20	105	95	85	85	80	75	75	70	70	70	65	65	65	60	60
25	110	100	90	85	85	80	80	75	75	70	70	70	65	65	60
30	115	105	95	90	85	85	80	80	75	75	70	70	70	65	65
35	120	105	100	95	90	85	85	80	80	80	75	75	75	70	70
40	120	110	105	100	95	90	85	85	80	80	80	75	75	70	70
45	125	115	105	100	95	95	90	85	85	85	80	80	75	75	70
50	130	115	110	105	100	95	90	90	85	85	85	80	80	75	75
55	130	120	110	105	100	95	95	90	90	85	85	85	80	80	75
60	135	120	115	110	105	100	95	95	90	90	85	85	85	80	75
65	140	125	115	110	105	100	100	95	95	90	90	85	85	80	80
70	140	125	120	110	105	105	100	95	95	90	90	90	85	85	80
75	145	130	120	115	110	105	100	100	95	95	90	90	85	85	80
80	145	130	120	115	110	105	105	100	100	95	95	90	90	85	85
85	145	135	125	120	115	110	105	100	100	95	95	90	90	85	85
90	150	135	125	120	115	110	105	105	100	100	95	95	90	90	85
95	150	135	130	120	115	110	110	105	100	100	95	95	90	90	85
100	155	140	130	120	115	115	110	105	105	100	100	95	95	90	85

**Entfernung der Lager bei Triebwerkwellen** (in cm)  $l \geq 100 \sqrt{d}$ , wobei freie Auflagerung der Enden vorausgesetzt ist. Danach wird für

$$\frac{d}{l} = \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c} 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13,5 & 15 & \text{cm} \\ \hline 170 & 200 & 220 & 240 & 260 & 280 & 300 & 320 & 330 & 350 & 370 & 390 & \text{cm} \end{array}$$

Um die Wellen durch nachträgliches Aufsetzen von Riemenscheiben usw. später in verstärktem Mafse belasten zu können, empfiehlt sich  $l \geq 110 \sqrt{d}$ , woraus für

$$\frac{d}{l} = \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c} 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13,5 & 15 & \text{cm} \\ \hline 160 & 175 & 190 & 200 & 210 & 220 & 230 & 240 & 245 & 250 & 260 & 270 & \text{cm} \end{array}$$

Die vorstehenden Zahlen geben nur einen Anhalt. In Wirklichkeit bestimmen oft örtliche Verhältnisse (z. B. Stellung der Arbeitsmaschinen, Abmessungen der Gebäudeteile, wie Säulen-, Balken- und Trägerabstände usw.) die Lagerentfernungen.

## 2. Formänderung bei der Verdrehung mafsgebend.

Ueber den **Verdrehungswinkel**  $\psi \geq l \theta$  s. S. 590 u. f. Vielfach wird empfohlen, um die durch  $M_d$  bewirkte gesamte Formänderung der Welle gering zu halten,  $\psi \leq \frac{1}{4}^\circ$  f. 1 m zu machen; mit  $\psi = \frac{1}{4}^\circ$  ergibt sich (bei  $G = 800\,000$  i. M.)

$$d = 12 \sqrt[4]{\frac{N}{n}} = 0,734 \sqrt[4]{M_d} \quad \text{oder} \quad M_d = 3,454 d^4.$$

Hieraus ergibt sich folgende Tafel:

$d$ cm	$M_d$ cmkg	$\frac{N}{n}$									
3,0	270	0,0039	6,5	6166	0,0861	10	34535	0,4822	17	288482	4,0273
3,5	516	0,0072	7,0	8294	0,1158	11	50571	0,7061	18	362587	5,0625
4,0	881	0,0123	7,5	10929	0,1526	12	71620	1,0000	19	450129	6,2847
4,5	1418	0,0198	8,0	14145	0,1975	13	98649	1,3774	20	552640	7,7160
5,0	2156	0,0301	8,5	18027	0,2517	14	132683	1,8526	21	671737	9,4789
5,5	3158	0,0441	9,0	22661	0,3164	15	174853	2,4414			
6,0	4476	0,0625	9,5	28132	0,3928	16	226355	3,1605			

Für Wellen, die grofse Drehmomente zu übertragen haben, liefern die vorstehenden Gleichungen, wie die Tafel zeigt, für  $d$  zu geringe Werte.

Die Gröfse der Beanspruchung gemäfs 1 ist daher stets zu prüfen.

## 3. Biegungs- und Drehungsbeanspruchung mafsgebend.

Bei Wellen, auf denen schwere Räder sitzen, oder die sonst erheblich auf Biegung beansprucht werden, wie z. B. die Wellen der Kraftmaschinen, erste Antriebswellen (Hauptwellen), ist neben  $M_d$  auch das Biegemoment  $M_b$  zu berücksichtigen, d. h. sie sind nach S. 604 auf zusammengesetzte Festigkeit zu berechnen. Für  $k_b$  gilt hierbei das auf S. 850 unter **a.** und für  $k_d$  das unter **b.** III. Gesagte.

Die höchste zulässige **Durchbiegung** einer Welle (zwischen zwei Lagern) sei  $\frac{1}{3}$  mm auf 1 m Wellenlänge. Dabei ist stets noch zu prüfen, ob die Länge der Zapfen selbsttätig sich einstellende Lager-

schalen verlangt oder nicht. Kupplungen, Scheiben, Räder usw. bringe man möglichst dicht bei den Lagern an.

#### 4. Konstruktion der Achsen und Wellen.

Als **Umlaufzahlen** in der Minute sind etwa zu wählen  $n = \text{Uml./min}$  für:

Hauptwellen und Wellen zum Betriebe schwerer Metallbearbeitungsmaschinen . . . . .	100—150
Leichte Metallbearbeitungsmaschinen . . . . .	150—250
Nebenwellenleitungen . . . . .	200—300
Zum Betrieb von Holzbearbeitungsmaschinen . . . . .	250—300
	bis 400
Zum Betrieb von Spinnereimaschinen . . . . .	300—400

Auf die **Ausdehnung durch die Wärme** (vgl. S. 391) ist bei langen Wellensträngen stets Rücksicht zu nehmen.

Jeder Wellenstrang muß gegen seitliches Verschieben gesichert werden, wobei die Wärmeausdehnung zu beachten ist. Da Eindrehungen der Welle vermieden werden müssen, erfolgt die Festlegung meist durch zwei **Stellringe**, die (geteilt [Abb. 144] oder ungeteilt [Abb. 145]) zu beiden Seiten eines Lagers oder auch zwischen zwei benachbarten Lagern angebracht werden.

Auf der Hauptwelle bringe man die Stellringe möglichst am vordersten Lager an. Für  $d = 3$  bis 15 cm ist die Breite eines Stellringes = 3,5 bis 5,5 cm und seine Dicke = 2 bis 3,5 cm. Eine oder zwei gehärtete Stahlschrauben mit versenkten Köpfen dienen zur Befestigung der Ringe. Bei den Lagern des Eisenwerkes Wülfel, Hannover-Wülfel, und der B.-A. M.-A.-G., Berlin u. Dessau, die einen zwangsläufig mit der Welle verbundenen Oelring haben, der in der Mitte des Lagers liegt, genügt dieser zur Festlegung der Welle. Gegenüber den üblichen Stellringen hat dieser Oelring den Vorteil, daß seine Seitenflächen gut geschmiert sind.

Der geeignetste **Stoff** für (Achsen und) Wellen ist (außer Bronze, Deltametall u. a. Legierungen für Sonderzwecke) Flußeisen und Tiegelstahl (zäher Flußstahl); scharfe Eindrehungen und plötzliche Uebergänge sind unzulässig. Geschmiedete, gewalzte (Achsen und) Wellen meist mit vollem Querschnitt. Hohlwellen sind zur Gewichtsverminderung, zur Prüfung des Stoffes, zur Schmierung oder zur Kühlung hohl gebohrt; Wellen aus geschweiften oder nahtfrei gewalzten Rohren oder aus genieteten Hohlzylindern sind Ausnahmen. — Gußeisen ist nur als Hohlguß (Kreisringquerschnitt), keinesfalls mit  $\dagger$ -Querschnitt zu verwenden. — Holz kommt aufer im Mühlenbau meist nur noch bei Wasserrädern vor (s. S. 851).

**Wellenlängen.** Bei  $d = 3$  bis 5 cm wähle man die Längen  $L$  der Wellenstücke zwischen 4 und 6 m, bei größerem Durchmesser wegen des Eisenbahnversandes und der Aufbringung  $L \geq 7$  m. Für  $L > 7$  m und  $L < 2$  m erhöhen sich die Einheitspreise.

Abb. 144.

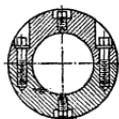
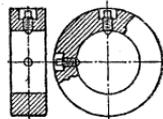


Abb. 145.



Die sogen. **komprimierten** (blanken) Wellen aus sehr weichem Martinstahl haben gegenüber den abgedrehten oder rund gewalzten Wellen den Vorzug gleichförmigeren Durchmessers (auf  $\frac{1}{20}$  mm genau) und höherer Festigkeit, sind daher dünner, leichter und billiger. Nach Versuchen von C. Bach ziehen sie sich jedoch beim Einfräsen von Nuten stärker krumm als gewöhnliche Wellen.

Die komprimierten Wellen von Gebr. Reimbold in Kalk bei Cöln (aus weichem, schweißbarem [Martin-] Stahl von  $K_z = 5500$  kg/qcm Festigkeit) sind für  $d = 1,0$  bis  $10,0$  cm (mit Zwischenstufen von  $1$  mm bis  $d = 5,2$  cm,  $3$  bis  $5$  mm bis  $d = 10,0$  cm) bis zu  $6$  und  $6,5$  m Länge erhältlich. Krummziehen beim Einfräsen von Nuten nur gering, die härtesten Stellen liegen nicht an der Oberfläche, sondern etwa auf halbem Halbmesser.

Ueber die Berechnung von **Kurbelwellen** vgl. Abschn. Kurbeltrieb.

Ueber Berechnung von **Dampfturbinenwellen** unter Zugrundelegung der kritischen Umlaufzahl vgl. Dr. A. Stodola, Die Dampfturbinen, 3. Aufl. Berlin 1905. S. 188 u. f.

**Biegsame Wellen**, aus Stahldrahtschrauben gefertigt, zum Antriebe transportabler Arbeitsmaschinen, Hebezeuge usw. Größter Durchmesser  $d = 100$  mm; kleinster  $d = 5$  mm. Der zulässige Krümmungshalbmesser, in dem die Wellen normal arbeiten können, ist  $6$  bis  $7d$ . Zum Schutze und zur bequemen Handhabung mit einem Metallschlauche, in feuchten Räumen noch mit einem Ledermantel umgeben. — Bei Bestellung ist die Drehrichtung anzugeben.

### Biegsame Wellen\*)

der Deutschen Fabrik biegsamer Wellen, A. Otto & Co. in Berlin N.

Tabelle über die Krafftleistung.

Leistung in PS	Umdrehung in 1 min				
	200	400	800	1200	2000
	Durchmesser der Wellen in mm				
$\frac{1}{10}$	15	12,5	10	10	8
$\frac{1}{4}$	25	25	15	15	10
$\frac{1}{2}$	30	30	20	20	12,5
1	40	35	30	25	15
2	50	45	35	30	20
3	60	55	45	35	30
4		60	45	40	35
5		65	50	40	35
6		70	55	45	40
8			60	50	40
10			65	55	45
12			70	60	50

\*) Werden u. a. auch von Felten & Guilleaume in Mülheim (Rhein) geliefert.

## F. Kupplungen.

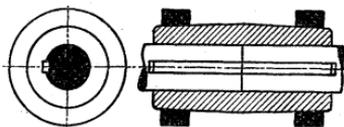
Um längere Wellenstränge herzustellen, sind die einzelnen Wellen aneinander zu kuppeln, u. zw. im allgemeinen derart, daß ihre geometrischen Achsen zusammenfallen (Ausnahme s. unter **b. 2** und **3**, S. 859 u. 860). Die elastischen Kupplungen S. 860 u. f. gestatten geringe Abweichungen von dieser Regel.

### a. Feste Kupplungen.

#### 1. Hülsenkupplungen.

Zwei an ihrem äußeren Umfang als Doppelkegel ausgebildete gußeiserne Schalen, die durch zwei entsprechend kegelförmig gebohrte, schmiedeiserne Ringe zusammengetrieben werden (s. Abb. 146), bilden eine Hülse, die sich fest um die Wellenenden drückt; Nutenkeilsicherung. Leichtes Aufbringen, keine vorstehenden Teile. Soll ein Abschnitt der Wellenleitung auf längere Zeit abgekuppelt werden, so ist die Kupplung leicht lösbar und erspart die teuren Ausrückkupplungen. Die Durchmesser  $d$  der Wellenenden müssen möglichst genau übereinstimmen.

Abb. 146.



Dicke der Schalenwand  $= 0,4 d + 1$  cm, wovon die Tiefe der Keilnut abgeht; Ansteigung außen  $= \frac{1}{25}$  bis  $\frac{1}{20}$ ; Hülsenlänge  $= 3 d + 2$  cm bis  $4 d$ ; Querschnitt eines Ringes  $= \frac{1}{6} d^2$  bis  $\frac{1}{4} d^2$ .

Statt der Verbindung der beiden Hülsenhälften durch Ringe wird auch eine solche (namentlich für stärkere Wellen) durch Schrauben ausgeführt, bis zum Wellendurchmesser von 200 mm. Die Schraubenlöcher liegen längs der Bohrung zu je 2 bis 5 auf jeder Seite; Kopf und Mutter sind eingelassen (sog. **Schalenkupplung**, s. Abb. 147).

Abb. 147.

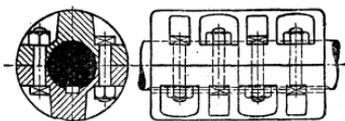


Abb. 148.



Das Eisenwerk Wülfel und die B.-A. M.-A.-G. liefern diese Schalenkupplungen umgeben von einem Stahlblechmantel, so daß sie am äußeren Umfang völlig glatt sind.

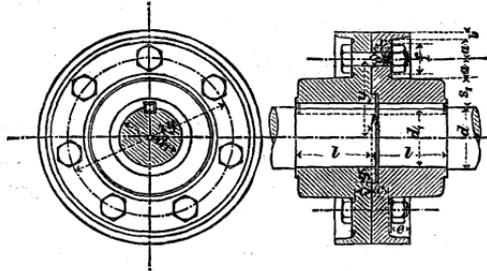
Kupplungen mit Schraubenverbindung und nur einseitig aufgeschnittener, etwas federnder Hülse (Abb. 148), liefert die Deutsche Maschinenfabrik-A.-G. Werk Bechem & Keetman zu Duisburg. Die federnde Hülse wird (ähnlich wie bei der Schalenkupplung, aber einseitig) durch meist 4 Schrauben zusammengezogen.

## 2. Scheibenkupplung (Abb. 149).

Sie ist nur für stärkere Wellen (mit  $d \geq 10$  cm) anzuwenden. Die gleichachsige Verbindung beider Wellen wird am besten durch Aufziehen jeder Kupplungshälfte mittels der Wasserdruckpresse und durch nachfolgendes Abdrehen beider Hälften erreicht.

Nachteile: Alle Lager müssen offen sein; Räder und Scheiben, die auf den Wellen zu befestigen sind, müssen geteilt hergestellt werden. Eine Einzelwelle kann aus dem Stränge erst nach Verschiebung um die Ansatzhöhe  $h$  (s. Abb. 149) herausgenommen werden.

Abb. 149.



Scheibensitz-Durchmesser  $d_1 = d$ ; oder  $d_1 = d - 0,2$  cm bis  $d - 0,4$  cm. Wandstärke  $s_1 = 0,4 d + 1,0$  cm. Nabenlänge  $l \geq 1,25 d$  für warm oder kalt (mit der Presse) aufgezoogene Scheiben,  $l \geq 1,5 d$  für aufgekeilte Scheiben. Die Stärke der **Schrauben** kann gewählt werden etwa nach:

$$\delta = \frac{1}{8} d + 1,0 \text{ cm bis } \frac{1}{8} d + 1,5 \text{ cm.}$$

Die Anzahl der Schrauben  $z$  (meist in gerader Zahl) wird berechnet aus der Bedingung, daß die durch das Anziehen erzeugte Reibung der Stirnflächen der Scheiben zur Uebertragung des Drehmomentes  $M_d$  genügen mufs. Setzt man  $M_d = 36 d^3$ , je eine Schraubenbelastung  $= 300 d^2$  und die Reibungszahl  $\mu = 0,25$  (Stirnebenen der Scheiben rauh), so ergibt sich  $z = 0,48 \frac{d^3}{\delta^2 y}$ , worin  $y$  den Halbmesser des

Schraubenkreises bedeutet. Zugleich mufs  $\frac{M_d}{y z} \frac{x}{2} \leq 0,1 k b \delta^3$  sein, worin  $k b$  hoch sein darf.  $x$  ergibt sich aus der Scheibendicke  $c = \frac{1}{4} d$  und der Höhe der Arbeitsleiste (0,3 bis 0,6 cm) zu

$$\begin{aligned} x &= c + 0,4 \text{ cm}; & a &= 1,5 \delta; & y &= 0,5 d_1 + s_1 + a; \\ b &= \frac{1}{4} \delta + 0,5 \text{ cm}; & e &= \frac{1}{4} \delta; & f &= 2,1 \delta + 0,5 \text{ cm}; & g &= \frac{1}{2} s_1; \\ & & h &= \frac{1}{3} \delta. \end{aligned}$$

Ausführungen der **Berlin-Anhaltischen Maschinenbau-Aktien-Gesellschaft in Dessau.**

Bohrung $d$ . . . . mm	100	110	120	130	140	150	160	170	180	190	200
Länge $2l$ . . . . mm	300	325	350	375	400	425	450	475	500	525	550
Größter Durchmesser . mm	360	385	420	435	455	470	500	520	555	570	590
Schrauben . . . . .	$\left. \begin{array}{l} d = \text{mm} \\ z = \end{array} \right\}$										
	26	26	29	29	29	29	33	33	36	36	36
Gewicht . . . . . kg	6	6	6	6	8	8	8	8	8	8	10
	92	112	138	158	180	215	250	290	335	375	420

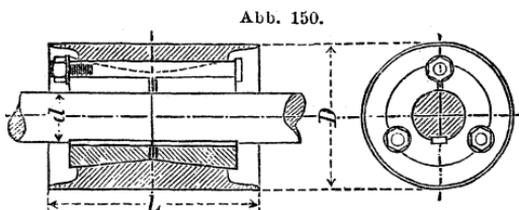
Bohrung  $d$  auch bis zu 5 mm größer als in der Tafel angegeben.

Der oben erwähnte Nachteil, daß eine Welle erst nach Verschieben um das Maß  $h$  herausgenommen werden kann, ist vermieden bei der Abart der Scheibenkupplung mit herausnehmbarer Zwischenscheibe (s. hierzu, wie auch zu den übrigen allgemein gebräuchlichen Kupplungen, Lagern und sonstigen Transmissionsteilen die Preislisten z. B. der B.-A. M.-A.-G., ferner der Firma G. Polysius in Dessau, des Eisenwerkes Wülfel und der Peniger Maschinen-Fabrik und Eisengießerei, Penig i. Sachsen).

### 3. Klemm- oder Doppelkegel-Kupplung nach Sellers.

Die Wellen werden auch dann noch gleichachsig und sicher verbunden, wenn die Durchmesser der beiden Wellenenden etwas verschieden sind. Leichtes Aufbringen und Lösen der Kupplung ist möglich.

Ein außen zylindrisch gedrehter, innen doppelkegelförmig ausgebohrter Hohlkörper umschließt zwei (unterhalb der oberen Schraube in Abb. 150) geschlitzte, außen kegelförmige und innen zylindrische Hülsen. Durch das Anziehen der achsial liegenden drei Schrauben wird jede Hülse sowohl gegen



auch gegen den äußeren Hohlkörper gedrückt; die hierdurch erzeugte Reibung kuppelt die Wellen. Neigung der Kegelflächen gegen die Wellenachse etwa  $1/8$ .

Zur Sicherung gegen Verdrehen dient eine Feder gegenüber dem Hülsenschlitze. Zwei gegenüber liegende Schaulöcher in der Mitte des Aufsenskörpers lassen die richtige Lage des Wellenstößes in Kupplungsmitte erkennen. — Ausführungen der B.-A. M.-A.-G.:

Bohrung $d$ . . mm	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120
Länge $L$ . . mm	160	200	220	250	290	310	330	370	390	410
Durchmesser $D$ mm	110	130	150	180	200	222	250	270	290	300
Gewicht . . kg	8	13	20	31	44	59	79	96	124	150

Bohrung  $d$  auch bis zu 5 mm größer als in der Tafel angegeben.

### b. Bewegliche Kupplungen.

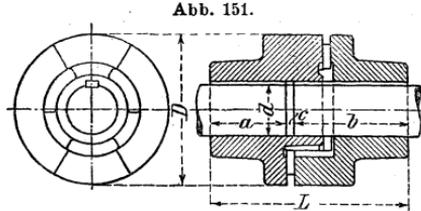
Außer der wenig benutzten **Oldhamschen Kupplung** und der gewöhnlichen **Klauenkupplung** (Sharp u. a.) sind hier anzuführen:

#### 1. Ausdehnungskupplung (Abb. 151).

Die gleichachsige Lage der Wellen wird durch einen im Inneren der Kupplung liegenden Ring gesichert. Die mit je drei Klauen in-

einander greifenden Kupplungsstücke sind fest auf die Wellenenden gekeilt.

Die Kupplung ist bei langen Wellensträngen dann anzuwenden, wenn deren Enden keine Verschiebungen zulassen, z. B. wenn das eine Ende mit Rücksicht auf den Antrieb fest gelagert ist und das andere Ende Kegelräder treibt. Sie empfiehlt sich aber auch dann, wenn nach einem Wellenende hin größere Längsverschiebungen statt-  
 haften sind, denn die Wellen bleiben dann möglichst in ihren Lagern und ziehen keine Verunreinigungen hinein, was sonst durch die häufigen Längenänderungen des Wellenstranges infolge des Temperaturwechsels zu befürchten ist.  
 — Ausführungen der B.-A. M.-A.-G.:

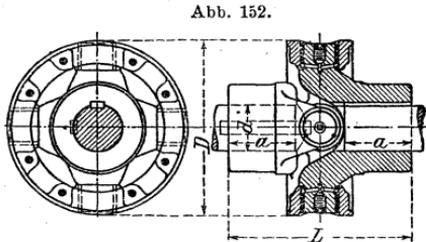


Bohrung $d$ . . mm	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150	160	170	180
Durchmesser $D$ mm	180	195	215	238	260	284	308	334	362	390	420	450	480	510	540
Länge $L$ . . mm	221	250	284	315	349	378	409	440	467	501	530	563	600	631	662
Länge d. Wellen- enden $a$ . . mm	82	94	107	120	133	145	157	170	181	193	205	218	230	243	255
Länge d. Wellen- enden $b$ . . mm	127	144	162	180	198	215	232	250	266	283	300	320	340	358	377
Spiel d. Wellen- enden $c$ . . mm	12	12	15	15	18	18	20	20	20	25	25	25	30	30	30
Gewicht . . kg	19	25	35	47	61	80	110	140	170	200	244	304	368	440	525

Die Bohrungen  $d$  können bis zu 5 mm größer sein, als in der Tafel angegeben.

## 2. Kreuzgelenkkupplung der B.-A. M.-A.-G. (Universalgelenk).

Dient zur Verbindung zweier sich unter einem Winkel schneidender Wellen. Die Bewegungsübertragung ist ungleichförmig und erfolgt bei einem Winkel  $\alpha$ , den die Mittellinien der Wellen miteinander bilden, so, daß  $1 : \cos \alpha$  und  $\cos \alpha$  die äußersten Verhältnisse der Winkelgeschwindigkeiten sind. Liegen die Wellenmittellinien nicht genau in derselben Ebene, so drehen sich nicht nur die Gelenkzapfen (Abb. 152) in ihren Lagern, sondern sie verschieben sich auch. Sind drei Wellen durch Universalgelenke gekuppelt, so wird die Bewegung gleichförmig von der ersten auf die dritte Welle übertragen, wenn beide symmetrisch zur mittleren Welle liegen. Zapfenhülsen aus Rotgufs sind nur dann notwendig, wenn  $\alpha$  erheblich von  $180^\circ$  abweicht.

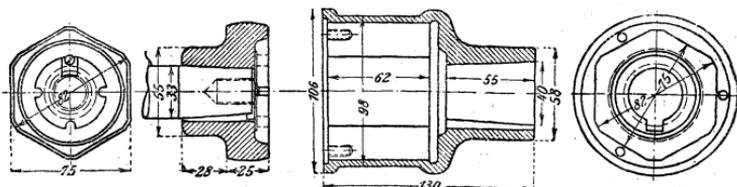


Wellendurchmesser $d$ mm	40	50	60	70	80	90	100	110	120	135	155	175
Durchmesser $D$ . . . mm	180	210	240	280	315	350	390	430	490	580	690	810
Länge $L$ . . . . . mm	166	204	240	280	330	370	402	440	490	580	640	730
Länge d. Wellenendes für die Nabe $a$ . . . mm	60	75	90	105	120	135	150	165	190	210	255	300
Gewicht . . . . . kg	10	16	25	40	58	86	120	165	225	330	520	780

Die Wellendurchmesser  $d$  können bis zu 5, bei den 5 letzten  $d$  bis zu 15 mm größer sein, als in der Tafel angegeben.

**3. Gelenkige Sechskantkupplung** (s. Abb. 153). Angewendet z. B. im Automobilbau von der Neuen Automobil-Gesellschaft,

Abb. 153.



Oberschöneweide bei Berlin. — Mitnehmer mit abgerundeten Prismenflächen und Hülse bestehen aus Einsatzmaterial, gehärtet. — Die Kupplung wird auch als Vierkantkupplung gebaut.

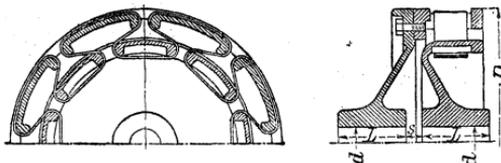
**3. Elastische Kupplungen**

sind am Platze, wo Stöße in der Kupplung gemildert oder Wellen miteinander verbunden werden sollen, deren Mittellinien geringe Abweichungen voneinander aufweisen. Diese können auch im Betriebe entstehen, z. B. durch Durchbiegen der Wellenenden, durch ungleichmäßige Abnutzung der Lager usw. Zur Uebertragung der Bewegung von einer Kupplungshälfte auf die andere dienen elastische Bänder, Scheiben oder Bolzen, die zugleich isolierend wirken (Gummi, Leder oder dergl.), oder es arbeiten die üblichen Uebertragungsmittel mit Puffern aus Holz, Leder usw. zusammen.

Außer den nachfolgend beschriebenen Kupplungen dieser Art sei noch erwähnt die El-Is-Kupplung (elastisch, isolierend) der Peniger

Maschinen-Fabrik und Eisengießerei, Penig i. Sachsen.

Abb. 154.



$\alpha$ ) Bei der elastischen Isolationskupplung Patent **Zodol-Voith** der Firma J. M. Voith in Heidenheim a. Br. (Abb. 154) dient zur Uebertragung ein

Leder- oder Baumwollriemen, der nur lose angezogen, nahtartig durch Schlitze der ineinander greifenden zylindrischen Ränder der Kupplungsscheiben geschlungen ist.

Die Kupplung wird auch in einer ausrückbaren Ausführungsform gebaut.

Nr. der Kupplung	$\frac{N}{n}$	Durchmesser	Länge	Naben-Bohrung	Abstand	Riemen-			Gewicht kg
		$D$ mm	$L$ mm	$d$ mm	$s$ mm	Breite mm	Dicke mm	Länge mm	
0,7	0,00087	70	30	15	25	15	1	320	1,2
0,9	0,0017	90	30	20	25	15	1	400	1,8
1,2	0,003	120	40	20	20	20	2	900	3,8
1,5	0,007	150	50	25	18	25	2	1100	7
2	0,01	200	50	30	20	25	2	1450	13
3	0,03	300	75	40	20	40	3	2450	28
4	0,075	400	90	50	20	50	4	3450	55
5	0,15	500	115	60	20	50	4	4300	85
6	0,46	600	160	90	30	75	6	5350	170
8	1,12	800	220	120	30	100	7	6950	345
10	2,13	1000	260	140	40	2 × 65	7	8500	640
12	3,8	1200	300	170	40	2 × 65	7	11100	900
14	5,25	1400	330	200	50	2 × 75	7	12800	1300
16	8,0	1600	360	230	50	2 × 80	8	14700	1750
18	11,5	1800	400	250	50	2 × 100	8	17400	2460
20	15,6	2000	480	300	70	2 × 100	8	20500	4450

Besondere Anordnungen für wechselnde Drehrichtung sowie zum Ausrücken.

Ebenfalls mit einem endlosen Lederband arbeitet die elastische **Cachin-Kupplung** des **Eisenwerkes Wülfel**. Bei dieser ist eine Kupplungshälfte verschiebbar, so daß die Kupplung durch Abnehmen des Lederbandes leicht lösbar ist. (Näheres s. Preisliste der Firma.)

$\beta$ ) **Elastische Bolzenkupplung** der **B.-A. M.-A.-G.** Die elastische Verbindung der beiden aus Stahlgufs hergestellten, durch Rippen versteiften Hälften  $c$  bilden Bolzen  $e$ , die aus bestem Leder gepreßt sind. Die Lederbolzen  $e$  werden in den Bohrungen  $f$  durch Federlinge  $g$ , die sich in Nuten  $h$  einlegen, gesichert (Abb. 155). — Sind

Abb. 155.

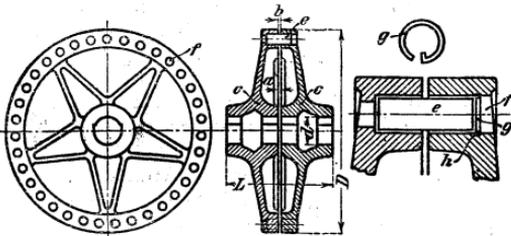
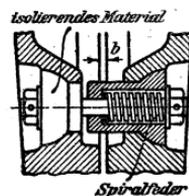


Abb. 156.



elektrische Maschinen zu kuppeln, so werden Hubbegrenzungen nach Abb. 156 eingelegt, die den Rotoren Spiel gestatten, jedoch verhindern,

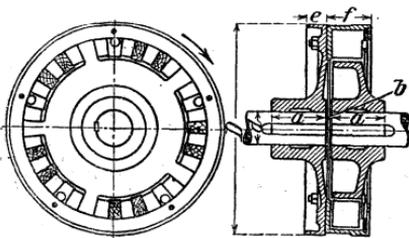
dafs sich die Kupplungshälften über das Mafs  $b$  (Spaltweite) voneinander entfernen. Diese Hubbegrenzungen sind gegen die Kupplungshälften isoliert. — In der Tafel ist die Maximal-Stoßbelastung der Kupplung, die nur wenige Sekunden dauert, um 100 vH höher angenommen als die normale Leistung.

Modell-Nr.	Durchmesser $D$ mm	Länge $L$ mm	Abstand der Wellenenden $a$ mm	Spaltweite $b$ mm	Größte Bohrung $d$ mm	$\frac{N}{n}$ bzw. Drehmoment in m/kg				Gewicht kg
						normal Dauerbetrieb		maximal einschl. Stoßwirkung		
						$\frac{N}{n}$	$PR$	$\frac{N}{n}$	$PR$	
<b>105/115</b>	700	420	30	7	140	0,46	330	0,92	660	450
<b>120/130</b>	820	460	30	7	160	0,7	515	1,4	1 030	625
<b>135/150</b>	980	540	40	10	180	1,3	930	2,6	1 860	900
<b>155/170</b>	1100	600	40	10	200	2,1	1 505	4,2	3 010	1200
<b>175/190</b>	1250	680	40	10	225	3,2	2 290	6,4	4 580	1500
<b>195/215</b>	1450	760	40	10	250	5	3 580	10	7 160	1900
<b>220/240</b>	1710	840	40	10	280	7,5	5 370	15	10 740	2500
<b>245/265</b>	2100	940	40	10	310	11,9	8 525	23,8	17 050	3600
<b>270/290</b>	2500	1050	50	10	340	17	12 175	34	24 350	5200
<b>295/315</b>	2750	1150	50	10	370	23	16 475	46	32 950	7400

Für kleinere Kräfte (Wellendurchmesser von 20 bis 190 mm) wird eine baulich etwas abweichende, auf demselben Prinzip beruhende Kupplung geliefert. Verbindungsmittel: Leder- oder Gummibolzen.

γ) **Elastische Zahnkupplung** von G. Polysius, Dessau. Die beiden Kupplungshälften aus Gußeisen (für Umlaufgeschwindigkeiten > 25 m aus Stahlgufs) greifen mit angegossenen Zähnen ineinander. Zwischen die Zähne sind abwechselnd Zwischenlagen aus Filz und Holz eingeschoben. Treibt die Kupplung nur nach einer Richtung, so liegen die elastischen Zwischenlagen vor den treibenden Zähnen

Abb. 157.



und nur je eine Zwischenlage hinter ihnen. Soll die Kupplung nach beiden Richtungen treiben, so sind vor und hinter den Zähnen gleich viel Zwischenlagen.

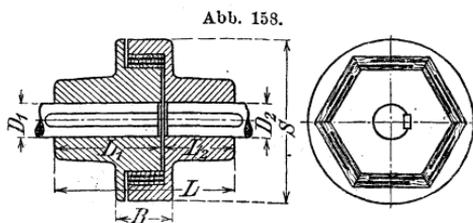
Bei einer anderen Ausführung sind an einer Scheibe die Kupplungszähne angeschraubt (s. Abb. 157), u. zw. an dem treibenden Teil;

an der getriebenen Scheibe sind sie auch hier angegossen. Dabei kann nach Lösen der Schrauben jede der Wellen aus den Lagern gehoben werden, ohne dafs achsiales Verschieben nötig wäre. Die

Kupplung ist bis zu einer Leistung von 7200 PS bei 250 Uml./min ausgeführt.

$\frac{N}{n}$	Außerer Durchmesser der Kupplung $D$ mm	Normale Bohrung der Kupplung $d$ mm	Nabenlänge $a$ mm	Wellenabstand $b$ mm	Ausführung I mit beiderseits angepassten Zähnen		Ausführung II mit an einer Kupplungsscheibe angeschraubten Zähnen		
					Kranzbreite mm	Gewicht der Kupplung kg	Kranzbreite $e$ mm	$f$ mm	Gewicht der Kupplung kg
<b>0,002</b>	140	20	35	4	46	3	24	43	4
<b>0,007</b>	210	30	50	5	57	7	25	52	8
<b>0,020</b>	280	40	70	6	74	16	30	68	20
<b>0,044</b>	350	50	85	7	81	31	35	75	40
<b>0,085</b>	420	60	105	8	104	62	40	95	70
<b>0,151</b>	490	70	120	9	113	100	50	105	110
<b>0,25</b>	560	80	135	10	124	130	55	115	150
<b>0,39</b>	630	90	155	11	138	162	60	130	190
<b>0,59</b>	700	100	170	12	154	260	65	145	290
<b>0,84</b>	770	110	190	13	163	350	70	155	390
<b>1,17</b>	840	120	205	14	180	435	75	170	500
<b>1,60</b>	910	130	220	16	196	555	85	185	610
<b>2,13</b>	980	140	240	18	206	675	90	195	770
<b>2,78</b>	1050	150	255	20	222	850	95	210	960
<b>3,52</b>	1120	160	270	22	246	1080	105	235	1235
<b>4,53</b>	1190	170	290	24	264	1360	115	250	1500
<b>5,61</b>	1260	180	305	26	274	1590	120	260	1800
<b>6,92</b>	1330	190	325	28	296	1770	130	280	2000
<b>8,46</b>	1400	200	340	30	306	1970	130	290	2250
<b>10,24</b>	1470	210	355	32	322	2230	135	305	2500
<b>12,25</b>	1540	220	375	34	334	2570	140	315	2850
<b>14,67</b>	1610	230	390	36	340	2810	140	320	3200
<b>17,30</b>	1680	240	410	38	360	3110	155	340	3600
<b>20,38</b>	1750	250	425	40	382	3700	155	355	4100

d) Eine sehr einfache elastische Kupplung ist die **Grisson-Kupplung** (Abb. 158), die von der Maschinenfabrik E. Becker, Berlin-Reinickendorf gebaut wird. Zwei gußeiserner, als Sechskant ausgebildete Kupplungsteile greifen mit in dem

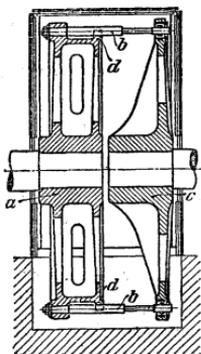


hohlen Sechskant angeordneten Zwischenstücken aus Hartholz, die zur Erhöhung der Federung mit Einschnitten versehen sind, ineinander. Für beide Drehrichtungen verwendbar.

Bohrung		$\frac{N}{n}$	Durchmesser $S$ mm	Länge			Kranzbreite $B$ mm	Gewicht kg
$D_1$ mm	$D_2$ mm			$L$ mm	$L_1$ mm	$L_2$ mm		
20	20	0,005	105	120	70	50	38	5
30	30	0,015	150	150	90	60	47	10
40	40	0,039	200	200	120	80	61	20
50	50	0,07	250	250	150	100	71	35
60	60	0,12	300	280	170	110	91	50
70	70	0,19	350	310	190	120	111	80
80	80	0,284	400	340	210	130	121	125
90	90	0,405	450	370	230	140	141	180
100	100	0,555	500	400	250	150	151	240

ε) **Nachgiebige Stabfederkupplung\***) der **Siemens-Schuckert-Werke.**  
In der Stahlgufsscheibe  $a$  ist am Umfang eine Anzahl (bis zu 20) sehr nachgiebiger Stäbe  $b$  aus hochwertigem Chrom-Nickelstahl fest eingespannt, die in der anderen Kupplungs-scheibe  $c$  längsverschiebbar, kugelgelenkartig beweglich in Bronze gelagert sind. Der Kupplungs-teil  $a$  trägt ferner noch im Kreise angeordnete Anschläge  $d$ , in denen die Stäbe  $b$  frei spielen können, jedoch zur Anlage kommen und gestützt werden, sobald die höchstzulässige Durchbiegung erreicht ist (Abb. 159).

Abb. 159.



#### 4. Ein- und ausrückbare elastische Kupplungen.

Getrennte Wellenstränge sind oft ungleichmäßig beansprucht und können demnach bei längerem Betrieb ihre gleichachsige Lage durch ungleiche Abnutzung der Lager verlieren. Wird eingerückt, so entsteht die Gefahr, daß die Lager heißlaufen, wenn die Kupplung nicht nachgiebig ist.

Hierher gehören außer den oben unter 3. α) und ε) bereits erwähnten ausrückbaren Ausführungsformen elastischer Kupplungen (Bandkupplung von Zedel-Voith und Stabfederkupplung der Siemens-Schuckert-Werke):

α) Die aus- und einrückbare elastische **Bürstenkupplung\*\*)** der Maschinenfabrik **G. Luther, A.-G.** in Braunschweig.

β) **Biegsame aus- und einrückbare Reibkupplung;\*\*\*)** **Baumgartner-Mica-Kupplung**, gebaut vom **Eisenwerk Wülfel** in Hannover-Wülfel. Am Kranz der rechten Kupplungshälfte sind zwei oder drei Ring-

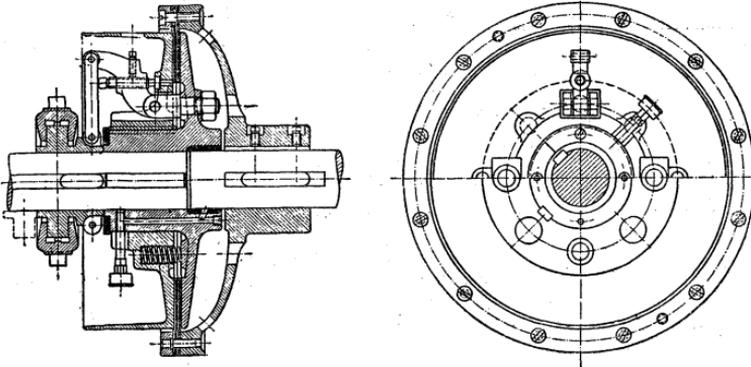
\*) Vgl. Stahl u. Eisen 1908 Nr. 18. Umkehr-Blockwalzwerk von 6000 PS.

\*\*\*) S. Bach, Maschinenelemente, 10. Aufl. 1908 S. 637 u. f.

\*\*\*\*) S. Volk, Maschinenteile, Z. d. V. d. I. 1907 S. 1763.

scheiben aus Leder angeschraubt, die in zwei Reibscheiben der linken Kupplungshälfte im ausgerückten Zustande geringes Spiel haben. Die linke der beiden gußeisernen Reibscheiben ist um so viel verschiebbar, daß sie beim Einrücken die Lederscheiben mit Druck gegen die andere

Abb. 160.



Reibscheibe preßt (Abb. 160). Die Kupplung eignet sich für hohe Geschwindigkeiten. Sie wird in 7 verschiedenen Größen (äußerer Durchmesser 400 bis 800 mm; Bohrung 85 bis 160 mm für  $\frac{N}{n}$  von 0,06 bis 0,95) gebaut. Sie gestattet mäßige achsiale Verschiebung der Wellenden; die mit Holz armierten Lederringe sind leicht auswechselbar.

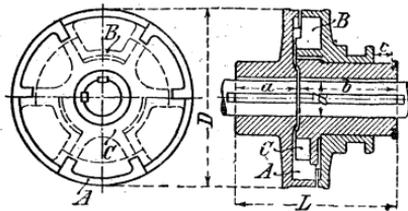
### c. Weitere Kupplungen zum Aus- und Einrücken.\*)

Die wichtigsten dieser Kupplungen sind außer den eben beschriebenen und außer der unter **b.** genannten Klauenkupplung die Zahnkupplung von Hildebrandt und von Missong, die Schraubenfeder-Reibungskupplung\*\*) von Louis Schwarz & Co. in Dortmund, die Gnomkupplung\*\*\*) der Peniger Maschinenfabrik und Eisengießerei und die unter 2. bis 7. genannten Reibungskupplungen.

#### 1. Zahnkupplung von Hildebrandt.

Die beiden Kupplungshälften (Kreuz *C* und Gehäuse *A*)

Abb. 161.



\*) S. Ad. Ernst, Ausrückbare Kupplungen, Berlin 1890, J. Springer; auch Z. d. V. d. I. 1889 S. 481; auch der eben genannte Aufsatz in der Z. d. V. d. I. 1907 S. 1768.

\*\*) S. Bach, Maschinenelemente, 10. Aufl. 1908 S. 632.

\*\*\*) S. Z. d. V. d. I. 1907 S. 1769.

sind auf den Wellenenden festgekeilt. Die Zähne der um  $c$  verschiebbaren Muffe  $B$  greifen schließend in Lücken der Scheiben  $C$  und  $A$  ein. Einrücken nur zulässig beim Stillstande oder bei langsamem Gange, Ausrücken jederzeit (Abb. 161).

Ausführungen der B.-A. M.-A.-G.

Wellendurchmesser . mm	30	40	50	60	70	80	95	110	125	140	160	180
Durchmesser $D$ . . . mm	250	275	300	330	365	425	500	575	650	750	920	1080
Länge $L$ . . . . . mm	240	260	280	300	330	380	450	515	590	670	820	960
Länge d. Wellenendes f. d. feste Scheibe $a$ mm	90	97	105	110	125	142	167	193	220	250	300	350
Länge d. Wellenendes f. Kreuz u. Muffe $b$ mm	145	158	170	185	200	230	275	314	360	410	505	596
Hub $c$ . . . . . mm	23	24	27	31	35	42	51	60	70	80	100	112
Gewicht . . . . . kg	42	47	54	68	91	136	220	325	460	675	1030	1620

Der Wellendurchmesser kann um 5 bis 20 mm größer sein, als in der Tafel angegeben

2. Reibungskupplung von Dohmen-Leblanc.

Diese Kupplung wird [von der B.-A. M.-A.-G., Dessau] für fünf verschiedene Zwecke verschieden angeordnet: 1) zur Ver- und Entkupplung zweier Wellen während des Betriebes (s. Abb. 162); 2) um einen Wellenstrang in und außer Betrieb zu setzen, wenn sich auf ihm eine beständig umlaufende Scheibe oder ein Zahnrad befindet; 3) um eine Scheibe oder ein Zahnrad in und außer Betrieb zu setzen, wenn sie sich auf einer beständig umlaufenden Welle befinden; 4) zur Ver- und Entkupplung zweier Wellen (während des Betriebes), von denen bald die eine, bald die andere die treibende ist; 5) um eine für sich gelagerte, auf einer Hohlwelle sitzende schwere Antriebscheibe mit einer in der Mittellinie der Hohlwelle befindlichen, beständig umlaufenden Welle zu koppeln.

Abb. 162.

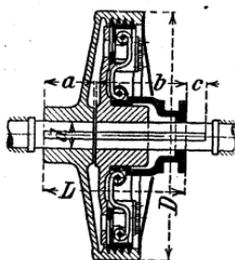


Abb. 162 zeigt die Anordnung 1. Auf dem linken, treibenden Wellenende ist eine Scheibe festgekeilt. Durch Verschieben der Hülse auf der getriebenen Welle von rechts nach links in die gezeichnete Stellung werden mittels der vier federnden, hakenförmigen stählernen Druckstangen (Kniehebel) vier Gleitstücke in einem auf der getriebenen Welle festgekeilten Armkreuze nach aufsen gegen die geriffelte Innenfläche der Scheibe gedrückt, so daß die Reibung die Kupplung der Wellen vermittelt. Beim Verschieben der Hülse von links nach rechts tritt Entkupplung ein. — Der Druck der Reibbacken wirkt radial.

Die Kupplung kann in ein vollkommen glattes Gehäuse eingebettet werden.

Die Kupplung kann in ein vollkommen glattes Gehäuse eingebettet werden.

Wellendurchmesser . mm	40	45	50	55	65	70	75	85	95	110	120	140
Durchmesser $D$ . . . mm	350	400	450	600	660	860	740	880	1040	1290	1490	1720
Länge $L$ . . . . . mm	229	229	271	314	358	388	413	451	525	575	646	780
Länge d. Wellenendes für das Gehäuse $a$ mm	80	80	85	100	125	135	150	160	180	200	230	300
Länge d. Wellenendes f. Kreuz u. Muffe $b$ mm	147	147	184	211	230	250	260	288	340	370	411	475
Hub $c$ . . . . . mm	30	30	40	50	60	65	55	75	95	110	125	140
Gewicht . . . . . kg	40	50	70	100	150	210	240	320	490	740	1050	1600

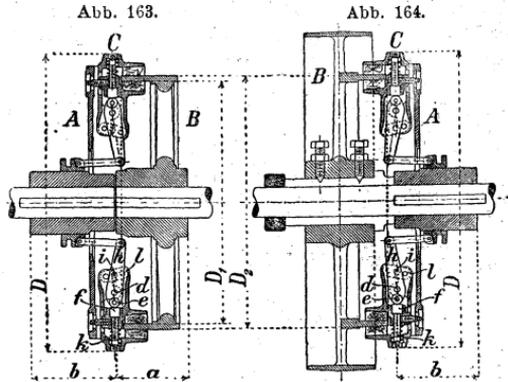
Die Wellendurchmesser 55, 75, 85, 110 können bis um 5 mm, 95, 120, 140 bis um 10 mm größer sein.

**3. Reibungskupplung von Hill. (Abb. 163 u. 164.)**

(Eisenwerk Wülfel in Wülfel vor Hannover.)

Der Reibungsring (Hill-Ring) *B* ist beiderseits glatt überdreht; das Hill-Kreuz *A* trägt in seinen radialen Armen 2 bis 6 Paare Reibungsbacken *C*, die mit Holz gefüttert sind und beim Einrücken von innen und außen sich gleichzeitig und mit gleichem, rein radialem Drucke gegen *B* andrücken, so daß *B* frei von Biegespannungen bleibt.

Beim Einrücken wird Hebel *h* um Zapfen *d* gedreht, der in der äußeren Backe gelagert ist; dabei drückt das Ende von *h* mit der Rolle *e* gegen Bolzen *l* der inneren Backe. Hierdurch nähern sich beide Backen und drücken sich gegen *B*. — Damit die ausgerückten Backen einen Halt gegen radiale Verschiebung haben, sind sie durch den um Bolzen *l* drehbaren Lenker *l* verbunden und entfernen sich daher gleichweit von *B*. Die Abnutzung ist auf die leicht (durch Anziehen der Schraube *k*) nachstellbaren oder auswechselbaren Holzfutter beschränkt; diese sowie die Federung der Zapfen liefern die erforderliche Elastizität.



Die Kupplung, die für hohe Umlaufzahlen und bei Staubbildung anwendbar ist, wird **ungeteilt** und **geteilt** gebaut. Sie dient:

1. zur Verbindung zweier Wellenenden (Abb. 163);
2. in Verbindung mit Riemenscheibe usw. zum Ersatz des mit

Nr.	Größte Leistung <i>N</i> in PS			Anzahl der Arme	Hill-Kreuz <i>A</i>			Hill-Ring <i>B</i>				Gewicht (Abb. 163)	
	bei <i>n</i> =				<i>D</i>	<i>b</i>		<i>D</i> <sub>1</sub>	<i>D</i> <sub>2</sub>	<i>a</i> (Abb. 163)		ungeteilt	geteilt
	50	100	200			ungeteilt	geteilt			ungeteilt	geteilt		
6	3	6	12	2	610	170	—	450	510	140	—	80	—
7	5	10	18	3	610	170	—	490	510	140	—	50	—
8	8	17	29	3	725	200	—	599	625	165	—	146	—
9	11	28	52	4	865	245	265	713	745	180	205	260	300
10	22	44	82	4	920	265	295	800	835	200	225	355	415
11	30	60	110	4	1090	310	345	902	940	235	245	500	570
12	47	95	175	4	1255	345	385	1036	1080	280	280	740	820
13	80	160	290	4	1420	380	425	1168	1220	310	310	1035	1155
14	110	225	440	6	1420	435	450	1168	1220	310	310	1315	1405
15	160	325	600	6	1620	—	500	1344	1400	—	375	—	1980
16	225	450	750	6	1810	—	525	1510	1570	—	400	—	2640
17	285	575	975	6	2020	—	560	1682	1750	—	450	—	3530
18	400	800	1375	6	2190	—	600	1824	1900	—	500	—	4615

Außerdem die Zwischennummern 6a bis 14a.

starker Abnutzung des Riemens verbundenen Antriebes mit fester und loser Riemenscheibe.

Die Scheibe in Verbindung mit der Hill-Kupplung (Abb. 164) ist auf einer Leerlaufbüchse mit Fettschmierung montiert oder, wenn sie längere Zeit ausgerückt bleiben soll, auf einer Hill-Büchse. (Leerlaufbüchse mit Oelumlaufl und auswechselbaren Weißmetallschalen s. Preisliste des Eisenwerkes Wülfel.)

3. in Verbindung mit Hohlwelle, wobei *A* auf der Antriebswelle, *B* auf der Hohlwelle sitzt, die gleichachsig mit der Hauptwelle besonders gelagert ist (für schwere Hauptantriebe und Dynamos).

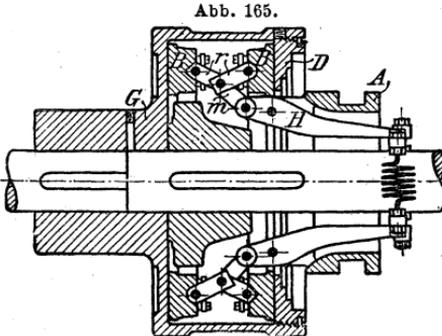
Um zur Verhütung von Unglücksfällen eine Maschine oder eine ganze Transmission sofort zum Stillstand bringen zu können, wird die Hill-Kupplung vom Eisenwerk Wülfel auch in Verbindung mit einem elektrischen Moment-Fernausrücker ausgeführt.

Für stark staubende Betriebe (Zementfabriken) wird als besondere Abart der Hill-Kupplung die sogenannte X-Kupplung geliefert.

#### 4. Doppelscheiben-Reibungskupplung.

Von G. Luther, A.-G., Braunschweig. (Benn-Kupplung.)

Abb. 165 zeigt die ausgerückte Kupplung. Durch Verschieben der Muffe *A* nach links werden die Gelenkhebel *rr* von den Hebeln *H*



und *m* kniehebelartig durchgedrückt, wobei der Hebel *m* bis über seine Mittellage nach links bewegt wird und sich die Bremsklötze *BB* an die Reibungsflächen des Gehäuses *G* und seines Deckels *D* legen. Die Kupplung wird auch in Verbindung mit Riemen- oder Seilscheibe geliefert. — Die inneren Teile können ständig im Oelbade laufen.

Durch die symmetrische Ausbildung dieser wie auch der unter 5. beschriebenen Doppelkegel-

Reibungskupplung der S. M. F. ist der bei einfachen Reibkegel-Kupplungen entstehende, auch während des Betriebes herrschende axiale Schub vermieden.

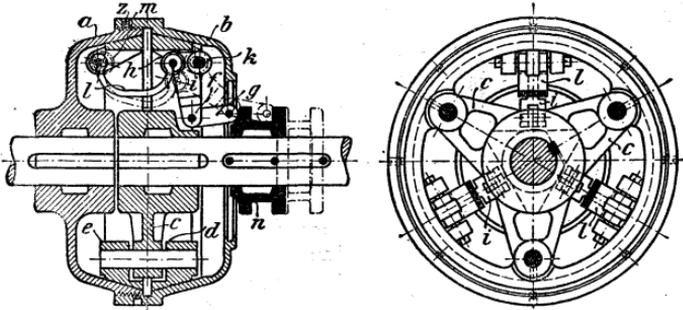
Eine ebenfalls mit **Doppel-Reibscheiben**, die von innen durch Kniehebel an Gehäuse und Deckel angedrückt werden, arbeitende Kupplung baut neuerdings die Maschinenfabrik **Lohmann & Stotterfoht** in Witten a. d. Ruhr. — Ueber diese wie über die ältere, unter dem Namen der Firma allgemein bekannte Kupplung, die mit einem Reibkegel in Verbindung mit Klinken arbeitet, ist die Preisliste der Firma zu vergleichen.

#### 5. Doppelkegel-Reibungskupplung der Sächsischen Maschinenfabrik vorm. Rich. Hartmann, A.-G., Chemnitz.

Die Kupplung wird in 4 verschiedenen Anordnungen geliefert. Anordnung 1 zur Verbindung zweier Wellenenden (s. Abb. 166). Anordnung 2 zur Verbindung leichter oder mittlerer Riemen- oder Seilscheiben mit stets laufenden Wellen, wenn die Kupplungen nur selten und für kurze Zeit ausgerückt werden, ebenso wenn zeitweilig stillstehende Wellen mit stets laufenden Scheiben gekuppelt werden sollen. Anordnung 3 zur Verbindung leichter oder mittlerer Scheiben mit stets laufenden Wellen, wenn die Kupplungen meist ausgerückt sind und nur zeitweilig eingerückt werden (Abb. 167). Die Welle ist durch den hohlen Losscheibenträger frei durch-

geführt. Die Scheibe ist mit Rotgufsbuchse versehen, auf deren über den Nabenanrand vorstehenden Teil der Schmierring aufgehängt ist, der die Lauffläche bei eingerückter Kupplung mit Oel versorgt. Anordnung 4 zur Verbindung einer Hohlwelle nebst auf ihr sitzender Scheibe mit der durch die Hohlwelle frei durchgeführten Vollwelle. Hierbei kann ebensogut die Scheibe wie auch die Vollwelle treiben. Vollwelle und Hohlwelle sind so nahe wie möglich an Scheibe und Kupplung doppelt zu lagern.

Abb. 166.

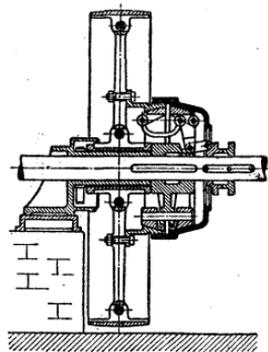


Reibungskupplung nach Anordnung 1 s. Abb. 166. Das zusammengeschraubte Gehäuse der Kupplung *a, b* ist auf der linken Welle festgekeilt; die zweite Welle trägt den Mitnehmer *c* mit durchgehenden Zapfen, die als Führung für die Reibringe *d* und *e* dienen. Der am Bolzen *f* angreifende Lenker *g* faßt mit Bolzen *h* den Winkelhebel *i*, dessen Drehpunkt *k* im Reibring *d* gelagert ist. Der Bolzen *h* des Winkelhebels ist mittels der Feder *l* mit dem im Reibring *e* gelagerten Bolzen *m* verbunden. Im eingerückten Zustande liegen die Mitten der Bolzen *k, h* und *m* genau oder nahezu in einer geraden Linie, so daß das Getriebe selbstsperrend und die Muffe entlastet ist.

Beim Ausrücken wird die Muffe *n* auf der Welle nach außen gerückt und nimmt durch die Lenker *g* die Winkelhebel *i* mit. Diese drehen sich um die noch festliegenden Punkte *k*, so daß der Reibring *e* ausgerückt und von dem Gehäuseteil *a* entfernt wird, bis *e* am Mitnehmer *c* einen Stützpunkt findet. Dadurch werden die Bolzen *m* zu Festpunkten des Getriebes. Die weitere Bewegung der Muffe *n* bewirkt einen Vorschub der Punkte *k* nach dem Mitnehmer zu, so daß auch der Reibring *d* aufser Eingriff mit dem Gehäuse kommt. Beim Einrücken der Kupplung kommt zuerst der Reibring *e* in Eingriff mit Gehäuseteil *a*. Nachdem *m* ein fester Drehpunkt geworden ist, erfolgt auch das Einrücken des Reibringes *d*.

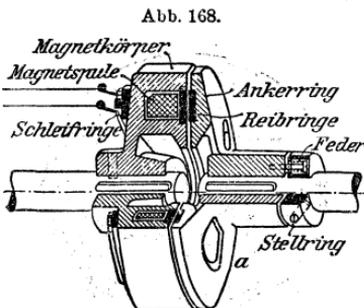
Durch Zusammenschrauben der Gehäusenhälften kann die Kupplung nachgestellt werden. Die Reibringe laufen in Oel. Ausführungen für Wellendurchmesser von 40 bis 200 mm.

Abb. 167.



### 6. Elektromagnetische Friktionskupplung „Vulkan“ der „Vulkan“ Maschinenfabrik A.-G. in Berlin.

Die Kupplung (Abb. 168) besteht aus zwei Teilen, dem Magnetkörper, fest auf dem einen Wellenende, und dem Anker *a*, verschiebbar auf dem anderen. Im



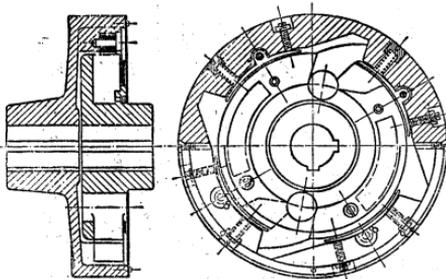
Magnetkörper ist die Magnetspule untergebracht, der mit Schleifringen und Schleifkontakten ein Gleichstrom beliebiger Spannung zugeführt wird. Bei Stromschluss ziehen sich Magnetkörper und Ankerring an, jedoch ohne sich zu berühren, so dass die Reibringe aus nicht magnetischem Stoff den vollen Druck aufzunehmen haben. Bei Unterbrechung des Stromes wird die Kupplung sofort gelöst, da die Kupplungsteile durch Spiralfedern so weit voneinander entfernt werden, dass Berührung der Reibringe nicht mehr stattfindet.

Bei größeren Kupplungen liegen die Reibringe am äußeren Umfange. — Für durchlaufende Wellen Ausführung als Leerlaufkupplung in Verbindung mit Riemenscheibe usw. — Ausrückung aus beliebiger Entfernung und von beliebig vielen Punkten. Ausführung bis zu 2000 PS. Keine Reibungsverluste durch achsialen Druck. — Für Hobelmaschinen u. dgl. als Revarstierkupplung ausgebildet. Mit der Welle fest verbunden ist die leichte Ankerscheibe, die aufsen die Reibringe trägt. Zu beiden Seiten dieser Scheibe laufen lose die mit Riemenscheiben oder — für direkten elektrischen Antrieb — mit Stirnrädern verbundenen Magnetkörper in einander entgegengesetzter Drehrichtung. Je nachdem die eine oder andere Seite gekuppelt wird, erfolgt Mitnahme der Ankerscheibe und ihrer Welle in der einen oder anderen Drehrichtung. Umsteuerung automatisch durch Umschalter: Wegfall der Riemenverschiebung und der Umsteuermechanismen.

### d. Kraftmaschinen-Kupplungen. \*)

Wird ein Wellenstrang von zwei Kraftmaschinen angetrieben, z. B. Wasserrad oder Turbine als Hauptmotor mit Dampfmaschine oder

Abb. 169.



Verbrennungskraftmaschine als Hilfsmotor, so wird eine Kupplung eingeschaltet, die sich je nach der Geschwindigkeit der beiden Kraftmaschinen selbsttätig ein- oder ausrückt.

1. Uhlhornsche Klinkenkupplung in der Ausführung der Maschinenfabrik G. Luther, A.-G. in Braunschweig. Auch gebaut vom Eisenwerk Wülfel und von der B.-A. M.-A.-G.)

Die Kupplung wird zwischen den Antrieben der beiden Kraft-

\*) S. Z. d. V. d. I. 1910 S. 1276 (Das Verhalten von Kraftmaschinen im mechanischen oder elektrischen Parallelbetrieb).

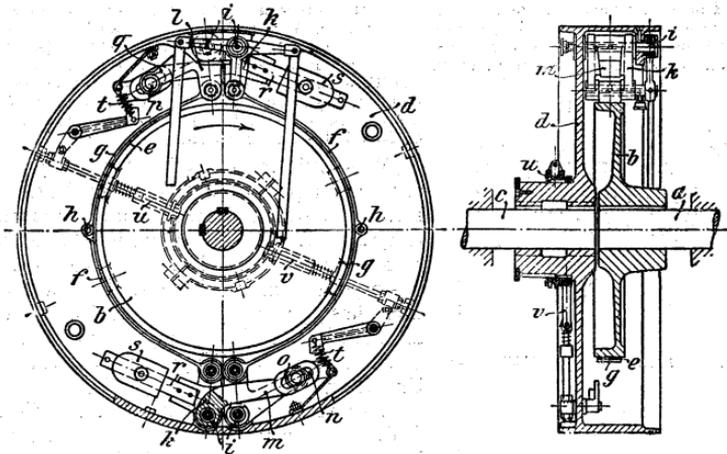
maschinen in den Wellenstrang eingeschaltet. Sie rückt selbsttätig ein, sobald die Hauptkraftmaschine zu langsam geht, und schaltet sich wieder aus, wenn der Hauptmotor allein die gewünschte Umlaufzahl innehalten kann. — Der innere Teil der Kupplung (Abb. 169) muß stets auf die Welle der Hilfsmaschine gesetzt werden. Die innere Scheibe überträgt die Umfangskraft auf die von der Hauptkraftmaschine getriebene Welle durch Sperrklinken, die in den äußeren Kupplungsteil eingreifen.

## 2. Kraftmaschinen-Kupplung „Ohnesorge“\*)

der B.-A. M.-A.-G. in Dessau und Berlin (Abb. 170).

Auf der Welle *a* der ständig laufenden Hauptmaschine sitzt aufgekeilt die Bremsscheibe *b*. Die Welle *c* der je nach Bedarf einzuschaltenden Zusatzmaschine trägt das Kupplungsgehäuse *d*. Um die Bremsscheibe *b* ist der zweiteilige, mit Bronzebelag *e* ausgefütterte Bremszaum gelegt, dessen Teile *f* und *g* durch die Gelenkbolzen *h*

Abb. 170.



aneinandergeschlossen sind. Die Teile *f* und *g* des Bremszaumes sind gelenkig an radial stehende, um Bolzen *i* im Gehäuse *d* schwingende Hebel *k* und *l* angeschlossen. Der Hebel *k* besitzt einen starr mit ihm verbundenen Arm *m*, der zwischen dem zweiteiligen Hebel *l* hindurchgeht und in einer Bahn *n* den Stein *o* trägt, dessen Zapfen *p* in Bohrungen der mit den Hebeln *l* starr verbundenen Winkelhebel *q* gelagert sind. Der Vorteil dieser Anordnung der Differentialhebel liegt darin, daß man die Hebel *k* und *l* beliebig bemessen kann. Die auf Stangen *r* an den Hebeln *k* einstellbaren Schwinggewichte *s* dienen dazu, die freien Fliehkräfte für alle Winkel-

\*) Z. d. V. d. I. 1908 Nr. 26.

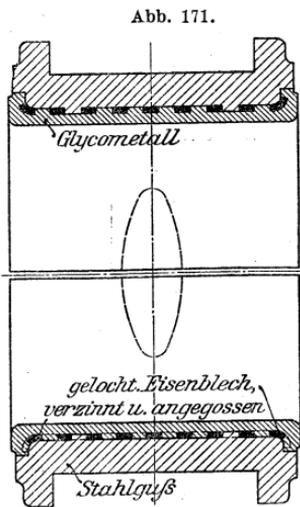
geschwindigkeiten auszugleichen. — Um für den Betrieb ein ständiges Anliegen des Zaumes zu erhalten, wird dieser leicht durch die Federn  $t$  angepreßt, die von einer auf der Nabe des Gehäuses  $d$  verschiebbaren Muffe  $u$  aus mittels der federnd über die Knicklage hinaus bewegten Stangen  $v$  ein- und ausgerückt werden können.

Arbeitsweise der Kupplung: Da im ausgerückten Zustand der Bremszaum gleichförmig abgehoben ist, so läuft während der Dauer der Arbeitslieferung allein durch die Hauptmaschine die Bremsscheibe  $b$  frei. Muß bei Mehrbedarf an Kraft die Zusatzmaschine eingeschaltet werden, so wird mit ihrem Anlassen der Bremszaum mit Hilfe der Einrückvorrichtung angelegt. Unter leichtem, durch die federnde Anpressung des Zaumes bedingtem Schleifen eilt das hier der Zusatzmaschine angehörige Kupplungsgehäuse  $d$  der Bremsscheibe  $b$  nach. Sobald gleiche Geschwindigkeit erreicht ist, findet dann die selbsttätige stoßfreie Kupplung statt, die sich als einfaches Anspannen des bereits in der richtigen Lage befindlichen Zaumes darstellt.

## G. Lager.\*)

Die nachstehend angegebenen Abmessungen von fertigen Lagern sind (ausgen. die besonders genannten Lager des Eisenwerkes Wülfel und der Peniger Masch.-Fabr) dem Preisbuche der **Berlin-Annaltischen Maschinenbau-Aktion-Gesellschaft in Dessau** auszugsweise entnommen. In den angegebenen Gewichten der Lager ist

das Gewicht der Grundplatte nicht enthalten. Das Grundplattengewicht beträgt für die kleinsten bis zu den größten Lagern etwa 100 bis herunter zu 50 vH des Lagergewichtes.



Wesentliche Teile eines Lagers: Lagerschalen, Lagerkörper, Lagerdeckel, Deckelschrauben mit Muttern, Grundanker und Grundplatte. Die Grundanker machen besondere Lagerfußschrauben (zur Befestigung des Fußes an der Grundplatte) überflüssig und bieten den Vorteil unmittelbarer Uebertragung eines etwa nach oben gerichteten Lagerdruckes auf den Unterbau.

Baustoff für die **Lagerschalen**: (Tafel f. d. Flächendruck zwischen Zapfen und Lagerschale s. S. 846) Gufseisen, besonders bei Kugelschalen (Sellers-Lagern) angewendet (s. Abb. 178 u. 179). — **Bronze** (Rotgufs) oder **Weißmetall**. Vielfach Gufseisen- oder Rotgufsschalen mit **Weißmetall ausgegossen** (Abb. 176 u. 177). Damit das Weißmetall gut haftet, muß

die Schale mit quer- und längsgerichteten Schwalbenschwanznuten versehen werden (s. auch unter Schubstangenköpfe).

Statt der Schwalbenschwanzverbindung, die eine unerwünschte Schwächung der Schale ergibt, wird neuerdings zur Verbindung von

\*) Ueber Lager für Dampfturbinen vrgl. Z. d. V. d. I. 1910 S. 121 u. f., sowie S. 835, 1242, 1246, 1305 u. 1773.

Schale und Weifsmetalleingufs das **Glyco-Skelett** angewendet (Abb. 171). Danach werden in die Gufsform der Schale, die aus Gufseisen oder Stahlgufs besteht, Skelettbleche (gelochte, verzinnte Eisenbleche) eingelegt, die an die Schale angegossen und dann mit **Glyco-Metall** ausgegossen werden, wobei die Löcher des Skelettbleches die Verbindung einerseits mit der Schale, andererseits mit dem Ausgufs aus Weifsmetall sichern. — Glyco-Metall ist eine Weifsmetallegerung von hohem Bleigehalt und geringem Reibungskoeffizienten. Für kleinere dünnwandige Lagerschalen wird das gelochte und verzinnte Skelettblech unmittelbar in die Sand- oder Metallform eingelegt und mit Glyco-Metall umgossen.

Länge  $l$  und innerer Durchmesser  $d$  der **Lagerschalen** sind durch den aufzunehmenden Zapfen gegeben. Rotgufsschalen erhalten eine kleinste Dicke  $s = \frac{1}{16} d + 0,5$  cm. Die Abmessungen der einzelnen Lagerteile sind aus dem Zapfendrucke  $P = kld$  (s. S. 845) zu ermitteln. Je nach der Größe des Flächendruckes  $k$  (s. S. 846) erhält man schwere oder leichte Lager; für gewöhnliche Triebwerklager mit  $l = 1,5 d$  genügt  $k = 20$  bis  $25$  kg/qcm. Mit der zulässigen Biegungsspannung für Gufseisen kann man bis  $k_b = 360$  kg/qcm gehen; ändert jedoch  $P$  Größe und Richtung, so ist  $k_b$  kleiner zu nehmen.

Der mittlere Flächendruck zwischen Grundplatte und auf dem Sandstein- oder Klinkermauerwerk ruhenden Zementuntergufs sei höchstens  $10$  kg/qcm. Ist das Lager unmittelbar auf Holz oder Eisen (Hangebocke, Säulen- und Wandkonsolen, Mauerkasten, Lagerstühle, Walzträger) zu schrauben, so fallen Grundplatte und Arbeitsleisten der unteren Lagerfläche fort.

Erfüllen bei Rraumangel die Deckelschrauben gleichzeitig den Zweck der Grundschrauben (wobei außer der Grundplatte noch die seitlichen Lagerfue wegfallen), so entsteht das **Rumpflager**.

Ist der Zapfendruck stets nach unten gerichtet, so kann an Stelle der oberen Rotgufs- oder Weifsmetallschale eine solche von Gufseisen und an Stelle des gewöhnlichen Deckels ein Staubdeckel oder Schmierkissen treten.

#### Ansprüche an ein gutes Lager.

1. Der Zapfen soll der ganzen Länge nach und im gröſsten Teile seines tragenden Umfanges anliegen; Kanten der Schmiernuten gut abrunden.

2. Der Spielraum zwischen Zapfen und Pfanne sei möglichst klein, jedoch so gros, das das Schmiermittel durchtreten kann.

3. Die Abnutzung durch Reibung ist durch richtige Zufuhr von Schmiermittel zu verhindern, wobei das Schmiermittel u. a. zugleich zur Wärmeabfuhr dienen kann.

4. Die Schmierung muſs während der Drehung des Zapfens zuverlässig wirken. Solange der Zapfen stillsteht, muſs die Schmierzufuhr ruhen.

5. Das Schmiermittel darf, nachdem es in den Laufflächen gewirkt hat, nicht verloren gehen oder die Umgebung verunreinigen; es muſs sich in besonderen Kammern zum Zwecke weiterer Verwendung aufspeichern.

6. Billige und einfache Wartung.

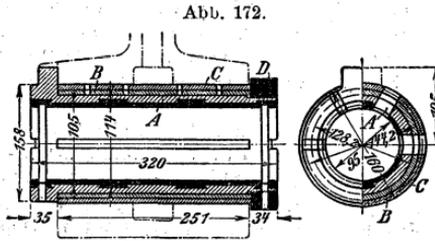
7. Möglichkeit jederzeitiger Prüfung des Zustandes des Lagers.

Für die **Lagerschalen** gilt außerdem:

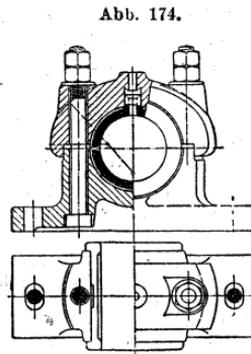
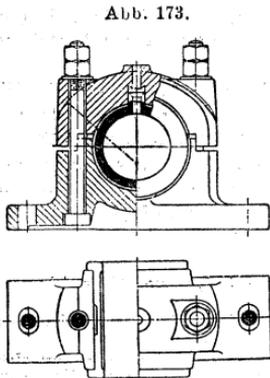
1. Abnutzung der Lagerschalen soll durch Nachstellen möglichst so ausgleichbar sein, das die Welle ihre ursprüngliche Achsenlage beibehält (vgl. z. B. die Abb. 181, 182 u. 183).

2. Abgenutzte Schalen müssen billig und schnell ersetzt und eingepast werden können.

3. Der Baustoff der Schalen muß so gewählt sein, daß die Zapfen geschont werden und die Abnutzung sich auf die Schalen beschränkt. Zuführung der Schmiere mittels Selbstöler oder Starrschmierbüchsen, neuerdings fast nur noch durch Ringe (**Ringschmierlager**), die im Lager auf der Welle lose hängen und in das Oel tauchen.\*) Statt der losen Ringe, die bisweilen unregelmäßig laufen, auch zweiteilige Oelringe, die im Lager durch eine starke Blattfeder oder dergl. derart auf die Welle festgeklammt werden, daß diese in der Längsrichtung verschiebbar bleibt (vgl. Abb. 177 u. 180).



Um Schwingungen der Wellen zu dämpfen und die Uebertragung auf den Lagerkörper zu vermeiden, verwendet die Felten & Guilleaume-Lahmeyerwerke A.-G. in Frankfurt a. M. **Mehrfach-Schalenlager** nach Abb. 172. Die Lagerschalen A, B, C sind mit 0,2 mm Spiel ineinandergesteckt und durch mehrere kleine Löcher so durchbohrt, daß die Zwischenräume der Schalen von Prefsöl völlig ausgefüllt



sind. Die Schalen B und C werden seitlich durch die über A geschraubte Mutter D gehalten. — Von der genannten Firma sind diese Mehrfach-Schalenlager für Turbo-Dynamos bei Umfangsgeschwindigkeiten\*\*) des Zapfens bis zu etwa 20 m/sk verwendet worden.

### 1. Stahlager mit festen Schalen.

Stahlager (nach R. Escher) für schwerere Wellen, zur Lagerung schwerer ausrückbarer Kupplungen und da, wo starke seitliche

\*) Vgl. hierzu R. Kablitz, Z. d. V. d. I. 1902 S. 1841.

\*\*) S. Lasche, Z. d. V. d. I. 1902 Nr. 50 u. f., Reibungsverhältnisse in Lagern mit hoher Umfangsgeschwindigkeit.

Züge auftreten, s. Abb. 173, 174 u. 175, letzteres mit Ringschmierung.\*)

**Stehlager der B.-A. M.-A.-G. mit herausnehmbaren Weißmetallschalen,** s. Abb. 176.

Abb. 175.

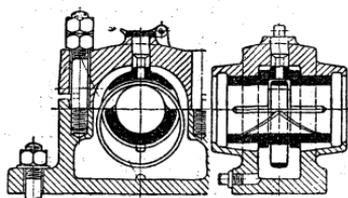
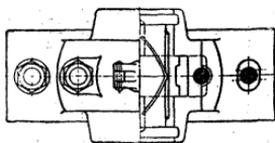
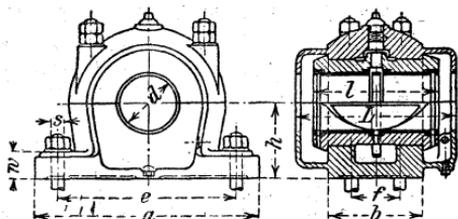


Abb. 176.



Der Mittelpunkt des Lagers kann nur wagerecht verstellt werden. Die Lager bis 160 mm Bohrung haben einen geteilten Schmiering, die mit größerer Bohrung zwei geteilte Schmierringe. S. Tafel:

Bohrung des Lagers $d$ mm	Länge des Schale $l$ mm		Lager- höhe $h$ mm	Fußplatte			Lagerfußschrauben		Zahl	Durch- messer $s$ mm	Ge- wicht kg
		$L$ mm		Länge $a$ mm	Breite $b$ mm	Stärke $w$ mm	Entfernung $e$ mm	$f$ mm			
30-35	90	125	65	190	75	23	140	.	2	13	7
40-45	110	150	75	220	90	25	166	.	2	13	11
50-55	130	180	82	260	105	30	200	.	2	16	19
60-65	155	205	95	310	125	35	230	.	2	20	27
70-80	175	230	110	350	140	40	250	.	2	23	38
85-95	205	265	125	400	165	50	300	.	2	26	65
100-110	240	310	140	450	190	50	340	.	2	29	93
115-130	280	360	170	510	220	62	400	110	4	26	145
135-160	330	420	200	580	250	72	460	130	4	32	230
165-190	390	490	235	680	280	85	550	150	4	39	365
195-220	450	560	270	790	320	93	630	170	4	42	540
225-260	525	650	300	900	380	100	720	210	4	51	800
265-300	600	750	340	1000	425	110	800	240	4	58	1220

**Stehlager\*\*)** für schwere Hauptantriebe mit herausnehmbaren Weißmetall-Lagerschalen, Ringschmierung und **sichtbarem Öelumlaufl**, vom Eisenwerk Wülfel in Wülfel (Abb. 177).

Der geteilte Öelring A ist gleichachsrig auf der Welle festgeklemmt und achsial leicht verschiebbar. Das am Öelringe haftende Öel sammelt sich in dem sichtbaren Behälter B und wird von hier über die ganze Lauffläche geleitet. Der große Umfang des Öelringes und die hohe Lage von B fördern den Öelumlaufl. B gestattet, stets den Öelinhalt zu prüfen sowie geeignete Schmiermittel auf Grund der Temperaturzunahme zu wählen. — Genauigkeit der Paßflächen  $\pm 0,01$  mm.

\*) Vrgl. Volk, Bearbeitung der Ringschmierlager, Z. d. V. d. I. 1907 S. 1245 u. f.

\*\*\*) Massenfabrikation der Transmissionslager im Eisenwerk Wülfel s. Werkstattstechnik 1909, Heft 5.

Wellen- durch- messer $d$ mm	Lager- länge $L$ mm	Schalen- länge $l$ mm	Lager- höhe $h$ mm	Fußplatte		Befestigungsschrauben				Ge- wicht kg
				Länge $a$ mm	Breite $b$ mm	Anzahl	$s$ mm	Längs- ent- fernung $J$ mm	Quer- ent- fernung bei 4Schrau- ben mm	
50 u. 55	200	155	100	290	85	2	16	230	—	22
60 u. 65	220	175	110	340	100	2	19	260	—	27
70 u. 75	250	200	120	380	110	2	22	283	—	40
80 u. 85	280	225	135	405	125	2	22	310	—	55
90 u. 95	320	260	150	440	140	2	25	340	—	77
100, 105 u. 110	360	300	170	470	180	4	22	380	100	108
115, 120 u. 125	400	340	190	500	200	4	25	410	115	151
130 u. 140	430	360	190	475	235	4	29	375	135	188
150 u. 160	470	400	200	520	260	4	32	410	145	233
170 u. 180	520	440	225	570	300	4	38	450	170	310
190 u. 200	570	490	240	650	330	4	38	510	180	416
220	620	540	270	710	360	4	44	555	200	585
240 u. 250	690	610	300	790	400	4	51	620	230	812
260 u. 280	740	650	340	850	440	4	51	660	250	1045
300 u. 320	920	780	375	1000	570	4	57	780	350	1625
340 u. 360	1040	930	440	1150	650	4	63	900	400	2365

In ähnlicher Bauart auch Lager für leichtere Triebwerke mit Kugelbewegung, Ringschmierung und sichtbarem Oelumlauf.

Der sichtbare Oelumlauf kann auch durch einen zwangläufig mit der Welle verbundenen Oelring bewirkt werden. — Der Oelring kann durch einen Stelling ersetzt werden, der zur Festlegung der Welle in ihrer Längsrichtung dient (vgl. S. 854).

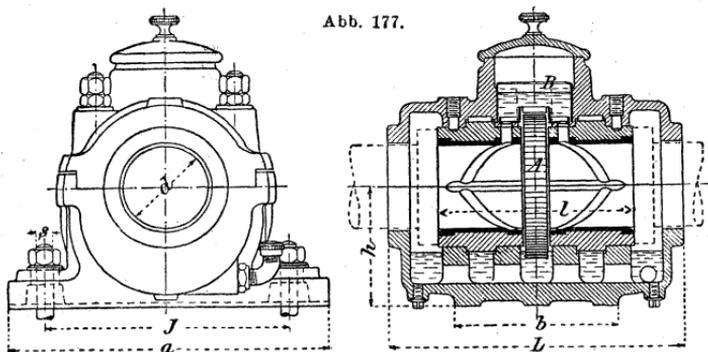


Abb. 177.

## 2. Stahlager mit Kugelschalen (Sellers-Lager).

Die beiden gußeisernen Schalen haben kugelförmige Drehzapfen, die in der Lagermitte ihren gemeinsamen Mittelpunkt haben und mit dem Deckel und dem Lagerkörper ein Kugelgelenk bilden; dadurch stellen sich die Schalen selbsttätig in Richtung der Welle ein. Große Schalenlänge (etwa  $l = 4$  bis  $5d$ ), also kleiner Flächendruck, gute und billige Schmierung, geringe Abnutzung, gute Wärmeentziehung.

Abb. 178 geschlossenes Stehlager der B.-A. M.-A.-G. Schalenlänge = 4 d. Bis 65 mm Bohrung haben die Schalen zwei, von 70 mm Bohrung an vier Kugelflächen.

Abb. 179 geschlossenes Ringschmier-Stehtlager der B.-A. M.-A.-G. Das Lager ist selbstdichtend, läßt also weder durch die Teilfugen noch an den Enden Öl austreten, ohne Verwendung besonderer Abstreichrichtungen o. dgl.

Der Mittelpunkt des Lagers läßt sich bei beiden Lagern nur waagrecht verstellen (durch Verschieben des Lagers auf seiner Unterlage).

Ein Stehlager mit Kugelschalen und festen Schmieringen zeigt Abb. 180 nach der Ausführung der Peniger Maschinenfabrik und Eisengießerei. Es hat links und rechts von den Lagerschalen je einen auf der Welle

Abb. 178.

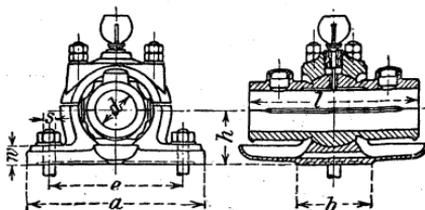
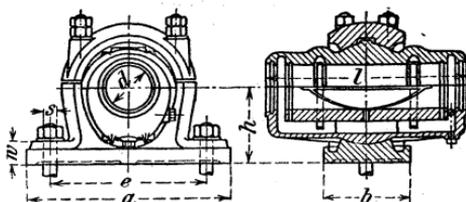


Abb. 179.



Lager nach Abb. 178.

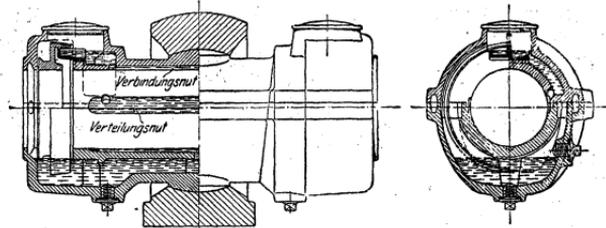
Bohrung des Lagers <i>d</i> mm	Länge der Schale <i>l</i> mm	Lager- höhe <i>h</i> mm	Fußplatte			Lagerfußschrauben		Gewicht kg
			Länge <i>a</i> mm	Breite <i>b</i> mm	Stärke <i>w</i> mm	Ent- fernung <i>e</i> mm	Durch- messer <i>s</i> mm	
25	$l = 4d$	48	160	65	20	115	13	3
30-35		55	190	75	23	140	13	5
40-45		75	220	90	25	156	13	9
50-55		82	260	105	30	200	16	14
60-65		95	310	125	35	230	20	23
70-80		110	350	140	40	260	23	38
85-95		125	400	165	50	300	26	58
100-110		140	450	190	50	340	29	88
115-130		160	516	220	62	396	32	144

Lager nach Abb. 179.

30-35	150	80	190	75	23	140	13	8
40-45	200	90	220	90	25	166	13	12
50-55	240	100	260	105	30	200	16	18
60-65	280	110	310	125	35	230	20	27
70-80	330	130	350	140	40	260	23	43
85-95	390	150	400	165	50	300	26	67
100-110	460	180	450	190	50	340	29	98
115-130	520	200	516	220	62	396	32	152

klemmend sitzenden einteiligen Schmierring. Die Schmierringe heben das Öl, das von Streichungen abgenommen wird und durch Kanäle in der Oberschale zu Schmiernuten gelangt, die nur wenig über

Abb. 180.



Wellenmitte liegen. Hier kommt das Öl zur Ruhe und verteilt sich gleichmäßig über die ganze Länge der Lagerschalen. Auf der Welle

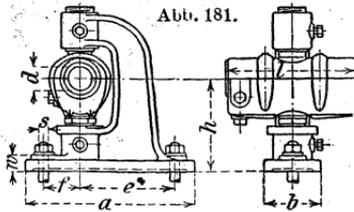


Abb. 181.

feststehende Schmierringe verlangen sorgfältige Bearbeitung, laufen aber dann auch bei großer oder ungleichmäßiger Geschwindigkeit ohne Schwanken und nutzen weder sich noch die Welle ab.\*)

**Offenes Stehlager** der B.-A. M.-A.-G. (Abb. 181). Der Mittelpunkt der Lagerschalen ist außer in waagrechter (durch Verschieben des

Lagers auf seiner Unterlage), auch in lotrechter Richtung verstellbar.

Bohrung des Lagers $d$ mm	Länge der Schale $l$ mm	Lager- höhe $h$ mm	Fußplatte			Lagerfußschrauben			Ge- wicht kg
			Länge $a$ mm	Breite $b$ mm	Dicke $w$ mm	Entfernung		Durch- messer $s$ mm	
						$e$	$f$		
40-45	200	160	270	90	25	150	60	13	15
50-55	240	175	315	105	30	175	70	16	22
60-65	280	205	380	125	35	215	85	20	33
70-80	330	240	445	140	40	255	100	23	52
85-95	390	275	520	165	50	295	115	26	77
100-110	460	310	570	190	50	340	130	29	115

### 3. Hängelager.

**Offenes Hängelager** (Abb. 182), offenes Hängelager mit Stangenschluß (Abb. 183), sowie **geschlossenes Hängelager** (Abb. 184), mit Kugelbewegung und in der Bauhöhe verstellbar (B.-A. M.-A.-G.).

\*) S. Volk, Maschinenteile, Z. d. V. d. I. 1907 S. 1765.

Bohrung des Lagers <i>d</i> mm	Scha- len- länge <i>l</i> mm	Aus- la- dung <i>h</i> mm	Fußplatte			Befestigungsschrauben				Lagergewicht				
			Länge <i>a</i> mm	Breite <i>b</i> mm	Dicke <i>w</i> mm	Ent- fernung <i>e</i> <i>f</i> mm mm		Zahl	Durch- messer <i>s</i> mm	offen Abb.182 kg	offen mit Stangen- schluß Abb.183 kg	ge- schlossen Abb.184 kg		
30—35	160	250	360	100	20	285	.	2	16	12	.	.		
		300	380	105	21	300	.	2	20	13	.	.		
		350	405	110	21	320	.	2	20	15	.	.		
		400	430	115	22	340	.	2	20	17	.	.		
40—45	200	250	380	110	22	300	.	2	20	20	.	20		
		300	405	115	22	320	.	2	20	21	.	21		
		350	430	120	22	340	.	2	20	22	.	22		
		400	455	125	23	360	.	2	20	23	.	23		
		450	480	130	23	380	.	2	20	25	.	25		
		500	505	135	24	400	.	2	23	27	.	27		
		300	430	125	23	340	.	2	20	26	27	28		
		350	455	130	23	360	.	2	20	28	29	30		
50—55	240	400	480	135	24	380	.	2	23	30	31	32		
		450	505	140	24	400	.	2	23	32	33	34		
		500	530	145	25	420	.	2	23	34	35	36		
		550	555	150	25	440	.	2	23	35	37	38		
		600	580	155	26	460	.	2	23	38	39	40		
		650	605	160	26	480	.	2	23	41	42	43		
		700	630	165	27	500	.	2	23	44	45	46		
		300	470	140	24	370	.	2	23	36	37	37		
60—65	280	350	495	145	25	390	.	2	26	39	40	40		
		400	520	150	25	410	.	2	26	42	43	43		
		450	545	155	26	430	.	2	26	45	46	46		
		500	570	160	27	450	.	2	29	48	49	49		
		550	595	165	27	470	.	2	29	51	52	52		
		600	630	170	28	500	.	2	29	54	55	55		
		650	655	175	28	520	.	2	29	57	58	58		
		700	680	180	29	540	.	2	29	61	62	61		
		350	530	170	27	420	.	2	26	60	60	60		
		400	555	175	28	440	.	2	26	63	65	64		
		450	580	180	28	460	.	2	26	66	68	68		
		70—80	330	500	605	185	29	480	.	2	29	69	71	72
550	635			190	29	505	.	2	29	72	74	76		
600	665			195	30	530	.	2	29	76	78	80		
650	695			200	30	555	.	2	29	80	82	84		
700	725			220	30	580	110	4	23	84	86	88		
800	785			230	31	630	120	4	23	92	94	98		
350	535			210	29	425	100	4	23	88	90	88		
400	565			215	29	450	105	4	23	92	94	92		
85—95	390	450	595	220	30	475	110	4	23	96	98	96		
		500	625	225	30	500	115	4	23	100	102	100		
		550	655	230	31	525	120	4	26	105	107	105		
		600	685	235	31	550	125	4	26	110	112	110		
		650	715	240	32	575	130	4	26	115	117	115		
		700	745	245	32	600	135	4	26	121	123	121		
		800	805	255	33	650	145	4	26	133	135	133		
		400	605	250	32	475	135	4	29	129	132	136		
		450	635	255	33	500	140	4	29	134	137	141		
		500	665	260	34	525	145	4	29	139	142	146		
		100 bis 110	460	550	695	265	34	550	150	4	29	145	148	152
				600	725	270	36	575	155	4	32	151	154	158
650	755			275	36	600	160	4	32	157	160	164		
700	785			280	37	625	165	4	32	163	166	170		
750	815			285	38	650	170	4	32	170	173	177		
800	845			290	38	675	175	4	32	177	180	184		

Abb. 182.

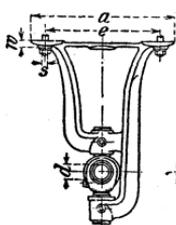


Abb. 183.

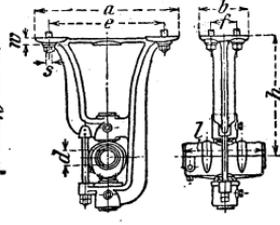
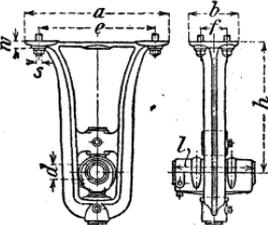


Abb. 184.



**4. Konsollager** der B.-A. M.-A.-G. s. Abb. 185. Ein Säulenkonsol mit Schellenbefestigung bei veränderlicher Ausladung zeigt Abb. 186, einen Mauerkasten für Stehlager Abb. 187. Wandkonsollager des

Abb. 185.

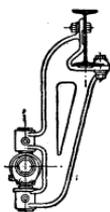


Abb. 187.

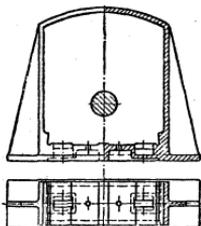


Abb. 188.

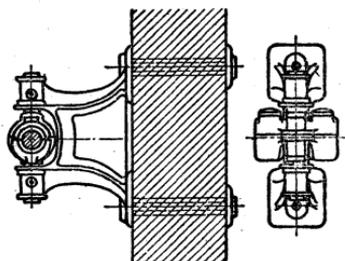
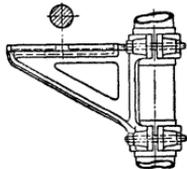


Abb. 186.



Eisenwerkes Wüfel mit sichtbarem Oelumlauf (s. Abb. 188).

**5. Kugellager.**

**1. Stahlkugeln.** Werden zwei gleiche Stahlkugeln vom Durchmesser  $d$  (in cm) mit der Kraft  $P$  (in kg) zentrisch gegeneinander gedrückt, so ist nach H. Hertz der Durchmesser der Druckfläche (in cm)

$$\Delta = 1,40 \sqrt[3]{\frac{Pd}{E}}$$

worin  $E = 2\,150\,000$  kg/qcm der Elastizitätsmodul, die elastische Annäherung der Kugeln je

$$\frac{\delta}{2} = 1,95 d \sqrt[3]{\frac{P^2}{E^2 d^4}}$$

und die **größte Druckbeanspruchung** (in der Mitte der Druckfläche) in kg/qcm:

$$p_{\max} = 1,5 p_m = 1,5 \frac{P}{\sqrt[3]{4\pi \Delta^2}}$$

wobei  $p_m$  die mittlere Druckbeanspruchung bezeichnet.

Wegen der Veränderlichkeit von  $E$  ist nach Versuchen von Stribeck\*)

$$\frac{\delta}{2} = \frac{0,966}{10^4} d \left( \frac{P}{d^2} \right)^{0,72}$$

und die **Zähigkeit**, d. i. die Arbeit, die eine zwischen zwei gleichen Kugeln gedrückte Kugel bis zum ersten Sprung aufnimmt, in cm/kg für 1 ccm Kugelhinhalt:

$$Z = \frac{0,77}{10^4} \left( \frac{P_k}{d^2} \right)^{1,72}$$

worin  $P_k$  die **Sprungbelastung** (in kg) ist.

Für guten Stahl ist die Sprungbelastung (in kg)  $P_k = 550$  bis  $700 d^2$ , entsprechend  $p_{\max} = 136500$  bis  $148000$  kg/qcm, die Bruchbelastung (in kg)  $K = 3500$  bis  $7000 d^2$ . Hiernach ergibt sich  $Z = 4$  bis  $6$  cmkg für 1 ccm.

Für die Güte der Kugeln ist maßgebend  $P_k$  oder  $Z$  sowie die Größe von  $p_m$  (oder  $p_{\max}$ ) bei verschiedenen Belastungen; es ist der Größtwert von  $p_m$  zu bestimmen.

**2. Zulässige Belastung** der Kugeln nach C. Bach und Stribeck (in kg)  $P = cd^2$ , wobei, wenn  $d$  in cm,

für **Gufseisenkugeln** zwischen zwei ebenen Flächen  $c$  bis 2,5;

für **gehärtete Stahlkugeln** auf ebenen, kegelförmigen oder zylindrischen Laufflächen

$c$  bis 100 bei stark absetzendem Betriebe,  
bis 50, höchstens 75 bei dauerndem Betriebe,  
dsgl. in hohlzylindrischen Stahlrinnen

von Kreisbogenform (Krümmungshalbmesser  $r = \frac{2}{3} d$  (Abb. 189),

$c$  bis 200 bei stark absetzendem Betriebe,  
 $c$  bis 100, höchstens 150 bei dauerndem Betriebe.

Die gewöhnlich benutzte Formel  $P = 150 d^2$  entspricht im Falle der Abb. 189 einer größten Druckbeanspruchung in der Mitte der Druckfläche

$$p_{\max} \sim 20\,000 \text{ kg/qcm.}^{**}$$

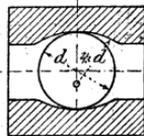
Die Sprungbelastung ergibt für diesen Belastungsfall bei genügend hartem Stahl  $p_{\max} \sim 80\,000$ .

Die angegebenen Werte  $c$  für **gehärtete Stahlkugeln** setzen besonders gute Ausführung voraus; in gewöhnlichen Fällen nehme man nur etwa  $\frac{2}{3}$  davon.

Als Material für die Kugeln wird Tiegelgußstahl (gehärtet), für die Lauffringe Chromstahl oder Nickelchromstahl (ebenfalls gehärtet) angegeben.\*\*\*)

**3. Kugellager**, wenn sehr genau und aus bestem Stoff hergestellt, haben folgende **Vorzüge**:

Abb. 189.



\*) Vrgl. Z. d. V. d. I. 1901 S. 73, 332 u. 1701.

\*\*) S. Gl. A. 1901 I. Juli S. 8. — Die Formeln ergeben  $p_{\max} = 88\,500$  bei  $P = 150 d^2$ .

\*\*\*) Vrgl. A. Bauschlicher, „Die Kugellagerungen“. Berlin 1908. Auch Z. d. V. d. I. 1908 S. 1185 u. 1236. S. auch von demselben Verfasser: Kugel- und Rollenlager in der Praxis in Zeitschr. f. Werkzeugmaschinen u. Werkzeuge. 5. Dezbr. 1910, S. 57 u. f.

1) Reibung (s. S. 255) ist fast unabhängig vom Schmiermittel, auch von dessen Verunreinigung durch Staub usw.; geringer Anlaufwiderstand. Die Reibungszahl, bezogen auf den Halbmesser des Zapfens, ist nach Versuchen der Deutschen Waffen- und Munitionsfabriken, Berlin,  $\mu = 0,0011, 0,0015, 0,0018$ , je nachdem die Belastung die zulässige ( $= 150 d^2$ ) oder die Hälfte oder  $\frac{1}{4}$  davon ist. Die genannte Firma liefert Stahlkugeln von  $\frac{1}{16}$  bis 6" engl. (1,587 bis 152,4 mm). 2) Das namentlich bei hohen Umlaufzahlen gefährliche Einlaufen entfällt ganz. 3) Kurze Lager. 4) Infolge der geringen Reibung minimale Wärmeentwicklung. 5) Geringer Oelverbrauch und geringe Wartung. 6) Einreihige Lager gestatten mäfsige Bewegungen der Wellen, sind also weniger empfindlich gegen Durchbiegungen und Aufstellungsfehler,

Bei einem Laufringe mit  $i$  Kugeln beträgt nach Striebeck bei der Gesamtlast  $Q$  die grösste Belastung einer Kugel:

$$P = \frac{5Q}{i},$$

falls  $i = 10$  bis 20.

Normales Kugellager der Deutschen Waffen- und Munitionsfabriken für 35 und 40 mm Wellendurchmesser (Stehlager) s. Abb. 190 u. 190a.)\*

Kugellager derselben Firma in Hänge-Anordnung s. Abb. 190b. — Ein Stehlager mit doppelt wirkendem Stützlager der D. W.-

Abb. 190.

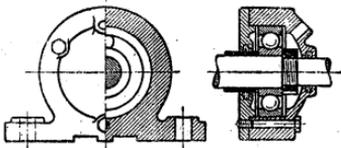


Abb. 190 a.

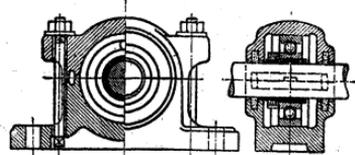


Abb. 190 b.

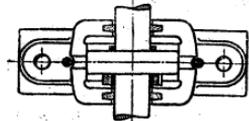
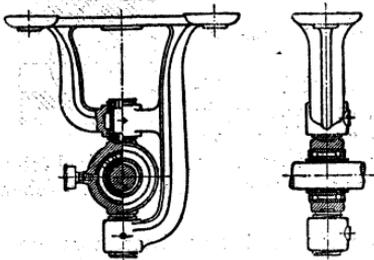
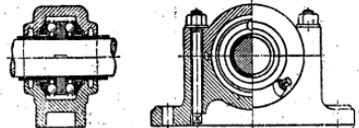


Abb. 191.



u. Mun.-Fabr. s. Abb. 191. — Ein Stütz-Kugellager für kleinere Kräfte mit gepressten Laufringen, die nach dem Pressen gehärtet und

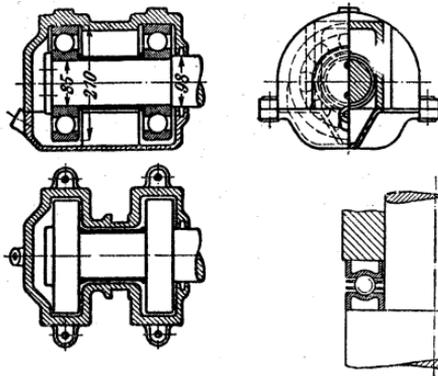
\*) Vrgl. im übrigen den Katalog der **Deutschen Waffen- und Munitionsfabriken**, der im Buchhandel bei Julius Springer-Berlin erschienen ist.

geschliffen werden und etwas federn, von der Maschinenfabrik Rheinland in Düsseldorf s. Abb. 192. (Zu vergleichen ist auch Abb. 82, S. 808).

Ein Achslager für Straßenbahnwagen der Deutschen Waffen- und Munitionsfabriken zeigt die Abb. 193.\*

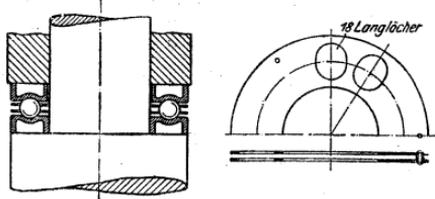
Bei Verwendung der Laufrinnen (Abb. 193) überträgt das Kugellager ohne besondere Vorkehrungen kleine, nicht dauernde Achsialdrücke. — Zu große Achsialdrücke verschleifen die Traglager und sind deshalb durch besondere Stützkugellager abzufangen.

Abb. 193.



Bei Verwendung mehrerer Traglager an einer Welle darf

Abb. 192.



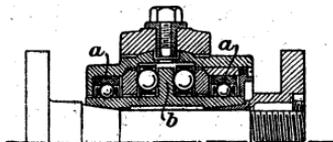
nur der Außenring eines Systems seitlich fixiert werden, alle anderen müssen seitlich verschiebbar sein, um Wellenausdehnungen (z. B. infolge Erwärmung) zu ermöglichen und Verklemmungen auszuschließen. Die Innenringe sind sämtlich seitlich festzuspannen und je nach dem Verwendungszweck mit Schiebeseit stramm oder mit Prefssitz auf die Welle zu passen. Nach Anziehen der Muttern an den Gehäusen usw. müssen die Kugellager spielend leicht gehen.

Im **Stützlager** beträgt die größte Belastung einer Kugel bei  $i$  Kugeln  $P = \frac{Q}{i}$ .

Der Koeffizient  $c$  für Stützkugellager nimmt mit dem Wachsen der Umlaufzahl rasch ab und schwankt zwischen 150 und 10 je nach Umlaufzahl.

Abb. 194.

Ein Kugellager der **Deutschen Kugellager-Fabrik G. m. b. H.** in Leipzig-Plagwitz, bei dem die eigentlichen Laufringe  $a, a$  durch ein zweiseitig wirkendes Drucklager  $b$  von Seitenstößen völlig entlastet sind, zeigt Abb. 194 in einer für **Motorbootwellen** (auch für Ventilatoren



\* S. auch Volk, Maschinenteile, Z. d. V. d. I. 1907 S. 1766; Hängelager und Stehlager der Deutschen Waffen- und Munitionsfabriken; Oelkammer-Kugelstehlager von G. Polysius in Dessau und der Peniger Maschinenfabrik, sowie Z. d. V. d. I. 1908 S. 598.

u. dgl. und ganz ähnlich für **Automobilnaben**) geeigneten Ausführungsform.

**6. Rollenlager.\*)** Bezeichnet

$P$  die zu übertragende Kraft in kg,

$i$  die Anzahl der Rollen,

$d$  den Durchmesser der Rollen (bei Kegelform den mittleren Durchmesser) in cm,

$l$  die tragende Länge in cm

und ist eine solche Ausführung der Rollen anzunehmen, daß sich eine gleichmäßige Verteilung von  $P$  über die Länge  $l$  und die  $i$  Rollen erwarten läßt, so ist

$$P = c i l d.$$

Hierin ist insbesondere für Brücken die Zahl  $c$ , damit erhebliche Formänderungen nicht stattfinden, wie folgt zu wählen:

$c$  bis 25 bei Rollen aus genügend hartem Gußeisen auf ebenen Platten von ebensolchem Gußeisen,

$c$  bis 60 bei Rollen aus genügend hartem Stahl auf ebenen Platten von ebensolchem Stahl oder Stahlgufs.

Bei großer Rollenlänge (etwa  $l > 5d$ ) ist  $c$  kleiner zu wählen. Neuerdings versucht man die Rollenlager\*\*) auch für Triebwellen zu verwenden, namentlich für sehr langsam umlaufende, stark belastete Wellen. Bei sorgfältig hergestellten, gehärteten Stahlrollen auf ebensolchen Büchsen findet sich dann  $c$  bis 150. — Rollenlager für (amerikan.) Eisenbahnfahrzeuge zeigen  $c = 20$ .

Nach Versuchen im Franklin-Institut wird durch Rollenlager die Reibung um 40 bis 50 vH vermindert. Die beste Form der Rollen ist das aus einem Bande durch schraubenförmiges Zusammendrehen gebildete Rohr.

### III. MASCHINENTEILE FÜR HEBEMASCHINEN.

#### A. Rundeisen-Ketten.

**Formgebung.** Kurzgliedrige Kette (Abb. 195) für Hebe-  
maschinen, weil Biegungsbeanspruchung auf Rollen und Trommeln minder groß. Lang-  
gliedrige Kette (Abb. 196) für Befestigungszwecke, weil leichter und  
billiger. Stegkette (Abb. 197) für Anker, weil Festigkeit um rd. 20 vH  
höher.

**Belastung.** Material: Zähes weiches Schweifeseisen mit 3500 kg/qcm  
Bruchfestigkeit und 12 bis 20 vH Bruchdehnung. Beanspruchung zu-  
sammengesetzt aus Zug und Biegung. Berechnung nur auf Zug üblich  
mit entsprechend vermindelter Beanspruchung:

$$P = \frac{2 d^3 \pi}{4} \cdot k_2.$$

\*) Versuche über Rollenlager s. Stribeck, Z. d. V. d. I. 1902 S. 1463.

\*\*) Z. d. V. d. I. 1908 S. 599.

Bruchfestigkeit (ermittelt durch Zerreißen von 3 bis 5 Gliedern):

$$k_{br} = 2400 \text{ kg/qcm bei Ketten ohne Steg}$$

$$= 2700 \text{ „ „ „ mit „}$$

nach der Vorschrift des Reichs-Marine-Amts.

$k_{br} = 2800 \text{ kg/qcm bei kurzgliedrigen Ketten}$   
der Duisburger Maschinenbau-A.-G.

Abb. 195.

**Kurzgliedrige Kette.**



Gewicht:  $q = 2,25 d^2 \text{ kg/m}$

Abb. 196.

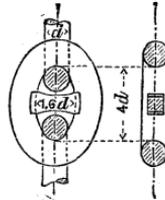
**Langgliedrige Kette.**



$q = 1,92 d^2 \text{ kg/m}$

Abb. 197.

**Stegkette.**



$q = 1,98 d^2 \text{ kg/m}$

Probebelastung (ermittelt auf der Prüfmaschine mit je 25 m Kettenlänge)

$$k_p = 1350 \text{ kg/qcm bei Ketten ohne Steg}$$

$$= 1800 \text{ „ „ „ mit „}$$

nach der Vorschrift des Reichs-Marine-Amts.

$k_p = 1400 \text{ kg/qcm bei kurzgliedrigen Ketten}$   
der Duisburger Maschinenbau-A.-G.

Zulässige Beanspruchung

$$k_z = 637 \text{ kg/qcm für kurzgliedrige Ketten (rd. 4-fache Sicherheit)}$$

$$= 955 \text{ „ Stegketten (rd. 3-fache Sicherheit)}$$

nach der Vorschrift des Reichs-Marine-Amts.

$k_z = 600 \text{ kg/qcm bei kurzgliedrigen Ketten}$   
der Duisburger Maschinenbau-A.-G. nach deren Angabe.

$k_z = 600 \text{ kg/qcm}$	(4-fache Sicherheit) für wenig angestrenzte Ketten	} nach C. v. Bach.
$\leq 500$	„ (5-fache Sicherheit) für häufiger benutzte Ketten	
$\leq 300$	„ (8-fache Sicherheit) für Dampfwindketten	

**Kurzgliedrige Kran- und Schiffsketten ohne Steg der Deutschen Maschinenfabrik A.-G., Werk Bechem & Keetmann in Duisburg.**  
Formgebung nach Abb. 195

$$f = \text{Querschnitt} = \frac{2d^2\pi}{4} \text{ in qcm}$$

$$q = \text{Gewicht von 1 m in kg}$$

$$P_1 = \text{Probelast in kg}$$

$$P_2 = \text{Bruchlast in kg}$$

<i>d</i>	<i>P</i> <sub>1</sub>	<i>P</i> <sub>2</sub>	<i>f</i>	<i>q</i>	<i>d</i>	<i>P</i> <sub>1</sub>	<i>P</i> <sub>2</sub>	<i>f</i>	<i>q</i>
mm	kg	kg	qcm	kg/m	mm	kg	kg	qcm	kg/m
5	560	1120	0,39	0,58	20	9000	18000	6,28	8,98
6	810	1620	0,57	0,81	21	9920	19840	6,93	9,90
7	1100	2200	0,77	1,10	22	10890	21780	7,60	10,87
8	1440	2880	1,01	1,44	23	11900	23800	8,31	11,90
9	1820	3640	1,27	1,82	24	12960	25920	9,05	12,94
10	2250	4500	1,57	2,25	26	15210	30420	10,62	15,18
11	2720	5440	1,91	2,72	28	17640	35280	12,32	17,61
12	3240	6480	2,26	3,24	30	20250	40500	14,14	20,22
13	3800	7600	2,45	3,80	33	24500	49000	17,11	24,46
14	4410	8820	3,08	4,41	36	29160	58320	20,36	29,11
15	5060	10120	3,53	5,06	39	34220	68440	23,89	34,16
16	5760	11520	4,02	5,76	43	41600	83200	29,04	41,53
17	6500	13000	4,54	6,50	46	47610	95220	33,24	47,53
18	7290	14580	5,09	7,28	49	54020	108040	37,71	53,82
19	8120	16240	5,67	8,14	52	60840	121680	42,47	60,73

**Kettenrollen und -Trommeln.** Rillenquerschnitt so zu gestalten, daß die Kette in beliebig verdrehter Lage Auflage findet: daher Halbkreis mit  $r = 1,75 d$  (Abb. 198 u. 199); Rillenbreite  $b = 3 d$ . Durchmesser der Rollen und Trommeln

$$D \geq 20 d$$

behufs Verringerung der Biegungsbeanspruchung. Befestigung der Kette auf der Trommel nach Abb. 200. Entlastung der Befestigung durch ein bis zwei Vorratswindungen. Uebereinanderwickeln vermeiden.

Abb. 198.

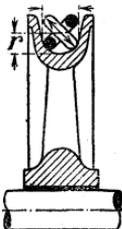


Abb. 199.

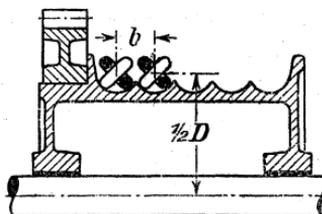
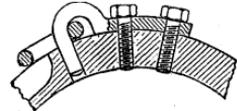


Abb. 200.



**Anwendungsgebiet.** Rundeseisenketten nur dort anzuwenden, wo Drahtseile nicht zulässig sind, z. B. im Seewasser (Ankerketten).

Nachteile der Kette großes Eigengewicht, große Trommelbreite, geringe Widerstandsfähigkeit gegen Stöße, Hartwerden nicht erkennbar, Lärm.

## B. Kalibrierte Ketten.

**Formgebung.** Wie bei der kurzgliedrigen Rundeisenkette, jedoch mit genau eingehaltener Teilung (erreichbar durch Stauchen bzw. Recken der einzelnen Glieder). Allgemein gültige Normen der Abmessungen bestehen noch nicht.

**Belastung.** Kleiner als bei Rundeisenketten, um schädliche Formänderungen und infolgedessen schlechten Eingriff in das Kettenrad zu vermeiden.

$$\left. \begin{array}{l} k_z \leq 400 \text{ kg/qcm für wenig angestrenzte Ketten} \\ \leq 300 \text{ " " häufiger benutzte " } \\ \leq 200 \text{ " " viel gebrauchte " } \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{nach} \\ \text{C. v. Bach.} \end{array}$$

Für Kettengeschwindigkeiten über 0,1 m/sk sind kalibrierte Ketten überhaupt nicht brauchbar: daher nur für Hebemaschinen mit Handbetrieb verwendbar.

**Kettenräder.** Erlauben weitgehende Beschränkung des Lastarmes und Verwendung beliebig großer Kettenlängen bei geringstem Raumbedarf. Als Haspelräder ermöglichen sie Antrieb mit Handkette ( $d = 5$  bis 10 mm) aus beliebiger Entfernung mit dem Vorteile gleichbleibender Richtung des Kettenzuges. Zug eines Arbeiters an der Handkette  $\geq 30$  kg.

Verzahntes Kettenrad mit 8 Zähnen s. Abb. 201.

Ist  $l$  die Kettenteilung und  $z$  die Zähnezahl des Kettenrades, so ist dessen Teilkreishalbmesser

$$r = \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{l}{\sin \frac{90^\circ}{z}}\right)^2 + \left(\frac{d}{\cos \frac{90^\circ}{z}}\right)^2}$$

Für schwache Ketten und große Zähnezahlen (insbesondere für Haspelräder mit Handkette), und zwar schon für  $d \leq 1,6$  cm und  $z \geq 6$  darf ohne merkbaren Fehler gesetzt werden

$$R = \frac{l}{2 \sin \frac{90^\circ}{z}}$$

(S. die Taf. S. 888.)

Das ablaufende (spannungslose) Kettenstück ist durch eine Leitrolle  $a$  (Abb. 202) oder einen Führungsbügel derart abzulenken,

dafs die Kette die verzahnte Kettenrolle mindestens auf dem halben Umfang umschliesst; infolge der elastischen Dehnung klemmen sich die Kettenglieder leicht zwischen den Zähnen fest und müssen durch einen Abstreifer (Abb. 202) herausgedrängt werden.

Abb. 201.

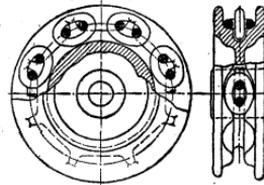
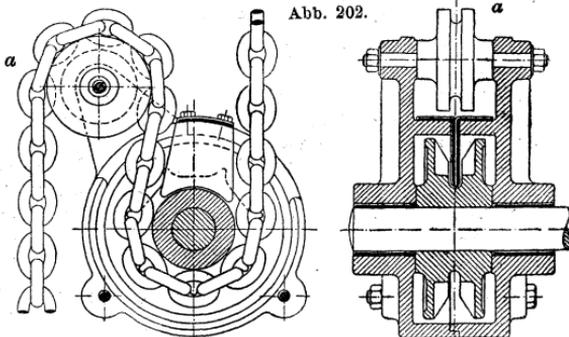


Abb. 202.



**Kalibrierte Ketten und Kettenräder**  
 der Welter Elektrizitäts- und Hebezeug-Werke A.-G., Cöln-Zollstock.

Ketten- eisen- dicke <i>d</i> mm	Teilung <i>l</i> mm	Kettenräder															
		Teilkreisdurchmesser $2r$ in mm (obere Zahl)															
		Zähnezahl $z$ (untere Zahl)															
4,5	16	{ 62 7	{ 108 10	{ 153 15	{ 173 17	{ 257 25											
5	18,5	{ 58 5	{ 72 6	{ 83 7	{ 94 8	{ 118 10	{ 212 18	{ 234 20	{ 283 24	{ 364 31	{ 420 36						
6	18,5	{ 72 6	{ 83 7	{ 94 8	{ 107 9	{ 118 10	{ 130 11	{ 142 12	{ 187 16	{ 200 17	{ 212 18	{ 234 20	{ 260 22	{ 284 26	{ 331 28	{ 353 30	
6	20	{ 76 6	{ 166 13	{ 178 14	{ 204 16	{ 254 20	{ 280 22	{ 357 28	{ 484 38	{ 548 43	{ 636 50						
7	22,5	{ 72 5	{ 85 6	{ 100 7	{ 115 8	{ 143 10	{ 157 11	{ 172 12	{ 186 13	{ 286 20	{ 343 24	{ 386 27	{ 456 32	{ 487 34	{ 614 43	{ 740 52	
8	22,5	{ 73 5	{ 86 6	{ 100 7	{ 114 8	{ 143 10	{ 157 11	{ 172 12	{ 186 13	{ 244 17	{ 258 18	{ 286 20	{ 314 22	{ 386 27	{ 456 32	{ 614 43	
9	25	{ 80 5	{ 95 6	{ 127 7	{ 159 10	{ 174 11	{ 238 15	{ 318 20	{ 428 27	{ 570 36							
9,5	31	{ 100 5	{ 120 6	{ 140 7	{ 160 8	{ 198 10	{ 196 11	{ 238 12	{ 318 16	{ 338 17	{ 360 18	{ 388 20	{ 411 21	{ 436 22	{ 534 27	{ 592 30	
11	30	{ 97 5	{ 114 6	{ 134 7	{ 153 8	{ 192 10	{ 214 11	{ 223 12	{ 264 14	{ 286 15	{ 382 20	{ 401 21	{ 422 22	{ 456 24	{ 575 30	{ 680 36	
13	36	{ 115 5	{ 137 6	{ 161 7	{ 184 8	{ 207 9	{ 230 10	{ 253 11	{ 275 12	{ 299 13	{ 322 14	{ 344 15	{ 458 20	{ 480 21	{ 500 22	{ 552 24	
14,5	42,5	{ 162 6	{ 214 8	{ 268 10	{ 320 12	{ 374 14	{ 404 15	{ 850 32									
16	48	{ 154 5	{ 184 6	{ 215 7	{ 275 9	{ 338 11	{ 362 12	{ 492 16	{ 1101 36								
18	54	{ 175 5	{ 207 6	{ 242 7	{ 276 8	{ 310 9	{ 322 10	{ 479 14									
20	62,5	{ 200 5	{ 240 6	{ 280 7	{ 320 8	{ 360 9	{ 800 20										
22	62,5	{ 200 6	{ 240 6	{ 280 7	{ 320 8	{ 360 9	{ 480 12	{ 812 20									
25	72	{ 236 5	{ 277 6	{ 322 7	{ 368 8	{ 414 9	{ 565 12		6	18,5	{ 364 31	{ 376 32	{ 420 36	{ 484 41	{ 1002 85		
26	72	{ 330 7							7	22,5	{ 850 60	{ 944 66	{ 1001 77				
28	72	{ 366 8							8	22,5	{ 740 52	{ 850 60					
30	80	{ 260 5	{ 310 6	{ 360 7	{ 410 8				9,5	31	{ 778 40						
30	91	{ 170 3							11	30	{ 1450 77						
32	80	{ 310 6	{ 410 8						13	36	{ 714 32	{ 836 37	{ 1331 58				

Bemerkung. Die Teilung *l* der Kette ist die innere Baulänge der Glieder

**Anwendungsgebiet.** Zweckmäßig für transportable Hebezeuge mit Handbetrieb, die klein und leicht sein müssen (Rollenzüge). Nicht brauchbar für elektrisch betriebene Hebemachines wegen der Empfindlichkeit der kalibrierten Ketten gegen Stöße, die Formänderung der Glieder herbeiführen.

### C. Gallsche Kette.

**Formgebung.** Bolzen aus Stahl mit gedrehten Zapfen, Laschen aus Stahl oder auch weichem, zähem Schweisseisen. Die Gallsche Gelenkette von Zobel, Neubert & Co. (Abb. 203) gewährt mit ihren in der Tafel S. 889 angegebenen Abmessungen und zulässigen Belastungen bei sorgfältiger Herstellung etwa fünffache Sicherheit gegen Zerreißen.

Belastung, Zugbeanspruchung der Laschen:

$$P = (b - d) s \cdot i \cdot k_z,$$

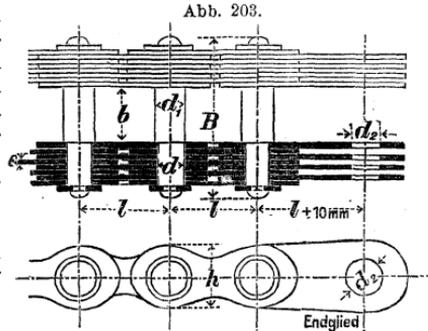
$$k_z = 400 \text{ bis } 800 \text{ kg/qcm}$$

(steigend mit der Kettenstärke).

Pressung der Bolzenfläche:

$$P = d \cdot s \cdot i \cdot p,$$

$$p = 800 \text{ bis } 1100 \text{ at (steigend mit der Kettenstärke).}$$

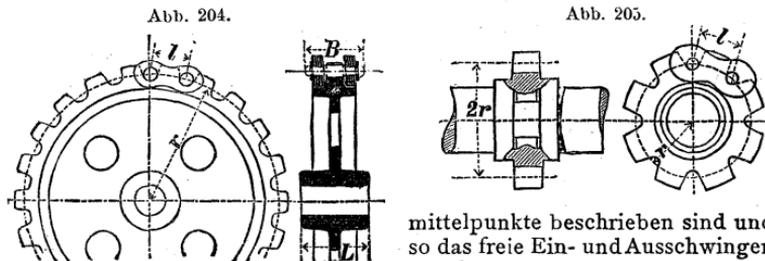


#### Gallsche Ketten von Zobel, Neubert & Co. in Schmalkalden (Thüringen).

*P* bedeutet die verbürgte zulässige Belastung in kg, *i* die Plattenzahl und *q* das Gewicht der Kette in kg/m; alles andere enthält Abb. 203.

<i>P</i> kg	<i>l</i> mm	<i>i</i>	<i>s</i> mm	<i>h</i> mm	<i>d</i> mm	<i>d</i> <sub>1</sub> mm	<i>b</i> mm	<i>B</i> mm	<i>d</i> <sub>2</sub> mm	<i>q</i> kg/m	Bemerkungen
100	15	2	1,5	12	4	5	12	23	6	0,7	Ohne Unterlagscheiben vernietet.
250	20	2	2	15	6	7,5	15	28	9	1,0	
500	25	2	3	18	8	10	18	38	12	2,0	
750	30	4	2	20	9	11	20	45	13	2,7	
1000	35	4	2	27	10	12	22	50	15	3,8	Mit Unterlagscheiben vernietet.
1500	40	4	2,5	30	12	14	25	60	18	5,0	
2000	45	4	3	35	14	17	30	67	21	7,1	
3000	50	6	3	38	17,5	22	35	90	26	11,1	
4000	55	6	4	40	21	24	40	110	32	16,5	
5000	60	6	4	46	23	26	45	118	34	19,0	
6000	65	6	4	53	24	28	45	125	36	24,0	Ver-splinet.
7500	70	8	4,5	53	26	32	50	150	40	31,5	
10000	80	8	4,5	65	30	34	60	165	45	34,0	
12500	85	8	5	70	31	35	65	180	47	44,8	
15000	90	8	5,5	75	34	38	70	195	50	51,1	
17500	100	8	6	80	36	40	75	208	54	58,1	
20000	110	8	6	85	38	43	80	215	56	74,4	
25000	120	8	6,5	100	40	45	90	235	60	83,3	
30000	130	8	7	106	45	50	100	255	65	100,0	

**Kettenräder.** Die Kettenachsen (Abb. 205) aus geschmiedetem Stahl und Kettenräder (Abb. 204) aus Gusseisen oder Stahlgufs erhalten seitliche Ränder, auf die sich die Laschenköpfe auflegen. Kleinste Zähnezahl  $z=8$ ; das Kopfprofil der Zähne wird nach Abb. 204 u. 205 durch Kreisbogen gebildet, die um die benachbarten Zapfen-



mittelpunkte beschrieben sind und so das freie Ein- und Ausschwingen der Kettenbolzen gestatten. Nabenlänge etwa  $L = B + 0,14r$ , wenn  $B$  die größte Breite der Kette (Abb. 203) und  $r$  der Teilkreisradius (s. o). Schutzhaube gegen Auspringen der Kette unerlässlich. Ist  $l$  die Baulänge der Gelenkkette und  $z$  die Zähnezahl des Kettenrades, so ist dessen Teilkreisradius

$$r = \frac{l}{2 \sin(180^\circ : z)}$$

Leitrollen erhalten keine Zähne, sondern glatte zylindrische Kränze, auf die sich die Bolzen auflegen.

**Anwendungsgebiet.** Der hohen Bolzenpressung wegen nur für geringe Geschwindigkeit  $< 0,5$  m/sk verwendbar; die Rostempfindlichkeit läßt die Verwendung im Freien und die Staubempfindlichkeit die Benutzung in staubigen Räumen als unzweckmäßig erscheinen; die Seitensteifigkeit schließt die Anwendung bei raschfahrenden Laufkränen aus; das große Eigengewicht macht die Kette ungeeignet für großen Hub. Gallsche Kette vorteilhaft bei großer Zugkraft, kleiner Geschwindigkeit und kleinem Hub. Gute Schmierung notwendig.

## D. Drahtseile.

**Formgebung.** Drahtseile aus vielen dünnen Drähten biegsamer als Drahtseile aus wenigen dicken Drähten, aber empfindlicher gegen Rost und gegen Reibung. Drahtseile mit Hanfseelen in den Litzen ebenfalls biegsamer als ohne solche, jedoch empfindlich gegen Querdruk. Albert-Geflecht biegsamer als Kreuzgeflecht, aber beträchtliche Verdrehung bei Belastung und Entlastung, daher nur bei geführter Last verwendbar. Drallfreie Seile aus rechts und links gewundenen Litzen zusammengesetzt. Von den sehr verschiedenartigen Konstruktionen sind die gangbarsten:

Förderseile aus Rundlitzen. Trommeldurchmesser und Seilgeschwindigkeit groß, daher großer Drahtdurchmesser: meist zwischen 2 und 3 mm. Womöglich Trommeldurchmesser  $\geq 1000 \times$  Drahtdurchmesser und  $\geq 100$  Seildurchmesser.

Förderseile aus Dreikantlitzen. Seelen der Litzen nicht aus Hanf, sondern aus 3 Formdrähten, die zusammen ein Dreieck bilden. Gedrängte Konstruktion, daher kleiner Seildurchmesser und gute Auflagefläche des Seiles auf Trommelrille und der Litzen gegeneinander.

Kranseile aus Rundlitzen. Trommeldurchmesser und Seilgeschwindigkeit klein, daher kleiner Durchmesser: zwischen 1 und 2 mm. Womöglich Trommeldurchmesser  $\geq 500 \times$  Drahtdurchmesser. Seile aus verzinkten Drähten sind widerstandsfähig gegen Rost, haben aber nur 0,9 der Tragfähigkeit von gleich dicken Seilen aus unverzinkten Drähten.

Kranseile aus doppelten Flachlitzen. Seelen der Litzen nicht aus Hanf, sondern aus Ovaldraht. Gute Auflagefläche des Seiles auf der Trommelrille. Drallfreiheit. Womöglich Trommeldurchmesser  $\geq 500 \times$  Drahtdurchmesser.

Verschlossene Seile. Aus Formdrähten so hergestellt, daß glatte, dichte Außenfläche entsteht; widerstandsfähig gegen Rost und Abnutzung, aber wenig biegsam. Nur für Tragsseile von Hängebahnen und für Führungsseile von Förderschächten.

**Belastung.** Verwendet wird Tiegelstahldraht mit Bruchfestigkeiten von  $k_z = 12000$  bis  $18000$  kg/qcm. Die wirkliche Bruchlast — auf der Prüfungsmaschine ermittelt — ist bis 10 vH kleiner als die in den Tabellen angegebene rechnerische Bruchlast — aus der Bruchfestigkeit der Drähte ermittelt —.

$$\text{Gesamtbeanspruchung} \quad k = k_z + k_b,$$

$$\text{wobei Zugbeanspruchung} \quad k_z = \frac{S}{i d^2 \pi \cdot \frac{1}{4}}$$

$$\text{und Biegebungsbeanspruchung} \quad k_b = c \cdot E \cdot \frac{\delta}{D}.$$

$E = 2150000$  für Stahldraht;  $c = \frac{3}{8}$  nach C. v. Bach mit Rücksicht darauf, daß die Biegebungsbeanspruchung bei Beginn der Krümmung nicht plötzlich auftreten kann. Isaachsen (Z. d. V. d. I. 1907 S. 652) empfiehlt  $c = \frac{1}{2}$  für Seile, die stets nach der gleichen Richtung gebogen werden und sich nicht um ihre Längsachse drehen können;  $c = 1$  für Seile, die nach entgegengesetzten Richtungen gebogen werden.  $S =$  statische Belastung + Massenwiderstand.

$$k = \frac{12000}{10} \quad \text{bzw.} \quad \frac{18000}{10} \quad \text{bei Menschenförderung,}$$

$$= \frac{12000}{6} \quad \text{bzw.} \quad \frac{18000}{6} \quad \text{bei Lastenförderung.}$$

## Drahtseile der Felten & Guilleaume-Lahmeyerwerke A.-G. in Mülheim am Rhein.

### Förderseile aus Rundlitzen.

Konstruktion	Drahtdicke mm	Seildicke mm	Seilgewicht kg	Rechnerische Bruchlast in kg für $K =$				
				12 000	14 000	16 000	18 000	
6 Litzen zu je	1,0	9	0,27	3 400	3 980	4 550	5 100	
	1,2	11	0,40	4 880	5 700	6 500	7 300	
	1,4	13	0,53	6 650	7 750	8 860	9 970	
	1,6	15	0,70	8 680	10 120	11 560	13 000	
	1,8	17	0,88	10 970	12 800	14 630	16 450	
	2,0	18	1,10	13 600	15 850	18 100	20 370	
6 Drähten,								
	7 Hanf- seelen	2,2	20	1,30	16 400	19 150	21 880	24 620
		2,4	22	1,56	19 520	22 770	26 020	29 270
		2,6	24	1,85	22 930	26 750	30 570	34 400
		2,8	26	2,13	26 600	31 000	35 470	39 900
		3,0	28	2,44	30 540	35 630	40 720	45 800
6 Litzen zu je	1,0	10	0,33	3 980	4 650	5 300	5 960	
	1,2	12	0,47	5 700	6 650	7 600	8 550	
	1,4	14	0,64	7 760	9 050	10 350	11 630	
	1,6	16	0,83	10 130	11 820	13 500	15 200	
	1,8	18	1,05	12 800	14 930	17 060	19 200	
	2,0	20	1,30	15 820	18 460	21 100	23 740	
7 Drähten,								
	7 Hanf- seelen	2,2	22	1,56	19 150	22 340	25 530	28 720
		2,4	24	1,86	22 780	26 530	30 330	34 180
		2,6	26	2,20	26 760	31 220	35 680	40 140
		2,8	28	2,53	31 040	36 200	41 380	46 550
		3,0	30	2,90	35 620	41 560	47 500	53 450
6 Litzen zu je	1,0	13	0,55	6 820	7 960	9 100	10 230	
	1,2	15	0,77	9 760	11 400	13 020	14 650	
	1,4	18	1,05	13 300	15 500	17 720	19 940	
	1,6	20	1,40	17 360	20 250	23 140	26 030	
	1,8	23	1,75	21 940	25 600	29 240	32 900	
	2,0	26	2,15	27 120	31 640	36 100	40 680	
1 Hanf- seele	2,2	28	2,60	32 830	38 300	43 770	49 240	
	2,4	30	3,10	39 000	45 550	52 000	58 550	
	2,6	32	3,65	45 770	53 530	61 170	68 820	
	2,8	35	4,20	53 220	62 090	70 960	79 830	
	3,0	38	4,85	61 080	71 260	81 440	91 620	
	6 Litzen zu je	1,0	14	0,65	7 960	9 280	10 600	11 920
1,2		16	0,90	11 400	13 300	15 200	17 100	
1,4		19	1,25	15 520	18 100	20 700	23 300	
1,6		22	1,60	20 250	23 630	27 000	30 400	
1,8		25	2,05	25 600	29 860	34 120	38 380	
2,0		27	2,55	31 640	36 900	42 180	47 450	
1 Hanf- seele	2,2	30	3,10	38 280	44 660	51 050	57 420	
	2,4	32	3,65	45 560	53 160	60 760	68 360	
	2,6	35	4,25	53 520	62 440	71 360	80 280	
	2,8	38	5,00	62 090	72 440	82 800	93 150	
	3,0	41	5,65	71 260	83 150	95 000	106 900	

Konstruktion	Drahtdicke mm	Seildicke mm	Seilgewicht kg	Rechnerische Bruchlast in kg für $K =$			
				12 000	14 000	16 000	18 000
6 Litzen zu je 16 Drähten, 7 Hanf- seelen	1,0	15	0,72	9 100	10 600	12 120	13 630
	1,2	20	1,65	13 000	15 170	17 330	19 500
	1,4	20	1,40	17 730	20 680	23 030	26 580
	1,6	23	1,85	23 140	27 000	30 860	34 720
	1,8	26	2,30	29 250	34 130	39 000	43 900
	2,0	29	2,85	36 170	42 200	48 230	54 260
	2,2	32	3,45	43 780	51 070	58 370	65 670
	2,4	34	4,10	52 070	60 750	69 430	78 100
	2,6	37	4,85	61 170	71 370	81 570	91 170
	2,8	40	5,60	70 950	82 770	94 600	106 400
3,0	43	6,45	81 440	95 000	108 500	122 120	
6 Litzen zu je 18 Drähten	1,0	16	0,85	10 230	11 950	13 650	15 350
	1,2	19	1,22	14 640	17 080	19 520	21 960
	1,4	22	1,68	19 950	23 280	26 600	29 930
	1,6	26	2,18	26 040	30 390	34 730	39 070
	1,8	29	2,76	32 900	38 400	43 890	49 370
	2,0	32	3,40	40 700	47 470	54 250	61 030
	2,2	35	4,12	49 240	57 450	65 660	73 870
	2,4	38	4,90	58 580	68 350	78 100	87 860
	2,6	41	5,75	68 820	80 280	91 740	103 200
	2,8	44	6,66	79 820	93 120	106 420	119 720
3,0	47	7,65	91 630	106 900	122 170	137 440	
6 Litzen zu je 27 Drähten, 1 Hanf- seele	1,0	19	1,20	15 360	17 920	20 480	23 040
	1,2	24	1,75	21 960	25 620	29 280	32 940
	1,4	27	2,40	29 940	34 930	39 920	44 910
	1,6	30	3,10	39 070	45 580	52 090	58 600
	1,8	34	3,90	49 380	57 610	65 840	74 070
	2,0	38	4,90	61 030	71 200	81 370	91 540
	2,2	42	5,85	73 870	86 180	98 490	110 800
	2,4	45	7,00	87 860	102 500	117 150	131 790
	2,6	49	8,20	103 220	120 420	137 630	154 830
	2,8	54	9,50	119 740	139 700	159 660	179 620
3,0	56	11,00	137 430	160 340	183 240	206 150	

## Förderseile aus Dreikantlitzen.

Konstruktion	Zahl und Dicke der Runddrähte in jeder Litze		Seildicke mm	Seilgewicht kg	Rechnerische Bruchlast in kg für			
	innere	äußere			13 000	14 000	16 000	18 000
6 Litzen mit je 3 Formdrähten, 1 Hanfseele	11 je 1,10	11 je 1,90	25	2,6	35 340	37 830	42 810	47 790
	11 » 1,15	11 » 2,05	26,5	2,95	40 550	43 400	49 100	54 800
	11 » 1,25	11 » 2,15	28,5	3,3	45 560	48 760	55 160	61 560
	9 » 1,41	12 » 2,14	30	3,7	48 300	51 750	58 590	65 430
	9 » 1,41	12 » 2,30	32	4,2	58 840	63 020	71 380	79 740
	12 » 1,55	14 » 2,12	34	4,7	62 670	66 980	75 600	84 220
	12 » 1,70	14 » 2,25	36	5,35	73 350	78 310	88 230	98 150
	12 » 1,77	14 » 2,40	38	6,0	81 750	87 320	98 450	109 580
	12 » 1,84	14 » 2,52	40	6,6	89 120	95 210	107 480	119 660
	12 » 1,92	14 » 2,65	42	7,25	98 540	105 250	118 670	132 080
	12 » 2,00	14 » 2,75	44	7,9	106 270	113 510	127 990	142 470
	12 » 2,16	15 » 2,70	46	8,4	115 400	123 270	138 840	153 400
	12 » 2,25	15 » 2,85	48	9,25	126 600	135 210	152 420	169 630
	12 » 2,44	16 » 2,80	50	10,3	137 450	146 710	165 230	183 750
	12 » 2,50	16 » 2,91	52	10,0	148 110	158 000	177 850	197 670
	13 » 2,55	17 » 2,90	54	12,2	164 700	175 500	197 100	226 700
	13 » 2,80	18 » 2,90	56	13,4	182 000	194 000	208 100	242 100
	13 » 2,85	19 » 2,90	58	14,5	191 530	204 000	229 000	254 000

**Kranseile aus Rundlitzen.**

Konstruktion	Draht­dicke mm	Seil­dicke mm	Seil­gewicht kg	Rechnerische Bruchlast in kg für $K =$				
				12 000	14 000	16 000	18 000	
6 Litzen mit je 59 Drähten, 1 Hanfseele	0,5	8	0,21	2 730	3 190	3 650	4 100	
	0,6	9,5	0,31	3 830	4 470	5 100	5 750	
	0,7	11	0,41	5 200	6 060	6 930	7 800	
	0,8	12,5	0,54	6 840	7 980	9 120	10 260	
	0,9	14	0,69	8 750	10 210	11 670	13 130	
	1,0	16	0,85	10 800	12 600	14 400	16 200	
	1,1	17	1,03	13 000	15 160	17 330	19 500	
	1,2	19	1,22	15 450	18 030	20 600	23 200	
	1,3	20	1,44	18 200	21 200	24 250	27 300	
	1,4	22	1,68	21 060	24 570	28 080	31 600	
	1,5	23	1,91	24 200	28 230	32 270	36 300	
	1,6	26	2,18	27 500	32 070	36 650	41 250	
	6 Litzen mit je 37 Drähten, 1 Hanfseele	0,5	11	0,40	5 300	6 200	7 100	8 000
		0,6	13	0,60	7 460	8 700	9 950	11 200
0,7		15	0,80	10 100	11 800	13 500	15 200	
0,8		17	1,10	13 300	15 600	17 800	20 000	
0,9		20	1,35	17 000	19 900	22 700	25 600	
1,0		22	1,65	21 000	24 500	28 000	31 500	
1,1		24	2,00	25 300	29 500	33 700	37 900	
1,2		26	2,40	30 100	35 100	40 100	45 200	
1,3		28	2,80	35 400	41 300	47 200	53 100	
1,4		30	3,25	41 000	47 800	54 700	61 500	
1,5		32	3,75	47 100	55 000	62 500	70 700	
1,6		35	4,25	53 500	62 500	71 400	80 300	

**Drahtfreie Kranseile aus doppelten Flachlitzen.**

Konstruktion	Drahtdicke mm	Seil­dicke mm	Seil­gewicht kg	Rechnerische Bruchlast in kg für	
				blanke Drähte	verzinkte Drähte
10 Litzen zu je 8 Drähten, 1 Hanfseele	0,7	9	0,29	3 900	3 300
	0,8	10	0,39	5 200	4 550
	0,9	11	0,49	6 600	5 900
	1,0	12	0,62	8 300	7 300
	1,1	13	0,80	9 900	8 300
	1,2	15	1,00	11 700	9 900
	1,3	17	1,10	13 800	11 700
	1,4	18	1,25	16 000	13 800
	1,5	20	1,45	18 400	16 000
	1,6	21	1,65	20 900	18 400
	1,7	22	1,85	23 600	20 900
	1,8	24	2,05	26 400	23 600
	1,9	25	2,25	29 300	26 400
	2,0	26	2,60	32 600	29 300
10 Litzen zu je 10 Drähten, 1 Hanfseele	0,7	10	0,39	4 900	4 200
	0,8	12	0,50	6 500	5 700
	0,9	13	0,65	8 300	7 400
	1,0	14	0,80	10 300	9 200
	1,1	15	1,00	12 400	10 300
	1,2	17	1,20	14 700	12 400
	1,3	19	1,35	17 300	14 700
	1,4	20	1,55	20 000	17 300
	1,5	22	1,80	23 000	20 000
	1,6	23	2,00	26 100	23 000
	1,7	25	2,30	29 500	26 100
	1,8	27	2,55	33 000	29 500
	1,9	28	2,90	36 800	33 000
	2,0	30	3,25	40 800	36 800

## Verschlossene grobdrätige Tragseile.

Seildicke mm	Seilgewicht kg	Rechnerische Bruchlast in kg für $K =$		
		5500 bis 6000	9000 bis 10 000	12 000
20	2,45	16 430	27 150	34 300
21	2,65	17 630	29 120	36 780
22	2,70	18 800	31 050	39 230
23	3,00	20 790	34 340	43 380
24	3,30	23 160	28 260	48 330
25	3,60	24 950	41 230	52 080
26	3,80	25 430	42 180	53 280
27	4,10	28 000	46 260	58 450
28	4,60	31 600	52 250	66 000
29	5,00	32 300	53 360	67 400
30	5,20	36 000	59 470	75 100
31	5,50	37 860	60 600	79 000
32	5,70	39 730	65 640	82 920
33	6,00	41 340	68 300	86 280
34	6,50	46 300	76 500	96 600
35	6,70	50 000	82 650	104 400
36	7,10	51 600	85 400	107 880
37	7,70	52 840	87 300	110 300
38	7,90	56 240	92 300	117 360
39	8,40	60 120	99 360	125 500
40	8,70	61 630	101 820	128 610
41	9,30	63 140	104 310	131 760
42	9,70	68 070	112 460	142 050
43	10,70	71 350	117 900	147 000
44	11,00	73 970	122 220	154 380
45	11,70	78 200	129 200	163 200

## Drahtseile von G. Atmer in Hamburg.

## Kranseile (unverzinkt).

Kon- struktion	Draht- dicke	Seil- dicke	Seil- ge- wicht	Rechnerische Bruchlast in kg für $K = 13 500$ bis 14 000	Kleinster Rollen- durch- messer	Rechnerische Bruchlast in kg für $K = 17 000$ bis 18 000	Kleinster Rollen- durch- messer
	mm	mm	kg		mm		mm
6 Litzen zu je 19 Drähten, 1 Hanf- seele	0,55	8	0,25	3 700	150	4 700	200
	0,65	10	0,35	5 100	160	6 600	225
	0,8	12	0,05	7 800	180	10 000	250
	0,95	14	0,07	11 100	225	14 100	300
	1,05	16	0,09	13 500	275	17 300	350
	1,2	18	1,2	17 700	325	22 500	400
	1,35	20	1,5	22 300	375	28 500	500
	1,45	22	1,8	25 800	450	32 900	600
	1,6	24	2,0	31 400	550	40 100	725
	6 Litzen zu je 31 Drähten, 1 Hanf- seele	0,8/0,5	14	0,7	11 000	200	14 100
0,9/0,6		16	0,9	14 200	225	18 000	275
1,1/0,65		18	1,2	17 400	275	22 100	325
1,1/0,7		20	1,5	21 000	325	26 700	400
1,2/0,8		22	1,8	25 200	375	32 200	500
1,35/0,9		24	2,0	31 900	450	40 600	600
1,55/1,05		28	2,8	43 400	600	53 900	800
1,8/1,2		32	3,8	50 800	850	72 400	1100
2,0/1,35		36	4,8	70 400	1100	89 700	1400

Konstruktion	Drahtdicke	Seildicke	Seilgewicht	Rechnerische Bruchlast in kg für $K = 13\ 500$ bis 14 000	Kleinsten Rollendurchmesser	Rechnerische Bruchlast in kg für $K = 17\ 000$ bis 18 000	Kleinsten Rollendurchmesser
	mm	mm	kg		mm		mm
6 Litzen zu je 37 Drähten. 1 Hanfseele	0,85	18	1,2	17 300	250	22 300	275
	0,95	20	1,5	21 600	275	27 500	325
	1,05	22	1,8	26 400	325	33 700	375
	1,15	24	2,0	31 600	400	40 400	450
	1,35	28	2,8	43 600	500	55 500	600
	1,5	32	3,8	53 900	650	68 600	800
	1,7	36	4,8	69 200	850	88 100	1000
	1,9	40	6,0	86 500	1050	110 000	1200
	2,1	44	7,5	95 900	1250	134 500	1450
	2,3	48	9,0	126 700	1500	161 000	1700
6 Litzen zu je 19 Drähten. 1 Hanfseele	0,9	24	2,0	32 000	300	40 600	400
	1,05	28	2,8	43 500	375	56 200	500
	1,2	32	3,8	56 900	475	72 400	600
	1,3	36	4,8	66 700	600	84 900	750
	1,5	40	6,0	88 900	800	113 000	950
	1,65	44	7,5	107 500	1000	136 500	1200
	1,8	48	9,0	128 000	1200	162 500	1450
	1,9	52	10,5	142 500	1400	181 500	1700
	2,05	56	12,0	166 000	1600	211 500	1950
	2,25	60	14,0	200 000	1800	254 000	2250

## Drallfreie Kranseile (unverzinkt).

Konstruktion	Drahtdicke	Seildicke	Seilgewicht	Rechnerische Bruchlast in kg für $K = 13\ 500$ bis 14 000	Kleinsten Rollendurchmesser	Rechnerische Bruchlast in kg für $K = 17\ 000$ bis 18 000	Kleinsten Rollendurchmesser
	mm	mm	kg		mm		mm
18 Litzen zu je 7 Drähten	0,75	12	0,55	7 500	150	8 700	200
	0,9	14	0,80	10 500	200	14 000	275
	1,0	16	1,0	13 250	250	17 250	325
	1,1	18	1,25	16 000	300	21 000	400
	1,25	20	1,60	21 000	350	27 000	475
	1,35	22	1,85	24 500	425	31 500	575
	1,5	24	2,25	30 500	500	37 000	675
18 Litzen zu je 19 Drähten	0,7	14	0,8	11 000	200	14 500	275
	0,8	16	0,1	14 500	225	19 000	300
	0,9	18	1,25	19 000	250	24 000	375
	1,0	20	1,60	23 000	300	29 500	400
	1,1	22	1,85	27 750	350	36 000	425
	1,2	24	2,25	33 000	425	42 750	525
	1,3	26	2,65	38 500	500	50 000	575
1,4	28	3,2	45 000	600	58 000	675	
18 Litzen zu je 19 Drähten	0,65	16	1,0	15 250	200	19 750	275
	0,75	18	1,25	20 250	225	26 500	300
	0,8	20	1,60	23 000	250	30 000	350
	0,9	22	1,85	29 250	300	38 000	400
	0,95	24	2,25	32 750	350	42 500	475
	1,0	26	2,65	36 000	425	47 000	575
	1,1	28	3,20	43 750	500	56 750	675
	1,2	30	3,75	52 000	600	65 000	800
	1,3	32	4,20	60 000		76 500	

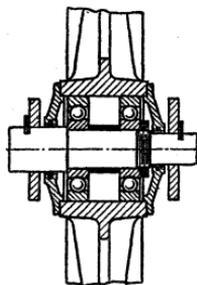
Konstruktion	Drahtdicke	Seildicke	Seilgewicht	Rechnerische Bruchlast in kg für $K = 13\ 500$ bis 14 000	Kleinster Rollen-durchmesser	Rechnerische Bruchlast in kg für $K = 17\ 000$ bis 18 000	Kleinster Rollen-durchmesser
	mm	mm	kg		mm		mm
18 Litzen zu je 27 Drähten	0,6	18	1,25	19 000	200	24 000	275
	0,65	20	1,6	21 500	250	28 000	325
	0,75	22	1,85	29 000	275	35 000	375
	0,8	24	2,25	33 500	300	42 500	400
	0,85	26	2,65	37 500	350	48 000	475
	c,95	28	3,2	47 500	400	60 000	525
	1,0	30	3,75	51 000	500	67 000	650
	1,1	32	4,2	62 500	600	80 000	800
	1,25	36	5,2	80 000	700	105 000	925
	1,5	40	6,5	110 000	800	145 000	1100

**Seilrollen.** Näheres über ihren Durchmesser s. S. 891. Die Seilrollen erhalten eine Rille, die nach Abb. 206 auf eine Tiefe gleich dem 2,5- bis 3-fachen des Seildurchmessers so eingedreht wird, daß das Seil mit möglichst geringem Spielraum, aber ohne jede Klemmung gebettet wird; keine Ausfütterung. Auslegerrollen erfordern einen weiteren Rillenquerschnitt, um das pendelnde Seil vor Durchscheuern an den Flanschenrändern zu schützen. Meist sind Schutzbügel, die das Auspringen des Seiles aus der Rille verhindern, notwendig, und diese gestatten dann flachere Rillen. Seilrolle mit Kugellagern nach Abb. 206 a.

Abb. 206.



Abb. 206 a.



**Seiltrommeln.** Schraubenförmig eingedrehte Rille von kreisbogenförmigem Profil; Rillenbreite etwa 2 mm größer als die Seildicke. Seilablenkung aus der Mittellage möglichst  $\leq 1:50$ , d. h. die Achsenentfernung der Trommeln und Rollen betrage mindestens das 25- bis 30-fache

Abb. 207.

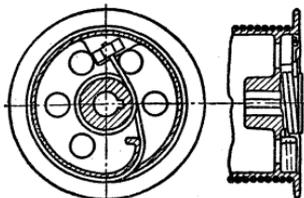
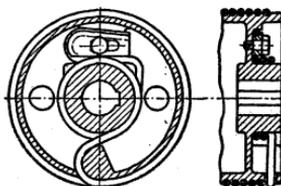


Abb. 208.



der Trommellänge; erforderlichenfalls ist eine besondere, selbsttätig oder zwangläufig achsial verschiebbare Zuführungsrolle anzuordnen.

**Selb­festigung** so, daß das durch all­mähliches Zusammen­pressen der Hanf­seele dünner wer­dende Seil sich nicht durch­ziehen kann und daß das Seil leicht aus­ge­wech­sert werden kann. Zweck­mäßig ent­weder Reibungs­festigung — mehr­fache Um­schlingung der Trom­mel­nabe, Abb. 207 — oder Keil­festigung, die sich durch den Seil­zug fest­zieht, Abb. 208.

**Anwendungs­gebiet.** Ketten nahezu überall durch Draht­seile ver­drängt wegen der Betriebssicherheit, des geringen Eigengewichts, des geringen Raum­bedarfs der Draht­seile auf der Trommel, wegen der Geräuschlosigkeit und Dauerhaftigkeit der Draht­seile. Nur bei Rollen­zügen noch kalibrierte Ketten und nur bei kurzem Hub und großer Zugkraft Gallsche Ketten.

## E. Hanf­seile.

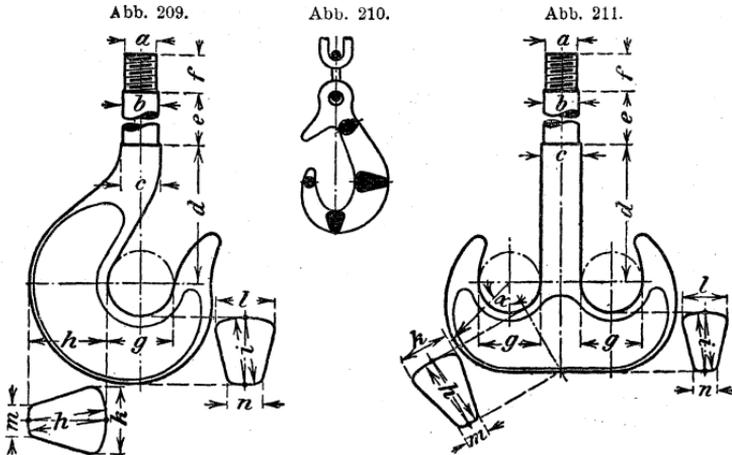
### Hanf­seile von Felten & Guilleaume in Cöln a. Rh.

Seildicke mm	Seilgewicht kg	Tragkraft in kg bei achtfacher Sicherheit		
		Russischer Reinhanf	Reiner Schleifshanf	Badischer Schleifshanf
13	0,14	130	145	165
16	0 21	200	230	251
18	0 25	234	290	330
20	0 31	314	350	393
23	0 39	416	470	519
26	0 51	531	600	663
29	0 67	660	740	825
33	0 80	855	960	1 057
36	0 95	1 017	1 145	1 271
39	1,15	1 194	1 340	1 492
46	1,50	1 661	1 870	2 055
52	1,95	2 122	2 390	2 599
55	2 25	2 226	2 493	2 733
60	2 55	2 473	2 755	3 180
65	2 90	2 694	2 984	3 563
70	3 50	2 885	3 221	3 846
75	3 90	3 160	3 587	4 101
80	4 50	3 328	4 020	4 460
85	5 00	3 757	4 305	4 890
90	5 60	4 133	4 848	5 404
95	6 30	4 665	5 400	5 932
100	7 20	5 163	5 887	6 476
110	8 50	6 036	6 886	7 508
120	9 60	7 206	8 051	8 800
130	11,50	8 300	9 286	10 103
140	13,60	9 610	10 577	11 535
150	15,30	10 810	11 700	12 805

**Anwendungs­gebiet.** Für kleine Aufzüge und als Hand­seile nur noch selten ge­braucht. Dagegen viel verwendet als Schling­seile zum An­hängen von Lasten an den Lasthaken.

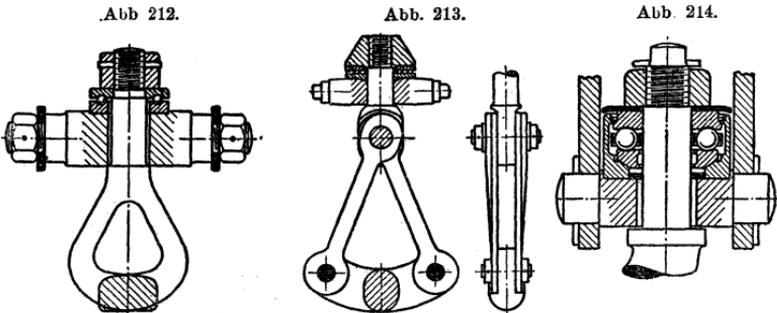
## F. Lasthaken.

**Formgebung.** Einfache Haken mit weiter Öffnung nach Abb. 209 für geringe Hubgeschwindigkeit bis zu 0,25 m/sk. Einfache Haken mit enger Öffnung zum Schutz gegen Ausspringen nach Abb. 210 für größere Hubgeschwindigkeit. Doppelhaken nach Abb. 211 für



Gießerei- und Werkstattskrane. Oesen einteilig nach Abb. 212 für Lasten unter 25 t, dreiteilig nach Abb. 213 für Lasten über 25 t.

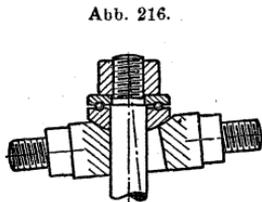
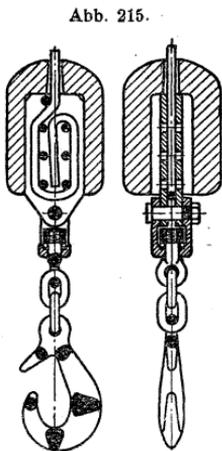
**Befestigung.** Drehbarkeit um lotrechte Achse stets zweckmäÙig, und zwar mittels Kugellager — Abb. 214 —. Ein in der Büchse



liegender Kupferferring verhindert das Herauspringen des Lauf rings aus der Büchse; unter der Schaftmutter liegt ein Schutzblech. Zwischen Belastungsgewicht und Haken zweckmäÙig eine Rundeisenkette von 0,5 bis 1 m Länge — Abb. 215 —, damit der Haken leicht zur Seite ge-

zogen werden kann. Zwischen Losrolle und Haken zweckmäÙig ein Doppelgelenk oder kugelige Aufhängung — Abb. 216 —, damit Biegungsbeanspruchung im Hakenschaft vermieden wird. Einschaltung von Federn ist bei Ketten sehr ratsam, weil diese wenig elastisch sind; bei Drahtseilen ganz überflüssig, weil diese selbst elastisch.

**Belastung.** Unter der Voraussetzung einer solchen Hakenform, daÙ



der Krümmungshalbmesser der krummen Haken - Mittellinie daselbst  $r = a + e_1$  gesetzt werden kann, ergibt sich für den gefährlichen Querschnitt  $AB$  die Tragkraft des Hakens (in kg) aus der Formel für  $\sigma$  auf S. 609:

$$P = k_z \cdot \frac{a}{e_1} k \cdot F.$$

Hierin bedeutet

- $F$  den Haken-Querschnitt  $AB$  in qcm,
- $k_z$  die zulässige Zugspannung des Stoffes in kg/qcm,
- $a$  den Maulhalbmesser in cm,
- $e_1$  den Abstand des Querschnitt - Schwerpunktes von  $B$  (Abb. 209),
- $z$  den auf S. 610 angegebenen Wert.

Die Berechnung des Hakens als geraden Stabes ergibt etwa um 40 bis 50 vH zu geringe Beanspruchungen.

Material: zähes Schweißseisen;  $k_z = 900$  bis  $1200$  kg/cm, je nach der Güte des Materials.

Zulässige Zugbeanspruchung im Gewindekern:  $k_z = 500$  bis  $600$  kg/qcm.

Zulässige Flächenpressung der Querstückzapfen:  $p = 100$  at. Doppelhaken werden unter Annahme der halben Last für jede Hakenhälfte und einer Krafrichtung berechnet, die zur Lotrechten um  $\alpha = 45^\circ$  geneigt ist.

Einteilige Oese kann als beiderseitig eingespannter Balken berechnet werden:

$$\frac{1}{8} P \cdot l = W \cdot k_b \quad (l = \text{Stützweite}),$$

wobei für elliptischen Querschnitt von der Höhe  $h$  und Breite  $b$

$$W \approx 0,1 \cdot b \cdot h^2.$$

Dreiteilige Oese ist als frei aufliegender Balken zu berechnen:

$$\frac{1}{4} P \cdot l = W \cdot k_b \quad (l = \text{Stützweite}).$$

## Haken der Deutschen Maschinenfabrik A.-G. in Duisburg.

## Einfache Haken. (Abb. 209.)

Tragkraft in t	Maul- weite	Querschnitte						Höhe	Gewinde			Schaft	
		a	b	B	h	b	B		h	A	d	H	d
1	70	15	40	45	20	35	38	120	1	30	28	32	
2	75	20	50	60	25	45	50	140		38	35	40	
3	80	25	60	70	30	50	60	160		42	38	43	
4	85	30	70	80	35	55	70	170		50	45	50	
5	90	30	78	90	35	60	75	180		55	48	53	
7,5	110	40	95	110	45	75	95	220		70	60	65	
10,0	120	45	110	130	50	90	110	240		75	67	72	
12,5	130	50	125	145	55	105	125	260		75	67	72	
15	140	50	135	160	60	110	140	280		80	73	78	
17,5	160	55	145	170	65	120	150	320		95	86	95	
20	160	55	145	170	65	120	150	320		95	86	95	
25	180	65	160	190	75	135	165	360	5	110	98	105	
										115	105	115	
										130	120	130	
										145	130	140	

## Doppelhaken. (Abb. 211.)

Tragkraft in t	Maul- weite	Querschnitte						Höhe	Gewinde			Schaft		
		a	b	B	h	b	B		h	A	d	H	d	d
5	80	25	60	89	25	55	70	180	1 <sup>3</sup> / <sub>4</sub>	55	48	53	53	
7,5	95	30	70	103	30	65	80	220	2 <sup>1</sup> / <sub>4</sub>	70	60	65	65	
10	110	35	90	115	35	80	90	240	2 <sup>1</sup> / <sub>2</sub>	75	67	72	72	
12,5	120	40	90	131	40	80	105	260	2 <sup>1</sup> / <sub>2</sub>	75	67	72	72	
15	130	40	100	143	40	95	115	280	2 <sup>3</sup> / <sub>4</sub>	80	73	78	78	
17,5	150	45	110	158	45	100	120	320	3 <sup>1</sup> / <sub>4</sub>	95	86	95	105	
20	150	45	110	158	45	105	120	320	3 <sup>1</sup> / <sub>4</sub>	95	86	95	105	
25	160	50	130	180	50	115	140	360	3 <sup>3</sup> / <sub>4</sub>	110	98	105	115	
30	180	55	140	194	55	125	150	400	4	115	105	115	125	
40	200	55	150	218	55	135	170	440	4 <sup>1</sup> / <sub>4</sub>	130	120	130	140	
50	220	65	170	244	65	150	190	500	5	145	130	140	155	

## G. Bremsen.

**Zylindrische Klotzbremse.** Liegt der Drehpunkt des Klotzhebels in der Tangente an die Brems Scheibe (Abb. 217), so ist zum Stillhalten der sinkenden Last ein Gewicht

$$G = \frac{Na \pm N\mu \cdot 0}{b}$$

erforderlich, wobei

$$N\mu R = (L + M \operatorname{tg} \epsilon) r$$

ist. Dabei bedeutet  $M$  die gesamten sinkenden und drehenden Massen, reduziert auf den Trommelumfang und  $\operatorname{tg} \epsilon$  die Verzögerung, die den Wert 1 bis 1,5 erreichen kann.

Liegt der Drehpunkt des Klotzhebels um den Betrag  $c$  innerhalb der Tangente und wirkt die Last rechtsdrehend, so wird

$$G = \frac{Na - N\mu c}{b},$$

während bei linksdrehender Last

$$G = \frac{Na + N\mu c}{b}$$

wird. Liegt dagegen der Drehpunkt des Klotzhebels um den Betrag  $c$  außerhalb der Tangente, so wird bei rechtsdrehender Last

$$G = \frac{Na + N\mu c}{b}$$

und bei linksdrehender Last

$$G = \frac{Na - N\mu c}{b}.$$

Mufs die Bremse in beiden Drehrichtungen gleich stark wirken, dann mufs der Drehpunkt in der Tangente liegen. Die Anordnung mit auferhalb liegendem Drehpunkt vergrößert das erforderliche Bremsgewicht  $G$ , vermeidet aber eine Hebelkröpfung; die Anordnung mit innerhalb liegendem Drehpunkt verkleinert zwar  $G$ , ist aber konstruktiv weniger bequem.

Abb. 217.

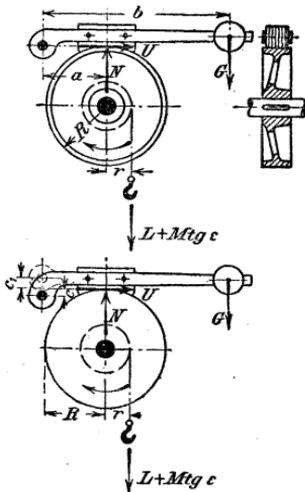
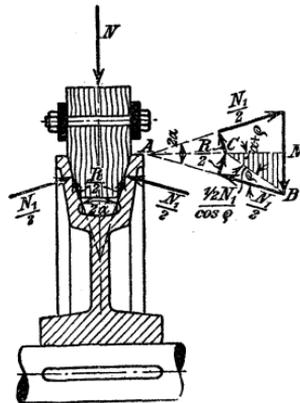


Abb. 218.



**Keil mit Klotzbremse.** Liegt der Drehpunkt des Klotzhebels in der Tangente an den mittleren Durchmesser der Bremsscheibe (Abb. 218), so wird auch

hier das erforderliche Bremsgewicht

$$G = \frac{Na}{b},$$

wobei

$$N = N_1 \frac{\sin(\alpha + \varrho)}{\cos \varrho}.$$

Die Keilnut wirkt wie eine Vergrößerung des Reibungswertes  $\mu$  auf  $\mu_1$  im Verhältnis von  $N$  zu  $N_1$ :

$$\mu_1 = \mu \frac{N}{N_1} = \mu \frac{\cos \varrho}{\sin(\alpha + \varrho)}.$$

Für  $2\alpha = 45^\circ$  und für  $\mu = 0,125$  wird

$$\mu_1 = 2 \mu.$$

Ein spitzerer Winkel als  $2\alpha = 45^\circ$  ist nicht zulässig, weil der Klotz sich sonst in der Nut festklemmt.

Abb. 219.

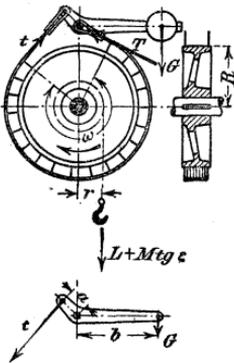
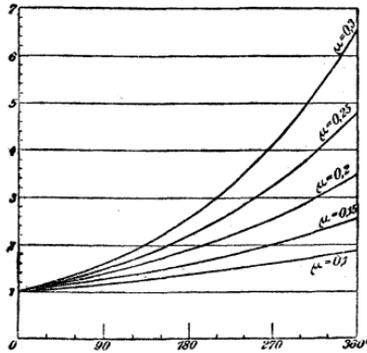


Abb. 220.



**Bandbremse.** Für die Bezeichnungen der Abb. 219 wird

$$\frac{T}{t} = e^{\mu \omega}$$

$$(T - t) R = (L + M \operatorname{tg} \varepsilon) r$$

$$t = (L + M \operatorname{tg} \varepsilon) \frac{r}{R} \cdot \frac{1}{e^{\mu \omega} - 1}$$

$$G = t \frac{a}{b} = (L + M \operatorname{tg} \varepsilon) \frac{r}{R} \cdot \frac{1}{e^{\mu \omega} - 1}.$$

Die Werte von  $e^{\mu \omega}$  für holzgefüttertes ( $\mu = 0,3$ ) und für nacktes ( $\mu = 0,15$ ) Bremsband sind aus Abb. 220 ersichtlich. Bei ersterem meist  $\frac{\omega}{2\pi} = \frac{3}{4}$  und demgemäß  $e^{\mu \omega} = 4$ ; nacktes Bremsband nur bei mehrfacher Umschlingung zweckmäßig. Der Wert für  $G$  gilt nur für den eingezeichneten Drehsinn der Last; für den umgekehrten Drehsinn wird  $G$  sehr viel größer.

**Vergleich der drei Bremsen.** Die Hebelübersetzung  $\frac{b}{a}$  kann bei den Klotzhebeln nicht über  $\frac{5}{1}$ , bei der Bandbremse dagegen bis  $\frac{10}{1}$  ausgeführt werden. Für Holzfutter in allen drei Fällen ( $\mu = 0,3$ ) wird bei Lage des Drehpunktes in der Tangente und bei  $\frac{3}{4}$  Umschlingung ( $e^{\mu\omega} = 4$ ) für die zylindrische Klotzbremse

$$G = (L + M \operatorname{tg} \epsilon) \frac{r}{R} \cdot \frac{1}{0,3} \cdot \frac{1}{5} = (L + M \operatorname{tg} \epsilon) \frac{r}{R} \cdot 0,7,$$

Keilnut-Klotzbremse

$$G = (L + M \operatorname{tg} \epsilon) \frac{r}{R} \cdot \frac{1}{0,3 \cdot 2} \cdot \frac{1}{5} = (L + M \operatorname{tg} \epsilon) \frac{r}{R} \cdot 0,3,$$

Bandbremse

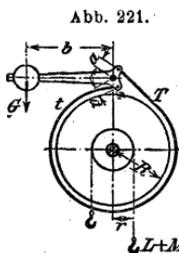
$$G = (L + M \operatorname{tg} \epsilon) \frac{r}{R} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{10} = (L + M \operatorname{tg} \epsilon) \frac{r}{R} \cdot 0,03.$$

Erforderlicher Hub senkrecht zur Bremsfläche mindestens 1 mm; mithin Hub  $h$  am Bremsgewicht gemessen für die zylindrische Klotzbremse

$$h = 1 \operatorname{mm} \cdot \frac{b}{a},$$

Keilnut-Klotzbremse  $h = 1 \operatorname{mm} \cdot \frac{1}{\sin \alpha} \cdot \frac{b}{a},$

Bandbremse  $h = 1 \operatorname{mm} \cdot \pi \cdot \frac{b}{a}.$



Für  $2\alpha = 45^\circ$  und für  $\frac{b}{a} = 5$  bei den Klotzbremsen und 10 bei der Bandbremse wird für die zylindrische Klotzbremse

$$h = 5 \operatorname{mm},$$

Keilnut-Klotzbremse  $h = 13 \operatorname{mm},$

Bandbremse  $h = 31 \operatorname{mm}.$

#### Bandbremse für wechselnde Drehrichtung.

Die Anordnung muß so getroffen werden, daß beide Bandenden durch das Bremsgewicht gespannt werden (Abb. 221). Für diesen Fall wird zunächst wie bei der einfachen Bandbremse

$$\frac{T}{t} = e^{\mu\omega}$$

$$(T - t) R = (L + M \operatorname{tg} \epsilon) r$$

$$t = (L + M \operatorname{tg} \epsilon) \frac{r}{R} \cdot \frac{1}{e^{\mu\omega} - 1}.$$

Das Bremsgewicht wird hier

$$\begin{aligned} G &= \frac{1}{b} (T \cdot a + t \cdot a) \\ &= \frac{a}{b} (t e^{\mu \omega} + t) \\ &= \frac{a}{b} (L + M \operatorname{tg} \varepsilon) \frac{r}{R} \cdot \frac{e^{\mu \omega} + 1}{e^{\mu \omega} - 1}. \end{aligned}$$

Für Holzfutter ( $\mu = 0,3$ ), für  $3/4$  Umschlingung ( $e^{\mu \omega} = 4$ ) und für  $\frac{a}{b} = \frac{1}{10}$  wird

$$G = (L + M \operatorname{tg} \varepsilon) \frac{r}{R} \cdot 0,17.$$

Das Bremsgewicht muß also hier nahezu 6 mal so groß werden als bei der einfachen Bandbremse (0,17 gegen 0,03).

**Scheibenbremse.** Kommt meist nur mit mehrfachen Reibflächen als sogenannte Lamellenbremse vor. Bezeichnet man mit  $i$  die Zahl der Reibflächen, mit  $R$  ihren mittleren Halbmesser, mit  $r$  den Trommelhalbmesser und mit  $N$  den Anpressungsdruck, so muß letzterer auf

$$N = \frac{(L + M \operatorname{tg} \varepsilon) \cdot r}{i \cdot \mu \cdot R}$$

gebracht werden. Meist Metallflächen in Oelbad mit  $\mu = 0,05$ .

**Kegelbremse.** Bezeichnet man den Kegelwinkel mit  $2\alpha$  und den Achsialdruck mit  $N$ , so entsteht das gleiche Kräftepolygon wie in Abb. 218, und es muß

$$N = N_1 \frac{\sin(\alpha + \varrho)}{\cos \varrho}$$

werden, wobei

$$N_1 \cdot \mu \cdot R = (L + M \operatorname{tg} \varepsilon) \cdot r.$$

Ein spitzerer Winkel als  $2\alpha = 45^\circ$  ist nicht ratsam, weil sonst Festklemmen zu befürchten.

**Belastung.** Die Erwärmung darf nicht über ein gewisses Maß steigen, weil sonst Verbrennen der Holzklötze bzw. Zersetzen des Oels zu befürchten. Die Erwärmung wird hervorgerufen durch die

**Reibungsleistung** auf 1 qcm der Reibfläche  $= p \cdot v \cdot \mu$ , wobei

$$\text{Flächenpressung in at: } p = \frac{N}{f};$$

$$\text{Gleitgeschwindigkeit: } v = \frac{2R\pi n}{60}.$$

Dabei ist  $N$  = Normaldruck auf die Reibfläche in kg,  $f$  = Reibfläche in qcm ( $= 2R\pi b \frac{3}{4}$  bei Band mit  $3/4$  Umschlingung und  $= 2 \cdot l \cdot b$  bei zwei Klötzen von  $l$  cm Länge und  $b$  cm Breite);  $n$  = Umlaufzahl

- $p \cdot v \leq 20$  bei kurzzeitigem Betrieb (Stoppbremsen) und schlechter Wärmeabführung (Holzklötze)  
 $\leq 10$  bei anhaltendem Betrieb (Senkbremsen) und schlechter Wärmeabführung (Holzklötze)  
 $\leq 30$  bei anhaltendem Betrieb (Senkbremsen) und guter Wärmeabführung (Öelbad).

**Anwendungsgebiet.** Wird die Bremse nur in einer Drehrichtung beansprucht, dann ist die Bandbremse besonders vorteilhaft wegen ihrer großen Reibfläche und ihrer starken Uebersetzung. Mufs die Bremse in beiden Drehrichtungen wirken (Fördermaschinen, Fahrwerke), dann wird die Doppelklotzbremse zumeist vorgezogen, weil bei ihr genaues Abheben leichter zu erreichen ist. Einfache Klotzbremsen nur bei sehr kleinen Drehmomenten (Wellen unter 40 mm Dmr.), weil sie die Welle auf Biegung beanspruchen. Zylindrische Klotzbremsen bei großen Kräften (Fördermaschinen); Keilnut-Klotzbremsen bei kleinen Kräften (Fahrwerke und Schwenkwerke). Bei anhaltendem Betrieb und achsialer Anpressung (Lastdruckbremsen) werden Lamellenbremsen in Öelbad bevorzugt, weil sie unveränderlichen Reibungswert besitzen; völlige Lüftung in diesem Fall nicht erreichbar, aber auch nicht erforderlich. Kegeltremsen nur bei Rollenzügen mit Handbetrieb.

## H. Gesperre.

**Zahngesperre mit Aufsenzähnen** (Abb. 222). Das Einfallen der Klinke mufs durch Gewicht oder Feder erzwungen werden, nicht durch die Zahnform. Richtigste Zahnform: ein Kreisbogen um den Klinkendrehpunkt; angenähert durch Tangente an diesem Kreisbogen. Zähne auf Biegung und Flächenpressung beansprucht; daher breit und niedrig halten, 10 bis 15 mm hoch.

**Gesteuerte Klinken** (Abb. 223). Freigehende Klinken nur bei geringer Geschwindigkeit — Handantrieb — brauchbar; bei Maschinenantrieb stets Steuerung der Klinken durch einen Reibungswiderstand,

Abb. 222.

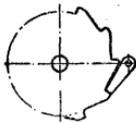


Abb. 223.

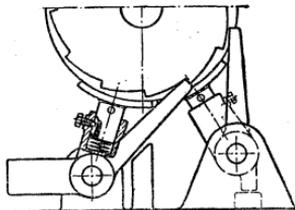


Abb. 224.

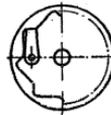
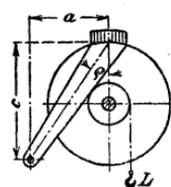


Abb. 225.



der durch eine Feder oder ein Gewicht erzeugt wird. Ratsam zwei bis drei Klinken mit getrennter Steuerung, um eine halbe Teilung bzw. eine Drittelteilung versetzt.

**Zahngesperre mit Innenzähnen** (Abb. 224). Vorteilhaft bei Sperrradbremsen, weil gedrängte Anordnung möglich.

**Reibungsgesperre mit Aussenklötzen.** Rückt man bei der zylindrischen Klotzbremse (Abb. 217) den Drehpunkt des Klotzhebels bei rechtsdrehender Last so weit innerhalb der Tangente, dafs

$$N \cdot a = N \cdot \mu \cdot c$$

wird (Abb. 225), dann wird das Bremsgewicht  $G=0$ , d. h. die Bremse wird selbstsperrend oder geht in ein Gesperre über. Es wird dann

$$\frac{a}{c} = \mu = \operatorname{tg} \varrho;$$

die vom Drehpunkt des Klotzhebels nach dem Mittelpunkt der Reibfläche gezogene Linie mufs also um den Reibungswinkel gegen den Halbmesser geneigt sein. Vorsichtshalber wird man den Winkel etwas kleiner als  $\varrho$  ausführen. Da der Radialdruck sehr grofs wird, so sind stets zwei gegenüberliegende Klötze anzuordnen, um die Welle zu entlasten.

**Reibungsgesperre mit Keilnut.** Da der Reibungswinkel sehr klein ist — bei  $\mu=0,15$  wird  $\varrho=8^{\circ}$  —, so kann die Reibfläche nur sehr kurz gehalten werden. Bei Anwendung einer Keilnut vergröfsert sich  $\mu$  auf

$$\mu_1 = \mu \frac{\cos \varrho}{\sin (\alpha + \varrho)}$$

(Abb. 218); bei  $2\alpha=45^{\circ}$  wird  $\mu_1=2\mu$ , der Winkel der Klotzstützlinie gegen den Halbmesser wird dann doppelt so grofs wie bei zylindrischer Reibfläche. Daher Keilnut stets bevorzugt.

**Reibungsgesperre mit Innenklotz.** Eine vorteilhaft gedrängte Anordnung ergibt sich, wenn der Drehpunkt des Klotzes nach innen gelegt wird (II. Bd. 8. Abschn., Abb. 75); die glockenförmige Scheibe mufs so stark ausgeführt werden, dafs sie die starken Radialdrücke aushält. Die Klötze sind zweckmäfsig so zu gestalten, dafs keine freien Fliehkräfte auftreten.

**Reibungsgesperre mit Band.** Befestigt man das Bandende  $T$  nicht an einem festen Punkt, sondern an einem Winkelhebel, dessen anderer Arm von dem Bandende  $t$  erfaßt wird (Abb. 226), und bemifst man die Arme des Winkelhebels so, dafs

$$t \cdot a = t \cdot d$$

wird, dann wird das Bremsgewicht  $G=0$ , d. h. die Bremse wird selbstsperrend oder verwandelt sich in ein Gesperre. Da

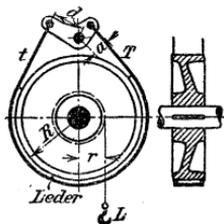
$$\frac{T}{t} = e^{\mu \omega},$$

so wird für diesen Fall

$$\frac{d}{a} = e^{\mu \omega}.$$

Sicherheitshalber wird man  $\frac{d}{a}$  etwas gröfser als  $e^{\mu \omega}$  ausführen. Um einen möglichst gleichmäfsigen Reibungswert zu erhalten, füttert man das Band mit Leder.

Abb. 226.



**Walzen- und Kugelgesperre** eignen sich nur für ganz kleine Kräfte und Geschwindigkeiten, da gleichmäßige Anlage der einander gegen­überliegenden Kräfte — also Kraftausgleich — nicht zu erreichen ist.

## J. Sperrab­bremsen.

Bremse und Gesperre werden bei neueren Ausführungen stets zu einem Ganzen vereinigt, und zwar in der Weise, daß die Bremsscheibe lose drehbar auf die zu bremsende Welle gesetzt und durch das Gesperre nur beim Senken selbsttätig mit der Welle gekuppelt, beim Heben aber freigegeben wird; das Bremsband wird während des Hebens durch ein Gewicht gespannt und nur während des Senkens gelüftet. Schaltung der Sperrab­bremse: Abb. 227. Vorteil der Sperrab­bremse gegenüber getrenntem Gesperre: die Sperrklinke braucht nicht ausgehoben zu werden. Entweder Zahngesperre mit gesteuerten Klinken (II. Bd. 2. Abschn., Abb. 74) oder Reibungsgesperre mit Innenklötzen (II. Bd. 2. Abschn., Abb. 75).

Bei den **Sicherheitskur­beln** ist zwischen Gesperre und Last eine Reibkupplung geschaltet, die zugleich als Bremse benutzt wird, und

Abb. 227.

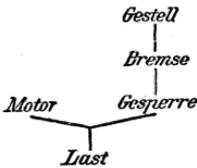


Abb. 228.

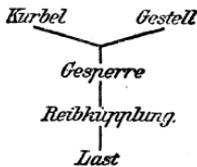
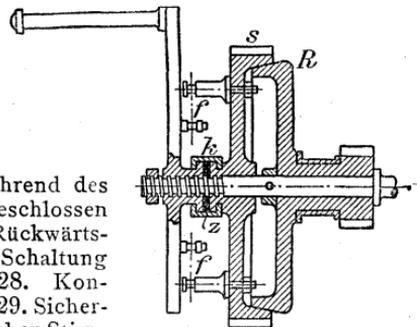


Abb. 229.

Sicherheitskurbel von Weidtmann.



zwar in der Weise, daß sie während des Hebens durch den Kurbeldruck geschlossen ist und behufs Senkens durch Rückwärtsdrehung der Kurbel gelüftet wird. Schaltung der Sicherheitskurbel: Abb. 228. Konstruktion von Weidtmann: Abb. 229. Sicherheitskurbeln sind nur bei einfacher Stirnradübersetzung anwendbar, weil bei stärkerer Uebersetzung das Haken­gewicht zu schwer ausfällt; ferner sind sie nur bei großem Hub vor­teilhaft, denn bei kleinem Hub sind Lastdruckbremsen vorzuziehen; Anwendungsgebiet daher sehr beschränkt.

## IV. KOLBEN, KOLBENSTANGEN UND STOPFBÜCHSEN.

### A. Kolben.

#### a. Tauchkolben (Plunger).

**Dichtung** (selbsttätig wirkend) mit Stulp (Manschette) aus Leder (in besonderen Pressformen hergestellt) oder aus Gummi, z. B. für Presspumpen (Abb. 230 mit 2 Schrauben, Abb. 231 mit 1 Schraube, dabei *a* Löcher zum Drehen); der eine Stulp in Hutform (Abb. 232) wirkt beim Saugen, der andere beim Drücken. Für Wasserdruckpressen dient ein Stulp (Nutting von U-Querschnitt) nach Abb. 233; er dichtet hier nur gegen inneren Ueberdruck. Anwendbar für alle, besonders für hohe Drücke (bis 1000 at), bei reinem Wasser und bei Kolbengeschwindigkeiten  $< 1$  m/sk. Bei unreinem Wasser oder großen Geschwindigkeiten sind Reibung und Verschleifs bedeutend.

Abb. 230.

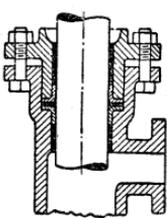


Abb. 231.

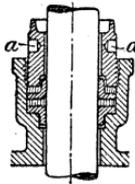


Abb. 233.

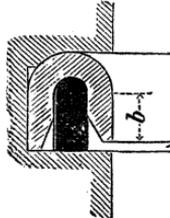


Abb. 232.

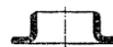
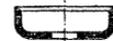


Abb. 234.



Als Füllmaterial bei Nutringen nach Abb. 233 wird außer Metallringen Gummi verwendet. — C. Otto Gehrckens schlägt für den teuren Gummi Baumwollzöpfe als Einlage vor.

Für Scheibenkolben (Abb. 237) werden Lederstulpen in Napfform (Abb. 234) verwendet.

Für die Lederstulpe empfiehlt Gehrckens in erster Linie Lohgar-Leder. Nur wo Temperaturen über  $85^{\circ}$  vorkommen, ist Chromleder vorzuziehen.

Für Hut- und Napfform (Abb. 232 u. 234) gebräuchliche Größen: 2,5 bis 30 cm Dmr. Lieferbar, aber schwierig herzustellen, aus einer Scheibe Leder, bis 100, ja selbst 150 cm. — Nutring (Abb. 233) gebräuchlich bis 500 cm Dmr., lieferbar ausnahmsweise ebenfalls bis 100, ja 150 cm. — Für Durchmesser über 200 cm können Stulpen aus einem endlos gemachten Lederstreifen hergestellt werden. — Andererseits sind Lederstulpe selbst für Stangen von 1 cm Dmr. verwendet worden;  $b = 0,5$  cm, Lederdicke  $s = 1$  bis 1,5 mm.

Besonders für stärkere Tauchkolben, für 4 at Druck und mehr haben sich statt der Lederdichtungen mit Talg sorgfältig eingefettete, rechteckig geflochtene Baumwollen-Packungen sehr gut bewährt, wenn die Packungshöhe mindestens das 6-fache der Dicke der Packungsschnur beträgt. Zuweilen genügt zur Führung und Dichtung ein Metallring, z. B. wenn der Kolben in zwei unmittelbar aneinandertostenden, nur durch eine Wand getrennten Zylindern arbeitet.

Labyrinthdichtung, wobei der Zylinder mehrere ringförmige Rinnen erhält, ist für Tauchkolben zwecklos.

**Stulp-Reibung.** Bezeichnet für Leder- oder Gummistulpdichtung

- $b$  die Höhe der reibenden Stulpfläche in cm (Abb. 233),  
 $p$  den Flüssigkeitsüberdruck in at,  
 $\mu$  die Zahl der gleitenden Reibung zwischen Kolbenfläche und Stulp,  
 $D$  den Durchmesser des Kolbens in cm,  
 $R$  den Reibungswiderstand in kg, der sich der Bewegung des Kolbens bei der Pressung  $p$  entgegensezt,  
 $R_0$  den Reibungswiderstand in kg für  $p=0$ , entstehend durch noch nicht eingelaufenen, anfänglich zu harten Stulp sowie durch die Reibung zwischen Kolben und Führungsbüchsen (bei lotrechter Stange ist  $R_0 \sim 0$ ), so ist nach Gollner\*)

$$R = R_0 + \pi D b p \mu.$$

Für  $b$  reicht 1,2 bis 2,0 cm aus; Lederdicke  $s = 0,4$  bis 0,6 cm. Gummistulpen erhalten 1,0 cm Dicke.  $R_0$  ist zu schätzen oder durch Versuch zu bestimmen; ferner ist bei glatten Oberflächen und bei

guter Fettung des Leders (für  $p = 10$  bis 140 at) die Reibungszahl etwa  $\mu = 0,07$  bis 0,08, bei ungünstigen Verhältnissen (rauhes Kolben, schmutziges Wasser) erhöht sich  $\mu$  bis auf 0,20. (Vrgl. jedoch die Angaben für  $R$  und  $\mu$  für verschiedene Dichtungen S. 247.) Für Metalldichtung ist  $\mu = 0,1$  zu setzen.

Ueber die Reibung von Baumwollen-Packungen u. dgl., die nur durch ihre eigene Elastizität dichten, sowie über Stopfbüchsen vrgl. im übrigen S. 921.

Die **Wandstärke**  $s$  hohler Tauchkolben (Abb. 235) wird nach 2., S. 627 berechnet, mit 0,2 bis 0,5 cm Zuschlag.

Abb. 235.

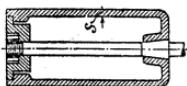
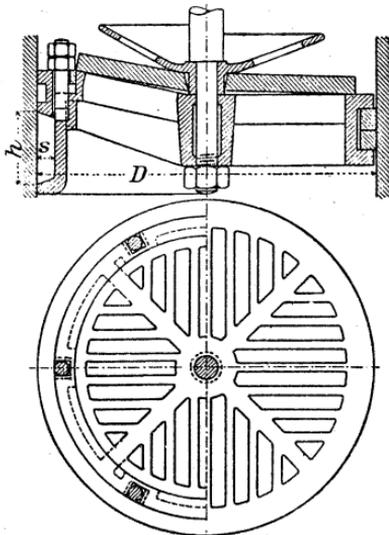


Abb. 236.

**b. Scheibenkolben.**

**1. Scheibenkolben mit Hanfliderung** für kaltes und warmes Wasser, feuchten Dampf von geringer Temperatur. Für Hubpumpen (Kondensatorpumpen) zeigt Abb. 236 einen durchbrochenen Scheibenkolben mit Gummiklappenventil, links Hanfliderung, rechts Metalliderung. Höhe der Packung  $h = 4\sqrt{D}$ , Packungsdicke  $s = \sqrt{D}$ , wenn  $h, s$

\*) Vrgl. C. Bach, Z. d. V. d. I. 1886 S. 155.

und  $D$  in mm. Bei einseitig ausgelaufenen Zylindern, die nicht ausgebohrt werden können, ist Hanfliederung der Metalliederung vorzuziehen.

Leinwand und Filz werden zuweilen als Streifen um den Kolben gelegt und durch ringförmigen Deckel mit Schrauben oder Keil zusammengedrückt. Harte

Kautschukringe für sandiges Wasser.

## 2. Scheibenkolben mit Leder- oder Gummi- stulpdichtung (Abb. 237, für doppelt wirkende Wasserpumpen)

für reines Wasser von weniger als  $30^{\circ}$  Temperatur und 5 at Druck. Dichtungshöhe  $b = 1,2$  bis  $2,0$  cm, Lederdicke 0,3 bis 0,6 cm. Abb. 238 zeigt einen mit Lederstulpdichtung versehenen durchbrochenen Brunnen-Pumpenkolben mit Metallklappen.

Der aus einem Lederstück bestehende Stulp wird durch einen Eisen- oder Kupferring mit Keilung gegen den Kolben gedrückt. Höhe der Liederung, je nach dem Durchmesser,  $h = 0,8$  bis  $1,5$  cm; Lederdicke 0,3 bis 0,5 cm. Abdichtung nur bei Bewegung aufwärts.

Für Drücke bis 5600 at (Hubersche Presse\*) hat sich die Dichtung Abb. 239 bewährt; sie besteht abwechselnd aus Lagen von gutem Leder, an den Rändern zugescharft, und aus harten Metallscheiben, deren Ränder ebenfalls scharf zugeschnitten sind; das Ganze durch Bodenstück und drei Schrauben zusammengehalten.

## 3. Scheibenkolben mit Holzliederung (Eichen, Pappel, Ahorn, durch Federn oder Kautschukringe an die Zylinderwand gedrückt) für Warmwasserpumpen der Kondensationsmaschinen (Krause, Corlijs) haben sich gut bewährt.\*\*)

Abb. 237.

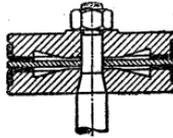


Abb. 238.

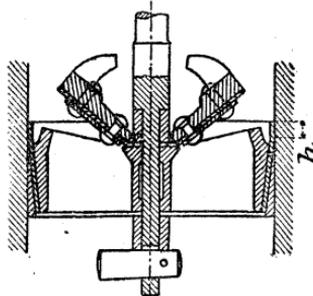
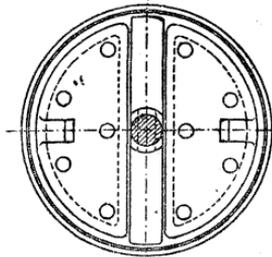
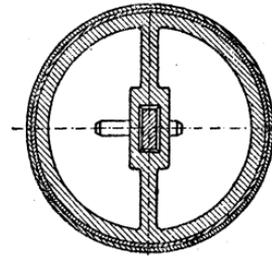
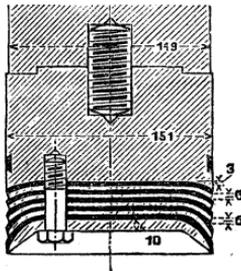


Abb. 239.



\*) S. Z. d. V. d. I. 1901 S. 625.

\*\*) S. C. Bach, Die Maschinen-Elemente, 10. Aufl. 1908, S. 724.

4. Scheibenkolben mit Metallföderung für höhere Temperaturen.

a) **Eingeschliffene Kolben** aus Bronze, in ebensolchen Zylindern laufend, für Pumpen, besonders Feuerspritzen (Abb. 240), Kondensatorpumpen u. dgl. Die Rinne auf Mitte Höhe dient zur Aufnahme von Schmiere oder Schmutz. Die Bildung des oberen Endes verhindert, daß der Schmutz der Zylinderwand zwischen die Dichtflächen gelangt. Wird der Kolben undicht, so kann ein Lederstulp eingesetzt werden (s. Abb. 240 unten).

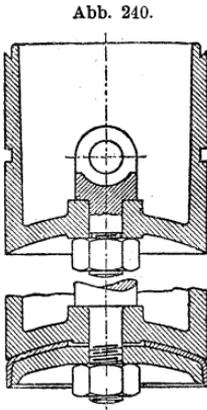


Abb. 240.

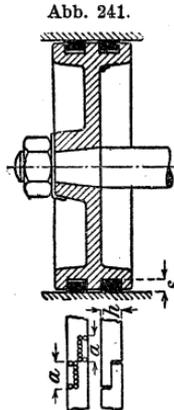


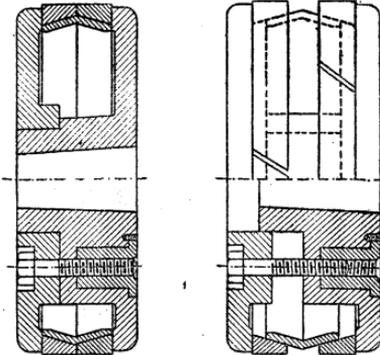
Abb. 241.

b) **Kolben mit metallenen Föderungsröngen**, meist aus zähem, nicht zu weichem Gußeisen (aus Bronze nur bei Pumpen mit saurem Grubenwasser usw.), sind entweder selbstspannend mit größörem Durchmesser hergestellt, gespalten und, nachdem  $a \sim 0,1 D$  (Abb. 241) herausgeschnitten, auf den Zylinderdurchmesser  $D$  abgedreht. Deckung des Spaltes durch Ueberblattung oder durch

ein besonderes Füllstück (Zunge). Die Spalten mehrerer Ringe werden gegeneinander versetzt.

Die Dicke der Ringe, die über die Stirnflächen des Kolbens in die Nuten gebracht werden,

Abb. 242.  
(Rheiner Maschinenfabrik.)



$s \approx \frac{1}{30} D$  für gleich dicke Ringe,  
 $s \approx \frac{1}{25} D$  für ungleich dicke Ringe,  
die an den freien Enden bis auf  $0,7 s$  abnehmen.

Höhe  $h = 2s$ ,  
 $a = 1,25h$  bis  $1,5h$  oder  $0,1 D$ .

Ringe, die nach Abnahme eines besonderen Kolbendeckels aufgeschoben werden, erhalten  $s = \frac{1}{20} D$  abnehmend bis  $0,7 s$ ,  $h = s$  (stehende Maschinen) bis  $1,5 s$  (liegende Maschinen),  $a = 0,075 D$ .\*

Oder es werden die Föderungsröngen durch hintergelegte Spannringe gespannt gehalten, die die Dichtungsringe meistens in radialer und achsialer Richtung

andrücken. In Abb. 242 (Kolben der Rheiner Maschinenfabrik) werden Doppelkegelfeder und Dichtungsringe durch Anziehen der

\* Berechnung der Kolbenringe s. K. Rheinhardt, Z. d. V. d. I. 1901 S. 232.

Deckelschrauben gespannt; in Abb. 243 (Patent Zirn) werden die Ringe durch Keilstücke mittels wellenförmiger Feder in radialer und

Abb. 243.  
(Zirn.)

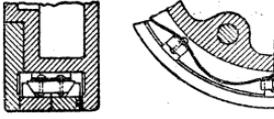
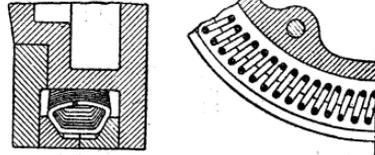


Abb. 244.  
(Cooper und Pattinson.)



achsialer Richtung angedrückt, in Abb. 244 (Patent Cooper & Pattinson) durch eine entsprechend geformte Schraubenfeder.

**Berechnung der Scheibenkolben.** Pfleiderer gibt (Z. d. V. d. I.\*) 1910 S. 317) zur Bestimmung der Spannungen in der Kolbenscheibe an: Die meist beanspruchte Stelle liegt beim Uebergang der Scheibe in die Nabe. Die kreisrunde, ebene, beiderseits eingespannte Platte ist belastet:

1. Durch den auf der Platte vom Radius  $R_1 - r_n$  (Abb. 245) lastenden Flüssigkeitsdruck  $p$  in kg/qcm.

2. Durch den auf dem äußeren Ring von der Breite  $b_1$  [Querschnitt  $\pi \cdot (R^2 - R_1^2)$ ] ruhenden Flüssigkeitsdruck:

$$P = p \cdot \pi \cdot (R^2 - R_1^2).$$

Die hieraus folgenden Einzelbeanspruchungen sind:

$$\sigma_{b_1} = 11,5 \frac{p}{h^2} \cdot \frac{R_1^2 (R_1 - r_n)}{16 r_n + 0,1 \frac{R_1^2}{r_n}}$$

$$\sigma_{b_2} = 0,52 \frac{p}{h^2} \cdot (R^2 - R_1^2) \frac{R_1 - r_n}{0,2 R_1 + r_n}$$

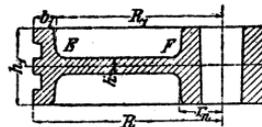
Daraus folgt als Biegungsbeanspruchung:

$$\sigma_b = \sigma_{b_1} + \sigma_{b_2}.$$

Kräftige Bemessung der Nabe (nicht kleiner als 1,6 mal der Bohrung) und des äußeren Kolbenkranzes, der in seinem durch die Dichtungsringe nicht geschwächten Teil nicht kleiner als 0,8 der Dicke  $h$  der Kolbenscheibe sein soll, ist Voraussetzung für die Annahme, daß die Scheibe zwischen Nabe und Kolbenkranz beiderseits eingespannt ist.

**Kolbenkörper** entweder offen nach Abb. 241 (schwedischer Kolben), geschmiedet oder aus Stahlgufs, nach Abb. 246, 247 und 248 für stehende Dampfmaschinen, besonders Schiffsmaschinen; in Abb. 247 werden die Liderungsringe und der dahinter gelegte Spanning (von

Abb. 245.



\*) An derselben Stelle ist auch kurz eine Berechnung von Hohlkolben mit Aussparungen in den Rippen angegeben. — Vgl. ausführliche Darstellung in „Mitteilungen über Forschungsarbeiten“, herausgegeben vom V. d. I. Heft 97.

ovalem Querschnitte) mittels eines Deckelringes gehalten, in Abb. 248 sind die selbstspannenden Dichtungsringe in einem abnehmbaren besonderen Winkelringe aus Gufseisen (zur leichten Erneuerung) unter-

Abb. 246.

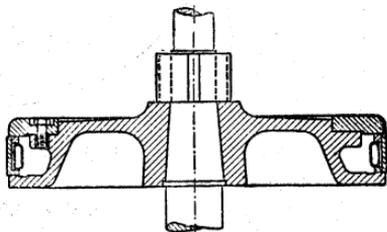
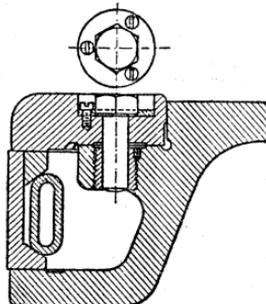


Abb. 247.



Dampfkolben für stehende Maschinen.

Abb. 248.  
Dampfkolben für Schiffsmaschinen.

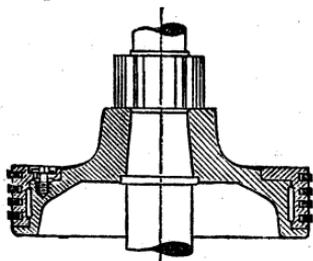
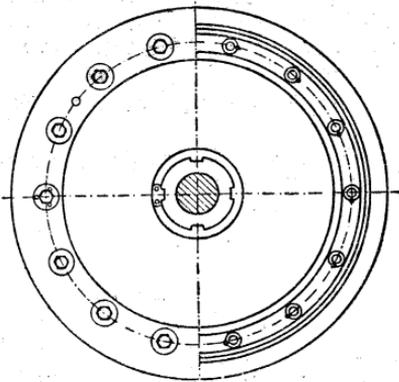
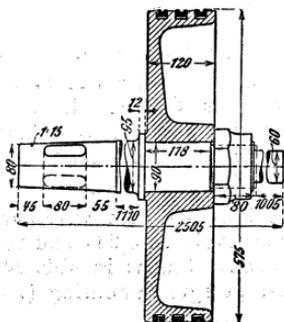


Abb. 249.



gebracht. Abb. 249 zeigt einen **Lokomotivkolben** (der Preussischen Staatseisenbahn) mit offenem Kolbenkörper aus Flußstahl für 575 mm Zylinderbohrung mit zugehöriger beiderseits durchgehender Kolbenstange (ebenfalls aus Flußstahl) von insgesamt 2505 mm Länge.

Der Kolben ist warm aufgezogen und durch eine Mutter gesichert, die ihrerseits durch Vernieten festgelegt wird. — Die Kolbenringe bestehen aus Gufseisen; sie werden auf 600 mm abgedreht, worauf ein Stück von 50 mm Länge im schrägen Winkel von 60° ausgeschnitten wird. Hierauf werden sie mit den Schnittflächen zusammengelötet und auf 575 mm abgedreht. Die Ringe erhalten dann an der Lötstelle einen schrägen Ausschnitt von 7 mm Breite, der durch einen im Kolbenkörper ver-

nieteten, gegen den Umfang des Kolbens zurücktretenden Steg von 5 mm Breite und 40 mm Länge ausgefüllt wird.

Oder der Kolbenkörper ist geschlossen: 1) aus einem Stücke (Abb. 250 und 251), mit Kernöffnungen in einer oder beiden Stirn-

Abb. 250.

Gebläsekolben von Riedler.

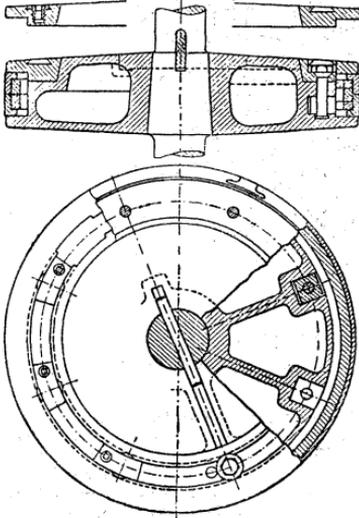
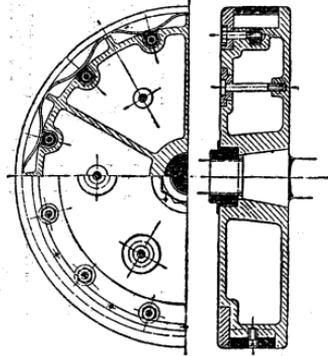


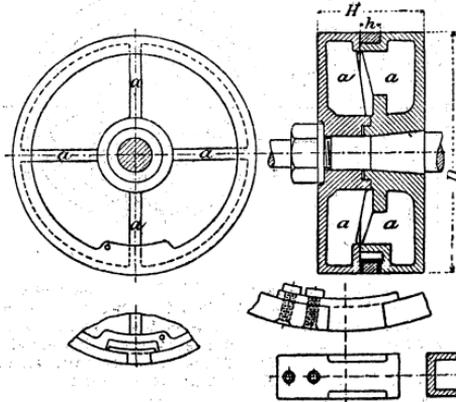
Abb. 251.



flächen oder am Umfange oder in der Nabe, oder 2) geteilt (Abb. 242, 252 und 253), wobei meist durch Wegnahme des Deckels die Ringe freigelegt werden können.

Abb. 252. (Kiefelbach.)

Die Muttern werden, um das Festrosten zu verhindern, aus Bronze hergestellt. (Abdruckschrauben vorsehen!) Vielfach (bei kleineren Kolben) benutzt man auch die Befestigungsschraube für die Kolbenstange zur Verbindung der beiden ungefähr gleichgestalteten Kolbenhälften (Abb. 252, Kolben von Kiefelbach). Alle Schrauben sind gegen Lockerwerden zu sichern (vgl. Abb. 247, 250 und 253).



Für Abb. 252 ist  $H = 0,35 D + 4$  cm, die Ringdicke  $s = 0,03 D + 0,5$  cm,

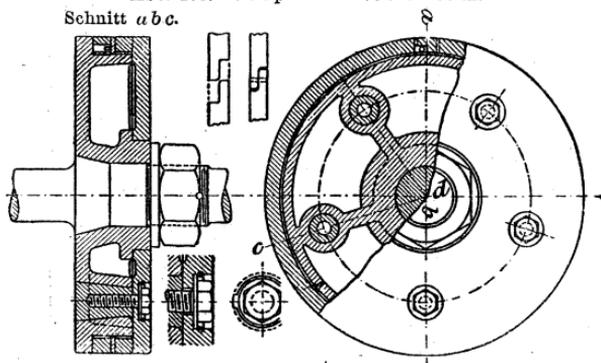
$h = 2,6$  cm für  $D = 15$  bis  $29$ ,

$3,0$  cm für  $D = 31$  bis  $52$ ,

$3,6$  cm für  $D = 55$  bis  $70$  cm.

Die Stopfbüchsen und Grundringe liegender Maschinen werden zweckmäßig durch unmittelbar von der Zylinderwand **getragene Kolben**

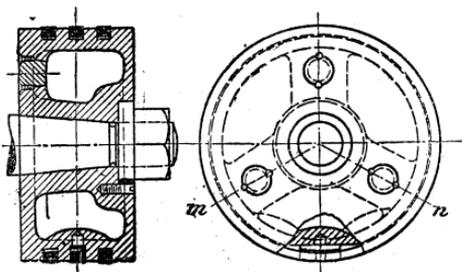
Abb. 253. Dampfkolben von G. Kuhn.



entlastet (vgl. S. 919). Abb. 254 zeigt einen solchen Kolben der Dresdener Maschinenfabrik und Schiffswerft zu Dresden-Uebigau.

Der Kolben wird zunächst auf den Zylinderdurchmesser abgedreht. Dann wird ein Span von 0,5 bis 2,5 mm Stärke (je nach dem Kolbendurchmesser) exzentrisch so abgedreht, daß der Kolben unten auf ein Drittel seines Umfanges — von *m* bis *n* — unberührt bleibt. Das Maß, um welches der Kolben beim Abdrehen des oberen Teiles aus der Mitte verschoben werden muß, findet man am einfachsten durch Aufsuchen des neuen Mittelpunktes mit dem Zirkel, nachdem man im oberen Punkt die Spanstärke abgetragen hat. Der Kreis um den neuen Mittelpunkt schneidet den Zylinderkreis, auf dem der Kolben zuerst abgedreht war, in den Punkten *m* und *n*. — Bei sehr großen Kolben fräst die Dresdener Maschinenfabrik und Schiffswerft, Dresden-Uebigau zwei Drittel des

Abb. 254.



Umfanges konzentrisch frei. Die Übergangsstellen bei *m* und *n* werden verfeilt. Das Verfahren ist teurer, der Kolben hat aber seitlich mehr Spiel.

Dann liegt der Kolben von *m* bis *n* vollkommen im Zylinder auf. Zur Sicherung der Lage der Ringe ist der senkrechte Schenkel des winkelförmigen Schlosses der schrägen Teilfuge in dem Ringe etwas eingelassen und mit einem Zapfen versehen, der in eine Bohrung des Kolbenkörpers eingreift.

**Schlittenkolben** von L. Ziegler zu demselben Zweck.\*)

Die Körper großer Kolben sind auf Festigkeit nachzurechnen.\*\*)

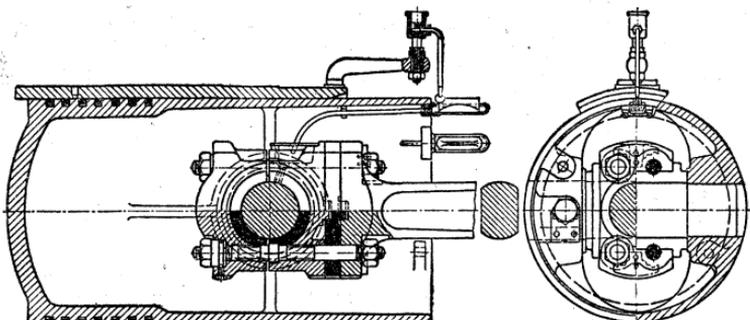
\*) S. Haeder, Dampfmaschinen, 1896 S. 93.

\*\*\*) S. außer dem oben (S. 913) erwähnten Verfahren von Pfeleiderer auch O. Reymann, Festigkeit und Reibung der Dampfkolben, Z. d. V. d. I. 1893 S. 1084 und 1896 S. 85.

**Befestigung der Kolben** auf den Stangen erfolgt durch Warmaufziehen (s. Lokomotivkolben, Abb. 249) oder durch Kegel mit gesicherter Schraube oder Keil. Der Ansatzkegel der Stange wird in die Nabe eingeschliffen. Kegelwinkel  $> 8^\circ$ . Bessere Kolbenbefestigung mit zylindrischem, eingeschliffenem Stück und Kegel mit starker Neigung (30 bis  $45^\circ$ ). — Zuweilen werden Kolben, gestaltet wie Abb. 241, S. 912, mit der Stange aus einem Stücke geschmiedet; dabei die Kolbenscheibe auch wohl in der Vorder- statt in der Mittellage.

Einen Kolben für einen liegenden Viertakt-Gasmotor (Deutz) nach Bach, 10. Aufl. 1908, zeigt Abb. 255. Der Kolben ist gleichzeitig

Abb. 255.



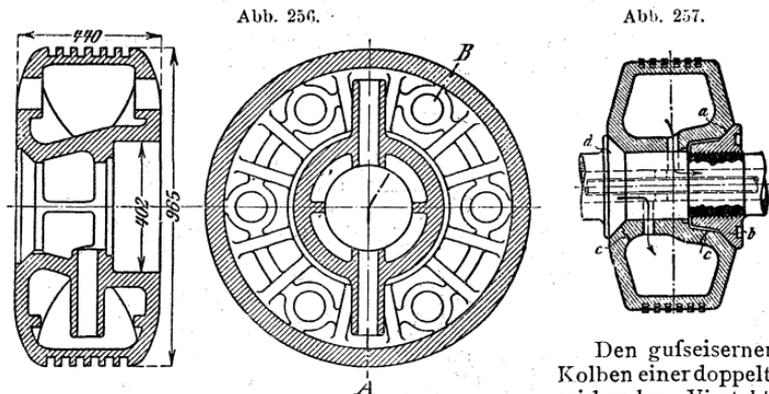
Kreuzkopf und muß schon aus diesem Grunde (aber auch wegen der größeren Zahl von Kolbenringen) länger werden. Der Kolben wird, weil er am Boden in unmittelbarer Berührung mit den heißen Verbrennungsgasen steht, sich hier mehr ausdehnen als vorn und deshalb je nach dem Baustoff auf seinem hinteren Teil um 0,2 bis 0,5 vH schräg gedreht. Als Tragfläche ist demnach nur der zylindrische Teil, und zwar mit nicht mehr als 1 bis höchstens 1,5 kg/qcm Pressung zu rechnen. Der Zapfen, an dem die Schubstange anfaßt, ist mit zylindrischen Enden in den warmen Kolbenkörper eingesetzt. Der Zapfen sitzt etwa auf der Mitte des vorderen, zylindrischen (tragenden) Kolbenteiles. — Ähnlich, aber im Verhältnis zum Durchmesser kürzer (mit z. B. nur vier Kolbenringen) sind die Kolben von Automobil- und Luftschiffmotoren.\*)

Abb. 256 zeigt einen wassergekühlten Kolben von 965 mm Durchmesser für eine Großgasmaschine\*\*) der Maschinenfabrik Augsburg-Nürnberg, A.-G. Der Kolben ist Stahlgufs und wiegt,

\*) Vgl. auch Z. d. V. d. I. 1909 S. 532 u. 536.

\*\*) Vgl. Bonte, Fortschritte und Erfahrungen im Bau von Großgasmaschinen Z. d. V. d. I. 1906 S. 1249 u. f., und Dr. H. Hoffmann, Kraftgewinnung und Kraftverwertung in Berg- und Hüttenwerken, Z. d. V. d. I. 1906 S. 1393 u. f. (Kolben S. 1527); weiter zu vgl.: Rieppel, Die Großgasmaschinen in Amerika, Z. d. V. d. I. 1909, Kolben: S. 2081, 2083 u. f., S. 2119 (letzterer aus zwei Teilen mit je drei Kolbenringen zusammenschraubt).

wassergefüllt, 2100 kg. Auf dieses Gewicht ist die zum Zweck der Kühlwasserzuführung hohle Kolbenstange zu berechnen. Wasserzuführung s. unter Kolbenstangen (Abb. 260). Das Kühlwasser tritt in den unteren Teil des Kolbens ein und verläßt ihn durch die obere Oeffnung. Die besonders im Schnitt (links, oben) sichtbaren Löcher dienen zum Tragen des Kernes und zum Herausnehmen der Kernmasse. Sie werden am fertigen Kolben durch Gewindestopfen verschlossen.



Gasmaschine von Ehrhardt & Sehmer, Schleifmühle-Saarbrücken, zeigt die Abb. 257.

Die Bauart ist entstanden aus dem Bestreben, Brüche der Nabe des Kolbenkörpers, wie sie etwa an den Stellen *c, c* vorgekommen sind, dadurch zu vermeiden, daß der Kolben möglichst kurz gehalten wird und auf der ganzen Nabenbreite gefast wird. Non ist die Form der Kolbenmutter *b*, die mit ihrer schrägen Druckfläche bei *a* in Verbindung mit dem Kegel *d* auf der Kolbenstange die beiden Stirnflächen des Kolbens miteinander versteift. Durch die ganze Form des Kolbens sind Wärme- und Gufspannungen nach Möglichkeit vermieden.\*\*\*)

## B. Kolbenstangen.

Als Material empfiehlt sich in erster Linie Flufsstahl, nicht nur wegen seiner Festigkeit, sondern auch wegen der Reinheit und Glätte der Oberfläche.

Die Kolbenstangen werden in der Regel auf Knickung beansprucht. Nach Fall 2, S. 533, wird, wenn *J, E, S* die dort angegebene Bedeutung haben und *P* die größte Kolbenstangenkraft ist, und außerdem (in cm) *d* den Durchmesser der vollen Stange, *d*<sub>1</sub> den inneren und *d*<sub>2</sub> den äußeren Durchmesser der hohlen Stange bedeutet, ferner *l* (in cm) die Stangenlänge, gemessen von der Mittelebene des Kolbens bis zur Achse des Kreuzkopfzapfens:

$$P \sim \frac{E}{2S} \frac{d^4}{l^3} \quad \text{oder} \quad P \sim \frac{E}{2S} \frac{d_2^4 - d_1^4}{l^3}$$

\*) Vgl. R. Drawe in der Z. d. V. d. I. 1910 S. 260 u. f., wo auch an Hand anderer Kolbenformen der Weg gezeigt ist, der zu dieser Bauart geführt hat.

Für **stehende Maschinen** setze man den Sicherheitsgrad  $\mathcal{S}$ :

$\mathcal{S} = 8$  bis 11, wenn die Belastung zwischen  $P$  und null schwankt,

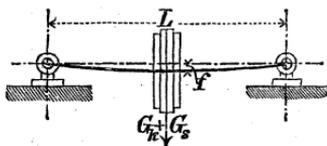
$\mathcal{S} = 15$  bis 22, wenn die Belastung zwischen  $+P$  und  $-P$  schwankt.

Ist der Kraftwechsel von Stößen begleitet, so sind für  $\mathcal{S}$  noch höhere Werte zu wählen.

Für **liegende Maschinen** tritt eine Biegungsbeanspruchung durch das Stangen- und Kolbeneigengewicht hinzu. Für kleine und mittlere Maschinen mit leichten Kolben ist durch die vorstehenden Formeln mit  $\mathcal{S} = 11$  bis 22 dieser Einfluß genügend berücksichtigt.

Bei großen Maschinen und Maschinen mit schweren Kolben ist die beiderseits durchgehende Kolbenstange (Abb. 258) als Träger auf **Biegung** zu berechnen. Hierbei darf die **Durchbiegung** die für zulässige Größe (1 bis 2 mm) nicht überschreiten. (Der Durchmesser des Kolbenkörpers ist dann mindestens um das 1,5- bis 2-fache der zugelassenen Durchbiegung kleiner zu wählen als der Durchmesser der Zylinderbohrung.)

Abb. 258.



Bezeichnet (Abb. 258)

$L$  die Länge der Stange zwischen der Achse des Kreuzkopfes und der des Tragschuhes (Schlitten) in cm,

$G_k$  das in der Mitte der Stange wirkende Kolbengewicht in kg,

$G_s$  das Stangengewicht in kg.

$f$  die Durchbiegung in der Mitte der Stange in cm,

$J$  das Trägheitsmoment des Stangenquerschnittes in  $\text{cm}^4$  (s. S. 552 u. f.),

so ist die **Durchbiegung**

$$f = \frac{L^3}{48} \frac{G_k + \frac{5}{8} G_s}{E J}.$$

Dieser Wert  $f$  wird durch den Einfluß des Knickdruckes  $P$  u. Umst. nicht unerheblich vergrößert (vgl. II., S. 599). Kolben aus geschmiedetem Stahl oder aus zähem Stahlguß und hohle Kolbenstangen tragen durch ihr geringes Eigengewicht und das reichliche  $J$  zur Verminderung von  $f$  bei.

Soll die Durchbiegung verhindert werden, so muß bei entsprechender Zylinderschmierung das Gewicht  $G_k + \frac{5}{8} G_s$  von dem genau (d. h. ohne Klemmung) in den Zylinder passenden Kolbenkörper aufgenommen werden. (**Getragene Kolben**, s. Abb. 254.) Als dann sei der Flächenruck

$$k = \frac{G_k + \frac{5}{8} G_s}{\text{Tragfläche im Zylinder}} < 3 \text{ kg/qcm},$$

also nicht größer als zwischen Kreuzkopf und Gleitbahn, besser noch geringer (bis herunter auf 0,5 kg/qcm).

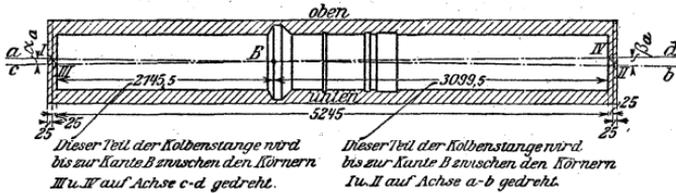
Bei den getragenen Kolben erzeugt die an Kolben und Stange exzentrisch angreifende Reibung erhebliche Beanspruchungen und Formänderungen der Stange und Klemmungen des Kolbens, weshalb reichlicher Stangenquerschnitt zu empfehlen ist.

Nach Kollmann erhält man eine im Betriebe gerade Kolbenstange, wenn man die vorher um die zu erwartende Durchbiegung  $f$  nach oben gekrümmte rohe Kolben-

stange bei richtiger Auflagerung mit wagerechtem  $L$  und bei Belastung mit  $G/k$  am Kolbensitz auf der Drehbank mittels umlaufenden Stichelgehäuses abdreht.

Die Maschinenfabrik Augsburg-Nürnberg A.-G. bearbeitet die Kolbenstangen (aus bestem Tiegelstahl) für die wassergekühlten Kolben (Abb. 256) ihrer Großgasmotoren, wie aus Abb. 259 zu er-

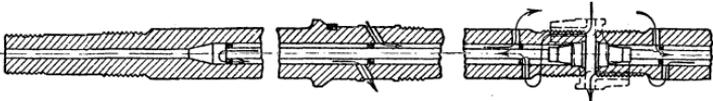
Abb. 259.



sehen ist. Bei Belastung durch den wassergefüllten Kolben wird die Kolbenstange angenähert bis zur Geraden zwischen ihren beiden Stützpunkten durchgebogen. Die Zylinderlauffläche wird angenähert vollständig entlastet, und die Stopfbüchsen werden geschont.

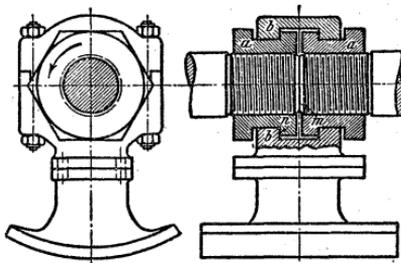
Die Wasserführung zur Kühlung der Kolben durch die hohle Kolbenstange, in die ein Rohr eingesetzt ist, zeigt Abb. 260 nach der

Abb. 260.



Ausführung der eben genannten Fabrik. Das Kühlwasser wird vom Kreuzkopf aus oder von dem die Kolbenstange zwischen den in Tandemanordnung liegenden Zylindern tragenden Gleitschuh aus zugeführt. \*) Einen solchen

Abb. 261.



Gleitschuh und zugleich die Verbindung der Kolbenstangen für Tandem-Gasmotoren zeigt Abb. 261 nach einer Bauart von Ehrhardt & Sehmer in Schleifmühle-Saarbrücken. \*\*) Die Muttern  $a, a$  werden bei dicht zusammengeschobenen Kolbenstangen durch die zweiteilige Kuppelung  $b, b$  miteinander verbunden.

Zur Verspannung der Verbindung wird dann eine der beiden Muttern etwas zurückgedreht, so daß sich die Flächen  $m$  und  $n$  fest aufeinander pressen.

\*) Vgl. Bonte, Z. d. V. d. I. 1906 S. 1250.

\*\*) S. R. Drawe in der Z. d. V. d. I. 1910 S. 260 u. f. — Dort ist diese Bauart mit anderen verglichen und der Weg gezeigt, der zu ihr geführt hat.

### C. Stopfbüchsen.

**Stopfbüchsenreibung** bei selbsttätiger Stulpdichtung wie Stulpreibung (s. u. Tauchkolben S. 909)

$$R = R_0 + \pi db p \mu,$$

wo  $d$  der Stangendurchmesser ist; die übrigen Größen s. S. 909.

Bei Packungen mit elastischen Stoffen gilt im allgemeinen gleichfalls vorstehende Formel, jedoch geht  $R$  auch bei dem Leergange ( $p = 0$ ) nicht unter einen Wert  $R_0$  hinab, der in der Formel  $R = R_0 + \pi db p \mu$  dem Werte  $p_1$  entspricht.  $R_0$  ist um so leichter und andauernder klein zu halten, je höher die Packung ist und je elastischer das Dichtungsmittel bleibt. Bei schlechter Packung oder bei unnötig scharf angezogener Stopfbüchse ist der Wert  $R_0$  größer als der Wert  $R_0 + \pi db p \mu$  bei dem größten vorkommenden Betriebsdrucke  $p_{\max}$  (oder es ist  $p_1 > p_{\max}$ ). Die Reibung ist alsdann unabhängig von dem Betriebsdrucke  $p$ .

Vorzugsweise wird Hanf,\*) neuerdings auch Baumwollenschnur in Talg getränkt (bei kalten Flüssigkeiten) oder mit Talk behandelt (bei warmen dsgl.), ferner Leder, Asbest, Holz- und — besonders für hochgespannten Dampf — Metallringe als Dichtungsmittel benutzt.

Mit Bezug auf Abb. 262 (Hanf- oder Baumwollpackung), wenn alle Abmessungen in cm, kann etwa gewählt werden

$$s_1 = 0,65 \sqrt{d} \text{ bis } 0,8 \sqrt{d}; \quad d_1 = d + 2s_1;$$

$$h \sim d_1; \quad h_{\max} = 6s_1 \text{ bis } 8s_1.$$

Gegenüber Wasser darf  $h$  etwas kleiner, gegenüber Luft und Dampf etwas größer gewählt werden. Je höher die Packung, um so dauerhafter ist sie im Betrieb und um so geringer ist die Reibungsarbeit. Die Packung dichtet nur gut, solange sie noch elastisch ist.

Bezeichnet  $i$  die Anzahl der Stopfbüchenschrauben,  $d$  ihren Durchmesser in cm,  $p$  den Flüssigkeitsüberdruck in kg/qcm, so folgt  $i$  aus (vgl. S. 768 u. f.):

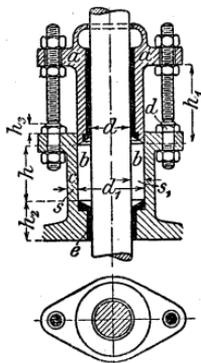
$$\frac{1}{4} \pi (d_1^2 - d^2) \cdot 3p = 120 d^2 i \text{ bis } 135 d^2 i.$$

Hierin ist  $p$  mindestens = 3 zu setzen; dabei soll für gewöhnlich  $d \geq 1,3$  cm sein.

Für die Stopfbüchsen von Druckwassermaschinen setze man statt  $3p$  den Wert  $1,25p$  und statt des Wertes 120 bis 135 den Wert 216 bis 270. Die Brille wird am besten mit einer einzigen Mutter (Ueberwurfmutter) oder Schraube angezogen.

**Grundbüchsenlänge:**  $h_2 \sim d$  bei liegenden und  $h_{2\max} = 3s_1$  bis  $4s_1$  bei stehenden Kolbenstangen. Bei überhitztem Dampf oder bei Verbrennungsmotoren wird  $h_2$  möglichst lang gewählt, um die Packung

Abb. 262.



\*) Ueber die in den Handel gebrachten, mit Paraffin, Vaseline Graphit usw. getränkten Schnüre vgl. die zahlreiche Ausführungen von Stopfbüchsen enthaltende Abhandlung von W. Lynen „Die Stopfbüchsen der Dampfmaschinen“, Zeitschr. d. bayer. Revisionsvereins 1904 S. 83 u. f.

vor zu großer Erwärmung zu schützen (vgl. Abb. 269). Wandstärke 4 bis 12 mm. Aeußerer Durchmesser der **Brille** =  $d_1$  — 0,5 bis 2 mm.

Abb. 262 u. 263 stehende, Abb. 264 hängende Stopfbüchse (*h* Schmier-  
rinne, *g* Schmierloch) mit Hanfpackung.

In Abb. 262 *a* Brille, *b* Packung, *c* Büchse, *e* Grundbüchse.

Stopfbüchsen können nur dann zum Tragen der Kolbenstange  
herangezogen werden, wenn die im Zylinderdeckel gelagerte Grund-

Abb. 263.

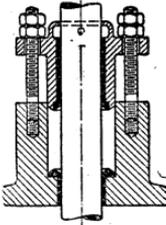


Abb. 264.

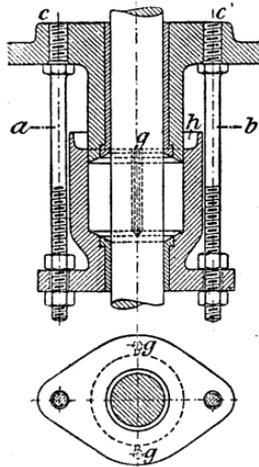
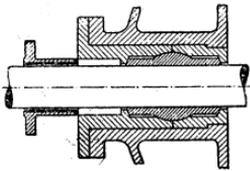


Abb. 265.



büchse so lang gemacht wird, daß die  
Pressung zwischen  
Stange und Büchse  
klein genug bleibt,  
und wenn zugleich  
diese Grundbüchse  
sich so einstellen  
kann, daß sie der  
wechselnden Durch-  
biegung der Kolben-  
stange folgen kann  
(s. Abb. 265). Dabei  
ist die Grundbüchse  
in drei gleichachsigen  
Kugelflächen (in der  
Mitte und an beiden  
Enden) beweglich  
gelagert, gemäß  
einem Patent der  
Märkischen Ma-  
schinenbauan-

stalt vorm. Kamp & Co. in Wetter a. d. Ruhr.

Die hauptsächlich für Dampfmaschinen mit hohem Druck oder mit  
überhitztem Dampfe benutzten Stopfbüchsen mit **Metalliderung** (s. Abb. 266  
bis 269) erfordern ununterbrochene, sorgfältige Schmierung; sie sind  
da nicht angebracht, wo infolge veränderlichen Stangenhubes stellen-  
weise stärkere Abnutzung der Stange zu befürchten ist. Die Metall-  
dichtung muß gegen radiale Abnutzung besonders gesichert sein.

Die Stopfbüchse in Abb. 266 wird für die Kolben- und Schieber-  
stangen der Lokomotiven der Preufs. Staatsbahnen vielfach angewendet  
(für die vordere Stopfbüchse der Schieberstange wird bei der Preufs.  
Staatsbahn stets Talkschnur- oder Asbestzopf-Liderung verwendet, weil  
Metalldichtung schwierig zentrisch anzuordnen ist; im Auslande wird  
auch für diese vordere Stopfbüchse Metalldichtung gewählt). Zweiteiliger  
Dichtungskegel aus Weißmetall mit 15 vH Antimon, 20 vH Zinn, 65 vH  
Blei; Dichtfläche *a* geschabt; Oelraum zwischen Deckel und Dichtungs-  
kegel mit Saugfilz oder drgl. gefüllt. — Howaldtsche Stopfbüchse  
(Abb. 267), häufig bei Schiffsmaschinen mit hohem Dampfdruck; zum  
Einsetzen und Herausnehmen der einzelnen Ringhälften sind in diesen  
Löcher mit Gewinde vorgesehen; oben Ring aus elastischer Schnur;  
Nachteil: viele Stücke. Aehnlich ist die Gmindersche Metallstopf-  
büchse, wobei die zylindrischen Innen- und Außenflächen der Ringe mit

Ringnuten versehen sind. — Stopfbüchse von Schelling (Abb. 268) hat dreiteilige Büchse aus Weichkupfer, um diese noch Hanfpackung zur Erzielung seitlicher Beweglichkeit; das Ganze durch zweiteiligen Metallring zusammengedrückt; bei der deutschen Kriegsmarine vielfach verwendet.

Für Dampfmaschinen mit überhitztem Dampf (12 at Druck und 320° Ueberhitzungstemperatur) ist Anordnung in Abb. 269 zweck-

Abb. 266. (Preufs. Staatsbahnen, Lokomotiven.)

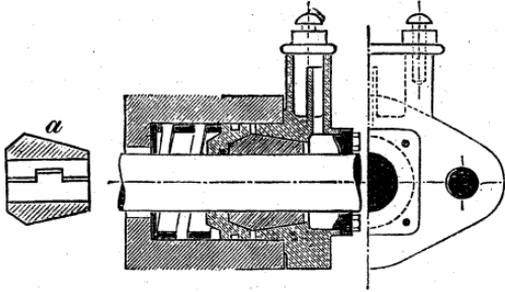


Abb. 267. (Howaldt.)

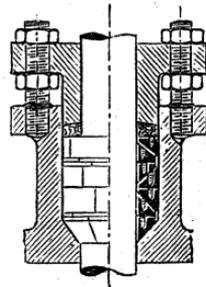


Abb. 268. (Schelling.)

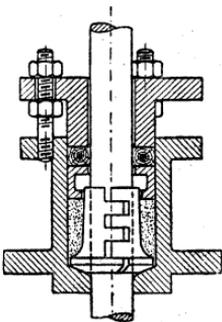
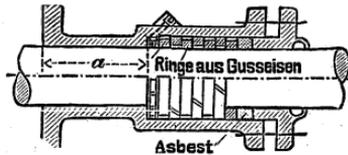


Abb. 269.



mässig. Alle Teile aus Gusseisen, ausgenommen die Asbestschicht unter der Brille. Die sechs Dichtungsringe abwechselnd mit

1 mm kleinerem und größerem Durchmesser als der Stangendurchmesser; dann schräg aufgeschnitten. *a* möglichst lang, damit die Packung nicht zu heiß wird.

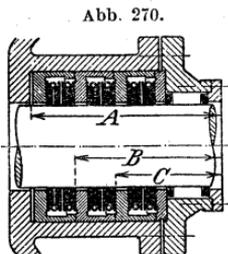
G. Huhn benutzt zur Dichtung etwa 5 Hohlringe aus Weichmetall, die mit einem gegen hohe Temperaturen widerstandsfähigen Schmierstoff gefüllt sind; kleine Löcher an der Innenseite lassen diesen beim Anziehen der Brille an die Stange treten.

Die weitere Ausbildung der Stopfbüchsen mit Metalliderung,<sup>\*)</sup> derart, daß die Abdichtung durch seitliche Bewegung der Stange gestattende Metallteile (Ringe) erstrebt wird, ohne daß die Büchse zum Tragen der Kolbenstange herangezogen wird, und ohne daß die Dichtung durch achsiale Schrauben (s. Abb. 267) fest angepresst wird, hat zu folgenden neueren Bauarten geführt:

1. Packung von Schwabe (neuerdings bis zu 290 mm Stangendurchmesser gebaut) von dem Ingenieur-Bureau für Maschinen-

<sup>\*)</sup> Vgl. Strömungen in engen Spalten (Labyrinthdichtungen von Dr. Ing. E. Becker, Z. d. V. d. I. 1907 S. 1133.

bau von Dr. R. Proell in Dresden in verschiedenen Ausführungsformen für nassen Dampf, für überhitzten Dampf und für Verbrennungsmotoren ausgebildet. — Der Hauptteil der Packung ist ein dreiteiliger, gußeiserner Dichtungsring, der von einer schlauchartigen Schraubenfeder umschlungen ist. Die Fuge zwischen den Ringteilen ist schräg geschnitten und kaum von Papierstärke, so daß von Ring zu Ring eine wirksame Drosselung des durchtretenden Dampfes erfolgt. Der Dichtungsring ist bei den heutigen Ausführungen meistens paarweise in Kammern gelagert (Abb. 270). Je nach der Höhe des Dampfdruckes werden bis zu zehn Ringen verwendet. In Abb. 270 bedeutet *A* die Länge der Büchse für Hochdruck, *B* für Mitteldruck, *C* für Niederdruck. Der dem Dampf zunächst liegende Dichtungsring erhält Entlastungskanäle zur Vermeidung von Geräusch in der Packung. Zur



Abdichtung des tiefsten Vakuums an Niederdruckzylindern genügt bei Stangen von 100 mm Durchmesser ein Ringpaar. — Für Gasmaschinen ist die Bauart nach Abb. 271 bestimmt. Die Büchse hat Druckschmierung, die zwischen der dritten und vierten Kammer, vom Zylinderraum ab gerechnet, mündet. Vor dem letzten Ringpaar liegt eine Expansionskammer zum Auffangen und Ableiten der z. B. bei Vorzündungen etwa bis hierher durchtretenden Gase. Die Stopfbüchse kann, wie z. B. auch die nach Abb. 275, wassergekühlt in den hohlen Deckel des Gasmaschinenzylinders eingesetzt werden.

2. Stopfbüchse nach Patent Paul H. Müller (Abb. 272), ausgeführt von der Firma A. L. G. Dehne in Halle a. d. S. — Die größeren, in eine Ausbohrung des Zylinderdeckels eingeschoben und am Rande gegeneinander mit Kupferasbest abgedichteten Kammerringe

Abb. 271.

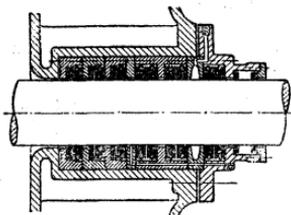
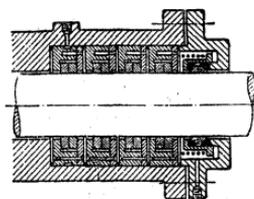


Abb. 272.



umschließen je ein gußeisernes Ringpaar. Von den beiden auf die Stange aufgeschliffenen Ringen ist der dem Zylinder zugekehrte dreiteilig und wird durch zwei federnde Drahtringe zusammengehalten und leicht gegen die Stange gedrückt. Der zweite ungeteilte Ring gibt den Fugenschluß für den dreiteiligen Ring, gegen den er achsial angepreßt wird. Die abdichtenden Ringpaare (1,2 bis 5 Paare) können sich innerhalb der Ringkammern radial frei bewegen. Eine Vorstopf-

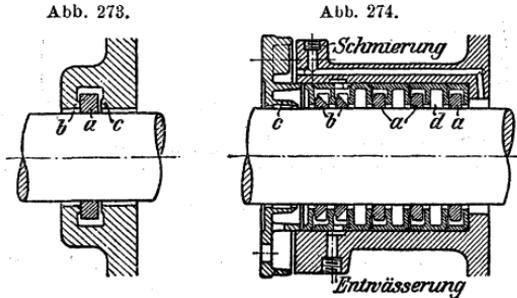
büchse aus Weißmetallpackung dient in Sonderfällen zum Abstopfen des Kondenswassers.

3. Lentz-Metallabdichtung.\*) — Die Grundlage dieser Stopfbüchse zeigt Abb. 273. Auf der Stange sitzt der einteilige Dichtungsring *a*, vom Dampfdruck ventilartig abdichtend gegen die Querwand *b* gedrückt. Beim Uebertritt in die Ringkammer um *a* wird der Dampf in dem engen Spalt bei *c* stark gedrosselt. Wird während der Expansionsperiode die Spannung im Zylinder etwa kleiner als in der Kammer der Stopfbüchse, so würde sich der Ring nach Druckausgleich nach rechts bei *c* anlegen. Abb. 274: Lentz-Stopfbüchse

mit fünf hintereinander geschalteten Dichtungsringen. Dabei wird von Kammer zu Kammer der etwa hindurchtretende Dampf stark gedrosselt; zugleich werden die Ringe abdichtend nach links angepreßt. Während der Expansionsperiode im Zylinder können die Ringe,

wenn Druckausgleich erfolgt ist, stufenweise durch Ueberdruck von links nach rechts verschoben werden. Der Spielraum der Ringe, die 15 bis 20 mm stark sind, ist ganz gering. In Abb. 274 wird die Büchse durch einen Deckel *c* festgehalten. Die Dichtungsringe *a* sitzen in Kammern *c* von F- bzw. U-Querschnitt. Die Kammerringe *c* sind dampfdicht aufeinander geschliffen und gegen den Körper der Stopfbüchse mit Kupferdraht abgedichtet. Zwischen den ersten vier Ringen, vom Zylinder aus gerechnet, sitzt je eine Expansionskammer *d*. Die vorderen Ringe *b* dienen als Abstopfringe für das Niederschlagwasser, das unten abgelassen wird. Oben wird durch eine Druckpumpe Oel zugeführt. Sämtliche Teile der Büchse, die gleich gut bei Sattdampf wie bei Heißdampf bei stehenden wie bei liegenden Maschinen arbeitet, sind aus Gußeisen hergestellt. Nach bisher achtjährigen Erfahrungen tritt Riefenbildung oder sonstige Abnutzung an den Dichtungsringen nicht ein, da die einteiligen Ringe, genau aufgeschliffen, ohne Druck gegen die Kolbenstange anliegen.

Eine Stopfbüchse für Großgasmaschinen\*\*) der Maschinenfabrik Augsburg-Nürnberg A.-G. zeigt Abb. 275. Die mit Druckschmierung versehene Büchse ist in den hohlen, wassergekühlten Zylinderdeckel so eingesetzt, daß sie mitgekühlt wird. Sie besteht aus zwei Teilen: der nach dem Zylinderraum liegende hat Kolbenring-



\*) Der Maschinenbauanstalt „Lentz“ Metallichtung, G. m. b. H., Berlin-Weißensee.

\*\*) Vgl. Bonte, Fortschritte und Erfahrungen im Bau von Großgasmaschinen. Z. d. V. d. I. 1906 S. 1252. — Aehnliche Büchse The Engineer, 24. Januar 1908, S. 88.

dichtung, etwa wie in Abb. 269, der nach außen liegende Teil hat Metallpackung, ähnlich der Howaldtpackung (Abb. 267). Zwischen die beiden Teile ist eine Feder eingeschaltet, um die Längsausdehnung aufzunehmen.

Abb. 275.

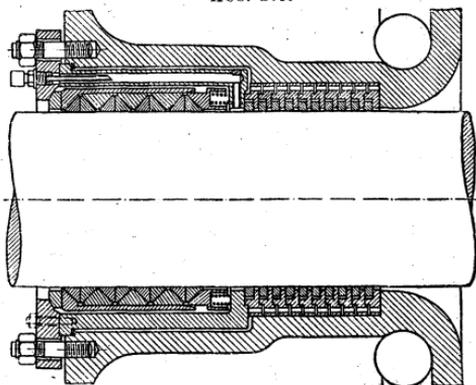


Abb. 276 zeigt eine Kohleringstopfbüchse der Allgemeinen Elektrizitäts-Gesellschaft. Sie ist in erster Linie für die Hochdruckseite der A. E. G.-Dampfturbine bestimmt, wird aber in ähnlicher Bauart auch vielfach für die Niederdruckseite verwendet. Die Kolbenringe sind dreiteilig und werden durch Federn

(Bügelfedern, Schlauchfedern usw.) zusammengehalten. — Der Sperrdampf wird, nachdem er in dieser Stopfbüchse\* gewirkt hat, vielfach nach der Niederdruckstopfbüchse geleitet.

Abb. 277 ist eine Stopfbüchse der Allgemeinen Elektrizitäts-

Abb. 276.

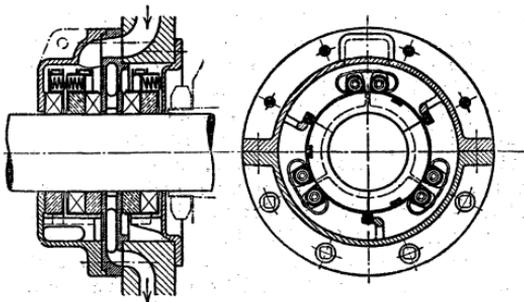
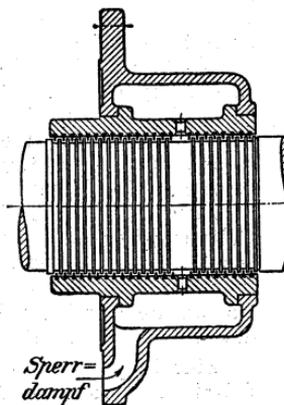


Abb. 277.



Gesellschaft für die Niederdruckseite von Dampfturbinen. Sie läßt in der dargestellten Ausführung geringe Längsverschiebungen zu; dagegen muß die Welle gut zentriert sein. — Die Stopfbüchse, die mit Sperrdampf arbeitet, wird auch öfter so ausgeführt, daß die Kämme in der Längsrichtung aneinanderliegen, während sie radial Spiel haben.

\* Ueber weitere Stopfbüchsen für die Hoch- und Niederdruckseite von Dampfturbinen vgl. Z. d. V. d. I. 1910 S. 124, 836, 1307 u. 1311. — Zu vgl. auch Dr. A. Stodola, Die Dampfturbinen. 3. Aufl. 1905 S. 210 u. f.

## V. KURBELTRIEB.

### A. Bewegungsverhältnisse.

Es bezeichnet

$r$  den Kurbelhalbmesser in m,

$s = 2r$  den Kolbenhub in m,

$l$  die Schubstangenlänge in m,

$\lambda = r : l$  das Längenverhältnis, bei Dampfmaschinen meist  $\lambda = 1/5$ ,\*)

$x$  den Kolbenweg, von der Totlage aus gemessen, in m,

$\alpha$  den zugehörigen Kurbelwinkel,

$\beta$  den zugehörigen Ausschlagwinkel der Schubstange,

$v$  die unveränderliche Geschwindigkeit des Kurbelzapfens in m/sk,

$c$  die augenblickliche Kolben-(Kreuzkopf-)Geschw. in m/sk,

$n$  die Anzahl der Kurbelumdrehungen i. d. Min.,

$P$  die Kolbendruckkraft in kg,

$T$  den Tangential-Kurbeldruck in kg.

Es ist  $r \sin \alpha = l \sin \beta$  oder  $\sin \beta = \lambda \sin \alpha$ .

In den folgenden Formeln gilt  $+$  für den Vorwärtsgang oder Hingang des Kolbens, d. h. für dessen Bewegung nach der Kurbelwelle hin, und  $-$  für den Rückgang.

#### a. Kolbenweg $x$ .

Bei dem **normalen Schubkurbelgetriebe** findet sich rechnerisch für einen beliebigen Kurbelwinkel  $\alpha$ :

$$\begin{aligned} x &= r(1 - \cos \alpha) \pm l(1 - \cos \beta) \\ &= r(1 - \cos \alpha) \pm l[1 - \sqrt{1 - (\lambda \sin \alpha)^2}]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Angenähert ist } x &= r(1 - \cos \alpha) \pm \frac{1}{2} \frac{r^2}{l} \sin^2 \alpha \\ &= r \left( 1 - \cos \alpha \pm \frac{1}{2} \lambda \sin^2 \alpha \right). \end{aligned}$$

Die Strecke  $\overline{a a_1}$  (s. Abb. 278), das sogen. Fehlerglied, ergibt sich demnach angenähert zu  $\overline{a a_1} = \frac{1}{2} \frac{(r \sin \alpha)^2}{l} = \frac{\alpha K^2}{2l}$ .\*\*)

$$\text{Für } \alpha = 90^\circ \text{ (Viertel-Kurbelumdrehung): } x = r \pm \frac{1}{2} \frac{r^2}{l}.$$

$$\text{Für } \alpha = 180^\circ \text{ (halbe Kurbelumdrehung): } x = 2r.$$

Für  $l = \infty$  ( $\lambda = 0$ ) wird  $x = r(1 - \cos \alpha)$ ; **Sinusversus-Bewegung** (Kurbelschleife; s. S. 938).

\*) Bei Lokomotiven ist  $\lambda$  gewöhnlich kleiner; vgl. II. Bd., Abschn. Eisenbahnwesen.

\*\*) Ueber die Verwendung dieses Ausdruckes vgl. Fränzel, Neuere Schiffsmaschinensteuerungen, Z. d. V. d. I. 1889 S. 985.

Der Kolbenweg (Abb. 278) wird zeichnerisch bestimmt,  
 wenn  $l = \infty$ : durch senkrechte Projektion  $Ka$ , also  $x = K_0 a$ ;  
 wenn  $l < \infty$ : durch Bogenprojektion  $Ka_1$  mit dem Halbmesser  $l$ ,  
 also  $x = K_0 a_1$ .

Man umgeht die Unbequemlichkeit und praktische Ungenauigkeit, die mit dem wiederholten Beschreiben der Kreisbogen vom Halbmesser  $l$  verknüpft ist, indem man (nach Müller) zwei Kreisbogen  $K_1$

Abb. 278.

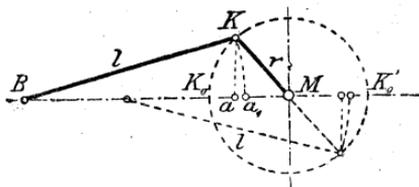
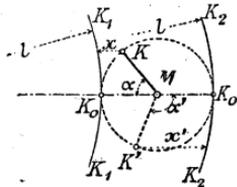


Abb. 279.



und  $K_2$  vom Halbmesser  $l$  beschreibt, die den Kurbelkreis in den Totpunkten  $K_0, K_0'$  berühren, und indem man von den Punkten  $K, K'$  aus parallel zur Schubrichtung die Strecken  $KK_1 = x$  abgreift (Abb. 279); oder nach Brix,\*<sup>\*)</sup> indem man als Scheitel der Kurbelwinkel  $\alpha$  nicht

Abb. 280.

Hingang

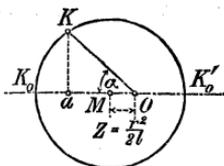
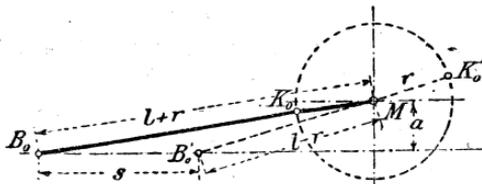


Abb. 281.



den Mittelpunkt  $M$  des Kurbelkreises, sondern einen um die Strecke  $Z = \frac{r^2}{2l}$  von  $M$  aus im Sinne des Hinganges verschobenen Pol  $O$  wählt und nun winkelrecht projiziert (Abb. 280):  $x = K_0 a$ .

**Geschränkte Schubkurbel:** Der Kurbelmittelpunkt  $M$  liegt nicht in der Achse der Pleuellange, sondern um  $a$  davon entfernt (Abb. 281). Dann liegen die Totpunkte  $K_0, K_0'$ , entsprechend den Strecklagen der Schubstange und Kurbel, unsymmetrisch; der Hub  $s > 2r$  ergibt sich aus

$$s = \sqrt{(l+r)^2 - a^2} - \sqrt{(l-r)^2 - a^2}.$$

Es ist z. B. für

$$a = 0,5 r,$$

$$\lambda = 1/5;$$

$$s = 2,01 r;$$

ferner für

$$a = r,$$

$$\lambda = 1/5;$$

$$s = 2,04 r.$$

\*<sup>\*)</sup> S. F. A. Brix, Das bizenrische polare Exzenterschieberdiagramm, Z. d. V. d. I. 1897 S. 431 u. f.

b. Kolbengeschwindigkeit  $c$ .

$$c = v \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos \beta} = v \frac{\overline{MD}}{r} = v \frac{\xi}{r} \quad (\text{Abb. 282}).$$

$c_{\max}$  findet statt, wenn die Beschleunigung (s. unter c.)  $p = 0$ ; die Bedingung dafür ist nach Schäd will

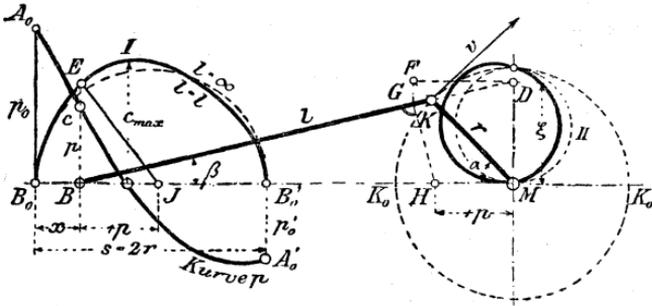
$$\left(\frac{z}{l}\right)^3 - 2(1-\lambda^2)\frac{z}{l} + (1-\lambda^2)^2 = 0,$$

worin  $z$  die Projektion von  $BM$  auf die Schubstange bezeichnet.

$$(\text{Bedingung } 1 - \lambda < \frac{z}{l} < 1 + \lambda.)$$

**Zeichnerische Darstellung von  $c$**  (Abb. 282). Wählt man den Maßstab für  $c$  so, daß  $v = r$ , so wird  $c = \xi$ . Dann ergibt sich (für den Hingang) für  $c$  das Dia-

Abb. 282.



gramm I, wobei  $x$  die Abszissen, und das Polardiagramm II, wobei  $\alpha$  die Polarwinkel sind ( $x$  und  $\alpha$  s. S. 927).

Angenähert ist  $c = v \sin \alpha (1 \pm \lambda \cos \alpha)$ .

Für  $\alpha = 0$  und  $\alpha = 180^\circ$  wird  $\beta = 0$ ,  $c = 0$ ;

für  $\alpha \pm \beta = 90^\circ$  wird  $c_{\max} = \frac{v}{\cos \beta}$  und  $\text{tg } \beta = \lambda$ ;

für  $\alpha = 90^\circ$  wird  $c = v$ .

Für  $l = \infty$  wird  $c = v \sin \alpha$  und  $c_{\max} = v$  für  $\alpha = 90^\circ$ .

Das Diagramm und das Polardiagramm von  $c$  für  $l = \infty$  und mit  $v = r$  werden Kreise (s. Abb. 282, punktiert).

$$\text{Mittlere Kolbengeschwindigkeit } c_m = \frac{2sn}{60} = \frac{2rn}{30},$$

$$\text{Kurbelzapfengeschwindigkeit } v = \frac{2\pi rn}{60} = \frac{\pi rn}{30}, \text{ daher}$$

$$v = \frac{\pi}{2} c_m = 1,571 c_m; \quad c_m = \frac{2}{\pi} v = 0,637 v.$$

Für  $\lambda = 1/5$  wird  $c_{\max} = 1,02 v = 1,6 c_m$ .\*

\*) Ueber die Beachtung der Trägheit der Schubstange bei hoher Geschwindigkeit vgl. Autenrieth, Z. d. V. d. I. 1885 S. 716 u. f. und 1896 S. 904.





**Schubstangenkraft** in kg: . . . . .  $S = \frac{P}{\cos \beta}$ ;

für  $\alpha = 90^\circ$  ( $\beta = \beta_{\max}$ ): . . .  $S_{\max} = \frac{P}{\sqrt{1 - \lambda^2}}$ ;

für  $l = \infty$ : . . . . .  $S = P$ .

**Tangential-Kurbeldruck** in kg: . . .  $T = P \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \beta}$ ;

für  $\alpha = 0, \alpha = 180^\circ$ : . . . . .  $T_0 = 0$ ;

für  $\alpha = 90^\circ$  ( $\beta = \beta_{\max}$ ): . . . . .  $T = P$ ;

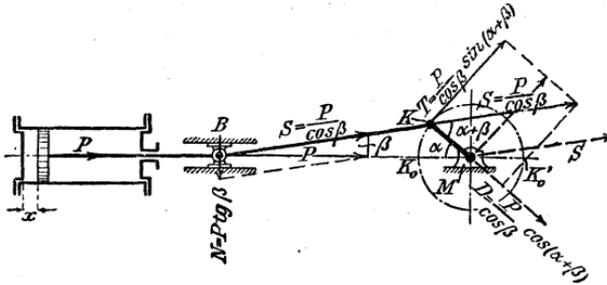
für  $\alpha + \beta = 90^\circ$ : . . . . .  $T_{\max} = S = P \sqrt{1 + \lambda^2}$ ;

für  $l = \infty$ : . . . . .  $T = P \sin \alpha$ .

(Diagramm vrgl. VII. Regelnde Maschinenteile.)

**Druck auf das Kurbellager.** Zu dem Drucke  $D$  auf die Kurbel (Abb. 284) tritt die Schubkraft  $T$ ; im Kurbellager ist daher der Druck  $\sqrt{D^2 + T^2} = S$  wirksam. Beim Hingange geht der Druck aus dem Lager hinaus, beim Rückgange in das Lager hinein.

Abb. 284.



## b. Arbeitsverhältnisse.

**Arbeit des Kolbendruckes:**

$$P c d t = P v \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \beta} d t;$$

**Arbeit des Tangential-Kurbeldruckes:**

$$T v d t = P \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \beta} v d t;$$

beide in der Zeit  $d t$  geleistete Arbeiten sind gleich groß.

Ist  $P_m$  der mittlere Kolbendruck in kg und  $T_m$  der mittlere Tangential-Kurbeldruck in kg, so folgt aus

$$P_m 2 r = T_m r \pi :$$

$$P_m = \frac{\pi}{2} T_m, \quad T_m = \frac{2}{\pi} P_m \text{ oder } P_m e_m = T_m v.$$

## c. Reibungsverhältnisse.

Angenommen  $P$  unveränderlich (=  $P_m$  bezogen auf einen Kolbenhub).  
Gesamtarbeit (in mkg) während einer halben Umdrehung:  $A = P 2r$ .

Ort der Reibung	Annähernde Reibungsarbeit mkg	Verhältnis der Reibungsarbeit zur Gesamtarbeit	Verhältnis der Reibungsarbeit zur Gesamtarbeit	unter Annahme von
Gleitbahn	$A_1 = \mu P \frac{r^2 \pi}{l} \frac{\pi}{2}$	$\frac{A_1}{A} = \frac{\mu \pi r}{4 l}$	$\frac{A_1}{A} = 0,009$	$\mu = 0,06,$ $r : l = 1/5$
Kreuzkopfzapfen	$A_2 = \mu P d_1 \beta_{\max}$	$\frac{A_2}{A} = \frac{\mu \beta_{\max} d_1}{2 r}$	$\frac{A_2}{A} = 0,001$	$\frac{d_1}{r} = 0,20$
Kurbelzapfen	$A_3 = \mu P \frac{\pi d}{2}$	$\frac{A_3}{A} = \frac{\mu \pi d}{4 r}$	$\frac{A_3}{A} = 0,012$	$\frac{d}{r} = 0,25$
Wellenzapfen	$A_4 = \mu P \frac{\pi D}{2}$	$\frac{A_4}{A} = \frac{\mu \pi D}{4 r}$	$\frac{A_4}{A} = 0,021$	$\frac{D}{r} = 0,45$

In vorstehender Zusammenstellung ist  
 $d$  der Kurbelzapfendurchmesser in m,  
 $d_1$  der Kreuzkopfzapfendurchmesser in m,  
 $D$  der Wellenzapfendurchmesser in m,  
 $\mu$  die Reibungszahl, angenommen  $\mu = 0,06$ ,  
 $r : l = \lambda$ , angenommen  $= 1 : 5$ .

Bei den angenommenen Werten wird

$$\frac{A_1 + A_2 + A_3 + A_4}{A} = 0,043,$$

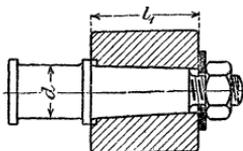
mithin ergeben sich 4 bis 5 vH Arbeitsverlust im normalen Kurbeltriebe unter der Voraussetzung, daß die Kraft  $P$  während des ganzen Hubes unveränderlich ist.

## C. Kurbeln und Exzenter.

## a. Kurbelzapfen.

Berechnung des Zapfens s. S. 845 u. f. Befestigung des Kurbelzapfens s. Abb. 285, 286 u. 287. — Der Kegel des Zapfens ist sauber einzuschleifen und dann durch Keil, Schraube oder durch hydraulische Presse in die Kurbel hineinzupressen und darin zu sichern. Hat der konische Zapfen einen Anlauf (Bund) (Abb. 285), so muß zwischen diesem und der Kurbel Spielraum bleiben, da die Schraube sonst den Zapfen nicht in die Kurbel hineinziehen kann. Mit Rücksicht auf Erneuerung des Zapfens wird Schrumpferbindung (des dann oft zylindrischen Zapfens) mit der

Abb. 285.



Kurbel nicht empfohlen. Wird der Zapfen kalt eingepreßt oder durch Erwärmen des Kurbelauges eingeführt, so wird er häufig durch Umnieten eines Randes gesichert. — Vorteil dieser Verbindung: Sie ladet durch Fortfall der Mutter nach hinten nicht aus.

**b. Kurbel.** (Abb. 286 und 287.)

$d_1 = 2d$  (für geschmiedete Kurbeln),

Anzug beiderseitig  $\frac{1}{25}$  bis  $\frac{1}{15}$ ,  $l_1 = 1,5d$  bis  $1,75d$ , Keilhöhe i. M.  $0,3l_1$  bis  $0,4l_1$ , Keilstärke  $= 0,2d$  bis  $0,25d$ , Schraubendicke  $= 0,5d$ .

$D_2$  einige mm  $< D_1$ ,

$l$  je nach Genauigkeit der Ausführung:

$l \geq D_2$ , wenn warm oder mittels Presse genau aufgezogen,

$l \geq 1,25D_2$ , wenn aufgekeilt.

Bohrung bei  $D_2$  bei warmem Aufziehen für Kurbeln aus Stahl, Fluß- oder Schweifeseisen oder Stahlgufs, je nach der Zähigkeit und der Dehnungszahl des Stoffes um  $0,1$  bis  $0,15$  mm auf  $100$  mm Dmr. kleiner als  $D_2$  (nach Angaben des Oberbilker Stahlwerkes und der Gutehoffnungshütte.) — Bach gibt das höhere Schrumpfmass von  $0,5$  mm auf  $100$  mm an. Grassmann (Karlsruhe) macht nach neueren

Ausführungen für das **Schrumpfmass\*** die Angabe:  $\frac{1}{1000}d + \frac{1}{20}$  mm.

Bei Kaltaufziehen der Kurbel mit der Druckwasser-Presse wird das Wellenende im Verhältnis  $1:100$  kegelförmig abgedreht.

Der Hebelarm  $a$  von Kurbelzapfenmitte bis annähernd Lagermitte sei möglichst klein.

**Wandstärke der Nabe**  
 $= 0,4D_2 + 1$  cm.

**Kurbelarm.** Für den im Abstände  $z$  von der Kurbelzapfenachse gelegenen Armquerschnitt  $bh$ , wobei  $b$  die achsiale,  $h$  die tangentielle Abmessung des Armes bedeutet, rufen folgende Kräfte Beanspruchungen hervor (vgl. Abb. 286, 287 u. 288):

von der Normalkraft  $D$   
herührend:

die Normalkraft  $D$  und das Biegemoment  $M_2 = Dv$ ;

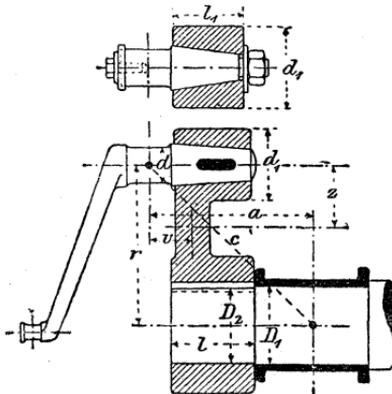
von der Tangentialkraft  $T$  herührend:

die Schubkraft  $T$ , das Biegemoment  $M_1 = Tz$  und

das Drehmoment  $M_d = Tv$ .

\* Zu vergleichen sind auch die Angaben über „Preßsitz“ und „Schrumpfsitz“ von Schlesinger im Heft 18 (S. 4 u. f.) der „Mitteilungen über Forschungsarbeiten“, herausgegeben vom V. d. I.

Abb. 286 und 287.



Die Normalkraft  $D$  und die Schubkraft  $T$  können vernachlässigt werden. Die Momente  $M_1$ ,  $M_2$  und  $M_d$  sind nach Maßgabe der Formeln auf S. 608 unter 3) zusammensetzen, und es sind die größten Beanspruchungen des Querschnittes  $bh$  in der dort angegebenen Weise zu ermitteln. Bei den gebräuchlichen Verhältnissen ist meistens die Beanspruchung in der Totstellung maßgebend, umso mehr als die plötzliche Aenderung in der Richtung der Kräfte für die Totstellung die Wahl einer besonders niedrigen zulässigen Spannung erfordert. Hier ist das Biegemoment  $M_b = Pv$  und die Zug- bzw. Druckkraft  $= P$ , mithin muß

$$\frac{M_b}{\frac{1}{6} b^2 h} + \frac{P}{bh} \leq kb \quad \text{oder} \quad P \left( v + \frac{b}{6} \right) \leq kb \frac{b^2 h}{6},$$

woraus sich  $h$  nach Annahme von  $b$  berechnen läßt.

Der **Wellenzapfen** mit dem Durchmesser  $D_1$  wird für das durch den größten Kolbendruck  $P$  hervorgerufene Biegemoment  $M = Pa$  und das durch den größten Tangentialdruck  $T$  erzeugte Drehmoment  $M_d = Tr$  nach S. 605 unter 1) berechnet.

Für Ueberschlagsrechnungen kann hierbei das Drehmoment  $M_d$  vernachlässigt werden, wenn in dem Biegemomente  $M$  für den Hebelarm statt  $a$  der Abstand  $c$  von Mitte Kurbelzapfen bis Mitte Wellenzapfen gesetzt wird.

### Beispiele von Kurbeln.

Abb. 288, geschmiedete Stirnkurbel,

Abb. 289, geschmiedete Stirnkurbel mit Gegengewicht,

Abb. 290, Gußkurbelscheibe mit Gegengewicht.

Abb. 288.

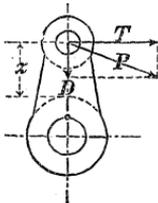


Abb. 289.

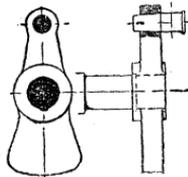
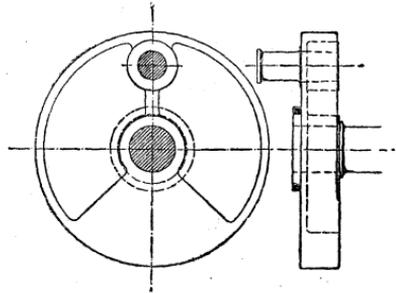


Abb. 290.



### c. Kurbelkröpfung. (Abb. 292.)\*

Zu vergleichen ist außer Bach, 10. Aufl. 1908 S. 553 u. f. und S. 573 u. f. (Verfahren von Pfeleiderer) insbesondere das Werk: „Mehr-mals gelagerte Kurbelwellen“ von Dr.-Ing. Max Ensslin, Stuttgart 1902, in dem der Rechnungsgang für mehrere Beispiele von drei- und viermal gelagerten, einfach und doppelt gekröpften Kurbelwellen für Gasmotoren und Dampfmaschinen durchgeführt ist.

\*) Zeichnerische Ermittlung der Beanspruchungen der einfachen und doppelten Kurbelkröpfung (Krumm-nachse) für verschiedene Fälle s. F. Reuleaux, Der Konstrukteur, 4. Aufl., S. 423 u. f.; Braunschweig 1882/89, F. Vieweg & Sohn.

Die wagerechte Kurbelwelle  $a c f_1 g_1 e g_2 f_2 d$  (Abb. 291) werde beansprucht:

in  $e$  durch die lotrechte Kraft  $\pm P$ , deren Moment  $M = Pr$  durch die in  $a$  sitzende Schwung-Riemenscheibe abgeleitet wird, in  $a$  durch das lotrechte Gewicht  $G$  der Riemenscheibe.

Lager der Welle in  $c$  und  $d$ .

Die wagerechte Seitenkraft zu  $P$  (durch die Schubstange) sowie der Riemenzug in  $a$  werden vernachlässigt.

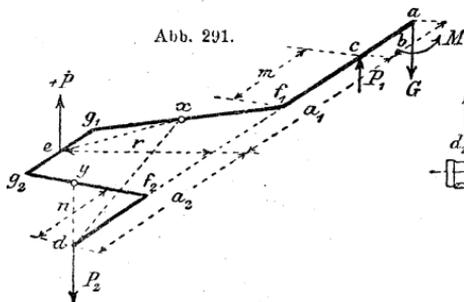


Abb. 291.

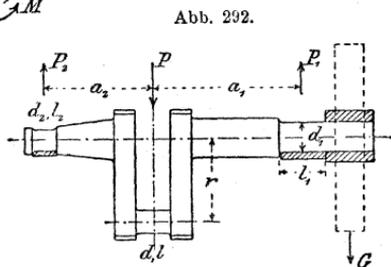


Abb. 292.

Lagerdruck in  $c$ :  $P_1 = G \frac{b + a_1 + a_2}{a_1 + a_2} - P \frac{a_2}{a_1 + a_2}$  nach oben,

in  $d$ :  $P_2 = G \frac{b}{a_1 + a_2} + P \frac{a_1}{a_1 + a_2}$  nach unten.

**Beanspruchung** der Querschnitte durch ein Biegemoment  $M_b$  und ein Drehmoment  $M_d$ , die nach S. 605 zusammensetzen sind.

Querschnitt  $c$ :  $M_b = Gb$ ,  $M_d = Pr$ .

Querschnitt  $f_1$  der Welle:  $M_b = G(m + b) - P_1 m$ ;  $M_d = Pr$ .

Querschnitt  $f_2$  der Welle:  $M_b = P_2 n$ ;  $M_d = 0$ .

Querschnitt  $x$  (beliebig): die Kräftepaare  $P \cdot ex$  und  $P_2 \cdot dx$  sind in je zwei Seitenpaare in der Ebene des Querschnitts und senkrecht dazu zu zerlegen. Die Summe der ersteren ergibt  $M_d$ , die der letzteren  $M_b$ . (Berechnung des rechteckigen Querschnitts s. S. 608.)

Querschnitt  $y$  (beliebig): Mit dem Kräftepaar  $P_2 \cdot dy$  ist zu verfahren wie vorher.

Querschnitt  $e$ :  $M_b = P_2 a_2$ ,  $M_d = P_2 r$ .

Die Untersuchung ist für beide Richtungen der größten lotrechten Kraft  $P$  anzustellen; die größeren Momente sind maßgebend.

Länge des Zapfens  $e$  nach S. 847 für  $P$  mit  $w = 37500$ , des Zapfens  $c$  für  $P_1$  mit  $w = 15000$  zu bestimmen. Der Stirnzapfen  $d$  ist für  $P_2$  unter den nämlichen Annahmen wie bei  $c$  zu berechnen. Dabei ist die Größe des Flächendruckes  $p$  nach S. 846 zu prüfen.

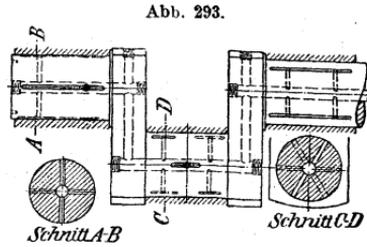
Für andere Belastungsfälle und Arten der Kraftableitung ist die Berechnung der Kurbelkröpfung in ähnlicher Weise durchzuführen, wie vorstehend angegeben.

Für Ableitung der Kraft gleichmäßig nach beiden Seiten des Krumzapfens  $d_1$ , also für  $a_1 = a_2 = a$  und  $d_2 = d_1$  ergibt sich (in Abb. 279) bei

$$\frac{r}{a} = 0,4 \quad 0,6 \quad 0,8 \quad 1,0$$

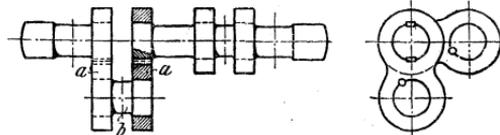
$$\frac{d_2}{d_1} = 1,055 \quad 1,105 \quad 1,158 \quad 1,210$$

Eine **Kurbelwelle** mit Druckschmierung von innen (für eine Großgasmaschine der Vereinigten Maschinenfabrik Augsburg und Maschinenbaugesellschaft Nürnberg) zeigt Abb. 293.



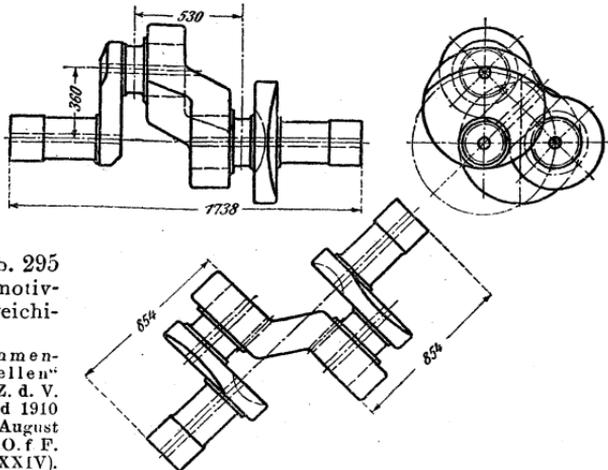
Die vielfach gekröpten Kurbelwellen von **Automobil- und Luftschiffmotoren** werden aus dem vollen herausgearbeitet. — Material für die ersteren: Chromnickelstahl von 7500 bis 9500 kg Zerreißfestigkeit für 1 qcm bei einer Dehnung von 15 bis 10 vH; für die letzteren: Chromnickelstahl, Zerreißfestigkeit 11 000 bis 12 000 kg für 1 qcm, Dehnung 12 bis 10 vH.

Abb. 294.



**Lokomotivachsen** (auch die Kurbelwellen von Schiffsmaschinen und anderen Dampfmaschinen) werden vielfach, um das schwierige Schmiedeverfahren zu vereinfachen, aus einzelnen Teilen aufgebaut.\*)  
Abb. 294 neunteilige Lokomotivachse von Webb und Abb. 295 dreiteilige Lokomotivachse der österreichi-

Abb. 295.



\*) Ueber „zusammengebaute Kurbelwellen“ ist zu vergleichen: Z. d. V. d. I. 1902 S. 1836 und 1910 S. 521. — Engineer, August 1909 S. 148 u. 225. — O. f. F. 1909 S. 206 (Tafel XXXIV). — Scientific American Supplement, 10. Sept. 1910 S. 172.

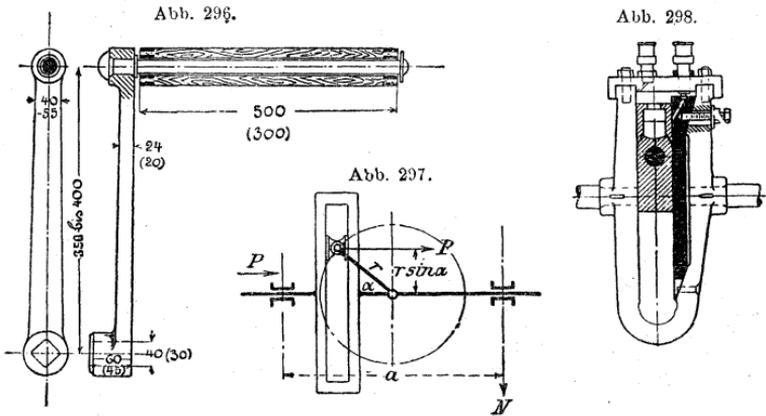
schen Staatsbahnen, hergestellt von der Witkowitz Bergbau- und Eisenhütten-Gewerkschaft.

Es kann auch, z. B. für Schiffsmaschinen, die Teilung so vorgenommen werden, daß die Kurbelarme  $aa$  in Abb. 294 mit dem Kurbelzapfen  $b$  aus einem Stück hergestellt werden und dann beiderseits durch Aufschrupfen mit dem Wellenschaft verbunden werden.

Die völlige Teilung nach Abb. 294 ergibt den Vorteil, daß für die Arme  $a_1, a$  weiteres, gut schiedbares Material, für den Kurbelzapfen  $b$  härterer, dichter Fließstahl genommen werden kann (über das Schrumpfmass vgl. oben unter b. Kurbel).

#### d. Handkurbel.

Kurbelhalbmesser = 35 bis 40 cm. Kurbelwelle über dem Stande des Arbeiters 0,90 bis 1,20, besser 1,00 bis 1,05 m. Die größeren Zahlen (Abb. 296) gelten für zweimännige, die kleineren (eingeklammerten) für einmännige Kurbeln. Durchmesser des drehbaren Holzgriffes oder Gasrohres 40 bis 50 mm, Stift hierzu 26 (17) mm. Durchmesser der Handkurbelwelle 40 (30) mm; Nabelnänge 60 (45) mm. Kurbeldruck eines Arbeiters im Mittel 10 bis 15 kg, vorübergehend bis 20 kg. Umfangsgeschwindigkeit 0,5 bis 1,0 m/sk. — Ueber Sicherheitskurbeln s. S. 908.



#### e. Kurbelschleife. (Abb. 297.)

Kolbenweg  $x = r (1 - \cos \alpha)$ ,

Führungsdruck  $N = \frac{Pr \sin \alpha}{a}$  (sehr groß),

Arbeitsverlust bei einer Umdrehung  $A_r = 2 P \mu \frac{r^2}{a} \pi + 4 P \mu r$ ,

Arbeitsverlust  $A_r = 0,20$  bis  $0,30$  der Gesamtarbeit  $A$  (sehr groß).

Ausführung bei kleinen Maschinen, besonders unmittelbar wirkenden Dampfmaschinen, wegen der kleinen Baulänge. Kurbelschleife mit Stellvorrichtung s. Abb. 298.

## f. Exzenter.

Die Breite  $b$  (in cm), d. h. die Länge des Zapfens, an dessen Stelle das Exzenter getreten ist, muß bei mittleren Verhältnissen der Beziehung

$$b \geq \frac{Pn}{w}$$

genügen (vgl. Gleichung IV, S. 847), wenn darin

$P$  den in der Mittelebene des Exzenters wirkenden mittleren Druck in kg,

$n$  die minutliche Umlaufzahl des Exzenters,

$w$  eine Erfahrungszahl bedeutet, die um so größer ist, je kleiner die Reibungszahl und je bedeutender unter sonst gleichen Verhältnissen die ableitbare Wärmemenge ist. Im Mittel sei

$w = 10\,000$  für Flußeisen oder Stahl (für den Bügel) auf Gußeisen (für das Exzenter),

$w = 20\,000$  für Weißmetall (Futter der Exzenterbügel) auf Gußeisen.

Für Lokomotiven, deren Exzenter starkem Luftzug ausgesetzt sind, kann  $w$  höher gewählt werden. — Ist weiterhin

$d$  der Durchmesser des Exzenters in cm (s. Abb. 299),

$D$  der Durchmesser der Welle in cm,

$s$  die kleinste Nabenstärke des Exzenters in cm,

$x$  die Stärke des äußeren Randes in cm, entsprechend der Schulterhöhe eines Zapfens vom Durchmesser  $D_0$  (s. unten und S. 846),

$\rho$  die Exzentrizität in cm, so gilt die Beziehung:

$$d = D + 2s + 2x + 2\rho.$$

Ist  $D_0$  die Wellenstärke (in cm), die dem zu übertragenden Drehmomente  $M_d = Pr = 0,2 kd D_0^3$  (vgl. S. 588) entspricht, so kann für gußeisernerne Exzenter gewählt werden:

$$s = 0,2 (D_0 + \frac{1}{2}D) + 0,5 \text{ cm bis } 0,25 (D_0 + \frac{1}{2}D) + 0,5 \text{ cm.}$$

Exzenter aus Flußeisen oder Stahl erhalten eine um 20 bis 30 vH geringere Nabenstärke  $s$ .

Arbeit des Exzenterdruckes  $P$  (in cmkg) für 1 Umdrehung:  $A = P4\rho$ ,

Arbeitsverlust durch Exzenterreibung „ „  $A_1 = P\mu_1\pi d$ ,

„ „ Wellenreibung „ „  $A_2 = P\mu_2\pi D$ ,

$$\text{Wirkungsgrad } \eta = \frac{A}{A + A_1 + A_2} = \frac{1}{1 + \mu_1 \frac{\pi d}{4 \rho} + \mu_2 \frac{\pi D}{4 \rho}}.$$

Beispiel.  $\rho = 60$  mm,  $D = 200$  mm,  $d = 400$  mm,  $\mu_2 = \mu_1 = 0,06$  ergibt  $\eta = 0,68$ .

Nutenkeile für die Befestigung der Exzenter auf ihren Wellen sind nach der Tafel S. 756 zu wählen. Mit Rücksicht auf gerades Aufkeilen sind lange Naben zu empfehlen. Für Steuerungen neuerdings verstellbare Befestigung mittels gezahnter Feder oder besonderen, in die Welle eingelassenen Zahnsegmentes.

Der Bügel kann mit seinen die Exzenterscheibe umfassenden Rändern eine Oelrinne bilden.

**Beispiele** von Exzentrern s. Abb. 299 u. 300. Ferner zeigt Abb. 301 ein Exzenter mit Kugellagerung der Deutschen Waffen- und Munitionsfabriken Berlin. Das Exzenter ist mindestens jede

Abb. 299.

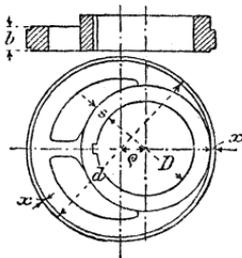
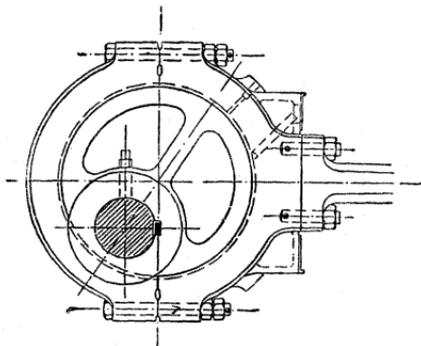


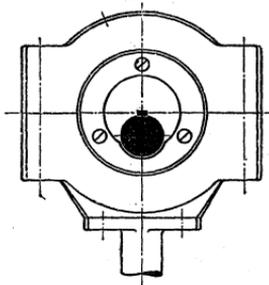
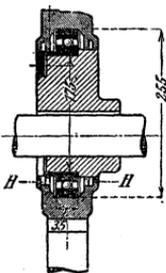
Abb. 300.



Woche einmal bis zur Linie  $H-H$  mit Zylinderöl zu füllen. Exzentrerscheiben

auf Kurbelwellen (bei Zweizylindermaschinen, oder wenn die Welle an der Stelle, wo das Exzenter sitzt, schwächer ist) macht man zweiteilig, um vorheriges Aufpressen der Kurbeln zu ermöglichen.

Abb. 301.



**Exzenterstangen** sind wie Schubstangen (s. u.) zu berechnen; man benutze die entsprechenden Gleichungen mit  $\varnothing = 40$ ; gleichzeitig mufs die gröfste, durch Eigengewicht und Stangenkraft erzeugte Druckspannung bei Schmiedeeisen  $< 300$ , bei Gußeisen oder Bronze

$< 150$  kg/qcm sein; der Einfluss der Durchbiegung der Stange ist dabei erforderlichenfalls zu berücksichtigen.

## D. Schubstangen.

### a. Schaft der Schubstangen.

Es bezeichnet im folgenden

$P$  die gröfste Stangenkraft in kg,

$L$  die Länge der Stange von Mitte bis Mitte Zapfen in cm,

$J$  das kleinste äquatoriale Trägheitsmoment des Stangenquerschnittes in der Mitte in  $\text{cm}^4$ ,

$E$  den Elastizitätsmodul des Baustoffes der Stange in kg/qcm,  
 $\mathcal{S}$  den Sicherheitsgrad gegen Knicken (vgl. S. 533),  
 $r$  den Kurbelhalbmesser in cm und  $n$  die Umlaufzahl i. d. Min.

### 1. Stangen für kleine und mittlere Geschwindigkeiten.

#### 1. Stange mit Kreisquerschnitt (vom Durchmesser $d_m$ in der Mitte).

$$P = \frac{\pi^2}{\mathcal{S}} E \frac{J}{L^2} \sim 40\,000 \frac{d_m^4}{L^2} \quad (\text{vgl. Fall 2, S. 533}),$$

wenn  $\mathcal{S} = 25$ ,  $E = 2\,000\,000$  kg/qcm gesetzt wird.

Nach dem Kurbelzapfen hin nimmt der Stangendurchmesser bis  $0,8 d_m$ , nach dem Kreuzkopfpapfen hin bis  $0,7 d_m$  oder  $0,75 d_m$  ab.

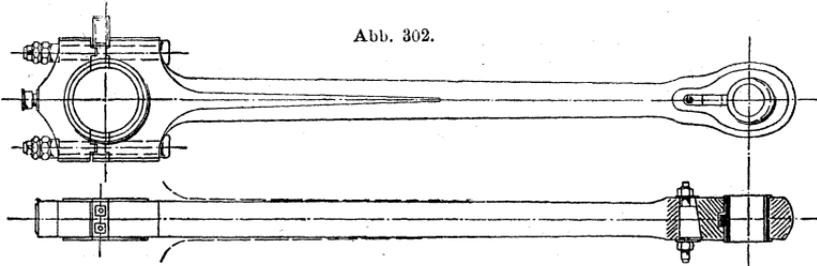


Abb. 302.

Bei großem Kurbelzapfen (z. B. bei gekröpften Wellen) läßt man den Querschnitt nach dem Kurbelzapfenkopfe der Schubstange hin wachsen (im Verhältnis bis 1:1,3), oder man hilft sich, wie in Abb. 302, durch Abflachung. — Nach dem Kreuzkopf zu sind die Schubstangen von neueren Dampf- und Großgasmaschinen meist gegabelt (s. Abb. 303 u. 311 auf S. 944 u. 945).

Bei sehr langsam gehenden Maschinen wähle man  $\mathcal{S}$  bis 33; bei stoßweisem Wechsel der Richtung von  $P$  (möglich z. B. bei Pumpen) sei  $\mathcal{S}$  etwa 40 bis 60 und mehr.

**2. Stange mit rechteckigem Querschnitte** (von der Breite  $b$  cm und der Höhe  $h = 1,75 b$  bis  $2 b$  cm in der Mitte).

$$P = \frac{\pi^2}{\mathcal{S}} E \frac{1}{12} \frac{b^3 h}{L^2},$$

woraus mit  $\mathcal{S} = 15$ ,  $h = 1,8 b$ ,  $E = 2\,000\,000$  kg/qcm:

$$P = 200\,000 \frac{b^4}{L^2} \text{ für Schmiedeeisen,}$$

und mit  $\mathcal{S} = 15$ ,  $h = 1,5 b$ ,  $E = 120\,000$  kg/qcm:

$$P = 10\,000 \frac{b^4}{L^2} \text{ für Holz.}$$

Höhen an den Köpfen  $= 1,2 h$  und  $0,8 h$ ; Breite  $b$  unveränderlich.

### 2. Stangen für große Geschwindigkeiten.

Beispiele solcher Stangen sind die **Lokomotivschubstangen** (vgl. III. Bd., Abschn. Eisenbahnwesen). Unter Voraussetzung recht-

eckigen Querschnittes von der Breite  $b$  und der Höhe  $h$  cm ergibt sich bei  $\mathcal{S} = 20/3$  bis  $10/3$ ,  $h = 2b$ ,  $E = 2\,000\,000$  kg/qcm:

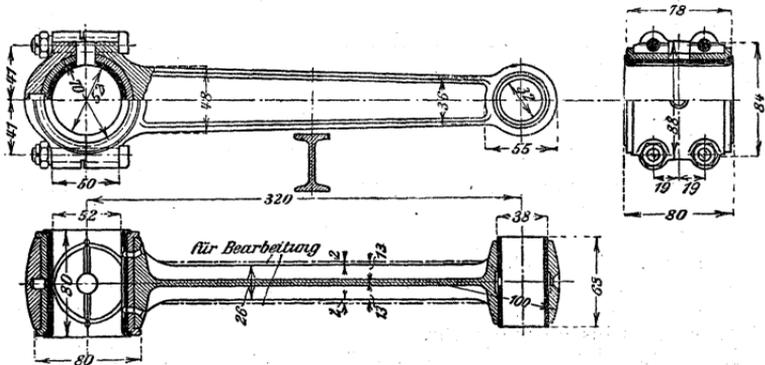
$$P = 500\,000 \frac{b^4}{L^2} \text{ bis } 1\,000\,000 \frac{b^4}{L^2}.$$

Vielfach wird  $\mathcal{S}$  noch niedriger als  $10/3$  angenommen; man findet  $\mathcal{S} = 2,5$  bis 3.

Der Umstand, daß sich bei raschem Wechsel von Zug und Druck Formänderungen nicht ausbilden können, unterstützt die in der Wahl des Wertes von  $\mathcal{S}$  liegende Absicht, die Stangen wegen der störenden Lokomotivbewegungen möglichst leicht zu halten. Um möglichst geringes Gewicht zu erzielen, gibt man den Stangen durch seitliches Ausfräsen auch wohl I-förmigen Querschnitt.

So werden auch die Schubstangen für Automobil- und Luftschiffmotoren gestaltet. — Abb. 303 zeigt eine Schubstange für einen Wagenmotor der Neuen Automobil-Gesellschaft in Ober-

Abb. 303.



Schöneweide b. Berlin, die gepreßt und durch Nachfräsen auf die I-Form der Abbildung gebracht wird. — Material für Wagenmotoren: Martinstahl von 6000 kg auf 1 qcm Zerreißfestigkeit und 20 bis 18 vH Dehnung. — Die Schubstangen für Flugmotoren\*) (Wright) sind ganz ähnlich, aber leichter, da sie aus Chromnickelstahl (aus dem vollen gearbeitet) bestehen; Zerreißfestigkeit 8000 kg auf 1 qcm; Dehnung 12 bis 8 vH.

Die nach dem Kurbelzapfen hin stärker werdende Form der Stangen ist für Umdrehungszahlen bis 2500 in 1 min und Kolbengeschwindigkeiten von 10 m/sk berechnet. — Die Fläche  $l.d$  des Kolbenbolzens beträgt im Mittel  $1/6$  der Kolbenfläche, die Fläche des Kurbelzapfens im Mittel  $1/3$  der Kolbenfläche.

Bei den **Lokomotivkuppelstangen** ist anzunehmen, daß die Schubstangenkraft auf die gekuppelten Achsen gleichmäßig verteilt wird;

\* S. auch Z. d. V. d. I. 1909 S. 580 u. f.

in dem größeren Werte von  $\mathcal{S}$  ( $=20/3$ ) liegt genügende Sicherheit gegen die Gefahr des Gleitens eines der gekuppelten Räder.

Für Schub- und Kuppelstangen ist festzuhalten, daß

$$\frac{P}{bh} = \frac{1}{30} \left( \frac{n}{1000} \right)^2 \frac{L^2 r}{h} \leq kb,$$

worin im Falle vollständigen Wechsels der Spannungen zu setzen ist: bei gewöhnlichem Schweiß- oder Flußeisen  $kb=300$ , bei vorzüglichem Schweiß- oder Flußeisen  $kb=400$ , bei gutem Flußstahl  $kb=500$  kg/qcm.

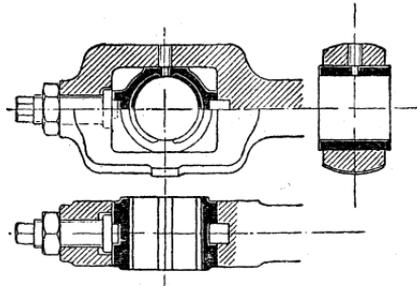
Die Beanspruchung einer prismatischen Stange durch die **Trägheitskräfte** im Augenblicke des größten Ausschlages ist nach C. Bach nahezu die eines Trägers auf zwei Stützen von der Stützweite  $L$ , der durch die Dreiecklast  $\frac{1}{2} q L$  [gemäß Fall 12, S. 599] belastet ist. Die Last im Kreuzkopfe  $A$  ist  $=0$ , die Last im Kurbelzapfen  $f$ . 1 cm Stangenlänge  $q = \frac{f \gamma v^2}{g r}$ , worin  $f$  der Stangenquerschnitt,  $\gamma$  das Gewicht der Raumeinheit ist;  $v$  und  $r$  s. S. 927. Die ganze Belastung ist daher gleich der halben Fliehkraft der im Kurbelzapfen vereinigt gedachten Stangenmasse. \*)

Die Schubstangen und Kuppelstangen der Lokomotiven (ebenso das gesamte Getriebe von Automobilmotoren) werden vielfach, ausgehend von der am Triebrad wirkenden Umfangskraft (Schienendruck, Bremskraft), berechnet. — So ist z. B. das Gestänge der von der Hannoverschen Maschinenbau-A.-G. vorm. G. Eggstorff für die Preussische Staatseisenbahnverwaltung gelieferten **Schnellzug- und Güterzuglokomotiven für einphasigen Wechselstrom\*\*)** so auf Bremsung berechnet, daß  $\frac{1}{3}$  des Adhäsionsgewichtes als am Radumfang wirkend angenommen ist. Dabei ist bei den Treibstangen  $\mathcal{S}=2$  bis  $3,5$ , bei den Kuppelstangen  $\mathcal{S}=4,5$  bis  $5$  gesetzt.

### b. Köpfe der Schubstangen.

Der den **Kurbelzapfen** umschließende Kopf ist entweder geschlossen — Nachstellung\*\*\*) durch Druckschraube (Abb. 304) oder durch Keil (Abb. 305, 306, 307 und 309) — oder offen — lagerartig (Abb. 308 und 311) oder als Kappenkopf (Abb. 312). — Je nach der Anordnung des **Kreuzkopfes** ist der dazu gehörige Stangenkopf lagerartig (Abb. 306, 307, 308 und 311) oder gabelförmig den Bolzen tragend (Abb. 309 und 312) oder gegabelt und lagerartig (Abb. 311 oben). Die Nachstellvorrichtungen zweier

Abb. 304.



\*) Vrgl. hierzu Antenrieth, Z. d. V. d. I. 1895 S. 716; Land, dsgl. 1896 S. 904.

\*\*) Die Anordnung des Gestänges bei elektrischen Lokomotiven ist zu ersuchen aus Z. d. V. d. I. 1909 S. 993 (Zusammenstellung), 1084, 1163 u. 2116; ebenda 1910 S. 558 u. 650.

\*\*\*) S. auch Volk, Maschinenteile. Z. d. V. d. I. 1908 S. 492 u. f.

Abb. 306.

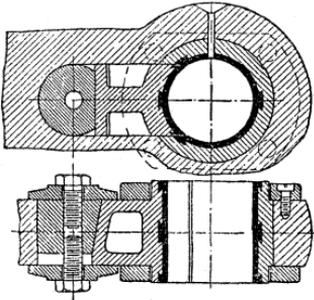


Abb. 305.

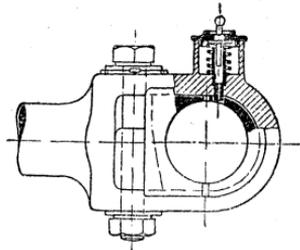


Abb. 307.

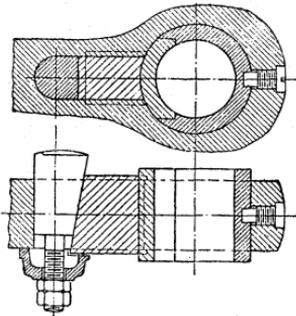


Abb. 308.

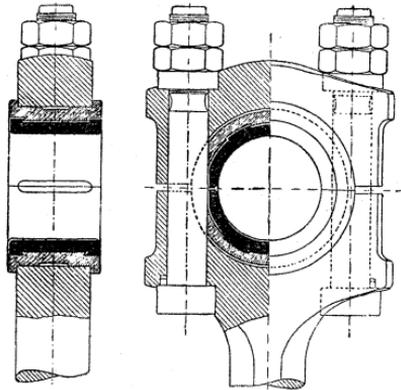


Abb. 309.

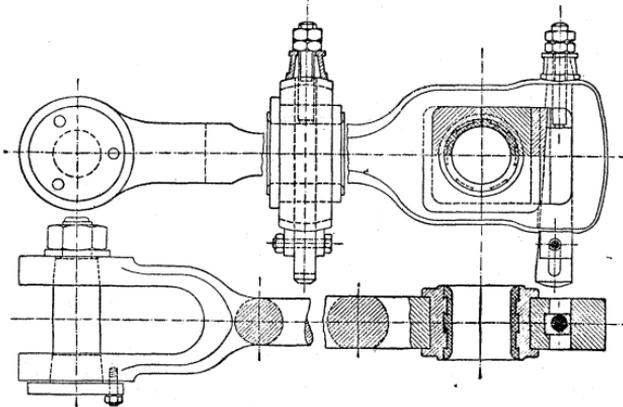
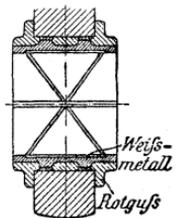


Abb. 310.



Weiss-  
metall  
Rotguß

Köpfe einer Stange sollten stets so angeordnet werden, daß die Stangenlänge  $L$  von Mitte zu Mitte Zapfen unverändert bleibt; diese Bedingung wird selbst von Bauarten hervorragender Fabriken nicht immer erfüllt (vgl. die Schubstange einer Schiffsmaschine Abb. 311, sowie die zusammengehörigen Köpfe einer Sulzer-Maschine Abb. 308 und 318, S. 947).

Die Befestigung des Weifsmetallfutters mit der Schale ist möglichst sicher zu wählen, damit das Futter beim Hämmern nicht abplatzt (Abb. 310).

**Beispiel der Berechnung der Köpfe einer Schubstange, Abb. 312.**

$P = 7800 \text{ kg}$ ;  $n = 40$ ;  $L = 250 \text{ cm}$ .

**Kurbelzapfen** (Flußeis): nach S. 845 u. f.;  $k_b = 500 \text{ kg/qcm}$  und  $k = 60 \text{ kg/qcm}$  wird  $d = 10 \text{ cm}$ ,  $l = 13 \text{ cm}$  (danach  $b = 11,6 \text{ cm}$ ).

**Kreuzkopfzapfen** (Flußeis): für  $k = 80 \text{ kg/qcm}$ ,  $l_1 = 1,5 d_1$  wird  $d_1 \sim 8 \text{ cm}$ ,  $l_1 = 12 \text{ cm}$

**Keildicke:**  $s_3 = 1/4 b \sim 3 \text{ cm}$ .

Aus  $s_3 s_4 k = 0,5 P$  folgt für  $k = 450 \text{ kg/qcm}$  Auflagerdruck zwischen Keil und Bügel  $s_4 = 3 \text{ cm}$ .

Abb. 311.

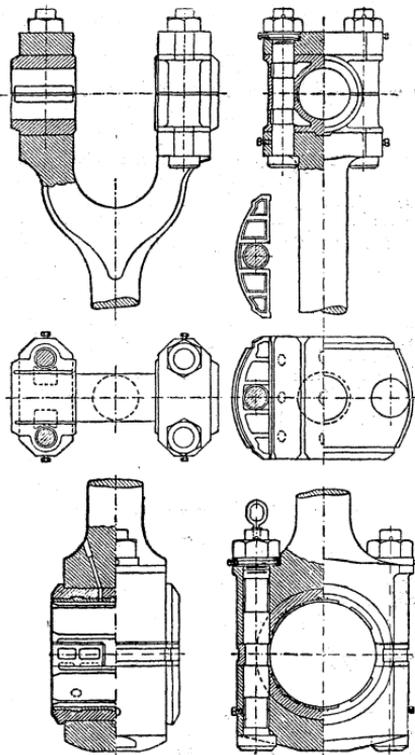
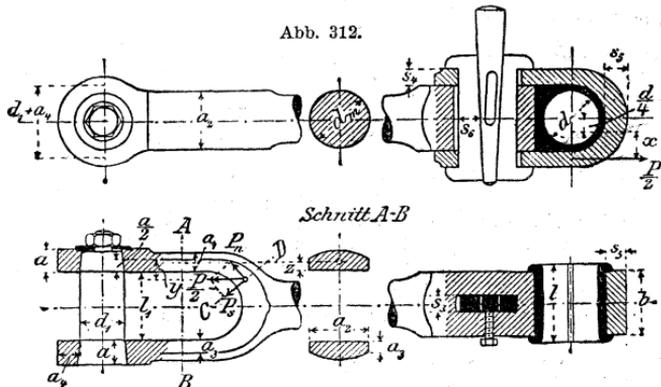


Abb. 312.



**Bügeldicke**  $s_5$  (Schweißseisen) läßt sich für Biegung ermitteln aus

$$\frac{P}{2} x = k_b \frac{b s_5^2}{6}$$

mit  $k_b = 600 \text{ kg/qcm}$  und  $x = 4,4 \text{ cm}$ :  $s_5 = 3,8 \text{ cm}$

**Mittlere Keilhöhe**  $s_6$  (für alle drei Keile gleich) folgt aus

$$\frac{1}{3} \frac{P}{2} x = k_b \frac{s_3 s_6^2}{6},$$

mit  $k_b = 1000 \text{ kg/qcm}$  (Flußstahl):  $s_6 = 3,4 \text{ cm}$ .

Die Tangente des halben Winkels an der Spitze des Keiles wird bei Sicherung durch eine Schraube zweckmäßig gleich 1 : 20 gewählt, so daß die Nachstellbarkeit von 0,8 cm eine Verschiebung des Keiles um 8 cm erfordert.

Der **linke Kopf** wird, nachdem die Schaftstärke  $d_m$  aus

$$P = 40\,000 \frac{d_m^4}{L^2} \text{ zu } d_m = 10,5 \text{ cm}$$

ermittelt worden ist, entworfen, also Breiten und Stärken angenommen und alsdann auf die Zulässigkeit der angenommenen Abmessungen geprüft; z. B.  $\alpha_1 = 4 \text{ cm}$ ,  $a = 4,6 \text{ cm}$ ,  $a_2 = 10 \text{ cm}$  gewählt,  $\alpha_3 = 2,7 \text{ cm}$  ermittelt

Der Querschnitt  $AB$  wird durch die abwechselnd als Zug und als Druck auftretende Kraft  $\frac{1}{2} P$  und durch das Biegemoment  $\frac{1}{2} P (\frac{1}{2} a - z)$  beansprucht, worin  $z$  den Schwerpunktabstand des Querschnittes (in cm) bedeutet.

Z. B. für die mittlere Höhe des Querschnittes = 3,3 cm und

$$\frac{a}{2} - z = \frac{4,6}{2} - \frac{3,3}{2} = 0,65 \text{ cm}$$

ergibt die erstere Beanspruchung die Normalspannung  $\sigma_1 = \frac{3900}{10 \cdot 3,3} = 118 \text{ kg/qcm}$ ,

die letztere die größte Biegungsspannung  $\sigma_2 = \frac{3900 \cdot 0,65}{\frac{1}{6} \cdot 10 \cdot 3,3^2} = 140 \text{ kg/qcm}$ .

Größte Gesamtspannung  $118 + 140 = 258 \text{ kg/qcm}$ , während für Schweißseisen 300  $\text{kg/qcm}$  (Belastungsweise III, S. 523) noch zulässig ist.

Wählt man deshalb  $\alpha_1 = 3,6 \text{ cm}$ ,  $a = 4,2 \text{ cm}$ ,  $a_2 = 10 \text{ cm}$ , so erhält man

$$\sigma_1 + \sigma_2 = 135 + 180 = 315 \text{ kg/qcm},$$

was noch zulässig ist.

Der Querschnitt  $CD$  wird beansprucht durch die zu vernachlässigende Schubkraft  $P_s$ , die Normalkraft  $P_n$  und das Biegemoment  $\frac{1}{2} P y$ . Für den vorliegenden Fall ist

$$P_n = 2250 \text{ kg}, \quad y = 3,6 \text{ cm}, \quad \frac{1}{2} P y = 3900 \cdot 3,6,$$

und demnach  $\sigma_1 + \sigma_2 = 331 \text{ kg/qcm}$ , was statthaft ist.

$$a_4 \text{ folgt aus } \frac{P \cdot d_1 + a_4}{2} = k_b \frac{a a_4^2}{6}$$

mit  $k_b = 600 \text{ kg/qcm}$ :

$$a_4 = 3,7 \text{ cm}.$$

## E. Kreuzköpfe.\*)

Die früher fast ausschließlich benutzte Anordnung, daß der gabelförmige Kreuzkopf den Bolzen trägt (Abb. 313, 314 und 315), wird mehr und mehr durch die umgekehrte Anordnung verdrängt: der Kreuzkopf ist lagerartig (Abb. 317 und 318) und die Schubstange gegabelt. Doch findet man auch bei neueren Lokomotiven noch die erstere Form (Abb. 316 — Kreuzkopf einer  $\frac{3}{4}$  gekuppelten Personenzug-Verbund-Lokomotive von der Hannoverschen Maschinenbau-A.-G.

\* S. auch Volk, Maschinenteile (Kreuzköpfe und Kreuzkopfbolzen), Z. d. V. d. L. 1908 S. 488 u. f.

Abb. 313.

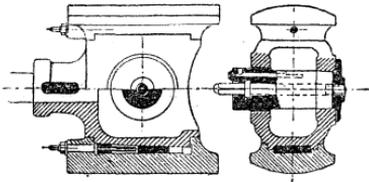


Abb. 314.

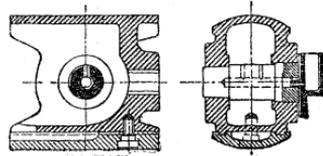


Abb. 316.

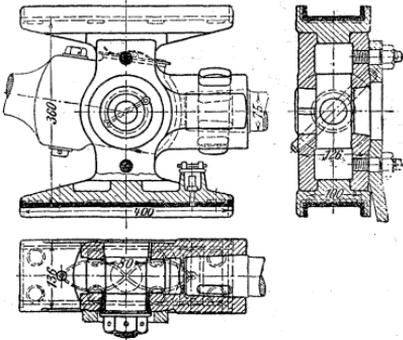


Abb. 317.

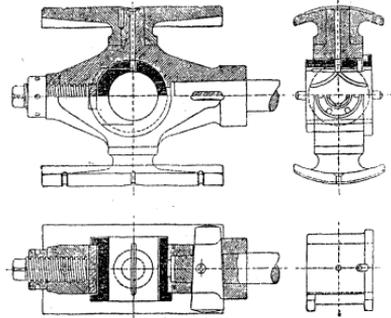


Abb. 315.

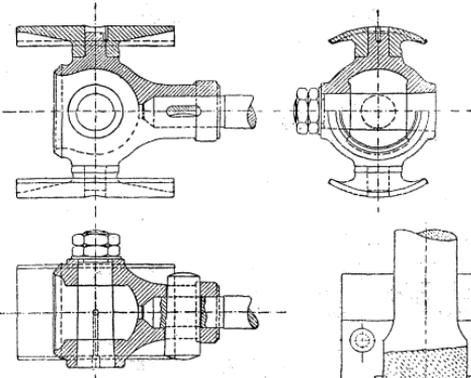
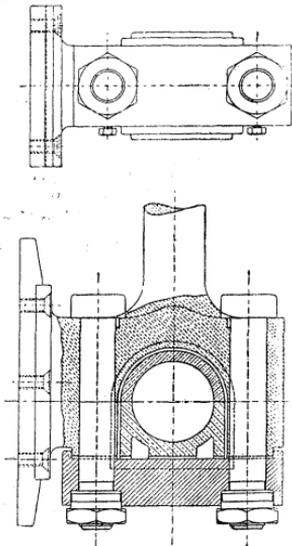


Abb. 318.

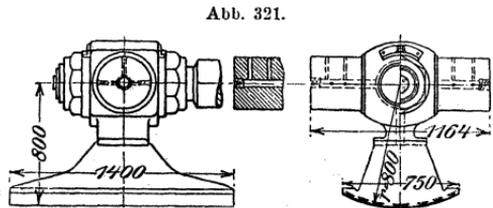
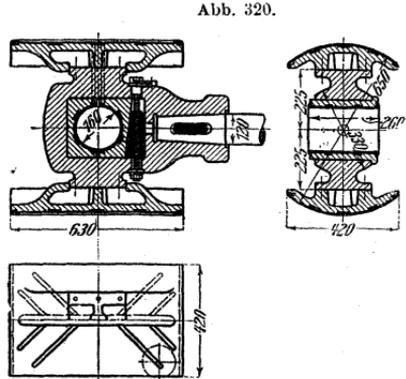
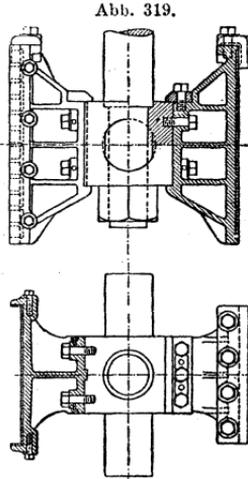


vom. G. Eggestorff). Für Schiffsmaschinen gebräuchlich Abb. 319, wozu der gegabelte Schubstangenkopf, Abb. 311 oben, gehört, für Schnellläufer

häufig Kolbenstange und Kreuzkopf aus einem Stücke (Abb. 318, Kreuzkopf für eine stehende Dampfmaschine).

In Abb. 318 ist das Stangenende besser verjüngt mit 1:6 Anzug anzuordnen.

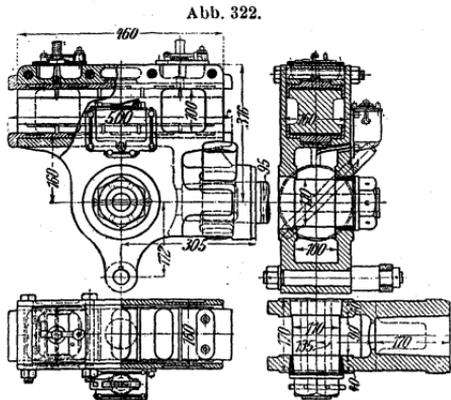
Abb. 320 zeigt den Kreuzkopf einer neueren Dampfmaschine der Maschinenfabrik Augsburg-Nürnberg A.-G.



Bei Abb. 318 tritt durch elastische Formänderung des Lagerdeckels leicht einseitige Belastung der Schrauben und damit deren Bruch ein, falls nicht zähes Eisen (Nietesen) und eine geringe Beanspruchung durch die Stangenkraft ( $k < 600 \text{ kg/qcm}$ ) gewählt ist; dabei ist die Durchbiegung des Deckels durch reichliche Höhe möglichst herabzuziehen.

Abb. 321 zeigt den Kreuzkopf einer Großgasmaschine der Maschinenfabrik Augsburg - Nürnberg, A.-G.

Der Druck in den Gleitflächen feststehender Maschinen soll, damit das Nachstellen tunlichst selten erforderlich ist, bei Geschwindigkeiten von 2 bis 2,5 m/sk, möglichst 2 (bisher höchstens 3) kg/qcm nicht überschreiten.

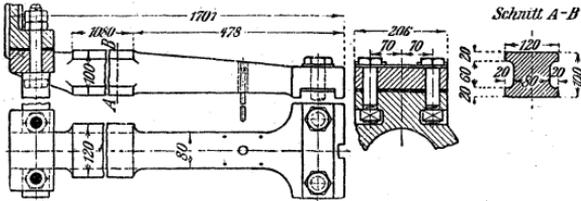


Doch findet man bei **Lokomotiven** Flächendrucke von 6 kg/qcm und mehr. Die Gleitbahn ist so stark auszuführen und so zu unterstützen, daß schädliche Durchbiegungen nicht eintreten können (s. II. Bd., Dampfmaschinen).

Ein Kreuzkopf für eine neuere **Schnellzuglokomotive**, der sich einseitig an einer von ihm umfaßten Gleitstange führt, ist in Abb. 322 dargestellt. — Abb. 323 zeigt die zugehörige **Gleitstange**.

Die Verbindung zwischen Kreuzkopf und Kolbenstange wird meist

Abb. 323.



durch **Keil** hergestellt (Abb. 313, 315, 316 usw.); seltener durch **Schraube** (Abb. 314). — Eine **verspannte** Schraubenverbindung, die der auf S. 920 (Abb. 261) dargestellten Kolbenstangenverbindung entspricht, zeigt Abb. 324 für eine doppelwirkende Viertakt-**Gasmachine** von Ehrhardt & Sehmer, Schleifmühlensaarbrücken.\*

**Kleinsches Verbindungsstück** (Abb. 325 und 326) zur Verbindung zweier

Abb. 324.

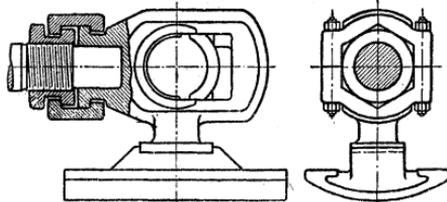


Abb. 325.

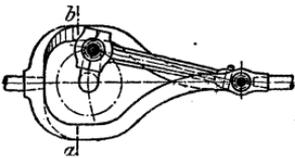
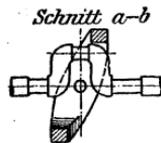


Abb. 326.



gleichachsigen Kolbenstangen zwischen der Kurbel. Die beiden langen Schenkel liegen in zwei so weit gegeneinander versetzten Ebenen, daß der Stangenkopf dazwischen schwingen kann. Geringere Weite des Verbindungsbügels und damit geringerer Abstand der Zylinderachse von der Maschinengrundplatte, als bei der Kurbelschleife.

\*) Ceber die Entstehung dieser Bauart vgl. R. Drawe in der Z. d. V. d. I. 1910 S. 267.

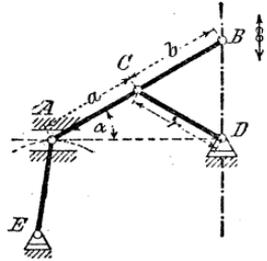
## F. Gelenkgeradfürungen.\*)

### a. Ellipsenlenker.

Hierbei bezeichne (Abb. 327 bis 331):

- $AB$  den Hauptlenker,
- $\alpha$  dessen halben Ausschlagwinkel,
- $CD$  den Gegenlenker,
- $C$  dessen Angriffspunkt,
- $D$  dessen Festpunkt,
- $B$  den gerade zu führenden Punkt.

Abb. 327.



#### 1. Der Evanssche Lenker (Abb. 327).

Winkel  $A DB = 90^\circ$ ,  $a = b = r$ . Wird nun  $A$  auf  $AD$  gerade geführt, so erhält man den genauen Ellipsenlenker; führt man aber  $A$  auf einem Kreisbogen, dessen Halbmesser  $EA$  ist, so hat man den angenäherten Evansschen Lenker. Je größer man  $EA$  und je kleiner man den Winkel  $\alpha$  wählt, desto genauer wird dieser Lenker. Es sei  $\alpha < 20^\circ$  und  $EA \geq B D$ .

#### 2. Der angenäherte Ellipsenlenker.

Nach der Lage von  $C$  in bezug auf  $A$  und  $B$  unterscheidet man drei Arten.

- Erste Art: Der Punkt  $C$  liegt zwischen  $A$  und  $B$  (Abb. 328).
- Zweite Art: Der Punkt  $C$  liegt über  $B$  hinaus (Abb. 329).
- Dritte Art: Der Punkt  $C$  liegt über  $A$  hinaus (Abb. 330).

Bei allen drei Lenkern kann die gerade Bahn des Punktes  $A$  durch eine kreisbogenförmige ersetzt werden.

Abb. 328.

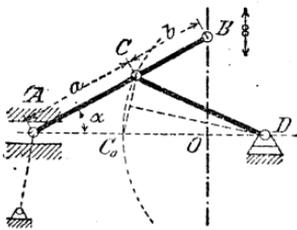
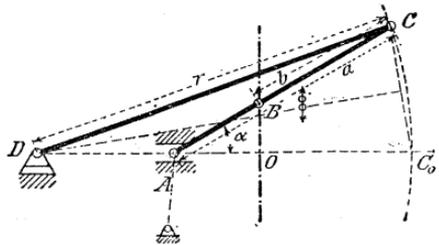


Abb. 329.



Die Lenker der dritten Art geben die größte Abweichung des Punktes  $B$  von der geradlinigen Bahn.

\*) Ausführlicheres s. Kinematisches Skizzenbuch, nach Vorträgen v. F. Reuleaux bearbeitet und herausgegeben vom akadem. Verein „Hütte“, W. Ernst & Sohn, Berlin 1880/1892. — Vgl. ferner Rittershaus, Gelenkgeradfürungen, Z. d. V. d. I. 1877 S. 217 (fünfpunktige Geradfürungen); R. Müller, Zeitschr. f. Mathem. u. Physik, Bd. 43, S. 36 (angenäherte Geradfürung mit Hülle eines ebenen Gelenkvierecks).

## Ermittlung des Gegenlenkers.

1. Es sei  $C$  gegeben, und  $D$  werde gesucht (Abb. 328 bis 330). Zeichne den Hauptlenker in seiner äußersten Lage, mache  $OC_0 = BC = b$ , ziehe  $C_0C$  und errichte in der Mitte dieser Linie eine Winkelrechte. Diese schneidet die Wagerechte  $OAC_0$  in  $D$ .

Wählt man  $\alpha$  sehr klein, so wird angenähert:

$$r : a = a : b.$$

2. Es sei  $D$  gegeben, und  $C$  werde gesucht (Abb. 331). Verlängere in der äußersten Stellung des Hauptlenkers die Linie  $AB$

Abb. 330.

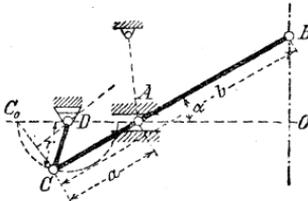
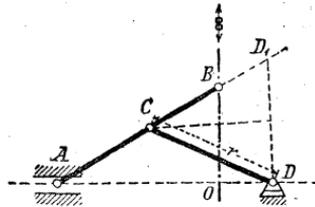


Abb. 331.



um  $BD_1 = OD$  und ziehe  $D_1D$ . Die Winkelrechte in der Mitte dieser Linie gibt auf dem Hauptlenker den Punkt  $C$ . Bei der zweiten und dritten Lenkerart (Abb. 329 und 330) trage man  $BD_1 = OD$  von  $B$  über  $A$  hinaus ab.

## b. Robertscher Dreiecklenker (Abb. 332).

Man nehme

$$CC_1 = DD_1 = r;$$

$$\frac{r}{h} = 0,584;$$

$$\frac{b}{h} = 0,593;$$

$$\frac{c}{h} = 1,112.$$

Abb. 332.

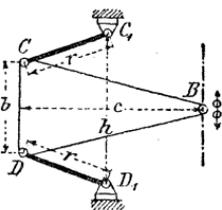
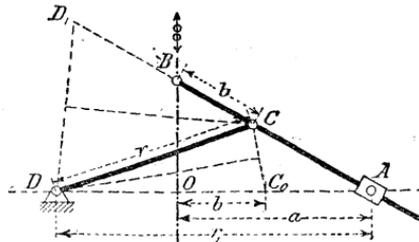


Abb. 333.



## c. Konchoidenlenker (Abb. 333).

Konchoide s. S. 114 u. 115.

Es sei  $AB$  der Hauptlenker,  $CD$  der Gegenlenker,  $C$  dessen Angriffspunkt und  $D$  dessen Festpunkt.

Je nachdem der Punkt  $C$  zwischen  $A$  und  $B$  oder über  $B$  oder über  $A$  hinaus liegt, hat man den Konchoidenlenker erster, zweiter oder dritter Art (wie unter 2., s. oben).

Der **Gegenlenker** wird wie der angenäherte Ellipsenlenker ermittelt (s. oben).

Der Lenker zweiter Art liefert, wenn man  $r = r_1$  macht, eine zwar kurze, aber sehr gute Geradföhrung.

#### d. Lemniskoidenlenker (Abb. 334 und 335).

Im folgenden bezeichnen

$a$  und  $a_1$  die Längen der Gegenlenker,

$d$  und  $d_1$  die entsprechenden Abschnitte der Koppel,

$\varphi$  und  $\varphi_1$  die halben Schwingungswinkel der Gegenlenker,

$s$  die Hubhöhe  $= 2a \sin \varphi = 2a_1 \sin \varphi_1$ ,

$c$  die Projektion der Verbindungslinie der Festpunkte  $M$  und  $M_1$  auf die Hubrichtung  $xy$ ,

$e$  und  $e_1$  die Pfeilhöhen der von den Endpunkten  $C$  und  $D$  der Gegenlenker beschriebenen Bogen, u. zw.

$$e = a(1 - \cos \varphi) \quad \text{und} \quad e_1 = a_1(1 - \cos \varphi_1).$$

Die Hubrichtung  $xy$  des gerade geföhrten Punktes  $B$  halbiert die Pfeilhöhen  $e$  und  $e_1$ .

Abb. 334.

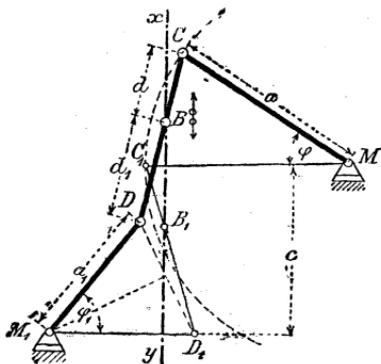
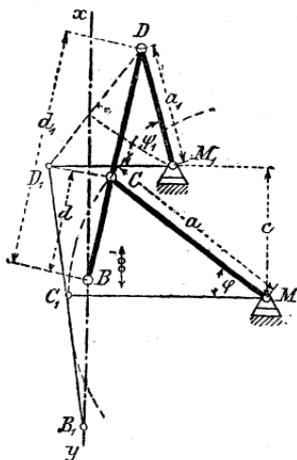


Abb. 335.



1. Gegeben der Lenker  $a$ , sein Festpunkt  $M$ , die Koppelabschnitte  $d$  und  $d_1$  und der gerade zu föhrende Punkt  $B$ ; gesucht die Länge  $a_1$  des Gegenlenkers und dessen Festpunkt  $M_1$ .

Da  $\varphi$  bekannt ist, sind  $s$  und  $e$  bestimmbar. Man zeichne den Lenker  $a$  in seiner äüfersten Stellung  $MC$  und in dieser Stellung

die Koppel so, daß der Punkt  $B$  auf  $xy$ , der Halbierungslinie der Pfeilhöhe des von  $C$  beschriebenen Bogens, zu liegen kommt, und stelle den Endpunkt der Koppel  $D$  fest.

Man suche dann die Lage  $D_1$  des Endpunktes der Koppel bei der mittleren Lage des Lenkers  $a_1$  (der um  $C_1$ , die Mittellage von  $C$ , mit  $CD = d_1 \pm d$  beschriebene Bogen schneidet die im Abstände  $\frac{1}{2}s$  von  $D$  gezogene Parallele mit  $MC_1$  in  $D_1$ ) und verbinde  $D$  mit  $D_1$ . Die Winkelrechte in der Mitte der Linie  $DD_1$  gibt auf der durch  $D_1$  mit  $C_1M$  gezogenen Parallelen den gesuchten Festpunkt  $M_1$  und somit auch die gesuchte Länge  $a_1$  des Lenkers  $M_1D$  an.

**2. Gegeben die beiden Lenker  $a$  und  $a_1$ , ihr Abstand  $c$  in paralleler Lage und die Hubhöhe  $s$ ; gesucht die Lage des gerade zu führenden Punktes  $B$  und die Festpunkte  $M$  und  $M_1$ .**

Man ermittle  $\varphi$ ,  $\varphi_1$ ,  $e$  und  $e_1$  und lege  $a$  und  $a_1$  winkelrecht zur Hubrichtung  $xy$  und im Abstände  $c$  so, daß  $e$  und  $e_1$  halbiert werden; dann sind  $M$  und  $M_1$  die Festpunkte. In der äußersten Lage schneidet  $CD$  die Hubrichtung  $xy$  in  $B$ ; dieser Punkt ist der gerade geführte Punkt.

Gute Führungen erhält man, wenn man macht (Abb. 334):

$$a = a_1 \geq \frac{2}{3}s, \quad \varphi = \varphi_1 \leq 19\frac{1}{2}^\circ, \quad e = e_1 \leq \frac{1}{26}s, \quad d = d_1 \geq \frac{2}{7}s.$$

### e. Tschibyscheffscher Lenker (Abb. 336).

Die gerade Bahn soll den Bogen, den der Punkt  $C$  beschreibt, berühren.

$$\begin{aligned} \text{Es sei} \quad & b = e = \text{dem halben Hube von } B, \\ & CE = DF = 0,618 a, \\ & d = c = 0,809 a. \end{aligned}$$

Der Punkt  $D$  soll in die gerade Bahn fallen.

Abb. 336.

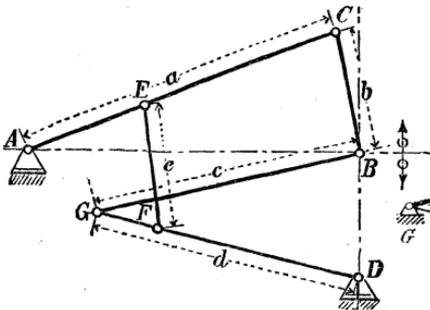
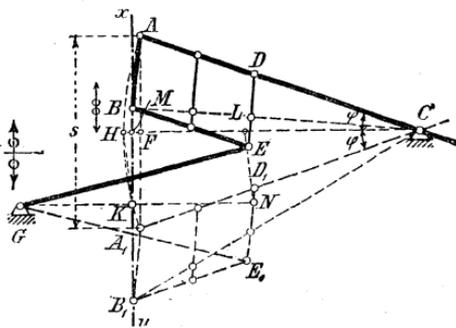


Abb. 337.



### f. Wattsches Parallelogramm (Abb. 337).

Es ist  $C$  der Drehpunkt des ersten Gegenlenkers (Schwinghebels);  $ACA_1$  der Schwingungswinkel  $2\varphi$ ; die Sehne  $AA_1$  gleich dem gegebenen Hube  $s$  ( $= BB_1$ );  $HM = MF$  die Hälften der Pfeilhöhe  $HF$ ;  $xy$  parallel  $AA_1$  durch  $M$ ;  $AB = HK = A_1B_1 =$  der

beliebig (zweckmäßig = 0,5  $s$ ) anzunehmenden Länge der Hängeschiene (Schere) und  $AD = HL = A_1D_1 =$  der gegebenen Seite des Parallelogramms. Man vervollständige nun durch die Verbindungsstange  $BE$  und die Hängeschiene  $DE$  das Parallelogramm  $ABED$ , entsprechend die Parallelogramme  $HKNL$  und  $A_1B_1E_1D_1$ , dann ist der Mittelpunkt  $G$  des durch  $E$ ,  $N$  und  $E_1$  gehenden Kreises der Drehpunkt des zweiten Gegenlenkers,  $GE = GN = GE_1$  dessen Länge, und jeder Punkt der Geraden  $BC$  ist gerade geführt.

Man wähle die Länge  $CA = 1,5 s$  bis  $2 s$ . Macht man wie gewöhnlich  $AD = CD$ , so ergibt sich der Punkt  $K$  als Drehpunkt des zweiten Gegenlenkers, dessen Länge dann  $KE = AD = CD$  ist.

## VI. MASCHINENTEILE ZUR AUFNAHME UND ZUR FORTLEITUNG VON FLÜSSIGKEITEN.

### A. Zylinder.

#### a. Pumpen- und Prefszylinder.

1. Sind nur Rücksichten auf Herstellung, Fortschaffung und Aufstellung maßgebend, so erhalten nicht auszubohrende gußeisernerne **Pumpenzylinder** vom inneren Durchmesser  $D$  (in cm) eine Wandstärke  $s$  (in cm):

$$s = \frac{1}{50} D + 1,0 \text{ cm, wenn stehend gegossen,}$$

$$s = \frac{1}{40} D + 1,2 \text{ cm, wenn liegend gegossen.}$$

Der innere Flüssigkeitsüberdruck  $p_i$  (in kg/qcm) erfordert eine Wandstärke, die nach 1. auf S. 624 zu bestimmen ist; wegen der Möglichkeit des Kernverlegens ist die so gefundene Wandstärke  $s$  noch um 0,3 bis 0,6 cm zu vergrößern. In Hinsicht auf etwaige Stofswirkungen, Temperaturunterschiede usw. wähle man für gewöhnliches Gußeisen die zulässige Zugspannung  $k_z$  womöglich  $< 200$  kg/qcm. Der größere Wert der auf beide vorstehenden Arten berechneten Wandstärke ist maßgebend.

Auszubohrende gußeisernerne Pumpenzylinder, die die genaue zylindrische Form beim Ausbohren erlangen und im Betriebe behalten müssen, und die überdies ein- oder zweimaliges Ausbohren nach eingetretener Abnutzung gestatten sollen, erhalten eine um etwa 0,3 bis 0,5 cm größere Wandstärke als nicht auszubohrende Zylinder. Die nach S. 624 1. gefundene Wandstärke ist um 0,8 bis 1,6 cm zu vergrößern. Für Stahlgufs (bei hohem Drucke) sei  $k_z \geq 500$  kg/qcm, dabei  $s \geq 1,5$  cm.

2. **Prefszylinder\*** sind nach 1. auf S. 624 zu berechnen, wobei man für  $k_z$  die folgenden Werte zulassen muß:

\*) Ueber die Berechnung der durch aufgezoogene Ringe verstärkten Rohre (Ringgeschütze) s. C. Bach, Die Maschinen-Elemente, 10. Aufl. 1908 S. 846. ferner Kaiser, Konstruktion der gezogenen Geschützrohre 1900. sowie Engineering 1909 S. 567 u. f. — Ueber Huberprefszylinder vgl. Z. d. V. d. I. 1901 S. 622 u. f. (Ringlagen mit Druckabstufung zwischen den Ringen.)

für Gufseisen und Bronze . . . . .	$k_z = 300$ bis 750 kg/qcm,
„ Phosphorbronze . . . . .	$k_z = 500$ „ 1000 „
„ Stahlgufs . . . . .	$k_z = 1000$ „ 2000 „
„ Schweifseisen . . . . .	$k_z = 900$ „ 1800 „

Den oberen Grenzwerten von  $k_z$  nähert man sich nur gezwungen; für Stahlgufs-Zylinder empfiehlt sich,  $k_z$  so zu wählen, wie das liefernde Werk es gewährleistet.

Für den Fall, dafs durch den Prefskolben ein bestimmter Druck  $P$  (in kg) auszuüben ist, wird der äufsere Halbmesser  $r_a$  (vgl. S. 624 I.) zu einem Kleinstwerte für  $p_i = 0,36 k_z$ , u. zw.:

$$r_{a \min} = 1,5 r_i \quad \text{oder} \quad s_{\min} = 0,5 r_i.$$

### b. Dampfzylinder.

Für  $D$  cm lichten Durchmesser kann die Wandstärke  $s$  des Dampfzylinders bei liegenden Maschinen bestimmt werden aus

$$s = \frac{1}{50} D + 1,3 \text{ cm für stehend gegossene Zylinder,}$$

$$s = \frac{1}{40} D + 1,5 \text{ cm für liegend gegossene Zylinder;}$$

bei stehenden Maschinen kann  $s$  um 10 bis 20 vH schwächer sein. Weiteres über Dampfzylinder s. II. Bd., Kraftmaschinen, unter „Teile der Dampfmaschinen“.

### c. Zylinder für Verbrennungskraftmaschinen.

Ueber Wandstärke des Zylinders\*) und des Zylindermantels II. Bd. S. 277.

Um die bei einteiligen Zylindern in den Zylinderköpfen häufig vorgekommenen Risse zu vermeiden, hat man die Zylinder dreiteilig (Zylinderköpfe und Laufzylinder zusammenschraubt) hergestellt. — Nach *Drawe\*\**) empfiehlt sich zur Vermeidung von Rissen infolge von Guf- und Wärmespannungen die zweiteilige Bauart nach Abb. 338.

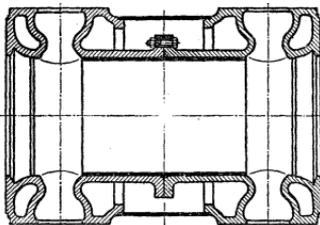


Abb. 338.

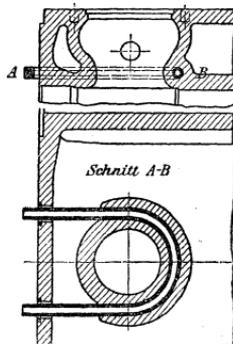


Abb. 339.

Nach einem D. R.-P. von Bonte, Karlsruhe, ausgeführt von der Maschinenfabrik Augsburg-Nürnberg, wird die am meisten gefährdete Stelle am Uebergang von der Ventilkammer zum Laufzylinder durch ein eingegossenes Siemens-Martin-Stahlrohr wirksam verstärkt und zugleich gekühlt (Abb. 339).

\*) Vgl. auch Güldner, Entwerfen und Berechnen der Verbrennungsmotoren, 2. Aufl. 1905, S. 248 u. f.; sowie Rieppel, Die Großgasmaschinen in Amerika, Z. d. V. d. I. 1909 S. 2031 u. f., S. 2083 u. f.

\*\*) *Drawe*, Konstruktive Einzelheiten an doppeltwirkenden Viertakt-Gasmaschinen, Z. d. V. d. I. 1910 S. 260 u. f. (Fortsetzung auf S. 962.)

### Deutsche Rohr-Normalien für gußeiserne

Gemeinschaftlich aufgestellt von dem Vereine deutscher Ingenieure und

Muffenrohre (Abb. 340)												
Lichter Durch- messer $D$	Normale Wand- stärke $s$	Außeerer Rohr- durchmesser $D_1$	Gewicht eines glatten Rohrstückes von 1 m Länge	Weite der Dichtungsluge $f$	Innere Muffen- weite $D_2$	Außeerer Muffen- durchm. $D_3$	Innere Muffen- tiefe $t$	Dichtungstiefe $t' = t - 1,5 s$	Uebliche Nutz- länge $L$	Gewicht der Muffe	Gewicht eines Rohres von vor- stehender Nutz- länge	Gewicht für 1 m Rohr bei vorstehender Nutzlänge
mm	mm	mm	kg	mm	mm	mm	mm	mm	m	kg	kg	kg
40	8	56	8,75	7	70	116	74	62	2	2,68	20,18	10,09
50	8	66	10,57	7,5	81	127	77	65	2	3,14	24,28	12,14
60	8,5	77	13,26	7,5	92	140	80	67	2	3,89	30,41	15,21
70	8,5	87	15,20	7,5	102	150	82	69	3	4,35	49,95	16,65
80	9	98	18,24	7,5	113	163	84	70	3	5,09	59,81	19,94
90	9	108	20,29	7,5	123	173	86	72	3	5,70	66,57	22,19
100	9	118	22,34	7,5	133	183	88	74	3	6,20	73,22	24,41
125	9,5	144	29,10	7,5	159	211	91	77	3	7,64	94,94	31,65
150	10	170	36,44	7,5	185	239	94	79	3	9,89	119,21	39,74
175	10,5	196	44,36	7,5	211	267	97	81	3	12,00	145,08	48,36
200	11	222	52,86	8	238	296	100	83	3	14,41	172,99	57,66
225	11,5	248	61,95	8	264	324	100	83	3	16,89	202,71	67,57
250	12	274	71,61	8,5	291	353	103	84	4	19,61	306,05	76,51
275	12,5	300	81,85	8,5	317	381	103	84	4	22,51	349,91	87,48
300	13	326	92,68	8,5	343	409	105	85	4	25,78	396,50	99,13
325	13,5	352	104,08	8,5	369	437	105	85	4	28,83	445,15	111,29
350	14	378	116,07	8,5	395	465	107	86	4	32,23	496,51	124,13
375	14	403	124,04	9	421	491	107	86	4	34,27	530,43	132,61
400	14,5	429	136,89	9,5	448	520	110	88	4	39,15	586,71	146,68
425	14,5	454	145,15	9,5	473	545	110	88	4	41,26	621,82	155,46
450	15	480	158,87	9,5	499	573	112	89	4	44,90	680,38	170,10
475	15,5	506	173,17	9,5	525	601	112	89	4	48,97	741,65	185,51
500	16	532	188,04	10	552	630	115	91	4	54,48	806,64	201,66
550	16,5	583	212,90	10	603	683	117	92	4	62,34	913,94	228,49
600	17	634	238,90	10,5	655	737	120	94	4	71,15	1026,75	256,69
650	18	686	273,86	10,5	707	793	122	95	4	83,10	1178,54	294,64
700	19	738	311,15	11	760	850	125	96	4	98,04	1342,64	335,66
750	20	790	350,76	11	812	906	127	97	4	111,89	1514,33	378,58
800	21	842	392,69	12	866	964	130	98	4	129,27	1700,03	425,01
900	22,5	945	472,76	12,5	970	1074	135	101	4	160,17	2051,21	512,80
1000	24	1048	559,76	13	1074	1184	140	104	4	195,99	2435,93	608,76
1100	26	1152	666,81	13	1178	1296	145	106	4	243,76	2911,00	727,75
1200	28	1256	783,15	13	1282	1408	150	108	4	294,50	3427,10	856,78

Die normalen Wandstärken  $s$  gelten für Rohre, die einem Betriebsdrucke von 10 at und einem Probedrucke von höchstens 20 at ausgesetzt sind und vor allem Wasserleitungszwecken dienen. Für gewöhnliche Druckverhältnisse von Wasserleitungen (4 bis 7 at) ist eine Verminderung der Wandstärken zulässig, ebenso für Leitungen, in denen nur ein geringer Druck herrscht (Gas-, Wind-, Kanalisationsleitungen usw.). Für Dampfleitungen, die größeren Temperaturunterschieden und dadurch entstehenden Spannungen, sowie für Leitungen, die unter besonderen Verhältnissen schädlichen äußeren Einflüssen ausgesetzt sind, empfiehlt es sich, die Wandstärken entsprechend zu erhöhen (vgl. auch S. 976 u. f.).

Der äußere Durchmesser des Rohres ( $D_1$ ) ist feststehend; Aenderungen der Wandstärke sind also nur auf den lichten Durchmesser des Rohres ( $D$ ) von Einfluss. Als unabänderlich normal gilt ferner die innere Muffenform, die Art des Anschlusses an das Rohr und die Fugenweite (Bleifuge)  $f$ .

Aus Gründen der Herstellung sind bei geraden Normalrohren Abweichungen von den durch Rechnung ermittelten Gewichten um höchstens  $\pm 3$  vH zu gestatten. In den Gewichtberechnungen ist das spezifische Gewicht des Gußeisens = 7,25 gesetzt

**Muffen- und Flanschenrohre (1882).**

dem Vereine deutscher Gas- und Wasserfachmänner.

**Flanschenrohre (Abb. 341)**

Flansch		Dichtungsleiste		Lochkreis-Durchmesser $D''$	Schrauben					Gewicht des Flansches	Gewicht eines Rohres bei vorstehender Baulänge	Gewicht f. 1 m Rohr bei vorstehender Baulänge	Lichter Durchmesser $D$	
Durchmesser $y$ mm	Dicke $s_1$ mm	Breite $b$ mm	Höhe $h$ mm		Anzahl	Stärke $d$		Länge $l$ mm	Durchmesser des Schraubenloches $d_0$ mm					Übliche Baulänge $L$ m
				mm		engl. Z.	kg			kg	kg	mm		
140	18	25	3	110	4	12,7	1/2	70	15	2	1,89	21,28	10,64	40
160	18	25	3	125	4	15,9	5/8	75	18	2	2,41	25,96	12,98	50
175	19	25	3	135	4	15,9	5/8	75	18	2	2,96	32,44	16,22	60
185	19	25	3	145	4	15,9	5/8	75	18	3	3,21	52,02	17,34	70
200	20	25	3	160	4	15,9	5/8	75	18	3	3,84	62,40	20,80	80
215	20	25	3	170	4	15,9	5/8	75	18	3	4,37	69,61	23,20	90
230	20	28	3	180	4	19,0	3/4	85	21	3	4,96	76,94	25,65	100
260	21	28	3	210	4	19,0	3/4	85	21	3	6,26	99,82	33,27	125
290	22	28	3	240	6	19,0	3/4	85	21	3	7,69	124,70	41,57	150
320	22	30	3	270	6	19,0	3/4	85	21	3	8,96	151,00	50,33	175
350	23	30	3	300	6	19,0	3/4	85	21	3	10,71	180,00	60,00	200
370	23	30	3	320	6	19,0	3/4	85	21	3	11,02	207,89	69,30	225
400	24	30	3	350	8	19,0	3/4	100	21	3	12,98	240,79	80,26	250
425	25	30	3	375	8	19,0	3/4	100	21	3	14,41	274,37	91,46	275
450	25	30	3	400	8	19,0	3/4	100	21	3	15,32	308,68	102,89	300
490	26	35	4	435	10	22,2	7/8	105	25	3	19,48	351,20	117,07	325
520	26	35	4	465	10	22,2	7/8	105	25	3	21,29	390,79	130,26	350
550	27	35	4	495	10	22,2	7/8	105	25	3	24,29	420,70	140,23	375
575	27	35	4	520	10	22,2	7/8	105	25	3	25,44	461,55	153,85	400
600	28	35	4	545	12	22,2	7/8	105	25	3	27,64	490,73	163,58	425
630	28	35	4	570	12	22,2	7/8	105	25	3	29,89	536,39	178,80	450
655	29	40	4	600	12	22,2	7/8	105	25	3	32,41	584,33	194,78	475
680	30	40	4	625	12	22,2	7/8	105	25	3	34,69	633,50	211,17	500
740	33	40	5	675	14	25,4	I	120	28,5	3	44,28	727,26	242,42	550
790	33	40	5	725	16	25,4	I	120	28,5	3	47,41	811,52	270,51	600
840	33	40	5	775	18	25,4	I	120	28,5	3	50,13	921,84	307,28	650
955	33	40	5	830	18	25,4	I	120	28,5	3	56,50	1046,45	348,82	700
950	33	40	5	880	20	25,4	I	120	28,5	3	59,81	1171,90	390,63	750

Abb. 340.

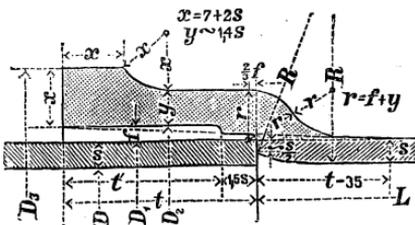
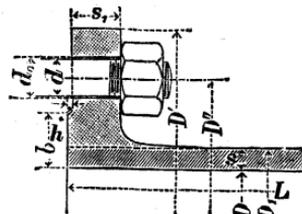


Abb. 341.



worden. — Für die Anordnung der Schraubenlöcher bei den Flanschenrohren gilt die Regel, das die lotrechte Ebene durch die Rohrachse Symmetrieebene für die Löcher ist und kein Schraubenloch enthält.

$L$ , die übliche Nutzlänge der Muffenrohre und übliche Baulänge der Flanschenrohre, wird von verschiedenen Fabriken für manche Rohre um 0,5 m und 1,0 m größer ausgeführt, so das bei Bestellungen eine vorhergehende Vereinbarung mit dem Lieferanten geboten erscheint.

**Normale Formstücke und Baulänge der Absperrschieber für gußeiserne Rohrleitungen (1882).**

Gemeinschaftlich aufgestellt von dem Vereine deutscher Ingenieure und dem Vereine deutscher Gas- und Wasserfachmänner.

**A- und B-Stücke** (Abb. 342 und 343).

$a = 0,2 D + 0,5 d + 100$  mm,  
 $l = 0,1 d + 120$  mm,  
 $r = 0,05 d + 40$  mm,  
 $t =$  Muffentiefe des Abzweiges für  $d$  als lichten Durchmesser.

$D$ Durchmesser des Hauptrohres mm	$d$ Durchmesser des Abzweiges mm	$L$ Nutz- länge m
40 bis 100	40 bis 100	0,80
125 " 325	40 " 325	1,00
350 " 500	40 " 300	1,00
	325 " 500	1,25
550 " 750	40 " 250	1,00
	275 " 500	1,25
	550 " 750	1,50

**E-Stücke** (Abb. 346).

$L = 300$  mm; zulässig für  $D \geq 40$  mm.

**F-Stücke** (Abb. 347).

$L = 800$  mm für  $D = 40$  bis 475 mm,  
 $L = 800$  mm für  $D = 500$  bis 750 mm.

**J-Stücke** (Abb. 350).

$R = 250$  mm für  $D = 40$  bis 90 mm,  
 $R = D + 150$  mm für  $D \geq 100$  mm,  
 $m = D + 200$  mm für  $D = 40$  bis 375 mm,  
 $m = 600$  mm für  $D \geq 400$  mm.

**C-Stücke** (Abb. 344).

$a = 0,1 D + 0,7 d + 80$  mm,  
 $c = 0,1 D + 80$  mm,  
 $l = 0,75 a$  und  $r = d$ .

$D$ Durchmesser des Hauptrohres mm	$d$ Durchmesser des Abzweiges mm	$L$ Nutz- länge m
40 bis 100	40 bis 100	0,80
125 " 275	40 " 275	1,00
300 " 425	40 " 250	1,00
	275 " 425	1,25
	40 " 250	1,00
450 " 600	275 " 425	1,25
	450 " 600	1,50
	40 " 250	1,00
650 " 750	275 " 425	1,25
	450 " 600	1,50
	650 " 750	1,75

**K-Stücke** (Abb. 351).

$R = 10 D$ ; zulässig für  $D \geq 40$  mm

**L-Stücke** (Abb. 349).

$R = 5 D$ ; zulässig für  $D \geq 300$  mm

**R-Stücke** (Abb. 348).

Uebergangsrohre.  $L = 1,0$  m.

**Ü-Stücke** (Abb. 345).

Ueberschieber.  $L = 4 t$ , wenn  $t$   $d$   
 $D$  entsprechende Muffentiefe.

Außer den **A**-, **B**- und **C**-Stücken sind **AA**-, **BB**- und **CC**-Stücke mit zwei gegenüberliegenden Abzweigen erhältlich; die Abmessungen sind dieselben wie bei den einfachen Stücken.

**Flanschen-Formstücke.**

Für Abb. 353 bis 356 ist  $L = D + 100$  mm,  
 für Abb. 355 außerdem  $l = \frac{1}{2}(D + d) + 100$  mm.

Die Bezeichnung der einzelnen Formstücke erfolgt in der über den Abb. 342 bis 351 (als Beispiel) angedeuteten Weise, wobei die Art (der Name) des Formstückes und der lichte Durchmesser  $D$  des Rohres in mm angegeben werden, ferner unter einem Bruchstriche bei Abzweigrohren der lichte Durchmesser des Abzweiges und bei Krümmern die Anzahl der Stücke für den Quadranten (also  $90^\circ$ );  $\alpha = 45, 30, 22\frac{1}{2}$  und  $15^\circ$ .

Bei der Berechnung der Gewichte von Formstücken (mit einem spezifischen Gewichte des Gußeisens = 7,25) ist dem Gewichte, das den normalen Abmessungen entspricht, ein Zuschlag von 15 vH, bei Krümmern ein solcher von 20 vH zu geben. — Die Abzweigstücke, deren Abzweig einen lichten Durchmesser von 400 mm und mehr besitzt, sind von 2 at Betriebsdruck an sowohl in ihren Wandungen, als auch, wenn nötig, durch Rippen zu verstärken.

Sämtliche Formstücke über 750 mm Durchmesser werden nicht als normale Formstücke betrachtet.

Abb. 342.

$$A \frac{300}{150}$$



Abb. 343.

$$B \frac{300}{150}$$

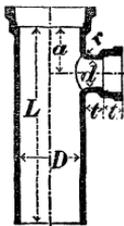


Abb. 344.

$$C \frac{300}{150}$$

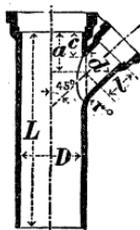


Abb. 345.

$$\ddot{U} 300$$



Abb. 346.

$$E 300.$$



Abb. 347.

$$F 300$$



Abb. 348.

$$R \frac{300}{200}$$



Abb. 349.

$$L \frac{300}{3}$$

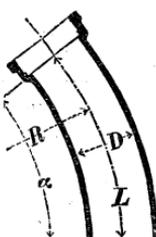


Abb. 350.

$$J 300$$



Abb. 351.

$$K \frac{300}{6}$$



Abb. 352.

Flanschen-Deckel.

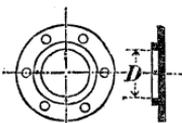


Abb. 356.

Abb. 353.

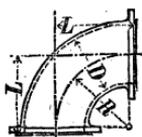


Abb. 354.

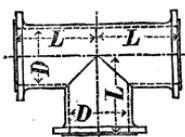
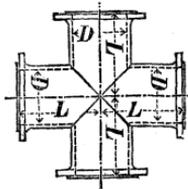
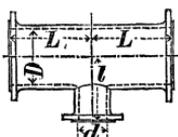


Abb. 355.



Flanschen-Formstücke.

Die **Baulänge L** der **Absperrschieber** beträgt für  
 Flanschschieber . . . . .  $L = D + 200$  mm,  
 Muffenschieber m. unmittelb. eingetrieb. Ringen  $L = 0,7 D + 100$  mm,  
 Muffenschieber mit eingeleiteten Sitzringen . . .  $L = D - 2t + 250$  mm.  
 Flanschedeckel s. Abb. 352.

**Gewichte gußeiserner Rohr-Formstücke in kg.**

D mm	A-Stücke (Abb. 342)							B-Stücke (Abb. 343)						
	$\bar{d}$ (in mm) =							$\bar{d}$ (in mm) =						
	D	80	100	150	200	300	400	D	80	100	150	200	300	400
40	14	.	.	.	.	.	14	.	.	.	.	.	.	
50	19	.	.	.	.	.	19	.	.	.	.	.	.	
60	22	.	.	.	.	.	22	.	.	.	.	.	.	
70	27	.	.	.	.	.	27	.	.	.	.	.	.	
80	30	30	.	.	.	.	31	31	.	.	.	.	.	
90	33	32	.	.	.	.	34	33	.	.	.	.	.	
100	37	35	37	.	.	.	38	36	38	.	.	.	.	
125	54	49	51	.	.	.	55	50	52	.	.	.	.	
150	68	59	63	68	.	.	70	60	64	70	.	.	.	
175	88	79	81	84	.	.	90	80	82	86	.	.	.	
200	97	88	90	91	97	.	100	89	91	94	100	.	.	
225	106	95	97	100	104	.	110	96	98	102	107	.	.	
250	125	111	113	116	121	.	130	112	114	118	124	.	.	
275	144	126	128	131	136	.	150	127	129	133	139	.	.	
300	162	146	148	152	155	162	170	147	149	154	158	170	.	
350	241	174	178	182	187	199	250	175	179	184	190	207	.	
400	299	210	212	216	222	234	299	310	211	213	218	225	242	310
450	348	240	243	248	255	268	340	354	246	249	254	260	276	346
500	414	284	288	293	300	312	388	416	287	290	295	301	320	396
550	502	327	330	337	346	426	452	582	328	331	340	350	437	468
600	630	367	370	377	386	473	500	658	368	371	380	390	485	516

D mm	C-Stücke (Abb. 344)						$\bar{u}$ -Stücke (Abb. 345) kg	E-Stücke (Abb. 346) kg	F-Stücke (Abb. 347) kg	K-Stücke (Abb. 351)			
	$\bar{d}$ (in mm) =									Winkel $\alpha$ =			
	D	80	100	150	200	300				45°	30°	22.5°	15°
40	16	.	.	.	.	.	7	9	8	7	6	.	.
50	21	.	.	.	.	.	8	11	10	9	7	.	.
60	25	.	.	.	.	.	10	13	12	13	9	.	.
70	31	.	.	.	.	.	12	15	14	16	13	.	.
80	37	37	.	.	.	.	14	17	16	21	16	14	.
90	40	39	.	.	.	.	17	19	18	25	18	16	.
100	48	42	48	.	.	.	19	21	20	30	22	18	.
125	65	57	60	.	.	.	24	26	26	45	33	28	.
150	82	69	72	82	.	.	31	32	32	66	48	39	.
175	106	88	91	101	.	.	38	39	40	94	66	53	.
200	119	95	98	108	119	.	45	47	48	.	87	70	.
225	132	102	105	115	126	.	53	55	54	.	112	90	.
250	152	115	118	128	139	.	62	62	63	.	142	113	83
275	178	133	136	146	157	.	71	70	71	.	176	140	.
300	229	149	152	162	173	229	82	78	80	.	215	170	123
325	255	164	167	177	188	245	91	85	90	.	.	202	.
350	282	179	182	192	203	261	103	95	100	.	.	240	173
375	310	199	202	212	223	281	114	104	110	.	.	272	.
400	354	218	221	231	242	309	125	116	120	.	.	.	230
425	371	229	232	243	256	330	133	126	130	.	.	.	.
450	457	250	253	263	276	355	146	138	140	.	.	407	290
475	500	270	273	284	297	380	157	152	150	.	.	.	.
500	550	294	297	307	320	410	175	167	212	.	.	.	376

**Gewichte gußeiserner Rohr-Formstücke in kg.**

D mm	R-Stücke (Abb. 348)																
	Lichter Durchmesser $d$ des Muffenendes in mm																
	50	60	70	80	90	100	125	150	175	200	225	250	275	300	350	400	450
60	16	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
70	19	20	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
80	21	22	24	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
90	23	25	27	28	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
100	24	26	30	32	34	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
125	27	29	32	35	37	40	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
150	34	35	38	40	43	45	50	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
175	41	43	45	47	49	51	56	62	.	.	.	.	.	.	.	.	.
200	.	.	52	54	56	58	63	69	71	.	.	.	.	.	.	.	.
225	.	.	58	61	62	64	69	75	80	82	.	.	.	.	.	.	.
250	.	.	66	68	70	72	77	82	88	90	93	.	.	.	.	.	.
275	.	.	.	76	77	79	84	90	96	102	104	105	.	.	.	.	.
300	.	.	.	82	84	86	91	97	103	110	118	124	126	.	.	.	.
325	.	.	.	.	94	96	100	106	112	119	126	134	136	137	.	.	.
350	.	.	.	.	.	103	108	114	120	127	134	141	146	150	.	.	.
375	.	.	.	.	.	118	124	130	136	142	148	154	162	167	.	.	.
400	.	.	.	.	.	.	.	130	136	142	148	157	163	172	176	.	.
425	.	.	.	.	.	.	.	.	145	154	160	166	174	184	190	198	.
450	.	.	.	.	.	.	.	.	.	166	172	178	185	194	204	212	.
475	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	184	190	196	204	218	224	232
500	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	208	215	223	238	245	255
550	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	260	270	280	290

**Flanschen-Formstücke.**

(Abb. 352 bis 356, S. 959.)

Lichter Durchm. D	Flanschen-Durchmesser	Flanschen-Deckel	Flanschen-Krümmen	Flanschen-T-Stücke	Flanschen-T-Stücke	Lichter Durchm. D	Flanschen-Durchmesser	Flanschen-Deckel	Flanschen-Krümmen	Flanschen-T-Stücke	Flanschen-T-Stücke
mm	mm	kg	kg	kg	kg	mm	mm	kg	kg	kg	kg
40	140	2,5	7	10	13	225	370	21	65	88	117
50	160	3	8	13	17	255	400	25	80	110	147
60	175	3,5	10	15	20	270	425	29	95	135	180
70	185	4	13	19	25	300	450	33	110	165	205
80	200	4,5	15	21	28	325	490	39	130	190	255
90	215	5	18	25	33	350	520	45	150	220	295
100	230	6	20	29	39	375	550	50	175	255	340
125	260	8	26	40	53	400	575	54	200	290	390
150	290	10	35	52	69	425	600	60	226	328	436
175	320	13	45	64	85	450	630	66	255	370	490
200	350	17	55	76	102	475	655	70	.	.	.

## B. Rohre.

(Tafeln über Normalien und Gewichte s. S. 956 u. f.)

Die **Rohrweite**  $D$ , d. h. der lichte Durchmesser einer Rohrleitung, ist so zu bemessen, daß die Geschwindigkeit des durchströmenden Körpers und seine Reibungswiderstände innerhalb gegebener Grenzen bleiben. — Für größere Leitungen ist das vorteilhafteste  $D$  derart zu ermitteln, daß Zinsen und Tilgung der (mit  $D$  wachsenden) Anlagekosten und die (mit wachsendem  $D$  abnehmenden) Betriebskosten zusammen möglichst klein sind.\*)

**Ausgleichsvorrichtungen.** Bei langen Rohrleitungen in geringer Tiefenlage und bei Leitungen für warme Flüssigkeiten oder Dämpfe ist auf die bei den verschiedenen Temperaturen eintretenden Längenänderungen Rücksicht zu nehmen, u. zw. durch starke, elastische Dichtungsscheiben aus Gummi oder Asbestpappe, besser aber durch das Einschalten elastischer Federrohre (s. S. 970) oder Wellrohre (S. 973) oder entlasteter Dehnungsrohre (A. L. G. Dehne, Halle a. S.). Gewöhnliche Stopfbüchsenrohre sind hierfür nicht ratsam, da sie sich auf die Dauer nicht dicht halten lassen. Auch Gelenkflansche werden benutzt.\*\*) Neuerdings Einschaltung kurzer, in Kugelgelenken endigender Querrohre; beide Gelenke sind entlastet (F. Seiffert & Co., A.-G., Berlin SO).

Die achsial wirkenden Kräfte sind bei Aenderungen der Richtung der Rohrachse zu beachten (durch Verankerungen usw.).

### a. Gufseiserne Rohre.

**I. Wandstärke.** 1. Bei geringem Drucke verlangen Rücksichten auf Herstellung, Fortschaffung und Verlegung sowie auf die zusätzlichen Beanspruchungen durch äußere Kräfte, z. B. bei Erdleitungen durch ungleichmäßige Auflagerung, Bodensenkungen usw., meist eine größere Wandstärke, als die Rechnung nach I. auf S. 624 liefert. Besser setze man die Wandstärke  $s$  gufseiserner Leitungsrohre vom lichten Durchmesser  $D$  cm

$$s = \frac{1}{60} D + 0,7 \text{ cm für stehend gegossene Rohre,}$$

$$s = \frac{1}{60} D + 0,9 \text{ cm für liegend gegossene Rohre,}$$

sofern der Betriebsdruck 10 at, der Prüfungsdruck 20 at nicht überschreitet und erhebliche Temperaturunterschiede in der Leitung nicht stattfinden. Dampfrohre sowie Leitungen, die besonders schädigenden Einflüssen ausgesetzt sind, verlangen von etwa  $D = 10$  cm an meist

\*) Vrgl. P. Willner und R. Mehmke, Z. d. V. d. I. 1890 S. 103, 150 u. 1008.

\*\*) Vrgl. M. Westphal, Z. d. V. d. I. 1904 S. 588; hier findet sich eine Kritik der wichtigsten Ausgleichsvorrichtungen; ferner: Z. d. V. d. I. 1910 S. 1842, Ausgleichstück für die Hochdruckleitung einer Wasserkraftanlage und Heft 96 der Forschungsarbeiten, herausgegeben vom V. d. I.: A. Bautlin, Formänderung und Beanspruchung federnder Ausgleichrohre, 1911.

eine Vergrößerung der vorstehenden Werte von  $s$  um 12,5 bis 25 vH. Rohre mit kleinem inneren Ueberdrucke (z. B. Gas- und Windrohre) können schwächer gehalten werden.

Deutsche Rohr-Normalien von 1882 für gufseiserne Muffen- und Flanschenrohre s. S. 956 bis 961. In Abb. 340 (S. 957) und 341 (S. 957) sind die Querschnittsteile, die für die Angaben des Muffen- bzw. Flanschgewichtes in der Tafel S. 956 u. 957 maßgebend sind, doppelt schraffiert. Der Anschluß des Flansches an die Rohrwandung (s. Abb. 341) nimmt etwa von der Stärke  $d$  bis auf  $s$  mit der Neigung 1:5 ab; das Anschlußgewicht ist im Flanschgewicht mit enthalten. Um nicht die ganze Stirnfläche des Flansches bearbeiten zu müssen, gibt man diesem eine Arbeitsleiste (Dichtungleiste).

Die Beanspruchung der Flanschenschrauben, wie die Normalien (S. 957) sie gestatten, ist bei den größeren lichten Weiten für einen Betriebsdruck von 10 at (mit  $k_x = 700$  kg/qcm) zu hoch, was bei einer Steigerung des Druckes zu beachten ist.

**Bleigeversuche**, auf der Friedrich Wilhelms-Hütte in Mülheim (Ruhr) mit normalen Muffenrohren (s. S. 956), nach dem Belastungsfalle Nr. 2 S. 564 angestellt, ergaben bei  $l = 2,62$  m Freilänge die folgenden Grenzwerte der Bruchbelastung  $P$ :

$D = 80$ mm	$P = 1400$ bis 1770 kg	$D = 175$ mm	$P = 7350$ bis 9200 kg
100 „	2060 „ 2780 „	200 „	10140 „ 13280 „
125 „	2930 „ 4120 „		

2. Bei hohem Drucke (z. B. für Druckwasserleitungen) wird die Wandstärke der Rohre nach 1. auf S. 624 ermittelt und hierzu bei stehendem Gufs 0,7 cm zugeschlagen; dabei ist  $p_i$  (in at) der größte Betriebsüberdruck und  $k_x = 200$  kg/qcm. Bei liegendem Gufs ist ein größerer Zuschlag als 0,7 cm erforderlich.

Ueber gufseiserne Dampfrohre für hohen Druck s. die Normalien von 1900 S. 974 u. f. — Die Friedrich Wilhelms-Hütte in Mülheim (Ruhr) berechnet dabei die Wandstärke  $s$  nach der Formel  $s = 0,00238 p D + 0,86$  cm, worin  $p$  den Druck in at bedeutet.

**2. Schutz gegen Rostbildung** für die gufseisernen Wasser- und Gasleitungsrohre meist durch heißen Asphalt bzw. Teer; die geputzten und auf etwa 100 bis 150° erwärmten (vorher geprefsten) Rohre werden darin eingetaucht und längere Zeit belassen. Nach einem anderen Verfahren wird der Asphaltlack mittels Haarbürsten auf die erwärmten Rohre aufgetragen, wobei das Muffeninnere und die Außenfläche des Rohrendes (die bei dem ersten Verfahren vor dem Eintauschen mit Kalkmilch angestrichen werden) unmittelbar frei bleiben.

**3. Dichtungsmittel** der Muffenrohre für Gas- und Wasserleitungen: ein mit Teer getränkter Hanfstrick und ein (durch vorgelegten Tonring ermöglichter) stetiger Bleieingufs; Strick und Blei werden mit Hammer und Setzeisen verstemmt. — Bei Flanschenrohren werden, u. zw. in Form von Scheibenringen, Gummi (mit Einlagen von feinem Drahtgeflecht, Hanf usw.), Blei, Pappe mit Mennige, Asbestpappe usw., bei Dampfleitungen auch wohl profilierte Kupferringe (auch Lechlersche Kupferringe mit Asbesteinlage) verwendet.

**Muffenverbindungen.** Normale Verbindung s. Abb. 340. Bewegliche Verbindung (Halberger Hütte) für Dükerrohrleitungen (Abb. 357);

Muffe und Flanschring mit Blei ausgegossen und verstemmt. Kober-  
sche Verbindung (Abb. 358) für Druckluftleitungen ermöglicht Be-  
wegungen der Rohrstücke bei Wärmeänderungen.

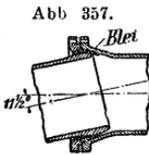


Abb. 357.

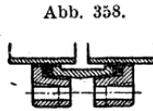


Abb. 358.

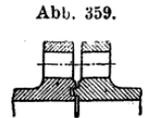


Abb. 359.

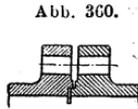


Abb. 360.

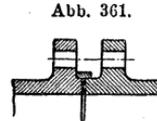


Abb. 361.

**Flanschverbindungen.** Normale Verbindung s. Abb. 341. Ver-  
bindungen, die ein Entweichen der Dichtung nach außen verhindern,  
s. Abb. 359, 360 u. 361.

**4. Besondere Leitsätze und Normallen für Flanschen und Form-  
stücke zu Heizungszwecken** sind im Jahre 1902 von dem Verbands  
Deutscher Zentralheizungs-Industrieller (Berlin SW 47, York-  
straße 83) herausgegeben worden. Betriebsdruck 5 at bei Füllung mit  
kaltem Wasser, 3 at bei solcher mit heißem Wasser oder Dampf.

**5. Normallen für gufiserne Abflusrohre** für Entwässerungsanlagen  
wurden aufgestellt von dem Verbands Deutscher Architekten-  
und Ingenieur-Vereine im Jahre 1902; Muffenrohre von 50, 70,  
100, 125, 150 und 200 mm Lichtem Durchmesser.

Erlafs des preussischen Ministers der öffentl. Arbeiten vom 20. November 1905:  
Diese Normallen sind nicht in allen Fällen annehmbar.

Im Anschluß an diesen Erlafs wurden unterm 18. Juli 1908  
durch Erlafs desselben Ministers Normallen für guf-  
eiserne Abflusröhren aufgestellt, die veröffentlicht sind im Z. d. B.  
vom 27. Januar 1909 S. 57 u. f. — Für gerade Röhren ist folgendes  
festgelegt:

Licht- weite <i>D</i> mm	Wand- stärke mm	Baulängen <i>L</i> ohne Muffe							
		2 m	1,5 m	1,25 m	1 m	0,75 m	0,50 m	0,25 m	0,15 m
		Gewichte in kg							
50	5	13,0	10,0	8,6	7,0	5,6	4,0	2,6	2,0
70	5	18,0	14,0	11,6	9,6	7,6	5,6	3,6	2,6
100	6	30,0	23,0	19,6	16,3	12,6	9,3	5,6	3,3
125	6	37,5	29,0	24,6	20,3	16,0	11,6	7,3	5,6
150	6	44,5	34,3	29,3	24,0	19,0	14,0	8,6	6,3
200	6	60,0	46,0	39,3	32,3	25,6	19,0	12,0	9,0

An der angeführten Stelle im Z. d. B. sind auch die Maße und Ge-  
wichte der Uebergangsröhren, Verbindungen, Knieröhren, Bogen-  
röhren usw. veröffentlicht. — Allgemein gilt noch:

In den Wandungen dürfen keine größeren Abweichungen als etwa 15 vH auftreten. Röhren und Formstücke mit schwächeren Wandungen sind auszuschließen.

Röhren und Formstücke von anderen Abmessungen, insbesondere von größeren Wandstärken, sind nur zuzulassen, wenn sie billiger sind.

Ueber Normalien für Abflusrröhren aus Blei und Steinzeug vgl. S. 986, ferner III. Bd. Abschn. Städteentwässerung.

## b. Schmiedeiserne Rohre.

**1. Genietete Rohre** für große Weiten oder bei großen äußeren Kräften (Wind- und Lüftungsleitungen usw.). Ueber Berechnung der Blechdicke  $s$ , Herstellung usw. s. S. 624, ferner 774 u. f. Auf die Größe von  $s$  sind außer dem Betriebsdrucke u. U. Rostbildung oder sonstige Abnutzung oder auch äußere Kräfte von Einfluß.

Ueber neuere genietete Hochdruckleitungen\*) für Wasserkraftanlagen s. III. Bd., Absch. Wasserkraftanlagen, vgl. ferner Z. d. V. d. I. 1910 S. 957 u. f., auch S. 1842.

Verbindung der Leitungsrohre durch aufgenietete Winkeleisen-Flansche, nach deren Nietteilung sich die Schraubenteilung richtet.

Ueber **Rostschutz**, insbesondere an schmiedeisernen Röhren auch für Kesselanlagen (— für Gufseisen vgl. S. 963 —), durch Zinkprotektoren vgl. Mitteilungen aus dem Königl. Materialprüfungsamt 1908, Heft 1 u. 2; vgl. auch S. 683.

**2. Gelötete Rohre** (hart gelötet) zu Dampfheizungen.

**3. Geschweißte Rohre** mit stumpfer Schweißnaht (Gasrohre) oder, besser, mit übereinander gelappter Schweißnaht (Siede- oder Kesselrohre) hergestellt. Je nach dem Verwendungszwecke zu Leitungen für Flüssigkeiten, Gas, Luft, Dampf, zu Heizungs-, Lüftungs- und Kondensationsanlagen usw. bleiben die Rohre entweder roh, oder sie werden asphaltiert, mit Mennige oder Oelfarbe gestrichen, verzinkt.

Rohre für höheren Innendruck werden mittels Schrauben und loser oder fester Flansche verbunden; dabei können die losen Flansche sitzen 1. hinter umgebördelten Rohrenden, 2. hinter aufgeschweißten Bunden, die in- oder übereinander greifen oder glatt sind; 3. benutzt man feste (vernietete oder aufgelötete) schmiedeiserne Winkelflansche (s. S. 975 u. f.). Geschweißte Rohre von 0,5 m und mehr Weite erhalten häufig Muffenverbindung (s. d. D. R.-P. Nr. 30 757 des Blechwalzwerks Schulz Knaut, A.-G. in Essen [Ruhr]; dieses Werk fertigt geschweißte Dampfkessel-Feuerrohre von  $D = 0,4$  bis 2,0 m Durchmesser in Blechdicken von 8 bis 40 mm; Längen bis 10 m, Gewichte bis 5000 kg).

Geschweißte Rohre von W. Fitzner, Laurahütte (O.-S.) in folgenden gangbaren Abmessungen bis zu 12 m Länge:

Durchmesser 200, 250, 300, 350, 400, 450, 500, 550 mm, 4 bis 10 mm stark.  
Durchmesser 600, 650, 700, 750, 800, 850, 900, 1000 mm, 6 bis 12 mm stark.

\*) Vgl. auch die von der Gesellschaft für Hochdruck-Rohrleitungen G. m. b. H., Berlin O., herausgegebene Schrift Rohrleitungen, Berlin 1909.

Auch andere Abmessungen sowie Längen bis zu 22 m erhältlich. Geschweifst Krümmer. Flanschverbindungen s. Abb. 362, 363 u. 364, oder mit losen sogen. Sicherheitsflanschen, auch mit angeschweißten Winkelanschen. Auch werden flüßeisern Muffenrohre angefertigt.

**Gasrohre** (stumpf geschweifst, für Gas- und Wasserleitungen), mit Gewinde (s. S. 767) und Muffe. Für Wasserleitungen

Abb. 362.

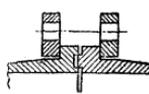


Abb. 363.

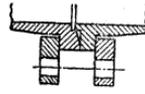
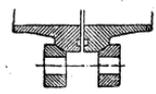


Abb. 364.



verzinkt, ebenso wie die Verbindungsstücke (Fittings), die auch aus schmiedbarem Guß gefertigt werden. Uebliche Abmessungen der Gasrohre enthält die folgende Tafel, worin  $D$  die lichte Weite (in Z. engl.)  $s$  die Wandstärke in mm,  $g$  das Rohrgewicht in kg/m. Das auf S. 767 angegebene Gasrohrgewinde setzt eine um etwa 1 mm größere Wandstärke  $s$  voraus, mithin auch größeres Gewicht.

$D = \frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{7}{8}$	1	$1\frac{1}{4}$	$1\frac{1}{2}$	$1\frac{3}{4}$	2	$2\frac{1}{4}$	$2\frac{1}{2}$	$2\frac{3}{4}$	3	$3\frac{1}{2}$	4
$s = 1,9$	2,1	2,3	2,7	3	3	3,3	3,3	3,7	3,9	4	4,3	4,5	4,7	4,8	5	5,3	5,3
$g = 0,4$	0,57	0,87	1,15	1,50	1,72	2,25	2,44	3,4	4,2	4,6	5,8	6,8	7,7	8,9	10	11,5	13,5

**Rohre für hohen Druck**, für Manometer, Wasserdruckpressen usw.:

Innerer Durchmesser in engl. Z. . . . .	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{3}{4}$	1	$1\frac{1}{4}$	$1\frac{1}{2}$	$1\frac{3}{4}$	2	$2\frac{1}{4}$	$2\frac{1}{2}$	$2\frac{3}{4}$	3	$3\frac{1}{2}$	4
mm . . . . .	6	10	13	16	19	25	32	38	44	51	60	70	78	88	99	114
Rohrgewicht bei $\frac{1}{4}$ engl. Z. Wandstärke in kg/m	2,05	2,5	2,9	3,4	3,9	4,9	6,0	7,0	8,0	9,0	11,0	13,0	15,0	17,0	19,0	22,0

**Dampfrohre** für hohen Druck s. folgende Tafel sowie die vom Vereine deutscher Ingenieure (1900) aufgestellten Normalien auf S. 974 u. f.

**Ueberlappt geschweißte Rohre (Heiz- und Siederohre)**

von Balcke, Telling & Cie., A.-G. in Benrath.

Zulässiger Betriebsüberdruck bis 15 at.

Aeußerer Durchmesser		Gewöhnliche Wandstärke	Rohrgewicht aussch. Flansche	Aeußerer Durchmesser		Gewöhnliche Wandstärke	Rohrgewicht aussch. Flansche
engl. Z.	mm			engl. Z.	mm		
$1\frac{1}{2}$	38,1	$2\frac{1}{4}$	1,97	$5\frac{1}{4}$	133,4	4	12,65
$1\frac{5}{8}$	41,3	$2\frac{1}{4}$	2,17	$5\frac{1}{2}$	139,7	$4\frac{1}{2}$	14,90
$1\frac{3}{4}$	44,4	$2\frac{3}{4}$	2,32	$5\frac{3}{4}$	146,1	$4\frac{1}{2}$	15,55
$1\frac{7}{8}$	47,6	$2\frac{1}{4}$	2,49	6	152,4	$4\frac{1}{2}$	16,20
2	50,8	$2\frac{1}{2}$	2,97	$6\frac{1}{4}$	158,8	$4\frac{1}{2}$	17,00
$2\frac{1}{8}$	54,0	$2\frac{1}{2}$	3,15	$6\frac{1}{2}$	165,1	$4\frac{1}{2}$	17,65
$2\frac{1}{4}$	57,1	$2\frac{3}{4}$	3,65	$6\frac{3}{4}$	171,5	$4\frac{1}{2}$	18,31
$2\frac{3}{8}$	60,3	3	4,20	7	177,8	$4\frac{1}{2}$	19,08
$2\frac{1}{2}$	63,5	3	4,45	$7\frac{1}{2}$	190,5	$5\frac{1}{2}$	24,93
$2\frac{3}{4}$	69,8	3	4,90	8	203,2	$5\frac{1}{2}$	26,60
3	76,2	3	5,35	$8\frac{1}{2}$	215,9	$6\frac{1}{2}$	33,20
$3\frac{1}{4}$	82,5	$3\frac{1}{4}$	6,35	9	228,6	$6\frac{1}{2}$	35,30
$3\frac{3}{8}$	88,9	$3\frac{1}{4}$	6,78	$9\frac{1}{2}$	241,3	$6\frac{1}{2}$	37,20
$3\frac{3}{4}$	95,2	$3\frac{1}{4}$	7,30	10	254,0	$6\frac{1}{2}$	39,50
4	101,6	$3\frac{3}{4}$	9,01	$10\frac{1}{2}$	266,7	7	44,50
$4\frac{1}{4}$	108,0	$3\frac{3}{4}$	9,36	11	279,4	$7\frac{1}{2}$	49,60
$4\frac{1}{2}$	114,3	$3\frac{3}{4}$	10,10	$11\frac{1}{2}$	292,1	$7\frac{1}{2}$	52,10
$4\frac{3}{4}$	120,7	4	11,46	12	304,8	$7\frac{1}{2}$	54,70
5	127,0	4	12,03				



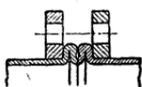
giebig. Baulänge normal 12 m, über 12 m und unter 3 m Preis-  
aufschläge. Asphaltiert, verzinkt, gestrichen (Mennige, Oelfarbe), oder  
mit Juteumwicklung und Goudronanstrich geliefert. Verbindung auf  
eine der auf S. 965 unter 3. angegebenen Arten, auch mit Gußeisen-  
flanschen oder mit aufgenieteten Bundcn und losen Flanschen, endlich  
mit angewalzter Muffe.

**Brunnen- und Bohrrohre** (von Balcke, Telling & Cie., A.-G. in  
Benrath) mit langem Gewinde und tonnenförmigen Muffen, gewöhn-  
lich verzinkt. Uebliche Längen 3 bis 5,5 m. Der äußere Rohrdurch-  
messer bei den verschiedenen Wandstärken unverändert, nur die lichte  
Weite wird mit zunehmender Wandstärke kleiner. Uebliche Aufsen-  
durchmesser sind 33, 42, 48, 51,5, 59, 69, 76, 82 und 89 mm; Wand-  
stärken 4, 4,5, 5, 6 und 7 mm.

**c. Nahtlose Stahlrohre (Mannesmannrohre)**  
der Mannesmannröhren-Werke in Düsseldorf.

**1. Nahtlos gewalzte Mannesmannrohre** bis 300 mm Aufsendurch-  
messer mit normalen (dann Mafse und Gewichte entsprechend Tafel  
S. 967) und bis zu 10 mm stärkeren Wandungen, zu Lokomotiv-, Schiffs-  
und anderen Röhrenkesseln, Dampfleitungen, Saft- und Säureleitungen,  
Deckstützen usw.; auch zu Rohrschlangen gewunden. Uebliche Längen  
5 bis 7 m; jedoch auch je nach Durchmesser bis zu 15 m in einem  
Stück. Probedruck, wenn nicht anders vorgeschrieben, 50 at.

Abb. 365.



Für **Hochdruckleitungen** dient die Doppelbördel-  
Flanschverbindung (D. R. P. Nr. 87 026), Abb. 365,  
wobei die beiden Doppelbördel eine Ringnut bilden,  
worin eingepreßt ein Guttapercha- oder Gummiring  
liegt, der durch einen übergreifenden Kupferring (von  
kreuzförmigem Querschnitt) am Ausweichen verhindert  
wird. Bei sehr hohen Drücken verstärkter Doppelbördel.

**2. Mannesmann-Flanschenröhre** in den Abmessungen wie unter 1.  
mit allen gebräuchlichen Verbindungsarten für Dampfleitungen, Wasser-  
leitungen, Steige- und Schachtleitungen in Bergwerken usw.

**3. Mannesmann-Brunnen- und Bohrröhren** 2" bis 11 1/2" Aufsen-  
mafs, Gewindeverbindung s. Abb. 366 bis 370; **Gestängerröhren**, auch

Abb. 366.

Innen mit glatter Fläche.



Abb. 367.

Außen mit glatter Fläche.



Abb. 368.

Innen und außen glatt.

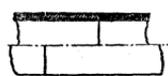


Abb. 369.

Außen glatt mit Nippel.

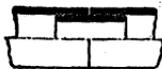


Abb. 370.

Innen glatt mit übergeschraubter gerader Muffe.



mit verdickten Enden, mit allen vorkommenden Gewindeverbindungen; **Gasröhren** mit Gewinde und Muffen, auch für Wasser- und Dampfleitungen.

**4. Absatzweise verjüngte Mannesmannröhren** aus hartem, zähem Spezialmaterial, für Licht- und Stromleitungsmaste, Blitzableiterstangen, Telephongestänge, Bausäulen, Bootsdavits, Ladebäume, Schiffsmaste, Raan, Gaffeln, Stengen.

**5. Nahtlos kaltgezogene Präzisionsrohre** bis 275 mm Außenmaß, für den Fahrrad-, Automobil-, Luftschiff- und Aeroplanbau, für Wasserrohrkessel der Marine, Lokomotiven, Verdampfapparate usw.

**6. Mannesmann-Muffenstahlrohre**, als Ersatz für die weniger widerstandsfähigen gusseisernen Muffenrohre. Fabrikationslänge bis 15 m. Probedruck 75 at. Gegen Verrosten durch Heißeisphaltierung und Umhüllung mit asphaltierter Jute geschützt. Die nachstehenden Bezeichnungen  $D$ ,  $D_2$ ,  $f$  und  $t$  enthält Abb. 340, S. 957.

Lichte Weite $D$ . mm	40	50	60	70	75	80	90	100	125	150	175	200	225	250
Wandstärke $s$ . mm	3	3	3	3,25	3,5	3,5	3,75	4	4	4,5	5	5,5	6,5	7,5
Muffenweite $D_2$ . "	60	71	81	91,5	97	102	112,5	123	148	174	200	227	254	282
Stärke der Dichtungsluge $f$ . "	7	7,5	7,5	7,5	7,5	7,5	7,5	7,5	7,5	7,5	8	8	8	8,5
Muffentiefe $t$ . "	81	85	88	90	91	92	94	97	100	103	106	110	110	113
Gewicht f. 1 m . kg	3,85	4,9	5,5	6,5	7,8	8,6	10,5	11,6	14	19	25,5	32	40	45,0

#### d. Kupfer-, Bronze- und Messingrohre.

Sie werden hart gelötet (also mit Naht) in Längen bis etwa 4 m oder gezogen (ohne Naht) in Längen von 0,3 bis 7 m in den Handel gebracht, u. zw. Kupfer- und Bronzerohre in Weiten  $D = 3$  bis 380 mm mit Wandstärken  $s = 1$  bis 10 mm, Messingrohre in äußeren Durchmessern  $D' = 5$  bis 180 mm mit Wandstärken  $s = 0,5$  bis 5 mm (s. die Tafeln auf S. 971 u. 972). Nahtlose Kupferrohre mit  $D = 3$  bis 2500 mm und  $s = 0,5$  bis 15 mm liefert Elmores Metall-A.-G. in Schladern (Sieg). Für Verzinnen der Rohre innen oder außen oder innen und außen tritt ein Preiszuschlag ein. Die Rohre kommen hart gezogen zur Ablieferung, werden auf Verlangen jedoch auch ausgeglüht geliefert, ohne Preisaufschlag.

Bei gebogenen Kupferrohren mit kleinem  $D$  sei der Halbmesser der gekrümmten Mittellinie  $R = 2D$  bis  $3D$ ; für größere Werte von  $D$  sei  $R = 4D$  bis  $5D$ .

Nach den Bestimmungen der Kaiserlich Deutschen Marine\*) sind gelötete Rohre für höhere Dampfspannungen auszuschließen; zu verwenden sind entweder gezogene oder aus Kupferblech hergestellte, mit Doppellaschen zusammengenietete Rohre.  $k_2 \leq 200$  kg/qcm. Bei umwickelten Rohren ist die Festigkeit der Umwicklung außer Rechnung zu lassen. Im weiteren s. die Bestimmungen der Normalien des Vereins deutscher Ingenieure, S. 974 u. f.

Kupferne **Trompetenrohre** und kupferne **Schlangen** s. S. 973.

\*) Vrgl. Z. d. V. d. I. 1895 S. 780 u. f.

**Kupferne Federrohre, Knierohre, T- und +-Stücke**  
 von F. G. Rühmkorf & Co. in Hannover-Herrenhausen.

Sämtliche Rohre sind bei 10 at probiert und bis zu 5 at verwendbar; höherer Arbeitsdruck bedingt größere Wandstärke.

Lichter Durchmesser <i>D</i>	Kupferne Federrohre							Kupferne Knierohre		
	Wandstärke f. 3 at Arbeitdr.	Für eine Längenausdehnung von 50 mm			Für eine Längenausdehnung von 100 mm			Wandstärke für 5 at Arbeitsdruck mm		
		Annäh. Kupfer- Gewicht	Abstand von Flansch zu Flansch	Ganze Höhe	Annäh. Kupfer- Gewicht	Abstand von Flansch zu Flansch	Ganze Höhe	2,5	3,0	3,5
mm	mm	kg	mm	mm	kg	mm	mm	Annäherndes Kupfergewicht in		
40	2,5	6,5	500	590	7	500	675	1,2	1,4	1,6
50	"	8	525	625	9,5	550	730	1,6	1,8	2,0
60	"	10	550	660	11,5	600	800	1,9	2,2	2,5
70	"	12,5	600	700	15	650	850	2,3	2,5	3,0
80	"	15	650	745	18	700	915	2,8	3,2	3,5
90	3,0	21	700	775	25,5	750	980	3,2	3,6	4,0
100	"	25	750	870	31	800	1140	4	5	5,5
125	"	36	800	970	43	900	1285	5,9	6,6	7,0
150	3,5	57	900	1050	74	1000	1440	8	9	10
175	"	70	950	1160	94	1100	1620	10	11,3	12,0
200	"	86,5	1100	1240	120	1200	1750	12,5	14	15,0
225	4,0	117	1150	1330	165	1300	1925	14,8	16,5	18,0
250	"	144	1250	1500	200	1400	2100	18	20	22,0
275	"	160	1350	1600	245	1500	2250	20,5	23,1	25,0
300	"	180	1350	1700	292,5	1600	2400	24	26,5	29,0

Die Federrohre müssen bei ihrem Einsetzen in eine eiserne Leitung um ein Drittel der berechneten Längenausdehnung (1,2 mm/m auf 100° Temperaturunterschied) aneinandergespannt eingeschaltet werden. Bei Mangel an Raum für Federrohre empfehlen sich Wellrohre.

Lichter Durchmesser <i>D</i>	Kupferne T-Stücke					Lichter Durchmesser <i>D</i>	Kupferne T-Stücke				
	Wandstärke mm						Wandstärke mm				
	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5		2,5	3,0	3,5	4,0	4,5
mm	Annäherndes Kupfergewicht eines Stückes in kg					mm	Annäherndes Kupfergewicht eines Stückes in kg				
40	2,5	3	3,6	4,4	5	125	9,5	12,4	14,9	17,9	21,5
50	3	3,6	4,4	5	6	150	11,6	14	16,8	20	24
60	3,6	4,3	5	6	6,8	175	14,5	17,4	20,9	25	30
70	4,4	5	6	6,8	8,2	200	18,5	22	26,2	31	37,2
80	5	6	6,8	8	9,6	225	22	26,4	31,5	37,6	45
90	6	6,8	8	9,6	11,6	250	26,5	31,8	37,2	44,6	53,5
100	6,3	8,2	9,9	11,9	14,3						

Lichter Durchmesser <i>D</i>	Kupferne +-Stücke					Lichter Durchmesser <i>D</i>	Kupferne +-Stücke				
	Wandstärke mm						Wandstärke mm				
	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5		2,5	3,0	3,5	4,0	4,5
mm	Annäherndes Kupfergewicht eines Stückes in kg					mm	Annäherndes Kupfergewicht eines Stückes in kg				
40	3,4	4,2	4,8	5,4	6,8	125	12,5	15	18,5	24	30
50	4	4,8	5,4	6,8	8,2	150	15,5	19,6	24	30	35
60	4,8	5,4	6,8	8,2	9,4	175	20,8	25	30	35	42
70	5,4	6,8	8,2	9,4	11	200	25	30	35	42	49
80	6,8	8,2	9,4	11	13	225	30	36	42	49	56
90	8,2	9,4	11	13	17,5	250	35	42	49	56	63
100	0,4	11	13	17,5	24						

Bei den (um 90° gebogenen) Knieröhren, den T- und + -Stücken ist, wie bei den normalen gußeisernen Flanschen-Formstücken (s. Abb. 353, 354 u. 356, S. 959),  $L = D + 100$  mm, wenn  $D$  den lichten Rohrdurchmesser bedeutet. Durchmesser  $D'$  und Lochkreis-Durchmesser  $D''$  der schmiedeisernen Flansche wie in Tafel S. 957.

**Gezogene Kupfer-, Bronze- und Messingrohre ohne Naht.**

Kupfer- und Messingwerk von C. Heckmann in Duisburg-Hochfeld.

**1. Kupfer- und Bronze-Rohre.**

Gewicht in kg/m.

(1 cbm Metall wiegt 9000 kg.)

Innerer Durchm. mm	Wandstärke in mm					Innerer Durchm. mm	Wandstärke in mm									
	1	1½	2	2½	3		3½	4	5	3	3½	4	5	6	7	8
3	0,11	0,19	0,28	0,39	0,51	0,64	.	.	135	11,71	13,73	15,76	19,82	23,92	28,15	32,35
4	0,14	0,23	0,34	0,46	0,59	0,74	.	.	140	12,13	14,20	16,29	20,59	24,77	29,11	33,47
5	0,17	0,28	0,40	0,53	0,68	0,84	1,02	.	145	12,56	14,70	16,85	21,21	25,61	30,09	34,61
6	0,20	0,32	0,45	0,60	0,76	0,94	1,13	1,55	150	12,98	15,19	17,41	21,91	26,46	31,08	35,73
8	0,25	0,40	0,56	0,74	0,93	1,14	1,36	1,84	155	13,39	15,68	17,98	22,61	27,31	32,06	36,86
10	0,31	0,49	0,68	0,88	1,10	1,34	1,58	2,12	160	13,82	16,18	18,55	23,33	28,16	33,06	38,01
12	0,37	0,57	0,79	1,02	1,27	1,53	1,81	2,40	165	14,25	16,68	19,11	24,03	29,01	34,03	39,12
13	0,40	0,61	0,85	1,07	1,36	1,63	1,92	2,54	170	14,67	17,17	19,67	24,74	29,85	35,03	40,26
15	0,45	0,70	0,96	1,24	1,53	1,83	2,15	2,83	175	15,09	17,67	20,24	25,53	30,71	36,02	41,34
16	0,48	0,74	1,02	1,31	1,61	1,93	2,26	2,97	180	15,53	18,16	20,81	26,15	31,55	37,01	42,53
18	0,54	0,83	1,13	1,45	1,78	2,13	2,49	3,25	185	15,93	18,65	21,36	26,85	32,40	38,04	43,63
20	0,59	0,91	1,24	1,59	1,95	2,33	2,71	3,53	190	16,37	19,15	21,94	27,57	33,25	39,09	44,78
22	0,65	1,00	1,36	1,73	2,12	2,52	2,94	3,82	195	16,77	19,64	22,49	28,27	34,10	40,02	45,90
25	0,73	1,12	1,53	1,94	2,37	2,82	3,28	4,24	200	17,22	20,14	23,08	28,98	34,95	40,97	47,05
28	0,82	1,25	1,70	2,16	2,63	3,12	3,62	4,66	205	17,63	20,64	23,63	29,68	35,80	41,95	48,16
30	0,88	1,34	1,81	2,30	2,80	3,31	3,84	4,95	210	18,06	21,13	24,20	30,39	36,65	42,95	49,31
32	0,93	1,42	1,93	2,44	2,97	3,51	4,07	5,23	215	18,49	21,63	24,75	31,09	37,49	43,93	50,43
35	1,02	1,55	2,09	2,65	3,22	3,81	4,41	5,65	220	18,92	22,13	25,34	31,82	38,34	44,93	51,58
38	1,10	1,67	2,26	2,86	3,48	4,11	4,75	6,08	225	19,33	22,62	25,89	32,52	39,18	45,91	52,68
40	1,16	1,76	2,37	3,00	3,65	4,30	4,98	6,36	230	19,76	23,11	26,46	33,22	40,03	46,91	53,83
45	1,30	1,97	2,66	3,36	4,07	4,80	5,54	7,07								
50	1,44	2,18	2,94	3,71	4,50	5,29	6,11	7,77								
55	1,58	2,40	3,22	4,06	4,92	5,79	6,67	8,48								
60	1,72	2,61	3,51	4,42	5,34	6,28	7,24	9,19								
65	1,87	2,82	3,79	4,77	5,77	6,78	7,80	9,90								
70	2,01	3,03	4,07	5,12	6,19	7,27	8,37	10,60	240	27,59	34,63	41,73	48,89	56,08	63,36	70,69
75	2,15	3,24	4,35	5,48	6,62	7,77	8,93	11,31	250	28,72	36,05	43,43	50,87	58,34	65,91	73,52
80	2,29	3,46	4,64	5,83	7,04	8,26	9,50	12,02	260	29,85	37,46	45,13	52,85	60,60	68,45	76,34
85	2,43	3,67	4,92	6,18	7,46	8,76	10,07	12,73	270	30,98	38,87	46,82	54,83	62,87	70,99	79,16
88	2,43	3,67	4,92	6,18	7,46	8,76	10,07	12,73	280	32,11	40,28	48,52	56,81	65,12	73,55	82,00
90	2,57	3,88	5,20	6,54	7,89	9,25	10,63	13,43	290	33,25	41,70	50,21	58,79	67,38	76,09	84,83
95	2,71	4,09	5,48	6,89	8,31	9,75	11,20	14,14	300	34,38	43,11	51,91	60,76	69,66	78,63	87,65
100	2,86	4,30	5,77	7,24	8,74	10,24	11,76	14,84	310	.	44,53	53,61	62,74	71,93	81,17	90,48
105	.	4,52	6,05	7,60	9,16	10,74	12,33	15,55	320	.	45,95	55,31	64,72	74,19	83,72	93,30
110	.	4,73	6,33	7,95	9,59	11,23	12,89	16,26	330	.	47,36	57,00	66,70	76,45	86,27	96,13
115	.	4,94	6,61	8,30	10,01	11,73	13,46	16,97	340	.	48,77	58,70	68,68	78,72	88,81	98,96
120	.	5,15	6,90	8,66	10,44	12,22	14,02	17,67	350	.	50,19	60,39	70,66	80,98	91,36	101,79
125	.	5,36	7,17	9,01	10,86	12,72	14,59	18,37	360	.	51,60	62,09	72,64	83,24	93,96	104,61
130	.	5,58	7,46	9,36	11,28	13,21	15,65	19,08	370	.	53,01	63,79	74,62	85,50	96,44	107,44
									380	.	54,43	65,48	76,60	87,76	98,99	110,28

Äußere Durchm. von 200 bis 280 mm auch mit 9 und 10 mm Wandstärke.

## 2. Messingrohre.

Gewicht in kg/m.

(1 cbm Messing wiegt 8500 kg.)

Außen- Durchm. mm	Wandstärke in mm																
	1/2	3/4	1	1 1/4	1 1/2	1 3/4	2	2 1/4	2 1/2	2 3/4	3	3 1/4	3 1/2	3 3/4	4	4 1/2	5
5	0,06	0,08	0,11	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
6	0,07	0,10	0,13	0,16	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
8	0,10	0,15	0,19	0,22	0,26	0,29	0,32	0,34	.	.	.	.	.	.	.	.	.
10	0,13	0,19	0,24	0,29	0,34	0,39	0,43	0,47	0,50	0,53	.	.	.	.	.	.	.
12	0,15	0,22	0,29	0,36	0,42	0,48	0,53	0,59	0,63	0,68	0,72	.	.	.	.	.	.
13	0,17	0,24	0,32	0,39	0,46	0,53	0,59	0,65	0,70	0,75	0,80	0,85	0,89	.	.	.	.
14	0,18	0,26	0,35	0,42	0,50	0,57	0,64	0,70	0,77	0,83	0,88	0,93	0,98	.	.	.	.
15	0,19	0,28	0,37	0,46	0,54	0,62	0,69	0,77	0,83	0,90	0,96	1,02	1,07	1,13	1,17	.	.
16	0,21	0,30	0,40	0,49	0,58	0,67	0,75	0,83	0,90	0,97	1,04	1,11	1,16	1,23	1,28	1,38	1,47
18	0,23	0,35	0,45	0,56	0,66	0,76	0,85	0,95	1,03	1,12	1,20	1,28	1,35	1,43	1,50	1,62	1,73
20	0,26	0,39	0,51	0,62	0,74	0,85	0,96	1,07	1,17	1,27	1,36	1,45	1,54	1,63	1,71	1,86	2,00
22	0,29	0,43	0,56	0,69	0,82	0,95	1,07	1,19	1,30	1,41	1,52	1,63	1,73	1,83	1,92	2,10	2,27
24	0,31	0,47	0,61	0,76	0,90	1,04	1,17	1,31	1,43	1,56	1,68	1,80	1,92	2,03	2,14	2,34	2,54
25	0,33	0,49	0,64	0,79	0,94	1,09	1,23	1,37	1,50	1,63	1,76	1,89	2,01	2,13	2,24	2,46	2,67
26	0,34	0,51	0,67	0,83	0,98	1,13	1,28	1,43	1,57	1,71	1,84	1,97	2,10	2,23	2,35	2,58	2,80
28	0,37	0,55	0,72	0,89	1,06	1,23	1,39	1,55	1,70	1,85	2,00	2,15	2,29	2,43	2,56	2,82	3,07
30	0,39	0,59	0,77	0,96	1,14	1,32	1,50	1,67	1,84	2,00	2,16	2,32	2,48	2,63	2,78	3,06	3,34
32	0,42	0,63	0,83	1,03	1,22	1,41	1,60	1,79	1,97	2,15	2,32	2,49	2,66	2,83	2,99	3,30	3,60
35	0,46	0,69	0,91	1,13	1,34	1,55	1,76	1,97	2,17	2,37	2,56	2,75	2,94	3,13	3,31	3,66	4,01
38	0,50	0,75	0,99	1,23	1,46	1,69	1,92	2,15	2,37	2,59	2,80	3,02	3,22	3,43	3,63	4,03	4,41
40	0,53	0,79	1,04	1,29	1,54	1,78	2,03	2,27	2,50	2,73	2,96	3,19	3,41	3,63	3,84	4,27	4,67
42	0,56	0,83	1,09	1,36	1,62	1,88	2,14	2,39	2,64	2,88	3,12	3,36	3,60	3,83	4,06	4,51	4,94
45	0,60	0,89	1,17	1,46	1,74	2,02	2,30	2,57	2,84	3,10	3,36	3,62	3,88	4,13	4,38	4,87	5,34
48	0,64	0,95	1,25	1,56	1,86	2,16	2,46	2,75	3,04	3,32	3,60	3,88	4,15	4,43	4,70	5,23	5,74
50	0,66	0,99	1,31	1,63	1,94	2,25	2,56	2,87	3,17	3,47	3,76	4,06	4,35	4,63	4,91	5,47	6,01
52	0,69	1,03	1,36	1,69	2,02	2,35	2,67	2,99	3,30	3,62	3,92	4,23	4,53	4,83	5,13	5,71	6,27
55	0,73	1,09	1,44	1,79	2,14	2,49	2,83	3,17	3,50	3,83	4,16	4,49	4,81	5,13	5,44	6,06	6,67
58	0,76	1,15	1,52	1,89	2,26	2,63	2,99	3,35	3,71	4,06	4,41	4,75	5,09	5,43	5,76	6,42	7,07
60	0,79	1,19	1,58	1,96	2,34	2,73	3,10	3,47	3,84	4,20	4,57	4,92	5,28	5,63	5,98	6,66	7,34
65	0,85	1,29	1,71	2,13	2,54	2,95	3,36	3,77	4,17	4,57	4,97	5,36	5,75	6,13	6,51	7,26	8,01
70	0,92	1,39	1,84	2,29	2,74	3,19	3,63	4,07	4,51	4,94	5,37	5,79	6,21	6,63	7,04	7,87	8,67
75	0,98	1,49	1,97	2,46	2,94	3,42	3,90	4,37	4,84	5,30	5,77	6,23	6,68	7,13	7,58	8,47	9,34
80	1,06	1,59	2,11	2,63	3,14	3,65	4,16	4,67	5,17	5,67	6,17	6,66	7,15	7,63	8,11	9,07	10,01
85	.	.	2,24	2,79	3,34	3,89	4,43	4,97	5,51	6,04	6,57	7,09	7,61	8,13	8,65	9,67	10,68
90	.	.	2,38	2,96	3,54	4,12	4,70	5,27	5,84	6,41	6,97	7,53	8,08	8,63	9,18	10,27	11,34
95	.	.	.	.	3,74	4,36	4,96	5,57	6,17	6,77	7,37	7,96	8,55	9,13	9,71	10,87	12,01
100	.	.	.	.	3,94	4,60	5,23	5,87	6,50	7,14	7,77	8,39	9,01	9,63	10,25	11,47	12,68
105	.	.	.	.	4,14	4,83	5,50	6,17	6,84	7,51	8,17	8,83	9,48	10,14	10,78	12,07	13,35
110	.	.	.	.	4,34	5,07	5,77	6,47	7,18	7,88	8,57	9,26	9,95	10,64	11,32	12,68	14,02
115	.	.	.	.	4,55	5,29	6,04	6,77	7,52	8,24	8,97	9,70	10,42	11,14	11,85	13,27	14,69
120	.	.	.	.	4,77	5,53	6,30	7,07	7,84	8,61	9,37	10,13	10,88	11,64	12,38	13,88	15,36
125	.	.	.	.	.	.	6,57	7,37	8,18	8,98	9,77	10,56	11,35	12,14	12,92	14,48	16,02
130	.	.	.	.	.	.	6,83	7,67	8,51	9,34	10,17	10,99	11,82	12,64	13,46	15,08	16,68
135	.	.	.	.	.	.	7,10	.	8,84	.	10,57	.	12,29	.	13,99	.	17,36
140	.	.	.	.	.	.	7,37	.	9,18	.	10,97	.	12,76	.	14,53	.	18,02
145	.	.	.	.	.	.	7,64	.	9,51	.	11,37	.	13,22	.	15,06	.	18,69
150	.	.	.	.	.	.	7,90	.	9,85	.	11,78	.	13,69	.	15,59	.	19,36
155	.	.	.	.	.	.	8,17	.	10,18	.	12,18	.	14,16	.	16,13	.	20,03
160	.	.	.	.	.	.	8,44	.	10,51	.	12,58	.	14,63	.	16,66	.	20,69
165	.	.	.	.	.	.	.	.	10,85	.	12,98	.	15,10	.	17,20	.	21,36
170	.	.	.	.	.	.	.	.	11,19	.	13,38	.	15,56	.	17,73	.	22,03
175	.	.	.	.	.	.	.	.	11,52	.	13,78	.	16,03	.	18,27	.	22,70
180	.	.	.	.	.	.	.	.	11,85	.	14,18	.	16,50	.	18,80	.	23,37

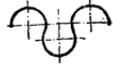
Kupferne Trompetenrohre.*)						Kupferne Schlangen.*)								
Lichter Durchmesser mm	Wandstärke mm	Für eine Längenausdehnung von 50 mm		Für eine Längenausdehnung von 100 mm		Wandstärke mm	Lichter Durchmesser in mm							
		Kupfergewicht kg	Abstand v. Flansch zu Flansch mm	Kupfergewicht kg	Abstand v. Flansch zu Flansch mm		40	50	60	70	80	90	100	125
40	2,5	7	500	7,5	500	2,0	20	20	20	20	20	20	20	20
50		9	525	10	550		25	25	25	25	25	25	25	25
60	3,0	10,5	550	11,5	600	2,5	25	25	25	25	25	25	25	25
70		14	600	16	650									
80	3,0	17	650	19	700	3,0	30	30	30	30	30	30	30	30
90		26	700	28,5	750									
100	3,5	28,5	750	33,5	800	3,0	30	30	30	30	30	30	30	30
125		38,5	800	47	900									

### 3. Biegsame Tombakrohre ohne Naht.

Deutsche Waffen- und Munitionsfabriken in Karlsruhe.

Aus nahtlos gezogenen Rohren, in die schraubenförmig verlaufende Wulste eingewalzt werden, in Tombak hergestellt, in Längen von 2,7 bis 4,2 m. Querschnitt der Wulste s. Abb. 371.

Durch Umhüllung mit einfachem oder doppeltem Geflechtsüberzug, wodurch die Biegsamkeit der Rohre nicht vermindert wird, kann der in der folgenden Tafel angegebene Betriebsdruck auf das 3- bis 5-fache erhöht werden. Bei Umwicklung mit Messingdraht und doppeltem Geflechtsüberzug steigt der Betriebsdruck auf das 9- bis 10-fache. Die Längsfederung der Rohre bei zwangsweiser Führung beträgt 50 mm/m für Rohre mit 15 mm und mehr lichtem Durchmesser. Außer zur Fortleitung von Luft, Gas, Dampf und Flüssigkeiten sind die biegsamen Messingrohre auch als Dehnungsrohre benutzbar.



Verbindung mittels Muffen, in denen das Rohr entweder mit Weichlot vergossen oder verschraubt wird.

Durchmesser		Betriebsdruck at	Gewicht f. 1 m kg	Durchmesser		Betriebsdruck at	Gewicht f. 1 m kg
lichter mm	äußerer mm			lichter mm	äußerer mm		
6	10,2	50	0,11	35	58,5	7	2,00
8	13	50	0,15	40	62,6	6	2,27
10	19,5	22	0,30	45	68,5	6	2,44
12	22,5	20	0,41	50	73	6	2,70
15	28,5	18	0,54	60	86	6	3,20
20	36,5	12	0,81	70	96	5	3,70
25	42,5	9	1,10	80	107	5	4,90
30	51,5	8	1,69				

\*) Von F. G. Rühmkorf & Co. in Hannover-Herrenhausen.

## e. Normalien zu Rohrleitungen für Dampf von hoher Spannung,

aufgestellt vom Vereine deutscher Ingenieure 1900.)\*

### 1. Geltungsbereich nach Rohrdurchmesser und Dampfdruck; Prüfungsdruck.

Die Normalien gelten für innere Rohrdurchmesser von 30 bis 400 mm und für einen inneren Betriebsüberdruck von 8 bis 20 at; für Rohre von mehr als 300 mm Durchmesser ist außerdem eine Zahlenreihe der Abmessungen für 15 at Ueberdruck aufgestellt.

Die Einzelstücke sind bei gewöhnlicher Temperatur mit dem zweifachen höchsten Betriebsdrucke zu prüfen; dabei sind die Rohre, während sie unter Druck stehen, mit dem Hammer abzuklopfen. Es empfiehlt sich, auch die fertigen Rohrleitungen zu prüfen, u. zw. nach den für Dampfkessel geltenden Vorschriften.

Für die Rohrdurchmesser sind die Zahlen der Normalien für gußeiserne Flanschrohre (s. S. 957) beibehalten worden; für Rohre, deren Durchmesser zwischen zwei in jenen Normalien angegebenen Stufen liegt, sollen die Maße der höheren Stufe gewählt werden.

### 2. Druckfläche der Flanschverbindungen.

Die den Festigkeitsberechnungen zugrunde gelegte Druckfläche der Flanschverbindungen ist gleich der Kreisfläche, die sich bis zur Außenkante der Dichtungsringfläche erstreckt.

### 3. Baustoffe.

α) **Gußeisen** darf bis 8 at Druck zu Rohren, Formstücken und Ventilkörpern für alle Durchmesser, von 8 bis 13 at zu Ventilkörpern und Formstücken für alle Durchmesser, zu Rohren nur bis 150 mm Durchmesser, von 13 bis 20 at überhaupt nicht verwendet werden, mit Ausnahme von Ventilen bis 50 mm Durchmesser.

Das Gußeisen muß mindestens eine Biegezugfestigkeit  $K_b = 2500$  kg/qcm bei 18 mm Durchbiegung besitzen, beide gemessen an quadratischen Stäben (mit Gußhaut und 30 mm Seitenlänge des Querschnittes), deren freie Auflagerlänge 1 m beträgt.

β) **Bronze**. Für Ventilkörper und Formstücke ist Bronze zulässig, vorausgesetzt, daß die Bronze eine Zugfestigkeit von mindestens  $K_z = 2000$  kg/qcm bei mindestens  $\varphi = 15$  vH Dehnung besitzt.

Da die **Streckgrenze** der Bronze (aus 87 Cu, 8,7 Sn, 4,3 Zn oder aus 91 Cu, 5 Sn, 4 Zn bestehend)  $\sigma_f = 900$  kg/qcm beträgt, so ist — bei gewöhnlicher Temperatur — für die Arbeitsbelastung (= halbe Probebelastung)  $k_z \geq 450$ , nur ausnahmsweise bis 500 kg/qcm zu wählen.

γ) **Kupfer** soll eine Festigkeit von mindestens  $K_z = 2100$  kg/qcm bei mindestens  $\varphi = 35$  vH Dehnung besitzen. (Vorschrift der Kaiserl. Marine.)

δ) **Schweißeseisen, Flußeisen, Stahlguß**. Aus Schweißeseisen oder Flußeisen können angefertigt werden: die Schrauben; aus Schweißeseisen, Flußeisen oder Stahlguß: die Flansche; aus Schweißeseisen oder Flußeisen: die Rohrwandungen, sofern sie nicht aus Kupfer bestehen sollen. Die Ventile werden aus Stahlguß, die Formstücke aus Stahlguß oder Schweißeseisen hergestellt, sofern nicht Bronze gewählt wird oder nach dem unter 3α) Gesagten Gußeisen zulässig ist.

Die Zahlen der Festigkeit und der Dehnung sollen betragen:

für Schweißeseisen:	in der Längsrichtung	$K_z \geq 3400$ kg/qcm, $\varphi \geq 12$ vH;
	in der Querrichtung	$K_z \geq 3200$ kg/qcm, $\varphi \geq 8$ vH;
für Flußeisen:		$K_z \geq 4500$ kg/qcm, $\varphi \geq 22$ vH;
	für Stahlguß:	$K_z \geq 3800$ kg/qcm, $\varphi \geq 20$ vH.

Die Probestäbe sind den Rohren zu entnehmen.

\*) Zu beziehen von der Geschäftsstelle des V. d. I. Berlin NW 7, Charlottenstr. 43.

### 4. Schrauben.

Die Beanspruchung bei 20 at Arbeitsdruck soll im Schraubenkern betragen:

bei Schrauben von $\frac{5}{8}$ Z. engl. Durchmesser höchstens $k_g = 240$ kg qcm,	
" " " $\frac{3}{4}$ " " " " " " = 310 "	
" " " $\frac{7}{8}$ " " " " " " = 335 "	
" " " 1 " " " " " " = 415 "	
" " " $1\frac{1}{8}$ " " " " " " = 445 "	

Die Anzahl der Schrauben soll gerade sein. In der Symmetrieebene der Ventile sollen keine Schrauben sitzen.

Für Schrauben von  $\frac{5}{8}$ ,  $\frac{3}{4}$ ,  $\frac{7}{8}$ , 1,  $1\frac{1}{8}$  Z. engl. Durchmesser erhalten die Schraubenlöcher 17, 21, 24, 28, 32 mm Durchmesser.

### 5. Rohrwandungen.

Die Rohrwandungen dürfen nur bis zu den nachstehend angegebenen Grenzen aus Gußeisen bestehen; sonst aus Schweisseisen, aus geschweißtem oder gezogenem Flußeisen oder aus Kupfer.

α) **Gußeisen.** Bis 8 at ist Gußeisen für die Rohrwandungen bei allen Durchmesser, von 8 bis 13 at nur bis 150 mm Durchmesser zulässig, von 13 bis 20 at ist es nicht mehr zulässig (s. S. 974).

β) **Schweisseisen, Flußeisen** sollen in den Rohrwandungen bei den weitesten Rohren von 400 mm Lichtem Durchmesser durch den inneren Druck höchstens mit  $k_g = 400$  kg/qcm beansprucht werden.

Die Wanddicken  $s$  (in mm) in der Tafel S. 976 sind bis  $D = 200$  mm Lichtem Durchmesser nach der Formel  $s = \frac{p D}{700} + 1$  berechnet, wo  $p$  den höchsten Betriebsdruck in at bezeichnet; von da an nimmt die Beanspruchung des Eisens allmählich zu, bis die Wanddicke für Rohre von 400 mm Lichtem Durchmesser der Formel  $s = \frac{p D}{800}$  entspricht.

Stumpfgeschweißte Rohre (sogen. Gasrohre) sollen nicht verwendet werden, sondern nur nahtlose oder überlappt geschweißte.

γ) **Kupfer.** Für die Wandungen kupferner Rohre sind die Bestimmungen der Kaiserlichen Marine (vgl. S. 969) maßgebend. Hiernach ist, wenn  $s$  und  $D$  in mm,  $p$  in at:

$$s = \frac{p D}{400} + 1,5 \text{ für Rohre bis 100 mm Durchmesser,}$$

$$s = \frac{p D}{400} \text{ für Rohre von 125 mm Durchmesser und darüber.}$$

Kupferne Rohre von 125 mm Lichtem Durchmesser und darüber für Dampf von mehr als 8 at sind mit verzinktem Stahldrahttaue so zu umwickeln,\*) daß die Tauspiralen sich berühren, und daß bei dem Bruche des Taues in einer Spirale die anliegenden anderen Tauspiralen nicht lose werden; für die Dicke des Taues gelten folgende Maße:

Lichte Rohrweite in mm	125—150	155—200	205—250	255—300	305—350	355—400
Umfang des Drahttaues in cm.	0,75	1,0	1,25	1,5	1,75	2,0

Die Umwicklung ist mit einem guten Anstrich von Leinölfirnis zu versehen. — Wenn möglich, sind gezogene Rohre zu verwenden. Gelötete Rohre sind für höhere Dampfspannungen auszuschließen.

### 6. Flansche.

#### α. Flansch- und Bundköpfe für lose Flanschen.

Die Verbindung der Flanschen mit den Rohren mittels Lötung allein ist nur für Rohre bis zu 50 mm Lichtem Durchmesser zulässig; bei Rohren über 50 mm Durchmesser muß die Sicherung der Flanschköpfe gegen Abschieben von den Rohren durch Schweißen oder Nieten, durch Aufrollen, mittels Gewindes oder durch Umbördeln erzielt werden.

Bei Kupferrohren sind die Flansch- und Bundköpfe in Bronze auszuführen.

Für überhitzten Dampf sind Verbindungen, die nur mittels Lötung hergestellt sind, nicht zulässig.

\*) Vgl. Versuche mit Umwicklungen von Kupferrohren an der Kaiserlichen Werft Wilhelmshaven. Z. d. V. d. I. 1895 S. 780 u. f.

**Mafse für Normalien zu Rohrleitungen für Dampf**

Lichter Durchmesser des Rohres <i>D</i>	Wanddicke <sup>1)</sup>					Flanschdurchmesser <i>A</i>	Lochkreisdurchmesser <i>B</i>	Dichtung								Schrauben <sup>4)</sup>		
	des Rohres bei Ausführung in							mit Nut und Feder				mit Linsen				Gesamtdruck auf die Schrauben berechnet für $C + 2a$		
	Schweiß- oder Flußeisen		Kupfer <sup>5)</sup>	am Hals des Ventils bei Ausführung in Bronze				Breite der Nut <sup>3)</sup>	Tiefe der Nut	Durchmesser der Dichtungsschur bei dreieckiger Nut	äußerer Durchmesser der Linse	Halbmesser der Wölbung	Breite der Dichtungsfläche	Dicke der Linse	Zoll	Durchmesser	Anzahl	
	im Rohrschaft	am Bordring		<i>s</i>	<i>s</i> <sub>1</sub>													<i>s</i> <sub>2</sub>
	mm	mm	mm	mm	mm			mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	kg	engl.

**I. Rohrleitungen von**

80	2,25	2,25	3	8	125	95	48	8	4	5	55	50	4	10	64,3	1/2	6	14
40	2,25	2,25	3,5	9	140	110	60	8	4	5	68	60	4	12	90,7	1/2	6	17
60	2,5	2,5	4	10	160	125	72	8	4	5	80	70	5	12	121,6	3/8	6	17
50	3	3	4,5	11	175	135	84	8	4	5	93	85	5	14	157,1	3/8	6	17
70	3	3	5	12	185	145	94	8	4	5	106	100	5	14	190,0	3/8	6	17
80	3,5	3,5	5,5	13	200	160	105	8	4	5	120	115	6	16	230,0	3/4	6	21
90	4	4	6	14	220	180	116	8	4	5	134	135	6	16	273,7	3/4	6	21
100	4	4	6,5	15	240	190	128	11	5	7	148	155	7	18	353,4	3/4	6	21
125 <sup>6)</sup>	5	5	6,5	16	270	220	154	11	5	7	176	180	7	20	486,6	3/4	8	21
150 <sup>6)</sup>	5,5	5,5	7,5	18	300	250	182	11	5	7	207	210	8	20	653,7	7/8	8	24
175	6	12	9	20	330	280	212	11	5	7	238	240	8	22	860,0	7/8	10	24
200	7	14	10	22	360	310	242	11	5	7	269	270	8	22	1094,8	7/8	12	24
225	7	14	11,5	24	390	340	272	14	5	8	300	305	10	24	1413,7	1	12	28
250	8	16	12,5	26	420	370	300	14	5	8	330	340	10	24	1690,0	1	12	28
275	8	16	14	28	450	400	330	14	5	8	360	385	10	26	2013,0	1	14	28
300	9	18	15	30	480	430	360	14	5	8	390	430	10	26	2364,8	1	16	28
325	9	18	16,5	32	520	465	390	14	5	8	420	475	12	28	2744,5	1 1/8	16	32
350	10	20	17,5	34	550	495	420	14	5	8	450	520	12	28	3152,6	1 1/8	16	32
375	10	20	19	36	580	525	450	14	5	8	480	565	12	30	3589,0	1 1/8	18	32
400	10	20	20	38	605	550	476	14	5	8	510	610	12	30	3990,0	1 1/8	20	32

**II. Rohrleitungen von**

325	8	16	12,5	26	495	445	376	14	5	8	405	415	10	24	1923,0	1	14	28
350	8	16	14	28	525	475	406	14	5	8	435	460	10	26	2219,0	1	16	28
375	9	18	15	30	555	505	436	14	5	8	465	505	10	26	2536,9	1	18	28
400	9	18	16	32	585	535	465	14	5	8	505	550	12	28	2863,3	1	20	28

<sup>1)</sup> Diese Mafse gelten nur für Rohre von Schweißeisen bzw. Flußeisen oder Kupfer. Bei gußeisernen Rohren (s. Bestg. 3. α) sind die Wanddicken und Flanschen der deutschen Rohrnormen entsprechend zu verstärken und zu ändern.

<sup>2)</sup> Die angegebenen Wanddicken für Kupferrohre beziehen sich auf 20 (I) und 15 (II) at Ueberdruck; bei geringerem Druck sind die Wanddicken nach den auf S. 975 angegebenen Formeln zu bestimmen.

<sup>3)</sup> Die Feder ist stets 1 mm schmaler als die Nut.

<sup>4)</sup> Die Außenmafse der Muttern entsprechen den Vorschriften der Kaiserlichen

von hoher Spannung, aufgestellt vom Vereine deutscher Ingenieure 1900.

Flansche														Hals für Rohre aus Schweisseisen oder Flußeisen					
loser Flansch		Bordring		fester Flansch und Bordring				Flansch am Ventil aus Bronze		f. Linsendichtung		geschraubt oder eingerollt		genietet und gelötet		genietet und verstemmt			
A	F	e	G	f	g	Höhe		h <sub>v</sub> = h + b	h <sub>2</sub>	i	k	m	m <sub>1</sub>	t	n	o	l	p	
						aus Stahlgufs	aus Bronze												
mm	mm	mm	mm	mm	mm	g <sub>1</sub> = g - b	h	h <sub>1</sub> = h - b	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm
125	60	16	75	16	16	12	16	12	20	8	7	18	8	.	1	.	.	.	.
140	75	17	90	18	18	14	18	14	22	9	9	20	8	.	1	.	.	.	.
160	85	18	100	20	20	16	20	16	24	10	9	22	9	.	1	.	.	.	.
175	90	19	110	21	21	17	21	17	25	12	11	24	9	.	1	.	.	.	.
185	100	20	120	22	22	18	22	18	26	12	11	25	10	.	1	.	.	.	.
200	115	22	135	23	23	19	23	19	27	13	12	26	10	.	1	.	.	.	.
220	125	23	150	24	24	20	24	20	28	13	13	27	11	.	1,5	.	.	.	.
240	140	24	160	26	26	21	26	21	31	14	14	28	11	.	1,5	.	.	.	.
270	170	28	190	28	28	23	28	23	33	14	15	32	12	13	1,5	.	.	.	.
300	195	32	220	30	29	24	30	25	35	14	16	42	12	14	2	42	37	6	67
330	225	37	250	31	30	25	32	27	37	15	17	45	13	15	2	45	40	7	75
360	255	40	280	32	31	26	34	29	39	15	18	47	14	16	2	47	42	8	82
390	285	42	310	34	32	27	36	31	41	16	19	50	15	17	.	50	45	9	84
420	315	45	340	36	33	28	38	33	43	17	21	52	16	18	.	52	47	10	86
450	340	48	370	37	34	29	40	35	45	18	22	52	16	18	.	52	47	11	86
480	370	50	400	38	35	30	42	37	47	18	23	55	16	18	.	55	50	12	88
520	405	52	430	39	36	31	44	39	49	18	25	55	17	19	.	55	50	13	88
550	435	55	460	40	37	32	46	41	51	19	27	58	17	19	.	58	53	13	95
580	465	58	490	41	38	33	48	43	53	19	28	58	18	20	.	58	53	14	95
605	490	60	515	42	40	35	48	43	53	20	29	60	18	20	.	60	55	14	103

8 bis 20 at Ueberdruck.

125	60	16	75	16	16	12	16	12	20	8	7	18	8	.	1	.	.	.	.
140	75	17	90	18	18	14	18	14	22	9	9	20	8	.	1	.	.	.	.
160	85	18	100	20	20	16	20	16	24	10	9	22	9	.	1	.	.	.	.
175	90	19	110	21	21	17	21	17	25	12	11	24	9	.	1	.	.	.	.
185	100	20	120	22	22	18	22	18	26	12	11	25	10	.	1	.	.	.	.
200	115	22	135	23	23	19	23	19	27	13	12	26	10	.	1	.	.	.	.
220	125	23	150	24	24	20	24	20	28	13	13	27	11	.	1,5	.	.	.	.
240	140	24	160	26	26	21	26	21	31	14	14	28	11	.	1,5	.	.	.	.
270	170	28	190	28	28	23	28	23	33	14	15	32	12	13	1,5	.	.	.	.
300	195	32	220	30	29	24	30	25	35	14	16	42	12	14	2	42	37	6	67
330	225	37	250	31	30	25	32	27	37	15	17	45	13	15	2	45	40	7	75
360	255	40	280	32	31	26	34	29	39	15	18	47	14	16	2	47	42	8	82
390	285	42	310	34	32	27	36	31	41	16	19	50	15	17	.	50	45	9	84
420	315	45	340	36	33	28	38	33	43	17	21	52	16	18	.	52	47	10	86
450	340	48	370	37	34	29	40	35	45	18	22	52	16	18	.	52	47	11	86
480	370	50	400	38	35	30	42	37	47	18	23	55	16	18	.	55	50	12	88
520	405	52	430	39	36	31	44	39	49	18	25	55	17	19	.	55	50	13	88
550	435	55	460	40	37	32	46	41	51	19	27	58	17	19	.	58	53	13	95
580	465	58	490	41	38	33	48	43	53	19	28	58	18	20	.	58	53	14	95
605	490	60	515	42	40	35	48	43	53	20	29	60	18	20	.	60	55	14	103

8 bis 15 at Ueberdruck.

495	390	45	415	36	33	28	38	33	43	17	21	52	16	18	.	52	47	10	86
525	415	48	445	38	34	29	40	35	45	17	22	52	16	18	.	52	47	11	86
555	445	50	475	38	35	30	40	35	45	17	23	55	16	18	.	55	50	12	88
585	480	52	505	40	36	31	42	37	47	18	25	55	17	19	.	55	50	13	88

Marine für englische und den Beschlüssen des Vereines deutscher Ingenieure für metrische Schraubenmaße.

5) Die Flanschverbindungen der Kupferrohre von 125 und 150 mm Lichtem Durchmesser sind in den Abbildungen nicht dargestellt; der Unterschied gegenüber den Rohren von 175 mm Lichtem Durchmesser und darüber besteht darin, daß die Flanschverbindungen der Rohre von 125 und 150 mm Lichtem Durchmesser nur eine Reihe von Nieten haben. Alle Maße dieser Flanschverbindungen sind der vorstehenden Tafel zu entnehmen.

## Mafse für Normalien zu Rohrleitungen für Dampf von hoher Spannung,

aufgestellt vom Vereine deutscher Ingenieure 1900.

(Fortsetzung von S. 976 u. 977.)

Lichter Durchmesser des Rohres	Niete f. Rohre a. Schweifeisen oder Flußeisen					Hals für Rohre aus Kupfer					Niete für Rohre aus Kupfer			Umbördelung des Kupferrohres		Baulänge des Ventils	
	Durchmesser	Abstand von der Außenkante des Halses	Abstand von der Innenkante des Rohres	Anzahl der Niete in einer Reihe bei		Höhe	Dicke	Länge der Aussparung	Breite und Länge der Abschrägung	Durchmesser	Abstand von der Außenkante des Halses	Anzahl der Niete in einer Reihe	Breite	Tiefe			
				einfacher Nietung	doppelter										des Halsansatzes		$x$
$D$	$q$	$r$	$r_1$	$u$		$k_1$	$v$	$v_1$	$o_1$	$l$	$q_1$	$w$	$w_1$		$x$	$y$	$L^1) = \frac{2D}{+ 150}$
mm	mm	mm	mm	mm		mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm		mm	mm	mm

### I. Rohrleitungen von 8 bis 20 at Ueberdruck.

80	.	.	.	.	.	14	7	.	14	5	.	.	.	.	3	3	210	
40	.	.	.	.	.	14	8	.	15	5,5	.	.	.	.	3	3,5	230	
50	.	.	.	.	.	14	8	.	15	5,5	.	.	.	.	3,5	3,5	250	
60	.	.	.	.	.	14	8	.	15	6	.	.	.	.	3,5	4	270	
70	.	.	.	.	.	15	8	.	16	6	.	.	.	.	4	4	290	
80	.	.	.	.	.	15	9	.	16	6	.	.	.	.	4	4,5	310	
90	.	.	.	.	.	16	9	.	16	6	.	.	.	.	4	4,5	330	
100	.	.	.	.	.	17	9	.	16	6	.	.	.	.	4,5	5	350	
125	.	.	.	.	.	42	9	10	.	6	11	17	.	8	4,5	5,5	400	
150	13	23	45	28	10	7	42	9	10	.	6	11	17	.	10	5	6	450
175	14	24	48	30	11	8	71	10	12	.	7	12	19	40	8	5,5	7	500
200	15	25	53	32	12	9	75	11	13	.	8	13	21	43	9	6	8	550
225	16	26	55	35	14	10	79	12	14	.	9	14	23	47	10	7	9	600
250	17	27	58	36	15	12	81	13	15	.	10	15	25	51	12	8	10	650
275	17	27	58	36	16	13	83	14	16	.	11	16	27	55	13	9	11	700
300	18	28	60	38	17	14	88	15	17	.	12	17	29	58	14	10	12	750
325	18	28	60	38	18	15	94	16	18	.	13	18	31	63	15	11	13	800
350	19	30	64	40	19	16	100	17	19	.	13	18	31	63	16	11	14	850
375	19	30	64	40	20	17	105	18	20	.	14	20	33	68	17	12	15	900
400	20	32	67	44	21	18	109	18	20	.	14	20	33	68	18	12	15	950

### II. Rohrleitungen von 8 bis 15 at Ueberdruck.

325	17	27	58	36	18	15	81	13	15	.	10	15	25	51	15	8	10	800
350	17	27	58	36	19	16	83	14	16	.	11	16	27	55	16	9	11	850
375	18	28	60	38	20	17	88	15	17	.	12	17	29	58	17	10	12	900
400	18	28	60	38	21	18	94	16	18	.	13	18	31	63	18	11	13	950

1) Unter Baulänge  $L$  des Ventils ist das Maß verstanden, das sich von Mitte zu Mitte Ventil ohne Rücksicht auf die Dichtung ergibt, wenn zwei gleiche Ventile aneinander gefügt werden.

**β. Flansch- und Schraubenkreisdurchmesser.**

Bis zu 80 mm lichtigem Durchmesser stimmen die Flansch- und Schraubenkreisdurchmesser mit den Maßen der gußeisernen Flanschrohre für geringen Druck überein; über 80 mm Durchmesser hinaus sind sie größer.

**γ. Dichtung.**

Bei Anwendung von glatten Flanschen sind solche Dichtungsringe zu wählen, die durch hohen Dampfdruck nicht herausgedrückt werden können.

Werden solche Flansche angewendet, die einander zentrieren, so ist der eine Flansch mit einem vorstehenden Rande, der andere mit einer entsprechenden Eindrehung zu versehen. Bei Ventilgehäusen soll der Flansch auf der Seite des einströmenden Dampfes die Nut, der auf der anderen Seite die Feder enthalten. Wo das Bedürfnis vorliegt, einen Bindflansch einzuziehen zu können, soll der vorspringende Teil des Zentrierendes fortfallen.

Die in die Normalien aufgenommenen Dichtungen sind entweder metallisch oder weich.

**Flanschverbindungen für 175 mm lichten Durchmesser.**

In den Abb. 372 bis 377 bedeutet einfache Strichelung Schweiß- oder Flußeisen, kreuzweise Strichelung Stahlgufs oder Flußeisen, punktierte Strichelung Kupfer, einfache und punktierte Strichelung Bronze.

Abb. 372.

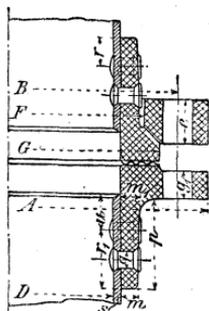


Abb. 373.

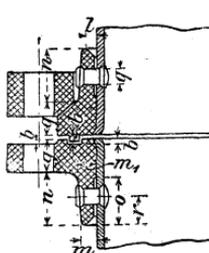


Abb. 374.

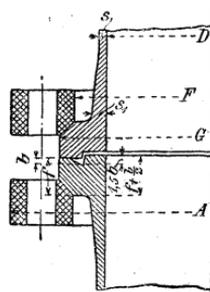


Abb. 375.

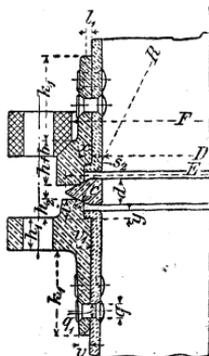


Abb. 376.

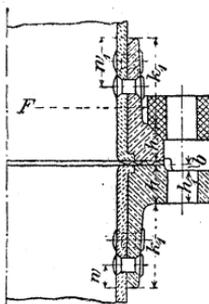
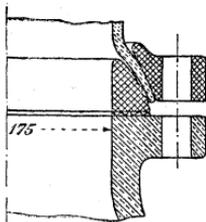


Abb. 377.  
Flanschverbindung von  
Gebr. Sulzer.



Von metallischen Dichtungen sind der gewellte Kupferling zwischen glatten Flanschen und die metallene Linse mit geschliffenen Kugelflächen benutzt. Die letztere Anordnung gestattet Richtungsänderungen in der Rohr-

leitung und ist, weil jedes Dichtungsmittel fortfällt, die zuverlässigste, wenn auch teuerste Dichtung.

Von weichen Dichtungen erscheint die durch runde Schnur in Dreiecknute mit Zentrierring besonders empfehlenswert. Die Packung ist eingeschlossen und wird durch den Dampfdruck in den keilförmigen Winkel hineingedrückt. Beim Anziehen des Flansches wird Metall auf Metall gedrückt, so daß der Flansch — und mit ihm das Rohr — nicht schief gezogen werden kann. Ein einmal angezogener Flansch hält für alle Drücke dicht. Die runde oder auch mit anderem Querschnitt versehene Dichtungsschnur läßt sich über den Zentrierring hinüberziehen und wird durch ihre Spannung festgehalten; infolgedessen lassen sich die Flansche in jeder Stellung, auch wenn der Ring an einem wagerecht gestellten oder nach unten gerichteten Flansch sitzt, zusammenbringen, ohne daß der Ring abfällt. Der vorstehende Rand zentriert die Rohre. Der Spielraum in der inneren Fuge gestattet (bei einer etwa zu stark gewählten Packung) dem Überschuß, herauszudringen.

Die Dichtung mit rechteckiger Nut und Feder hält die Packung eingeschlossen und zentriert die Rohre. Um das Zusammenschrauben der Flansche zu erleichtern, muß die Nut etwas weiter sein als die Feder. Die Höhen beider sind gleich, damit an der Größe der Fuge die Stärke der Dichtung erkennbar ist.

### Flanschverbindungen für 70 mm lichten Durchmesser.

Abb. 378, 381 bis 385 haben bei derselben Dichtung verschiedene Flanschverbindungen, Abb. 378, 379 u. 380 haben bei derselben Flanschverbindung verschiedene

Abb. 378.

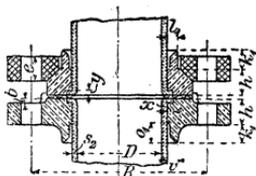


Abb. 379.

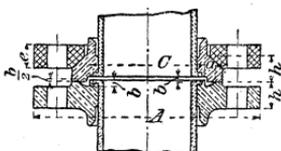


Abb. 380.

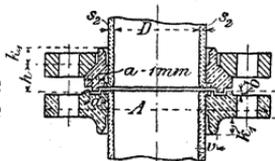


Abb. 381.

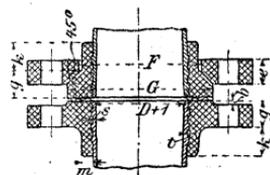


Abb. 382.

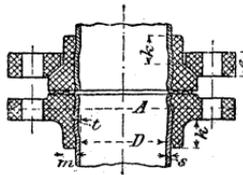


Abb. 383.

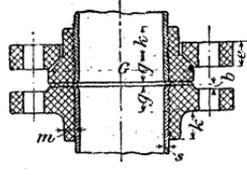


Abb. 384.

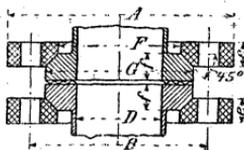
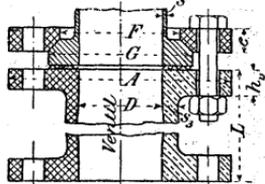


Abb. 385.



Dichtungen. Die Dichtungen in Abb. 379 u. 380 können auch mit den Flanschverbindungen in Abb. 381 bis 385 kombiniert werden, so daß im ganzen 18 Anordnungen möglich sind.

In den Abb. 378 bis 385 bedeutet einfache Strichelung Schweiß- oder Flußeisen, kreuzweise Strichelung Stahlguß, oder Flußeisen, punktierte Strichelung Kupfer, einfache und punktierte Strichelung Bronze.

## f. Blei- und Zinnrohre. \*)

## 1. Zinnrohre. \*\*)

Lichter Durchmesser	Wandstärke	Gewicht von 1 m Rohr	Größte Länge eines gepreßten Rohres	Zulässiger innerer Druck	Lichter Durchmesser	Wandstärke	Gewicht von 1 m Rohr	Größte Länge eines gepreßten Rohres	Zulässiger innerer Druck	Lichter Durchmesser	Wandstärke	Gewicht von 1 m Rohr	Größte Länge eines gepreßten Rohres	Zulässiger innerer Druck
mm	mm	kg	m	at	mm	mm	kg	m	at	mm	mm	kg	m	at
4	2,0	0,30	55	60	15	1,5	0,55	29,0	12	27	3,0	2,05	10,5	13,0
5	1,5	0,25	66	36	15	3,0	0,80	20,0	16	28	2,0	1,40	28,5	8,0
5	2,0	0,35	47	48	15	3,0	1,25	12,5	24	28	3,0	2,15	18,5	12,5
6	1,5	0,30	55	30	16	1,5	0,60	26,5	11	29	2,0	1,40	28,5	8,0
6	2,0	0,35	47	40	16	3,0	0,85	18,5	15	29	3,0	2,20	18,0	12,0
7	1,5	0,30	55	25	16	3,0	1,30	12,0	22	30	2,0	1,45	27,5	8,0
7	2,0	0,40	41	34	17	1,5	0,65	24,5	10	30	3,0	2,30	17,0	12,0
8	1,5	0,35	47	22	17	2,0	0,90	17,5	14	32	2,0	1,55	23,0	7,5
8	2,0	0,45	36	30	17	3,0	1,40	11,0	21	32	3,0	2,40	15,0	11,0
8	2,5	0,60	27	37	18	1,5	0,70	22,5	10	35	2,0	1,70	21,0	6,5
9	1,5	0,35	47	20	18	2,0	0,90	17,5	13	35	3,0	2,60	13,8	10,0
9	2,0	0,50	33	26	18	3,0	1,45	27,5	20	36	2,0	1,75	20,5	6,5
9	2,5	0,65	25	33	19	2,0	1,00	16,0	12	36	3,0	2,70	13,3	10,0
10	1,5	0,40	41	18	19	3,0	1,50	20,5	19	38	2,0	1,85	19,0	6,0
10	2,0	0,55	30	24	20	2,0	1,00	40,0	12	38	3,0	2,80	12,8	9,0
10	2,5	0,70	23,5	30	20	3,0	1,60	25,0	18	40	2,0	1,95	18,5	6,0
10	3,0	0,90	18,0	36	21	2,0	1,05	38,0	11	40	3,0	2,95	12,2	9,0
11	1,5	0,45	36,5	16	21	3,0	1,65	24,0	17	41	2,0	2,00	18,0	5,5
11	2,0	0,60	27,5	21	22	2,0	1,10	36,0	10	41	3,0	3,05	11,8	8,5
11	2,5	0,80	20,5	27	22	3,0	1,70	23,5	17	42	2,0	2,00	18,0	5,5
11	3,0	0,95	17,0	32	23	2,0	1,15	34,5	10	42	3,0	3,10	11,6	8,5
12	1,5	0,45	36,5	15	23	3,0	1,80	22,0	15,5	44	2,0	2,10	17,0	5,0
12	2,0	0,65	25,0	20	24	2,0	1,20	35,0	10	44	3,0	3,25	11,0	8,0
12	2,5	0,85	19,0	25	24	3,0	1,85	21,5	15	46	2,0	2,20	16,0	5,0
12	3,0	1,05	15,0	30	25	2,0	1,25	32,0	9	46	3,0	3,40	10,5	7,5
13	1,5	0,50	33,0	13	25	3,0	1,95	20,5	14	48	2,0	2,30	15,5	5,0
13	2,0	0,70	23,5	18	26	2,0	1,30	30,5	9	48	3,0	3,50	10,3	7,5
13	2,5	0,90	18,0	23	26	3,0	2,00	20,0	13,5	50	2,0	2,40	15,0	4,5
13	3,0	1,10	14,5	27	27	2,0	1,35	29,5	8,5	50	3,0	3,65	9,8	7,0

## 2. Zinnrohre mit Bleimantel (Mantelrohre). \*\*)

10	4,0	2,0	12,5	20	21	4,5	4,1	14,6	10	29	4,5	5,4	12,0	7,0
11	4,0	2,1	11,9	18	21	5,0	4,6	13,0	12	29	5,0	6,1	10,6	8,0
12	4,0	2,3	10,8	16	22	4,5	4,2	14,2	10	29	5,5	6,8	9,5	9,0
13	4,0	2,4	20,0	15	22	5,0	4,8	12,5	11	30	4,5	5,5	11,8	8,0
13	4,5	2,8	17,0	17	23	4,5	4,4	13,5	9	30	5,0	6,3	10,3	7,0
13	5,0	3,2	18,7	19	23	5,0	5,0	12,0	10	30	5,5	7,0	9,2	9,0
15	4,5	3,1	19,3	15	24	4,5	4,6	13,0	9	30	6,0	7,7	8,4	10,0
15	5,0	3,6	16,6	16	24	5,0	5,2	11,5	10	30	6,5	8,4	7,7	10,5
16	4,5	3,3	18,2	14	25	4,5	4,7	12,7	9	32	5,0	6,6	9,6	8,0
16	5,0	3,7	16,2	15	25	5,0	5,4	11,1	10	32	5,5	7,4	8,6	8,0
17	4,5	3,4	17,6	13	25	5,5	6,0	10,0	11	32	6,0	8,1	7,9	9,0
17	5,0	3,9	15,3	14	25	5,75	6,3	9,5	11,5	35	5,0	7,2	8,7	7,0
18	4,5	3,6	16,6	12	26	4,5	4,9	13,4	8	35	5,5	8,0	7,8	8,0
18	5,0	4,1	14,6	14	26	5,5	6,2	10,6	10	36	5,0	7,3	8,6	7,0
18	4,5	3,8	15,7	12	27	4,5	5,1	12,7	8	36	5,5	8,1	7,7	7,5
19	5,0	4,3	13,9	13	27	5,5	6,4	10,1	10	38	5,0	7,7	8,1	6,5
20	4,5	3,9	15,3	11	28	4,5	5,2	12,5	8	38	5,5	8,5	7,4	7,0
20	5,0	4,5	13,3	12	28	5,0	5,9	11,0	9	40	5,0	8,0	7,7	6,0
20	5,25	4,7	12,7	13	28	5,5	6,6	9,8	9,5	40	5,5	8,9	6,9	7,0

\*) Siehe Bemerkung S. 982.

\*\*) Königlich Sächsische Hüttenwerke in Freiberg in Sachsen.

Das Handelsbureau der Kgl. Sächsischen Hüttenwerke in Freiberg in Sachsen liefert Röhre aus Weichblei und Hartblei von 3 mm lichter Weite mit Wandstärken von 1, 1,5 und 2 mm bis zu 300 mm lichter Weite und Wandstärken von 5, 7,5 und 10 mm. Näheres in den Preislisten. (Bei größeren Aufträgen werden auch andere Abmessungen geliefert.)

**Sämtliche Bleirohrsorten** werden 1) unverzinkt, 2) innen (durch Schwefelnatrium) geschwefelt, 3) innen und außen verzinkt und 4) innen oder außen verzinkt geliefert, ausschl. der Röhre von 3, 4, 5, 6 und 7 mm lichtem Durchmesser, die nur unverzinkt oder außen verzinkt hergestellt werden.

**Hartbleiröhre** aus Weichblei mit einem Zusatz von 10 vH oder 15 vH Antimonblei haben größere Elastizität bei Temperaturwechsel als Weichbleiröhre und sind für Dampfleitungen diesen vorzuziehen. Der Antimongehalt beträgt 1 bis 2 oder 2 bis 3 vH.

**Zinnrohre mit Bleimantel (Mantelröhre)** haben 0,5 mm Zinnstärke. Das Mantelrohr wird nur in vollen Preßlängen abgegeben.

Der **zulässige innere Druck** bezieht sich nur auf mittlere Temperaturen bis 30°; er ist nach der Formel II auf S. 624 berechnet, wobei, entsprechend 5- bis 6-facher Sicherheit gegen Bruch (vgl. S. 513 u. f.), für Hartblei  $k_z = 50$  kg/qcm, für Weichblei  $k_z = 35$  kg/qcm und für Zinn  $k_z = 60$  kg/qcm gesetzt wird.

Für höhere Temperaturen sind wesentlich stärkere Wandungen erforderlich. Abweichungen in den **Gewichtangaben** bis zu  $\pm 5$  vH bleiben vorbehalten.

Die **unverzinten** und die **innen geschwefelten Bleirohre** können bis zu den größten Längen in einem Stück ohne Naht oder Lötstelle gepreßt werden; in der Regel werden jedoch Teillängen geliefert. Die Röhre, die sich beim Aufwickeln breit drücken würden, werden in Stangen geschnitten versandt. — Die übrigen in Bunden. Wird vom Besteller das Bundgewicht nicht vorgeschrieben, so werden nur Bunde bis zu 140 kg abgegeben. — Bei innen oder außen, sowie bei innen und außen verzinten Röhren beträgt das Höchstgewicht eines Bundes dagegen nur 75 kg.

### g. Normalien für Abflußrohre aus Blei oder Steinzeug.

(Runderlaß des preussischen Ministers der öffentl. Arbeiten vom 20. November 1905.)\*

Der Verband deutscher Architekten- und Ingenieur-Vereine hat Normalien für Abflußrohre aufgestellt, die, soweit sie Bleirohre und Steinzeugrohre betreffen, fortan bei den von der preussischen Staatsbauverwaltung auszuführenden Bauten zu beachten sind.

Hiernach sind die nachstehenden Bezeichnungen einheitlich zu wählen:

- |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>a) Ableitungen für liegende Leitungen, sogen. Gefällsleitungen, Sohlleitungen usw.; sie werden in Hauptleitungen und Nebenleitungen geteilt;</p> <p>b) Fallrohre für senkrecht herabkommende Leitungen; sie werden in Hauptfallrohre und Nebenfallrohre geteilt;</p> <p>c) Schrägleitungen für alle Leitungen, die an der Wand geschleift werden;</p> <p>d) Knieröhre für Röhre in Bogenform mit Halbmessern von 2 Rohrdurchmessern;</p> | <p>e) Bogenrohre für Röhre in Bogenform mit größeren Halbmessern, als unter d) angegeben;</p> <p>f) Hülfsleitung statt sekundärer Ventilation;</p> <p>g) Fußbogen statt Fußkrümmer;</p> <p>h) Verbindungen statt Abzweigungen;</p> <p>i) Bogenverbindungen statt Pfeifenköpfe;</p> <p>k) Sprungrohre statt Etagenbogen, S-Stücke usw.;</p> <p>l) Uebergangsröhre statt Reduktionen, Sprung usw.;</p> <p>m) Uebermuffen statt Ueberschieber.</p> |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

**Bleiabflußrohre** erhalten folgende Durchmesser, Wandstärken und Gewichte:

Lichter Durchmesser . . . . .	mm	25	30	40	50
Wandstärke . . . . .	mm	3,0	3,5	4,0	4,0
Gewicht für 1 m . . . . .	kg	3,0	4,2	6,3	7,7

**Steinzeugrohre** erhalten folgende Abmessungen:

Lichter Durchmesser . . . . .	cm	10	12,5	15	20
Kleinste zulässige Wandstärke . . . . .	cm	1,5	1,6	1,7	1,9

dabei die Baulänge der geraden Röhre 60 und 100 cm und die Muffentiefe 6 bis 7 cm.

Die Innenfläche der Muffe und das Schwanzende des Rohres werden auf 5 cm Länge mit mindestens 5 Riefen versehen.

\* 8. Zentralblatt der Bauverwaltung 1905 S. 613.

Die Dichtungstärke an der vorderen Muffenwand soll 1,5 cm betragen und darf bis zum Muffenboden sich bis auf 1,2 cm vermindern.

Für die Bogenrohre gelten folgende Abmessungen:

bei 15° Zentriwinkel	200 cm	Halbmesser	und 52 cm	Baulänge,
" 30° "	100 "	" "	" 52 "	" "
" 45° "	60 "	" "	" 47 "	" "

Für besondere Fälle (senkrechte Anschlüsse) sind Knierohre mit 90° Zentriwinkel und mit einem Halbmesser gleich ungefähr dem Zweifachen des Rohrdurchmessers zu verwenden; diese Knierohre dürfen jedoch in liegenden Leitungen nicht verwendet werden.

Die Uebergangsröhre sind auf 60 cm Baulänge bemessen und vermitteln, mit Ausnahme des Ueberganges von 10 auf 15 cm, nur den Uebergang von einem Rohrdurchmesser auf den nächstfolgenden Durchmesser.

Die Verbindungsrohre sind auf 60 cm Baulänge bemessen. Der Anschlußstutzen bildet mit dem Hauptrohr einen Winkel von 60°. Anschlüsse unter anderen Winkeln sowie Doppelverbindungen sind ausgeschlossen.

## h. Seilrohre und Metallschläuche.

1. **Seilrohre.** Um ein Bleirohr ist eine Lage asphaltierten Hanfgarnes und dann eine Armierung aus verschlossenen Fassondrähten gelegt. Die Armierung ist zum Schutze gegen Rosten von einer dickeren Lage asphaltierten Hanfes umgeben und um das Ganze verzinkter Eisendraht gewickelt. Verbindung durch Muffen, die auf der Aufsenseite der Drahtumwicklung festgeschraubt sind; Lederpackung und Schraubenverbindung. Für Wasser- und Petroleumleitungen durch Flüsse, Seen und Moräste geeignet.

### Seilrohre von Felten & Guilleaume-Lahmeyerwerke in Mülheim (Rhein), Wien und Budapest.

Zulässiger Betriebsdruck 5 at					Zulässiger Betriebsdruck 10 at				
Lichter Durchmesser	Wandstärke des Bleirohres	Aeußerer Durchmesser	Gewicht des Seilrohres	Größte Fabrikationslänge	Lichter Durchmesser	Wandstärke des Bleirohres	Aeußerer Durchmesser	Gewicht des Seilrohres	Größte Fabrikationslänge
mm	mm	mm	kg/m	m	mm	mm	mm	kg/m	m
15	1,50	32	3,5	1000	15	1,5	32	3,5	1000
20	1,50	39	4,5	875	20	2,0	40	5,0	875
25	1,75	46	6,0	750	25	2,5	47	6,75	750
30	2,00	52	7,5	625	30	3,0	54	9,0	625
35	2,25	58	9,0	525	35	3,5	61	11,5	525
40	2,50	64	10,5	425	40	4,0	67	13,5	425
45	2,75	70	14	350	45	4,5	75	18,0	350
50	3,00	77	16	300	50	5,0	81	20,5	300
55	3,25	83	18	250	55	5,5	88	23,75	250
60	3,50	88	20	225	60	6,0	93	27,0	225
65	3,75	94	23	200	65	6,5	99	31,0	200

2. **Metallschläuche.\*** Ein Metallband (aus Stahl oder Kupferbronze) geeigneter Querschnittform (z. B. ) ist schraubenförmig aufgerollt, so daß die Ränder beweglich ineinander oder übereinander greifen.

\*) Ueber die Herstellung von Metallspiralschläuchen vgl. Z. d. V. d. I. 1911 S. 82 u. f.

Die entstehenden Rinnen sind mit Dichtungsstoff (Gummi, Asbest usw.) ausgefüllt. Verwendung zu beweglichen Leitungen aller Art, auch als Schutz für solche; ferner zum Ausgleich der Wärmeausdehnung bei Dampfleitungen. Ueber Abmessungen s. z. B. die Preislisten der Metallschlauchfabrik Pforzheim vorm. Hch. Witzemann. — **Doppelschläuche** aus zwei ineinander steckenden Metallschläuchen mit entgegengesetzt gerichteten Windungen bleiben dicht bei allen Bewegungen.

## C. Ventile.

### a. Hubventile.

Selbsttätige Teller- und Kegel-Hubventile\* (bei Pumpen, Gebläsen, Kompressoren usw.) erfordern zuverlässige **Ventilführung**, wobei die Gleitflächen, um Abnutzung und seitliche Ablenkung zu vermeiden, genügend groß und die Reibungswiderstände behufs leichten Spieles möglichst gering sein müssen. Kugelventile sind wegen mangelhafter Führung nur für untergeordnete Zwecke oder für unreine und schlammige Flüssigkeiten zu empfehlen. — Richtige Führung wird unterstützt durch möglichst tiefe Lage des Ventilschwerpunktes und durch so tiefe Lage des Ventilkastens, daß der Flüssigkeitsstrom innerhalb des Ventilkastens von dessen Achse nicht abgelenkt wird.

Das Ventil ist nicht schwerer als nötig zu machen; das spezifisch schwerere Ventil ist das bessere. Für Pumpen mit großer Hubzahl ist die Ventilmasse tunlichst zu vermindern und das Fehlende an Belastung durch Federn zu ersetzen.

**Dichtungsfläche.** Entweder sind Sitz und Ventil metallisch, oder das Ventil ist elastisch gelidert (Leder, Hartgummi, Vulkanfaser, Asbest usw.). Die Dichtungsfläche ist nach Möglichkeit klein zu halten, jedoch muß die Abdichtung gesichert sein. Die Breite der Dichtungsfläche wird mit Rücksicht auf den zulässigen Flächen-**druck**  $k$  (in kg/qcm) allgemein bestimmt aus:

$$Vp = Sk,$$

worin  $V$  die obere Druckfläche des Ventils in qcm,

$S$  die Dichtungsfläche (Sitzfläche) des Ventils in qcm,

$p$  den Flüssigkeitsdruck auf das Ventil in kg/qcm bezeichnet.

Größte zulässige Auflagerdrücke  $k$  (bei stoffsfreiem Gange):

für Rotguß . . . . .	bis 150 kg/qcm,
„ Phosphorbronze . . . . .	200 „
„ Gußeisen . . . . .	80 „
„ Gummi und Leder . . . . .	30 „ **)

Für gewöhnliche, aufgeschliffene Pumpen-Metallventile genügt eine Breite der Sitzfläche

$$b = 0,8 \sqrt{d},$$

wo  $d$  den lichten Durchmesser der Ventilsitzöffnung in mm bezeichnet.

\*) Vgl. auch Hartmann-Knoke, Die Pumpen, 3. Aufl. von H. Berg, Berlin 1906, sowie Z. d. V. d. I. 1908, S. 1842; s. auch Fußnoten auf S. 986.

\*\*) Nach Riedler bei sicherer Ventilführung und ruhiger Berührung des Sitzes bis 85 kg/qcm bei Leder, 200 kg/qcm bei Hartgummi.

Bei reinem Wasser und sofern man sicher ist, daß das Ventil sich ruhig aufsetzt, genügt eine geringere Breite  $b$ .

Nicht spielende Ventile (Sicherheitsventile) erhalten etwa 1,5 bis 2,5 mm Sitzbreite.

Tellerventile mit Leder erhalten

$$b = 1,25 \sqrt{d}$$

Die **Gehäuseweite**  $d_2$  ergibt sich, wenn im Gehäuse dieselbe Durchfluggeschwindigkeit wie im Sitze bestehen soll, aus

$$d_2 = \sqrt{d_1^2 + d^2}$$

Um auch für große Ventildrücke elastische Dichtung verwenden zu können, **entlastet** man die Dichtung nach O. Fernis (Abb. 386) dadurch, daß man die (metallische) Druckfläche von der eigentlichen Dichtungsfläche (Leder) trennt (Flüssigkeitsdruck  $p$  statt des Flächendruckes  $h$ .)\*)

Bedeutet  $f$  den freien Durchgangsquerschnitt des Ventils in qcm und  $u$  den (kleinsten) freien Durchgangsumfang des Ventils in cm, so ergibt sich der **Ventilhub**  $h$  in cm bei einsitzigem Ventil, wenn dieselbe Durchfluggeschwindigkeit wie im Sitze bestehen soll, aus der Gleichung

$$f = u h.$$

Für den Kreisquerschnitt vom Durchmesser  $d$  muß, wenn der Durchflugg-Ringquerschnitt  $\pi d h$  beim einfachen Tellerventil (Abb. 389 u. 390 sowie 394 bis 396) gleich dem Kreisquerschnitt  $\frac{\pi d^2}{4}$  werden

soll, der Hub  $h = \frac{d}{4}$  werden; wegen der hydraulischen Widerstände wähle man jedoch  $h$  etwas größer als  $0,25 d$ . Für ein Ventil mit unterer Führung durch  $i$  Rippen, die außen die Breite  $s$ , innen die Breite  $s_1$  haben, ist  $\mu = \pi d - i s$  und  $f = \frac{\pi d^2}{4} - i s_1 \frac{d}{2}$  zu setzen.

Bei Ventilen nach Abb. 391 u. 392 ist zu beachten, daß die Kanalweite  $x$  (s. Abb. 387) beim Ventilhub  $h$  nur beträgt:

$$x = h \cos \alpha,$$

mit dem normalen Kegelwinkel  $\alpha = 45^\circ$  wird also

$$x = 0,7 h,$$

für  $h = 0,25 d$  ist somit

$$x = 0,175 d.$$

Will man die Kanalweite  $x = 0,25 d$  herstellen, so muß demnach der Hub des Ventils werden (statt  $0,25 d$ ):

$$h = \frac{d}{2,8} = 0,357 d.$$

Bei **Kolbenpumpen** muß der **Schluss** des Ventils genau im Hubwechsel stattfinden, damit Stöße durch plötzliche Beschleunigung oder

Abb. 386.  
Mehrfaches Ringventil von O. Fernis.

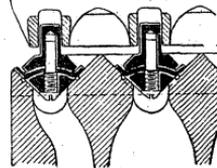
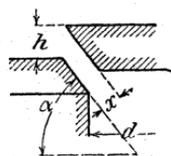


Abb. 387.



\*) S. Z. d. V. d. I. 1887 S. 557.

Verzögerung der Flüssigkeitsmassen vermieden werden; daher ist unter Abweichung von vorstehender Regel bei Kolbenpumpen der Ventilhub  $h$  um so kleiner zu machen, je größer die Kolbengeschwindigkeit ist und je rascher der Hubwechsel erfolgt.

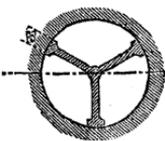
Der freie Ventilhub  $h$  ist ferner abhängig von der **wirksamen Ventilbelastung**  $P$ , d. h. von dem Gewichte des Ventils, vermindert um den Auftrieb des Ventils innerhalb der Flüssigkeit (vgl. S. 267) und vermehrt um den etwa vorhandenen Federdruck.

Unter sonst gleichen Umständen bleibt nach C. Bach der **rechtzeitige Ventilschluss** einer Puppe erhalten, wenn die Ventilbelastung  $P$  proportional der geförderten Flüssigkeitsmenge und der minutlichen Umdrehungszahl genommen wird. Bezeichnet

- $P$  die wirksame Ventilbelastung, die das gehobene Ventil gegen das strömende Wasser im Gleichgewichte hält, in kg,  
 $d$  den Durchmesser der Ventilsitzöffnung in m,  
 $f = \frac{1}{4} \pi d^2$  den Querschnitt der Ventilsitzöffnung in qm,  
 $v$  die Geschwindigkeit, mit der das Wasser durch den Querschnitt  $f$  der Ventilsitzöffnung fließt, in m/sk,  
 $\zeta$  die Widerstandszahl des Ventils, entsprechend den gesamten durch letzteres verursachten hydraulischen Bewegungswiderständen (vgl. S. 306),  
 $\alpha, \beta, \gamma, \lambda$  und  $\mu$  Erfahrungswerte,  
 $g$  die Beschleunigung durch die Schwere = 9,81 m/sk<sup>2</sup>,  
 $i$  die Anzahl der Rippen im Falle der Abb. 390,  
 $s$  die Breite dieser Führungsrippen (s. Abb. 388), gemessen auf dem Umfange  $\pi d$ , in m,  
 $b = \frac{1}{2}(d_1 - d)$  die radiale Breite der Dichtungsfläche in m (s. Abb. 389 bis 393),  
 $h$  die Hubhöhe des Ventils in m,

so ist nach C. Bach \*) je nach der Ventilform

Abb. 388.



$$1) P = 1000 f \frac{v^2}{2g} \left[ \lambda + \left( \frac{d}{4\mu h} \right)^2 \right],$$

$$2) P = 1000 f \frac{v^2}{2g} \left[ \lambda + \left( \frac{f}{\mu(\pi d - is)h} \right)^2 \right],$$

$$3) \zeta = \alpha + \beta \left( \frac{d}{h} \right)^2,$$

$$4) \zeta = \alpha + \beta \left( \frac{d^2}{(\pi d - is)h} \right)^2,$$

$$5) \zeta = \alpha + \beta \left( \frac{d}{h} \right) + \gamma \left( \frac{d}{h} \right)^2.$$

Für die in Abb. 389 bis 393 dargestellten fünf Ventilformen hat man unter der Voraussetzung, daß  $\frac{1}{4} \pi (d_2^2 - d_1^2) = 1,8 \cdot \frac{1}{4} \pi d^2 = 1,8 f$ , d. h., daß der ringförmige Querschnitt zwischen Ventilteller und Gehäusewandung um 80 vH größer als die Ventilsitzöffnung ist, zur Berechnung des Ventildruckes und des Druckhöhenverlustes, den ein gegebenes Ventil verursacht:

I. Für Abb. 389 (Teilvertil ohne untere Führung, \*\*) wenn  $b = 0,10 d$  bis  $0,25 d$  und  $h = 0,10 d$  bis  $0,25 d$ :

$$\text{Formel 1) mit } \lambda = 2,5 + 19 \frac{b - 0,1 d}{d} \text{ und } \mu = 0,60 \text{ bis } 0,62;$$

$$\text{Formel 3) mit } \alpha = 0,55 + 4 \frac{b - 0,1 d}{d} \text{ und } \beta = 0,16 \text{ bis } 0,15.$$

\*) S. C. Bach, Versuche über Ventilbelastung und Ventilwiderstand, Berlin 1884 J. Springer. Ferner C. Bach, Versuche zur Klarstellung der Bewegung selbsttätiger Pumpenventile, Stuttgart 1887; ferner auch Z. d. V. d. I. 1886 S. 421, 475, 801, 1036 u. 1058; 1887 S. 41 u. 61. — Vgl. weiter J. Tobell, Pumpen- und Gebläseventile, Z. d. V. d. I. 1889 S. 25 (und S. 1150); 1890 S. 325. — M. Westphal, Größenbestimmung von Pumpenventilen, Z. d. V. d. I. 1893 S. 381. — Zusammenfassung in Bach, Maschinenelemente. 10. Aufl. 1908 S. 925 u. f.

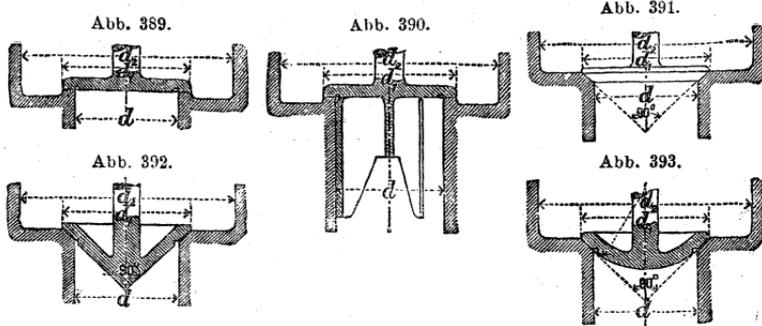
\*\*) Berechnung solcher Ventile für Pumpen mit Kurbelantrieb s. Berg, Z. d. V. d. I. 1904 S. 1093, 1186.

Die ersten Werte von  $\mu$  und  $\beta$  gelten bei breiter, die zweiten bei schmaler Dichtungsfläche.

II. Für Abb. 390 (Tellerventil mit unterer Führung), wenn  $b = 0,10 d$  bis  $0,25 d$  und  $h = 0,125 d$  bis  $0,25 d$ ;

Formel 2) mit  $\lambda$  und  $\mu = 10 \sqrt{h}$  kleiner als bei I;

Formel 4) mit  $\alpha$  um 0,8 bis 1,6 gröfser als bei I und  $\beta = 1,75$  bis 1,70.



III. Für Abb. 391 (Kegelventil mit ebener Unterfläche), wenn  $b = 0,1 d$  und  $h = 0,10 d$  bis  $0,15 d$ ;

Formel 1) mit  $\lambda = -1,05$  und  $\mu = 0,89$ ;

Formel 5) mit  $\alpha = 2,60$ ,  $\beta = -0,80$  und  $\gamma = 0,14$ .

IV. Für Abb. 392 (Kegelventil mit kegelförmiger Unterfläche), wenn  $h = 0,125 d$  bis  $0,25 d$ ;

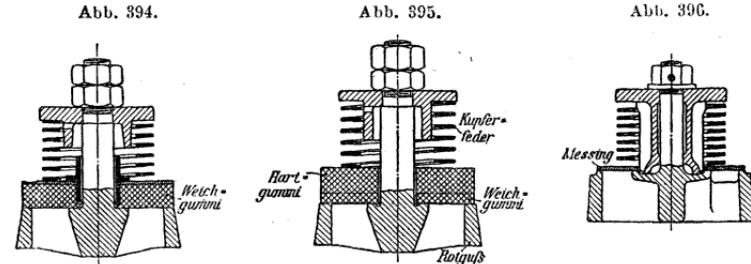
Formel 1) mit  $\lambda = 0,38$  und  $\mu = 0,68$ ;

Formel 3) mit  $\alpha = 0,60$  und  $\beta = 0,15$ .

V. Für Abb. 393 (Kegelventil mit kugelförmiger Unterfläche), wenn  $h = 0,10 d$  bis  $0,25 d$ ;

Formel 1) mit  $\lambda = 0,96$  und  $\mu = 1,15$ ;

Formel 5) mit  $\alpha = 2,70$ ,  $\beta = -0,80$  und  $\lambda = 0,14$ .



Die Abb. 394 bis 396 zeigen neuere Ausführungen von kleinen Teller- und Ringventilen; die ersten beiden mit weicher, die dritte mit harter Dichtung, die einzeln oder gruppenweise angeordnet von A. Borsig, Tegel, angewendet werden.

**Kugelventile** werden als Vollkugeln aus Bronze (Abb. 397) oder nur mit kugelförmiger Sitzfläche ausgeführt; gröfsere Kugeln aus Kautschuk mit Kern aus Blei oder Eisen; besonders für unreine Flüssigkeiten, Zur Vermeidung des Festklemmens sei  $\beta < 45^\circ$ .

Dann ergibt sich

$$d_k \sin \beta = d + b;$$

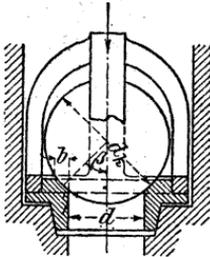
für mittlere Verhältnisse und bei  $\beta = 45^\circ$  wird hieraus

$$\bar{d}_k = 1,2 \text{ bis } 1,6 \bar{d}.$$

Hubhöhe  $h$  wie beim Kegelventil ohne untere Führung.

Der **Umfang**  $u$  (in m) eines Ventils folgt unter Zugrundelegung einer bestimmten mittleren Wassergeschwindigkeit  $v$  (in m/sk)

Abb. 397.



zwischen Ventil und Sitz ( $v = 1,0$  bis  $2,5$  m/sk bei Kolbenpumpen, u. zw. nimmt man für Saugventile die kleineren, für Druckventile die größeren Werte) aus der gewählten Hubhöhe  $h$  des Ventils (in m), der mittleren Kolbengeschwindigkeit  $c_m$  (in m/sk) und der Kolbenfläche  $F$  (in qm) nach

$$u h v = F c_m.$$

Um dem rechnerisch kaum zu ermittelnden Flüssigkeitsanprall auf die Ventilflächen, der durch die Kolbenbewegung entsteht, regelbare Federkräfte entgegenzusetzen, ist das in Abb. 398 abgebildete, für schnellaufende Pumpen und Kompressoren (bis 300 Touren) bestimmte Ventil von O. Klepal,\* Charlottenburg, mit zwei Federn versehen, die jede für sich eingestellt werden können. Da die Feder  $f_1$  das Ventil auf seinen Sitz drückt, während  $f_2$  es vom Sitz abhebt, kann das Ventil z. B. auch so eingestellt werden, daß es von den Federkräften völlig entlastet ist, wenn es auf seinem Sitz aufliegt.

Der sich aus dem kleinen Ventillhub  $h$  ergebende große Ventillumfang  $u$  wird durch folgende **Anordnungen** erreicht:

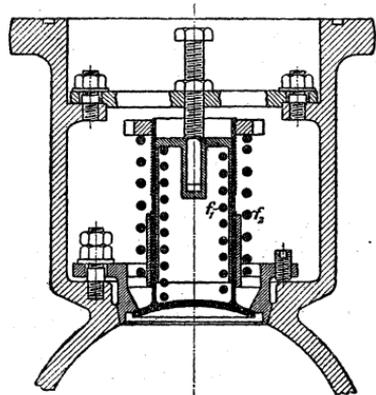
#### a) Mehrsitzige Ventile.

1. **Ringventile.** Abb. 399 zeigt ein einfaches, Abb. 400 ein doppeltes, die Abb. 401 bis 403 mehrfache Ringventile.\*\* Die Abb. 402 u. 403 sind neuere Konstruktionen von A. Borsig. Bei Abb. 402 besteht

\*) Vrgl. Z. d. V. d. I. 1909 S. 2075.

\*\*) Bei Abb. 401 sind die Ringe zur Erleichterung der Dichtung für sich beweglich.

Abb. 398.



der Sitz aus Gufseisen, das mit Rotgufs armiert ist; das Ventil nach Abb. 403 hat vielfach bei Wasserwerkspumpmaschinen und bei Wasserhaltungen für mäfsige Tiefe Verwendung gefunden. Es dichtet mit Hartgummi auf Rotgufs ab.

Eine neuere Art von Ringventilen, die besonders bei **Gebläsen** oft angewendet werden („Lenkerventile“ nach **Hoerbiger**\*) zeigt Abb. 404 in einer Ausführungsform. Die Ventile werden mit mehreren Ringen ineinander und auch übereinander ausgeführt. Die abdichtenden Ventilinge bestehen aus einer 3 mm starken Stahlscheibe, gegen die sich mit kleinem Zwischenraum eine 1,5 mm starke Scheibe aus Phosphor-

Abb. 399.

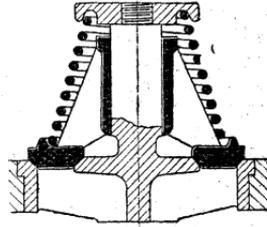


Abb. 400.

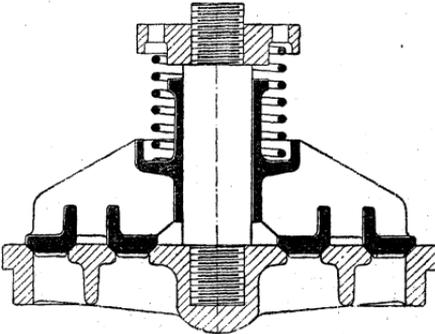


Abb. 401.

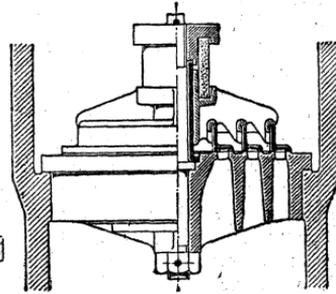


Abb. 402.

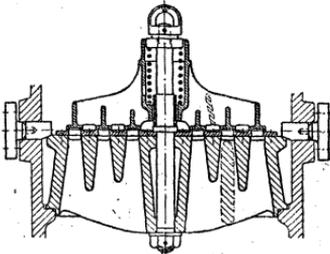
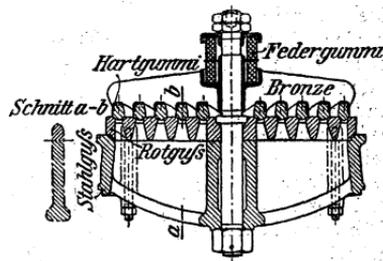


Abb. 403.



bronze legt. Dieser Zwischenraum füllt sich im Betriebe mit Oel und

\*) Z. d. V. d. I. 1901 S. 218 u. f. Hochofengebläsesmaschine mit Lenkerventilen und ebenda 1903 S. 477 u. f. Verbundkompressor mit Lenkerventilen.

dient dann als Puffer zum Abfangen des Schlages bei der Eröffnung des Ventils. Die Ringe sind am Ventilfänger an nur 0,7 mm starken Lenkern aus Uhrfederstahl aufgehängt.

Ein von der Sächsischen Maschinenfabrik vorm. Rich. Hartmann in Chemnitz gebautes Ringventil (ebenfalls Lenkerventil) ist in Abb. 405 dargestellt.

Die Ventilinge liegen ohne feste Führung und ohne feste Verbindung mit den Lenkern frei auf den Sitzen. Die Abb. 405 zeigt eine Ausführungsform mit doppelt gekrümmten Federn *f*. Diese doppelte Krümmung der Federn hat gegenüber einer einfachen (Schrauben-) Feder den Vorteil, daß ein Ausweichen des freien Federendes beim Zusammen-

drücken vermieden wird. Bei diesen rückwärts gebogenen Federn macht das freie Ende eine genau senkrechte Bewegung, wodurch auch bei großem Hube richtige Führung der Ventilinge gesichert ist. Die auf dem Ventil Sitz *a* liegenden Ventilinge *b* sind mit seitlich übergreifenden Rändern *c* versehen, unter die sich seitliche Ansätze *d* der in der Aufsicht nach der Krümmung der Ventilinge gebogenen Federn *f* schieben. Diese Federn sind am oberen Ende in den Federhalter *g* fest derart eingespannt, daß die inneren Kanten der seitlichen Ansätze *d* in einem Kreis liegen, der dem inneren Umfang der Eindrehung der Ventilinge entspricht. Die Ventilinge werden dann in jeder Lage von den unteren Enden der Federn geführt, ohne daß bei der Bewegung der Ringe eine Reibung an festen Führungsflächen entsteht.

Zur Begrenzung des Hubes der Ventilinge sind die ringförmigen Versteifungsrippen *h* des Federhalters *g* so weit nach unten gezogen, daß die Ränder der Ventilinge sich gegen deren Unterkanten legen können.

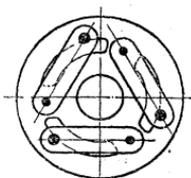
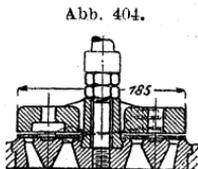


Abb. 406.

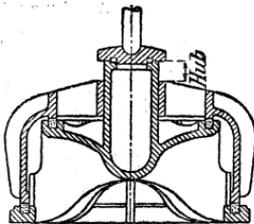


Abb. 405.

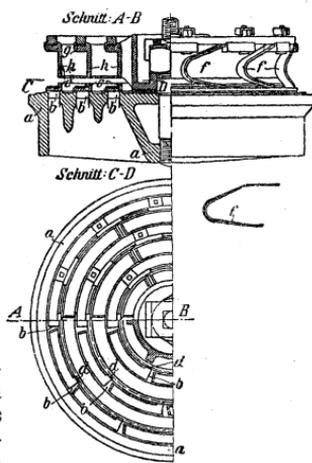
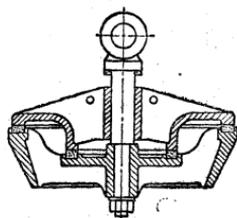


Abb. 407.



2. **Glockenventile** mit übereinanderliegenden, ebenen oder kegelförmigen Sitzflächen (Abb. 406 u. 407).

3. **Stufenventile** mit Ringen von verschiedenem (Abb. 408) oder von gleichem Durchmesser (Abb. 409 u. 410). Das Stufenventil (Abb. 409) von A. Borsig ist für große Förderhöhen (über 400 m) bei Wasserhaltungen bestimmt. Die weiche Dichtung ist durch Metallringe geschützt.

Zu den mehrsitzigen Ventilen gehört auch das eigenartige Ventil nach Abb. 411, das ebenso zu den Stufenventilen wie zu den Ring-

Abb. 408.

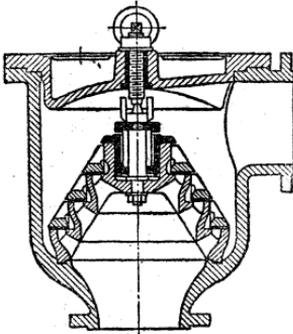


Abb. 409.

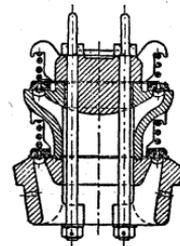


Abb. 410.

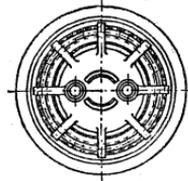
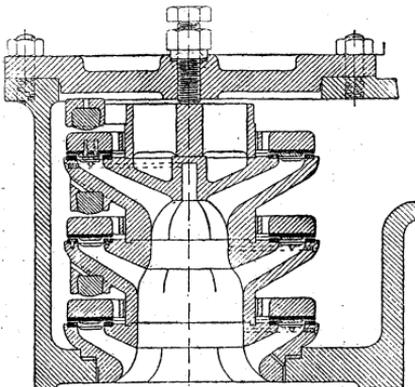
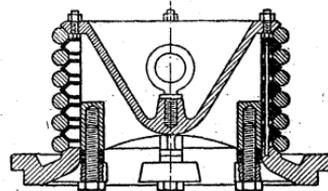


Abb. 411.



ventilen gerechnet werden kann. Es besteht aus mehreren (4 bis 8) Gummiringen, die gegen doppelkegelige Metallringe abdichten. Es wird gebaut von Gebr. Körting A.-G., Körtingsdorf bei Hannover, und ist für schnelllaufende Pumpen, auch zur Förderung von unreinem, sandhaltigem Wasser geeignet.

**b) Gruppenventile.**

Sie bestehen aus mehreren einsitzigen Ventilen oder besser aus mehreren einfachen (leichten und federbelasteten) Ringventilen (z. B. nach Abb. 394 bis 396). Besonders für Massenerstellung von Pumpen sind Gruppenventile den gleichachsigen angeordneten Ringventilen überlegen, da wenige Sorten von Einzelventilen für alle Pumpengrößen genügen (Abb. 412).

**Federbelastung** des Ventils (im Wasser nur Rohr-Gummifedern oder gehärtete Messingfedern zu benutzen) ist zur Erzielung schnellen Ventilschlusses der reinen Gewichtbelastung unbedingt vorzuziehen und wird jetzt auch meist angewandt.

Abb. 412.

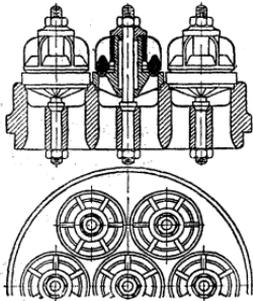


Abb. 414.

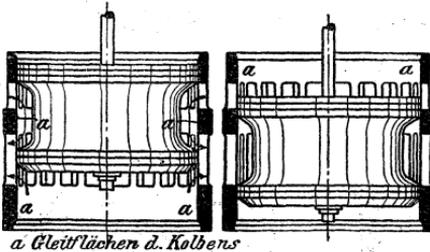
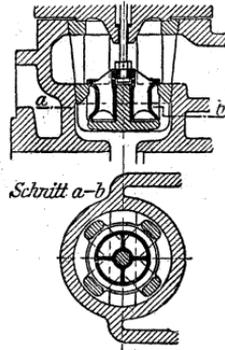


Abb. 413.



**Gesteuerte Hubventile** (für raschlaufende Pumpen usw.) öffnen sich selbsttätig und bleiben nahezu während des ganzen Kolbenhubes offen; kurz vor dem Hubwechsel werden sie durch die Steuerung **zwangsläufig** bis nahe an den Ventilsitz bewegt und erreichen diesen wieder durch

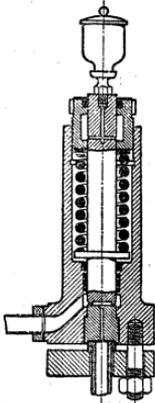
den Flüssigkeitsdruck. Es empfehlen sich einfache Teller oder Ringventile mit Stiftführung.\*) Gesteuertes Einlassventil (Doppelsitzventil) für Dampfmaschinen s. Abb. 413. — Als Ersatz für diese Doppelsitzventile werden neuerdings von der Sächsischen Maschinenfabrik vorm. Rich. Hartmann A.-G. in Chemnitz mit Vorteil Kolbenventile (Bauart van den Kerchove) mit breiten selbstspannenden Liderungsringen verwendet (s. Abb. 414).

\*) Weiteres s. Z. d. V. d. I. 1885 S. 522, 1890 S. 537, sowie A. Riedler, Schnellbetrieb, Berlin 1899; ferner zu vgl. Hartmann-Knöke, Die Pumpen. 3. Aufl. von H. Berg, Berlin 1906, S. 188 u. f. und Z. d. V. d. I. 1902; Untersuchung über gesteuerte Ventile, S. 660 u. f.

Ueber **Sicherheitsventile** für Dampfkessel usw. vrgl. II. Bd. S. 72 u. 81.

Ein Sicherheitsventil für hydraulische Pressanlagen usw., das für einen Wasserdruck von 300 at bestimmt ist, zeigt Abb. 415. Das Ventil\*) hat im Gegensatz zu älteren Konstruk-

Abb. 415.



tionen eine Sitzfläche von großem Durchmesser und sichere Führung der Feder, die zugleich gegen Berührung mit etwa austretendem Wasser geschützt ist.

Abb. 416.

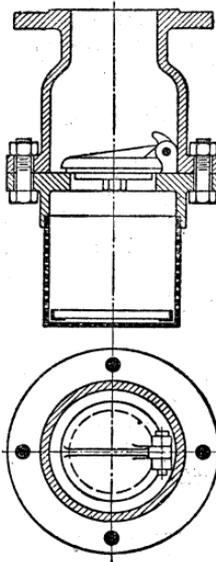
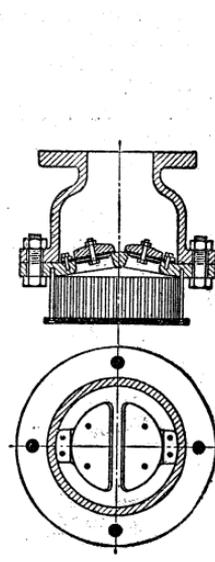


Abb. 417.



### b. Klappenventile.

Abb. 416 u. 417 zeigen als Lederklappen ausgebildete Fußventile mit Kasten und anschließendem Korbe für die Saugleitung einer Pumpe. In Abb. 416 Gelenk aus Metall, in Abb. 417 ein solches aus Leder.

Die Größe der Klappenventile hängt ab von der Form der Sitzöffnung, die sich für eine bestimmte Durchfließgeschwindigkeit der Flüssigkeit mit Rücksicht auf die Verengungen durch Rippen und Schrauben, sowie auf die Kontraktion bestimmt. Bei Gummiklappen betragen die Verengungen durch die Gitterstäbe etwa 0,3 bis 0,5 der Sitzöffnung. Der Kontraktionswert ist für kreisförmige Öffnung etwa 0,9, für rechteckige 0,8.

Der Hub  $h$  hängt von der Art der Gelenkigkeit und von der Grundrisform der Klappe ab.

Für den **rechteckigen** Kanalquerschnitt von der Breite  $a$  und der Länge  $c$  beträgt, wenn die Bewegung um eine zu  $c$  parallele Achse

\*) Geschützte Konstruktion von Eduard Müller. S. Z. d. V. d. I. 1909 S. 2122: „Hydraulische Sicherheitsventile“.

erfolgt, der Querschnitt, durch den bei geöffneter Klappe, entsprechend dem Drehwinkel  $\beta$ , die Flüssigkeit entweichen kann, nahezu

$$h(c + a \cos \beta);$$

die durch die Klappe mit der Geschwindigkeit  $v$  (in m/sk) strömende Flüssigkeitsmenge  $Q$  (in cbm/sk) ergibt sich mit Rücksicht auf die Kontraktion zu

$$Q = \alpha h(c + a \cos \beta) v,$$

worin  $h = a \sin \beta$  und der Wert  $\alpha = 0,85$  bis  $0,9$ .  $v$  ist zweckmäßig gleich der Geschwindigkeit anzunehmen, mit der die Flüssigkeit durch den freien Kanalquerschnitt  $ac$  strömt. Für  $a = c$  folgt angenähert  $\beta = 30^\circ$ .

Für den **kreisförmigen** Kanalquerschnitt vom Durchmesser  $d$  und für die Bewegung um eine kurze Achse am Umfange (Abb. 416) ist angenähert

$$Q = \frac{\pi d}{4} (1 + \cos \beta) h v = \frac{\pi}{4} d^2 v.$$

Da  $h = d \sin \beta$ , so folgt auch hier nahezu  $\beta = 30^\circ$ .

Für **Gummiklappen**, die sich um eine kreisförmige Kante drehen (Abb. 418), ist die Durchgangsfläche der Mantel eines Kegelstumpfes

von den Durchmessern  $d$  und  $d - 2h \sin \beta$  und der Kegelkante  $h$ . Mithin ist

$$Q = \alpha \pi h (d - h \sin \beta) v,$$

wobei angenähert

$$h = \frac{1}{2} (d - d_i) \sin \beta,$$

wenn  $d_i$  der Durchmesser des inneren zylindrischen Teiles des Klappensitzes ist. Es genügt auch hier meist,  $\beta = 30^\circ$  oder  $h = 0,25 d$  zu nehmen.

Als Ersatz für solche Gummiklappen werden nach Guter-muth federnde Stahl- oder Bronzeplatten verwendet, die ebenso, wie die Gummiklappen, Ventilkörper und Feder in einem Stück vereinen und

ebenfalls kleine Masse und leichtes Spiel haben. Diese federnden Klappen (s. Abb. 419) werden in verschiedenen Ausführungsformen (Gruppenanordnungen) bei Pumpen und besonders auch bei **Kompressoren** verwendet. Abb. 420 zeigt die Guter-muthklappe mit einer Ventilöffnung, die den Flüssigkeitsstrom in Richtung der geöffneten Klappe

leitet; hierbei sind die Klappen in ein seitlich herausnehmbares, eingeschliffenes zylindrisches Gehäuse (A) zwischen Saugwindkessel (C) und Druckwindkessel (D) einer Pumpe eingebaut.

Abb. 418.

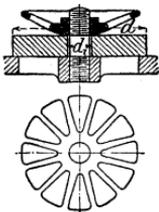


Abb. 420.

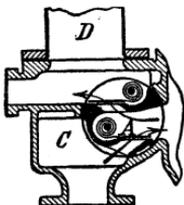
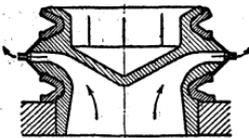


Abb. 419.



Abb. 421.



Als Ersatz für Ringventile, Gummiklappen usw. werden als praktisch „masselos“ Membran- und Lippenventile verwendet. Abb. 421 zeigt ein **Lippenventil** mit Ringspalt der Maschinenbau-A.-G. Balcke in Frankenthal (Pfalz).

### c. Absperrventile.

#### 1. Berechnung der Absperrventile.

Es bezeichne

- $P$  die erforderliche Kraft in kg,
- $p$  den Druck der Flüssigkeit in kg/qcm,
- $p_0$  die Dichtungskraft in kg/qcm (50 bis 80 at üblich),
- $D$  den Handraddurchmesser in cm ( $D = 1,5 d + 10$  cm üblich),
- $d$  die lichte Weite des Ventils in cm,
- $d_1$  den Kerndurchmesser der Spindel in cm,
- $\delta$  die Breite der Projektion der Dichtungsfläche,
- $\alpha$  den Steigungswinkel des Gewindes,
- $\varrho$  den Reibungswinkel.

Es ist (vgl. Abb. 422)  $P = \frac{\pi d^2}{4} p + \delta \pi \delta p_0$  (das zweite Glied ist die Dichtungskraft).

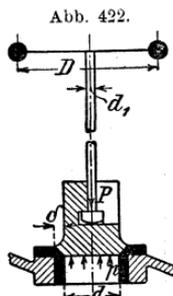
Die Spindel wird beansprucht auf Knickung und Verdrehung.

$$P = \frac{\pi d_1^2}{4} k d \quad \begin{array}{l} k d \sim 400 \text{ bis } 500 \text{ kg/qcm Stahl,} \\ k d \sim 200 \text{ ,, } 300 \text{ ,, Messing,} \end{array}$$

$$P = \text{Handkraft} \cdot \frac{D}{d_1} \cdot \frac{1}{\text{tg}(\alpha + \varrho)}$$

Handkraft eines Arbeiters:

$$\begin{array}{l} D = 10,0 \text{ cm. Handkraft} \sim 10 \text{ kg,} \\ D = 50,0 \text{ ,, ,, ,, } \sim 50 \text{ ,,} \end{array}$$



#### 2. Konstruktion der Absperrventile.

Kleine Ventile ganz aus Rotguß, größere aus Gußeisen mit Rotgußsitz (dieser konisch eingezogen oder eingewalzt). Bei Ventilen für überhitzten Dampf Rotguß und Kupfer der höheren Temperaturen wegen unbrauchbar, da sie brüchig werden und der dem Gußeisen gegenüber verschiedene Ausdehnungskoeffizient bei den höheren Temperaturen mehr zur Geltung kommt. Daher für überhitzten Dampf als Sitz Nickelringe, in schwalbenschwanzförmige Nuten eingehämmert, verwendet; außerdem bei Heißdampf-Ventilen Führungsrippen oben, um nicht dem Frischdampf direkt ausgesetzt zu sein; besser Hohlzylinder als Führung, um gleichartige Ausdehnung zu sichern.

In den letzten Jahren sollen sich Dichtungsringe aus Asbest nach Patent Ekert\*) nicht nur für niedere Drücke, sondern auch für Dampfdrücke von 12 bis 15 at und 250 bis 300° C bewährt haben.

\*) Eckert-Asbest-Dampfdichtungs Co. G. m. b. H., Eisenach.

Absperrventil für gerade Rohrleitung, Mutter aufsenliegend (Abb. 423) nach einer Ausführung von Dreyer, Rosenkranz & Droop, Hannover (Bruchventil); Absperrventil für eine Aenderung der Rohrleitung um  $90^\circ$  (sogen. Eckventil) mit innenliegender Mutter (Abb. 424). Beide Ventile sowohl für Dampf wie für Wasser benutzbar; Stromrichtung von *A* nach *B* (Abb. 424), d. h. gegen die Unterfläche des Ventils, mit Rücksicht auf die Verbindung zwischen Spindel und Ventil und die Verpackung der Stopfbüchse unter Druck. Im Falle der Abb. 424 soll das Spindelgewinde nicht in den Packungsraum der Stopfbüchse treten können. Bei der Ausführung nach Abb. 423 ist das Gewinde

Abb. 423.

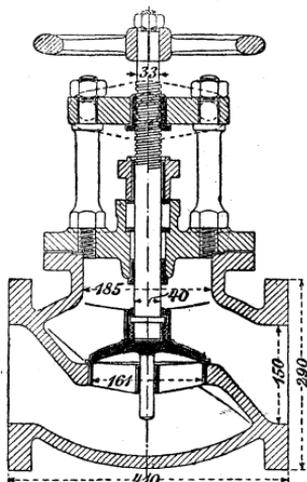


Abb. 424.

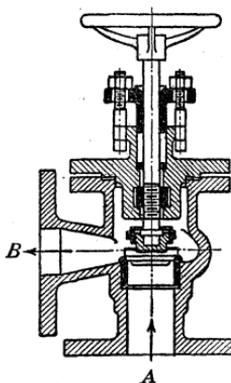
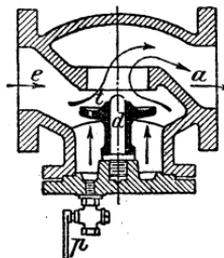


Abb. 425.



gegen die chemischen und mechanischen Einflüsse der Flüssigkeit geschützt. Dieser Vorteil bedingt aber größere Bauhöhe.

Die Art der Verbindung zwischen Spindel und Ventil soll stets dem letzteren eine gewisse Beweglichkeit ermöglichen.

— Flügelführung des Ventils verursacht Querschnittverengung und bei größerer Stromgeschwindigkeit Erzitterungen, die eine rasche und ungleichmäßige Abnutzung der Dichtungs- und Führungsflächen veranlassen.

Soll bei Rohrbrüchen von Dampfleitungen zur Verhütung von Unfällen die Leitung schnell geschlossen werden, so empfiehlt sich die Anwendung von **Rohrbruch-** oder **Selbstschlußventilen**,\*) die sich bei plötzlichem Druckunterschiede vor und hinter dem Ventile selbsttätig schließen. Abb. 425 Selbstschlußventil von Dreyer, Rosenkranz & Droop. Der auf dem Dorn *d* geführte Ventilteller *t* wird, sobald bei *a* infolge Rohrbruches Entlastung eintritt, durch die Saugwirkung in *a* und durch die Expansion des Dampfkeissens unter *t* an den Sitz gedrückt

\*) Vgl. die ausführliche Bearbeitung dieser Art von Ventilen von Köhler, Heft 84 der Mitteilungen über Forschungsarbeiten, herausgegeben vom V. d. I. — Im übrigen muß auf die Kataloge von Firmen hingewiesen werden, die solche Rohrbruchventile und verwandte Armaturen als Spezialität bauen.

und hier so lange festgehalten, bis die Leitung vom Kessel abgesperrt und der Druck bei *e* gefallen ist. *p* ist ein Hülfszahn.

Abb. 426 zeigt ein Rohrbruchventil von Franz Seiffert & Co.,

Abb. 426.

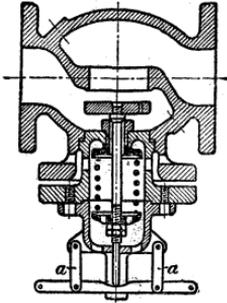


Abb. 427.

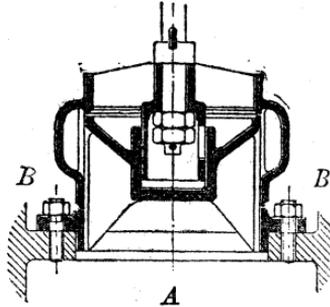
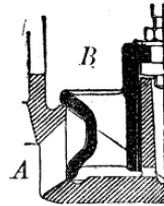


Abb. 428.



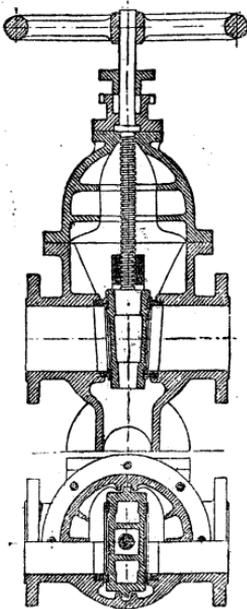
Berlin SO, bei dem das von einer einstellbaren

Feder offen ge-

haltene Ventil sich bei Ueberschreitung der zulässigen Dampfgeschwindigkeit selbst schließt. Das Ventil kann aber auch, wenn nötig, aus einiger Entfernung dadurch geschlossen werden, daß die Doppelhebel *a, a* seitlich umgelegt werden.

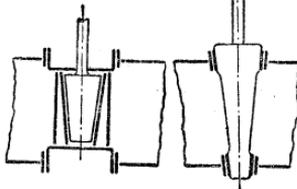
Durch Doppelsitz entlastete **Absperrventile** zeigen Abb. 427 (Glockenventil) und 428 (Rohrventil); die grössere Entlastung entsteht bei ihnen für die Stromrichtung von *A* nach *B*. Sind grössere Wärmeunterschiede im Ventilkörper zu erwarten, so müssen entweder Ventil und Sitz aus demselben Metalle bestehen, oder es müssen sich die verlängerten Querschnittlinien der beiden Sitzflächen (wie in Abb. 427) in der Ventilachse schneiden.

Abb. 429.



**d. Absperrschieber\* (s. Abb. 429).**

Abb. 430 und 431.



Herstellung der Dichtflächen (an beiden Seiten des Schiebers anzubringen) schwieriger als bei Ventilen. Neigung der Kegelflächen 1 : 8 bis 1 : 15. Dichtungsflächen möglichst nicht Gusseisen, sondern in Nuten eingehämmerte Bronze;

\* Ueber Schieber und Hähne usw. für Strafsen- und Hauswasserleitungen vgl. „Der städtische Tiefbau“ von Otto Lueger, Leipzig 1908, besonders II. Bd. 2. Abt. Einzelbestandteile der Wasserleitungen.

bei überhitztem Dampf Nickel oder Nickellegierungen. — Gerade Anpressung der Dichtflächen nach Abb. 430 besser, wenn auch die Bauart umständlicher wird als Abb. 431.

### e. Absperrhähne.\*)

Die Hähne (s. Abb. 432) werden wie die Absperrschieber durch die beim Anziehen einer Schraubenmutter ausgeübte Achsialkraft (wie in Abb. 432 und 433) oder selbsttätig durch den Flüssigkeitsdruck oder auch durch Federdruck abgedichtet. Neigung der Kegelseite gegen die Achse 1 : 8 bis 1 : 15.

Zwei- und Dreiwegehähne, die besonders für saure und alkalische Flüssigkeiten geeignet sind,\*\*) der Maschinen- und Armaturen-

Abb. 432.  
Zweiwegehahn.

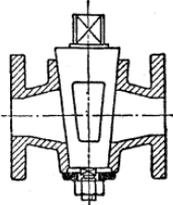


Abb. 433.  
Dreiwegehahn.

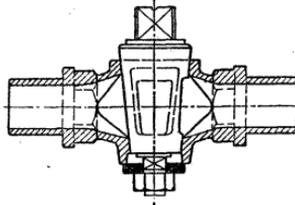


Abb. 434.

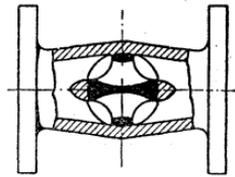
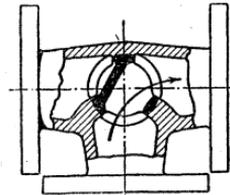
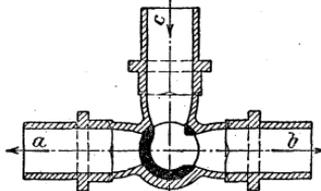
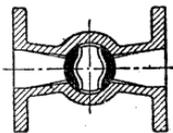


Abb. 435.



fabrik Gebr. Reuling in Mannheim (Abb. 434 u. 435). — Gehäuse und Kegel bestehen aus besonders zusammengesetztem Gußeisen, für Sonderzwecke aus Aluminium, Phosphorbronze o. dgl. Infolge der Bauart der Hähne kommen die Flüssigkeiten nur mit der sehr widerstandsfähigen Gußhaut, nicht aber mit den eingeschliffenen Flächen, die sowohl bei offenem wie bei geschlossenem Hahn gedeckt sind, in Berührung.

Hähne mit Asbestfutter und zylindrischem Kükten von Dreyer, Rosenkranz & Droop. Dabei berührt das Kükten die Metallflächen des Gehäuses, ohne zu schleifen; Abdichtung durch einen über und einen unter der Hahnbohrung liegenden Asbestring, die beide durch vier achsiale Asbeststreifen in schwalbenschwanzförmigen Nuten verbunden sind.

\*) S. Note auf S. 1001.

\*\*) S. Z. d. V. d. I. 1908 S. 599.

## VII. REGELNDE MASCHINENTEILE.

### A. Schwungräder.

#### a. Abmessungen der Schwungräder.

##### 1. Schwungradgewicht.

In der Regel hat das Schwungrad die Aufgabe, **periodische Arbeitsüberschüsse**  $\mathfrak{A}$  aufzunehmen und wieder abzugeben. Bedeutet dann

$\mathfrak{A}$  den größten Arbeitsüberschuss,

$J$  das Trägheitsmoment des Schwungrades bezogen auf seine Drehachse,

$M$  die Masse und  $G$  das Gewicht des Schwungringes,

$V$  die mittlere Umfangsgeschwindigkeit des Schwungringes,

$V_{\max}$  und  $V_{\min}$  die größte und kleinste Umfangsgeschwindigkeit des Schwungringes,

$\omega$  die mittlere Winkelgeschwindigkeit des Schwungrades,

$\omega_{\max}$  und  $\omega_{\min}$  die größte und kleinste Winkelgeschwindigkeit des Schwungrades,

so beträgt der **Ungleichförmigkeitsgrad** des Schwungrades

$$\delta_s = \frac{V_{\max} - V_{\min}}{V} = \frac{\omega_{\max} - \omega_{\min}}{\omega}.$$

Die Schwungringmasse  $M$  findet man aus der **Grundgleichung**

$$\mathfrak{A} = J\omega^2\delta_s = MV^2\delta_s.$$

Von dem hieraus folgenden Schwunringgewicht  $G = Mg$  braucht wegen des Einflusses der Arme etwa nur 0,9 bis 0,95 ausgeführt zu werden.

Für die Wahl des Ungleichförmigkeitsgrades gibt nachstehende Tabelle einen Anhalt.

##### Mittlere Werte des Ungleichförmigkeitsgrades $\delta_s$ :

Antrieb von Pumpen und Schneidwerken . . . . .	$\delta_s = 1 : 20$ bis $1 : 30$ ,
„ „ Werkstätten-Triebwerken . . . . .	$\delta_s = 1 : 35$ bis $1 : 40$ ,
„ „ Webstühlen und Papiermaschinen . . . . .	$\delta_s = 1 : 40$ ,
„ „ Mahlmühlen . . . . .	$\delta_s = 1 : 60$ ,
„ „ Spinnmaschinen f. niedrige Garn-Nrn. $\delta_s = 1 : 60$ ,	
„ „ „ für hohe . . . . .	$\delta_s = 1 : 100$ ,
„ „ Dynamomaschinen für Lichtbetrieb (ohne Akkumulatoren) . . . . .	$\delta_s = 1 : 150$ ,
„ „ Drehstrommaschinen . . . . .	$\delta_s = 1 : 300$ .

Die genaue Ermittlung der Arbeitsüberschüsse  $\mathfrak{A}$  s. S. 1004 u. f.

Brauchbare **Näherungswerte** für  $G$  ohne Aufzeichnung von Diagrammen erhält man nach der Formel

$$G = \frac{c}{\delta_s} \frac{N}{nV^2},$$

worin  $N$  die Nutzleistung in PS,

$n$  die minutliche Umlaufzahl des Schwungrades,

$V$  die mittlere Umfangsgeschwindigkeit des Schwungringes in m/sk und

$c$  eine Unveränderliche bedeutet, die folgender Tabelle\*) zu entnehmen ist, in der

$p_a$  den Anfangsdruck in kg/qcm und

$p_b = \omega^2 r \frac{g}{g}$  den auf 1 qcm Kolbenfläche bezogenen, von der größten Kolbenbeschleunigung  $\omega^2 r$  herrührenden Massen-  
druck des Kurbelgetriebes bedeutet.

**Tabelle der Unveränderlichen  $c$  bei Kompression bis  $0,7 p_a$ .**

**1. Einzylindermaschinen ohne Kondensation.**

Füllung	$p_b : p_a = 0,05$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
1:6	$c = 9600$	8700	7200	6100	5500	5300	—
1:4	$c = 9000$	8300	7200	6300	6000	6000	6200
1:3	$c = 8500$	8100	7100	6500	6300	6300	—
1:2	$c = 7800$	7500	7000	6900	—	—	—

**2. Einzylindermaschinen mit Kondensation.**

Füllung	$p_b : p_a = 0,05$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
1:10	$c = 10\ 000$	9100	7500	6400	5700	5300	5200
1:8	$c = 9\ 700$	8800	7400	6500	6000	5700	4800
1:6	$c = 8\ 900$	8300	7100	6400	6100	—	—
1:5	$c = 8\ 500$	8100	7200	6400	6100	—	—
1:4	$c = 8\ 000$	7800	7400	7000	6600	6200	—
1:3	$c = 7\ 500$	7400	7000	6900	6900	6800	6800
1:2	$c = —$	—	6800	—	—	—	—

**3. Zwillingsmaschinen.**

Füllung = 1:6	1:4	1:3	1:2
$c = 2900$	2400	2000	1500

**4. Dreizylindermaschinen.**

$$c = 1400.$$

Für Maschinen ohne Kompression werden die Werte von  $c$  etwa 5 bis 10 vH kleiner.

Soll das Schwungrad bei **wechselnder äußerer Belastung** einen solchen Ausgleich vermitteln, daß ihm zeitweise unter Arbeitsabgabe eine höhere Leistung entnommen wird, als den Abmessungen der Maschine entspricht, so muß es je nach der Dauer der Kraftabgabe,

\*) Vgl. K. Mayer, Z. d. V. d. I. 1889 S. 113 und Tolle, Regelung der Kraftmaschinen, 2. Aufl. S. 87.

den zuzulassenden Geschwindigkeitsunterschieden usw. reichlicher bemessen werden. Man kann nach Graßmann setzen

bei Maschinen für elektrische Straßenbahnen über 100 PS und bei Werkstätten-Betriebsmaschinen mit ähnlichen Schwankungen:

$$G \geq 6000 \frac{N + 100}{V^2}.$$

Bei vorhandener Pufferbatterie ist  $G$  kleiner, bei bergigem Gelände und fehlender Batterie bis 50  $\sqrt{H}$  größer zu nehmen.

Für Holzbearbeitungsmaschinen, Warmeisensägen usw. genügt etwa

$$G \geq 3000 \frac{N + 20}{V^2}.$$

## 2. Festigkeitsrechnung und Konstruktion.

Die genaue Ermittlung der Spannungen ist ziemlich umständlich und unsicher;\* daher begnügt man sich meist mit folgender **Näherungsrechnung**. Man denkt den Ring freischwebend (durch die Zugspannung der Arme wird die Beanspruchung erhöht) und setzt gleichmäßige Verteilung der Spannungen über den ganzen Ringquerschnitt voraus. Dann beträgt die tangential gerichtete Zugspannung im Ring

$$\sigma_z = \frac{\gamma}{g} V^2.$$

Für Gufseisen mit  $\gamma = 7,25$  kg/cdm und  $V$  in m/sk wird z. B.:

$$\sigma_z = 0,074 V^2 \text{ kg/qcm,}$$

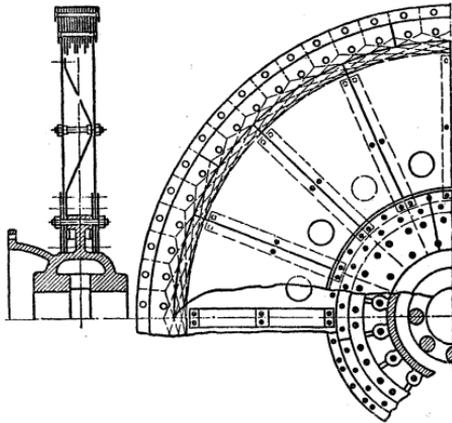
für Flußstahl mit  $\gamma = 7,85$  kg/cdm:

$$\sigma_z = 0,08 V^2 \text{ kg/qcm.}$$

Die Beanspruchung hängt also nur von der Umfangsgeschwindigkeit des Schwungringes ab.

Bei größeren Geschwindigkeiten benutzt man daher nicht mehr Gufseisen, sondern Schmiedeisen (Abb. 436) oder Stahlgufs für den Kranz und Schmiedeisen für die Arme (Abb. 437). Um den nachteiligen Einfluß der Arme zu vermeiden, verwendet man bei großen Umfangsgeschwindigkeiten an Stelle der Arme volle Scheiben aus Blechtafeln (Abb. 438).

Abb. 436.



\*) Vrgl. J. Goebel über Schwungradexplosionen, Z. d. V. d. I. 1898 S. 353; Tolle, Regelung der Kraftmaschinen, 2. Aufl. S. 163; J. H. Bauer, Festigkeitsrechnung der Schwungräder, D. p. J. Bd. 323, Heft 23 bis 26.

Weitere Beispiele von Schwungrädern zeigen Abb. 439 bis 444. Abb. 439 ist ein Rad für Seilscheiben, Bauart der B.-A. M.-A.-G., besitzt 10 Rillen für 50 mm starke Seile, Gesamtgewicht 25 t, Kranzgewicht 18 t, Umfangsgeschwindigkeit  $V = 31,4$  m/sk. Schrauben von 4" Durchmesser für die Kranzverbindung werden in die gebohrten Löcher der Flansche stramm eingepaßt.

Abb. 440 ist ein Rad in einem Stück gegossen, bei dem zum Ausgleich der Gufsspannungen in die Nabenform 3 oder 4 mit Graphit bestrichene dünne Platten eingelegt werden; die verbleibenden Nabenzwischenräume werden nachher mit Zink ausgegossen und die Nabe durch Schrumpringe verstärkt. Wer-

Abb. 437.

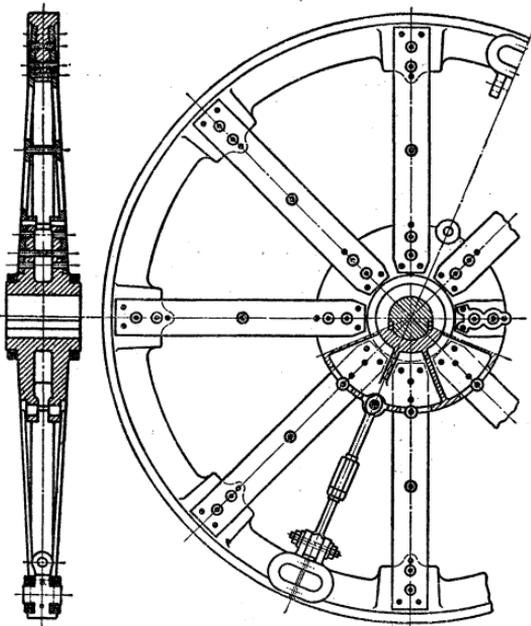
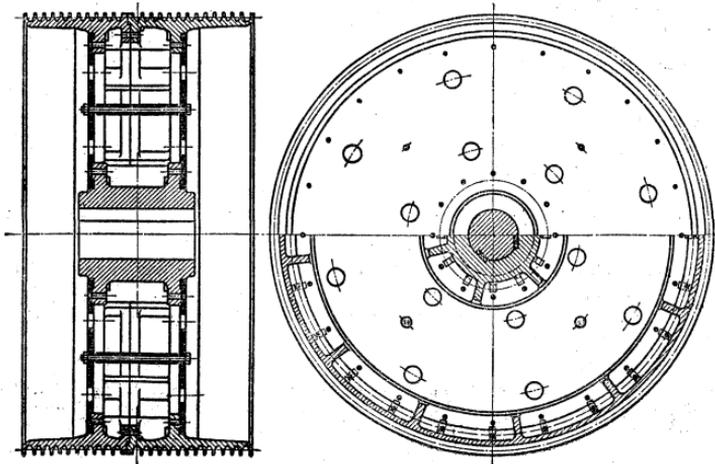


Abb. 438.



den gröfsere Räder zur Vermeidung von Gußspannungen geteilt hergestellt, so ist auf sorgfältigste Kranzverbindung zu achten; Biegungsspannungen sind möglichst zu vermeiden, die Verbindungs-

Abb. 439.

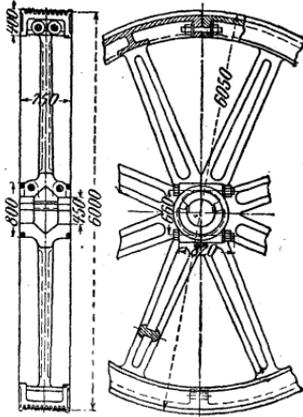


Abb. 440.

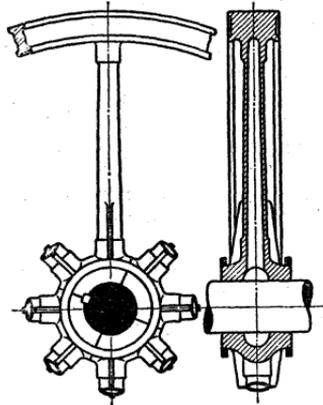


Abb. 441.

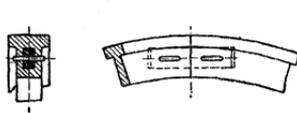


Abb. 442.

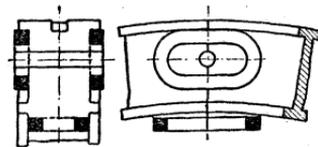


Abb. 443.

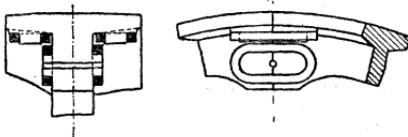
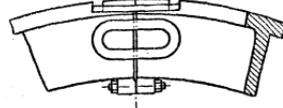


Abb. 444.



konstruktion ist so dicht wie möglich an den Schwerpunkt des Kranzquerschnittes heranzurücken (Abb. 441 bis 444); dies wird möglich durch Keilbolzen (Abb. 441) oder Schrumpfringe (Abb. 442 u. 443) oder Schrumpfringe in Verbindung mit Schrauben (Abb. 444). In Abb. 439 ruft die ziemlich weit vom Schwerpunkte des Kranzquerschnittes angebrachte Schraubenverbindung nicht unerhebliche Biegungsspannungen hervor.

Zur Vermeidung von Luftwirbeln, die durch die Arme entstehen, ist Verschalung durch Blechtafeln empfehlenswert.

## b. Ermittlung des Arbeitsüberschusses $\mathfrak{A}$ mit Hilfe von Drehkraftkurven.

### 1. Allgemeines.

Im Beharrungszustand einer Kolbenkraftmaschine wiederholen sich (meist) alle Vorgänge periodisch während einer Umdrehung der Kurbelwelle; daher ist fast immer das Diagramm auf eine volle Umdrehung auszudehnen. Bisweilen kann man sich auf eine halbe Umdrehung, d. h. auf einen Kolbenhub beschränken, z. B. wenn nur eine Kurbel oder mehrere Kurbeln mit  $0^\circ$  oder  $180^\circ$  Kurbelversetzung vorhanden sind und von dem Einfluß der endlichen Stangenlängen abgesehen wird. Es empfiehlt sich, alle Kräfte: Dampfdrücke, Kolbenüberdrücke, Widerstände und Massendrücke auf 1 qcm Kolbenfläche zu beziehen; sind verschiedene Kolbendurchmesser zu berücksichtigen, so reduziert man alle Kolbenkräfte auf denselben Kolbenquerschnitt, ebenso führt man bei verschiedenen Kolbenhuben alle Werte auf den gleichen Kolbenhub zurück. Als Grundlinie der Kolbendruckdiagramme wählt man in der Regel 10 cm (oder 20 cm), der Kurbelzapfenkreis hat dann einen Umfang von  $\pi \cdot 10 \sim 32$  cm, der vorteilhaft in 16 oder 32 gleiche Teile eingeteilt wird.

Bedeutet in den Diagrammen 1 cm Ordinate  $i$  at, ist der zugrunde gelegte Kolbenquerschnitt =  $F$  qcm, der zugrunde gelegte Kolbenhub =  $s$  m, so entspricht (bei 10 cm Grundlinie für das Kolbendruckdiagramm) einem qcm Diagrammfläche  $\frac{i}{10} F s$  mkg Arbeit, d. h.  $f$  qcm Diagrammfläche bedeuten

$$\mathfrak{A} = \frac{i}{10} F s \cdot f \text{ mkg.}$$

Wird der Widerstand der Kraftmaschine durch einen konstanten Tangentialdruck  $W$  gebildet (die Arbeit z. B. durch Riemen, Seile oder Zahnräder abgeleitet), so ergibt sich der  $W$  entsprechende, auf 1 qcm Kolbenfläche bezogene Widerstand  $p_w$  bei einem mittleren Kolbenüberdruck  $p_i$ :

$$p_w = \frac{2}{\pi} p_i.$$

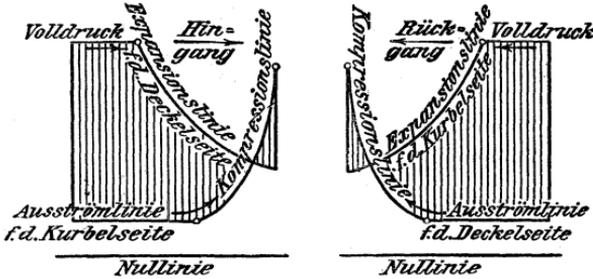
### 2. Ueberdruck- und Widerstandsdiagramme (ohne Rücksicht auf die Massen des Kurbeltriebes).

Den Ausgang bilden die Dampfdruckdiagramme; daraus leitet man die **Ueberdruckdiagramme** ab, indem man je für Hin- und Rückgang die Differenz der Drücke vor und hinter dem Kolben bildet (vgl. Abb. 445).

Man teilt nun den abgewickelten Kurbelkreis in eine Anzahl (etwa 32) gleicher Teile und sucht die zu den einzelnen Kurbelstellungen 0, 1, . . . 32 gehörigen Kolbenstellungen, entnimmt die entsprechenden Ueberdrücke den Ueberdruckdiagrammen, ermittelt, wie S. 932 angegeben, die gleichwertigen Tangentialkurbeldrücke, kurz Drehkräfte genannt, und trägt diese als Ordinaten in den entsprechenden

Punkten des abgewickelten Kurbelkreises ab, so erhält man eine **Drehkraftkurve**. Wenn man schliesslich noch die Widerstände als Drehkräfte  $p_w$  in das Drehkraftdiagramm einträgt, so liefern die zwischen der Widerstandslinie und der Drehkraftkurve der Ueberdrücke ge-

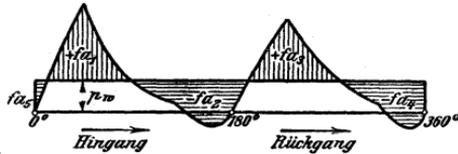
Abb. 445.



legenen Flächen  $f_a$  (vgl. Abb. 446) die gesuchten Arbeitsüberschüsse, die von dem Schwungrad während einer Umdrehung aufzunehmen und wieder abzugeben sind.

Dafs auch von den bewegten Teilen der Schubkurbelgetriebe ein Teil der Arbeit als Wucht aufgenommen wird, ist dabei noch nicht berücksichtigt (dieser Einfluss wird unter 3 klar-gestellt); für die Schwun-gingberechnung nach der Grundformel  $\mathfrak{A} = MV^2 \delta_s$  dürfen also die so gefundenen Arbeitsüber-

Abb. 446.



schüsse  $\mathfrak{A} = \frac{i}{10} F s \cdot f_a$  nur bei sehr kleinen Massen des Kurbeltriebes oder bei sehr langsam laufenden Maschinen benutzt werden.

Von den meist verschieden grossen Ueber- oder Unterschufsflächen  $f_a$  ist bei im ganzen vier Ueberschneidungen der Ueberdrucklinie mit der Widerstandslinie die absolut grösste Fläche, bei mehr als vier Ueberschneidungen die grösste algebraische Summe der aufeinander folgenden Ueber- und Unterschufsflächen für die Ermittlung von  $\mathfrak{A}$  zu benutzen.

Die Annahme unendlichlanger Schubstange ( $\lambda = 0$ ) ermöglicht zwar erhebliche Vereinfachung der Konstruktionen (Zuordnung der Kolben- und Kurbelstellungen durch senkrechte Projektion, bequeme Bestimmung der Drehkraft  $p_t$  aus Ueberdruck  $p$  nach der Beziehung  $p_t = p \sin \alpha$ , d. h. durch Abtragen von  $p$  auf der zugehörigen Kurbelrichtung und horizontales Hinüberprojizieren usf.), liefert aber nur ungenaue Ergebnisse für  $\mathfrak{A}$ , meist um 10 bis 20 vH zu kleine. Um das Schwungradgewicht nicht zu klein zu bekommen, erhöhe man also die unter Annahme  $\lambda = 0$  gefundenen Werte von  $\mathfrak{A}$  um etwa 20 vH.

Beispiele von Drehkraftkurven s. Abb. 447 bis 449: Abb. 447 für eine Zwillingmaschine mit  $90^\circ$  Kurbelversetzung, Schubstangen

Abb. 447.

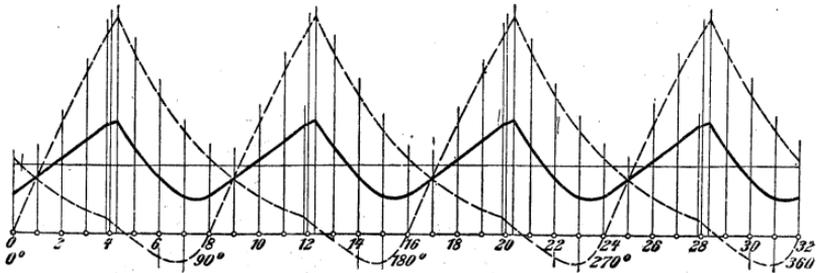
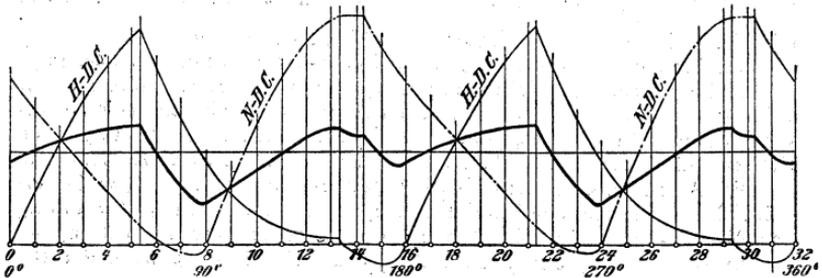
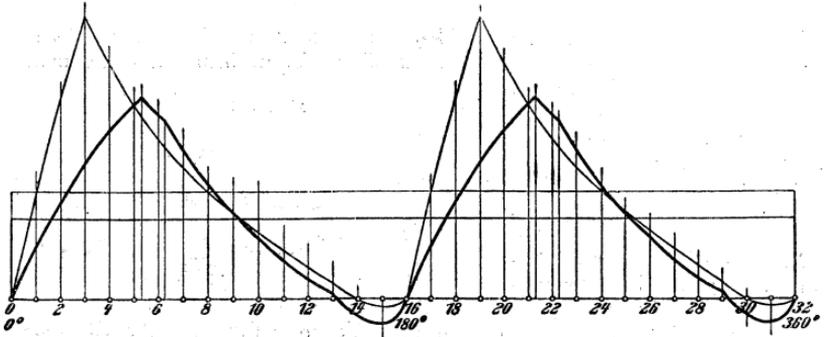


Abb. 448 u. 449.

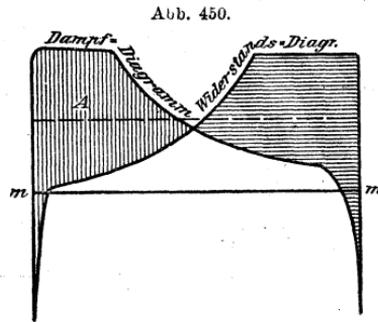


unendlich; die punktierten Linien gelten für die einzelnen Zylinder, die ausgezogene Linie ist die gesamte Drehkraftkurve, wobei der Maßstab halb so groß genommen wurde wie für die Einzeldiagramme. Abb. 448 zeigt die Drehkraftkurve für Tandem- und Woolfsche Ma-

schinen; die fein ausgezogenen Linien gelten für eine Einzylindervergleichsmaschine mit derselben Anfangsspannung und demselben Füllungsgrad. (Der höhere mittlere indizierte Ueberdruck der Einzylindermaschine erklärt sich dadurch, daß hier die Kompression nicht soweit getrieben werden konnte wie bei zweimaliger Kompression in den beiden Zylindern.) Die Tandemmaschine liefert, wie man erkennt, kleinere Arbeitsüberschüsse als die Einzylindermaschine. Abb. 449 gilt für eine Verbundmaschine mit  $90^\circ$  Kurbelversetzung: fein ausgezogen = Drehkraftkurve für den Hochdruckzylinder, strichpunktiert für den Niederdruckzylinder, stark ausgezogen gesamte Drehkraftkurve (in halbem Maßstab).

In einigen Fällen läßt sich das Aufzeichnen von Drehkraftkurven umgehen, z. B. bei Gebläsen und Pumpmaschinen mit direktem Antrieb, bei denen **Widerstand und Kolbenkraft an derselben Stange wirken**.

Im Gebläse- oder Pumpen-Ueberdruck-Diagramm sind die Ordinaten durch Multiplikation mit dem Verhältnis der Kolbenflächen auf den Dampfzylinder zurückzuführen; dann ist durch Vergrößerung der Ordinaten im Verhältnis  $N_i:N_e$  die Fläche des Widerstandsdiagramms der Fläche des Dampfdiagramms gleich zu machen. Dampf- und Widerstandsdiagramm sind hierauf über derselben Grundlinie  $mm$  zu verzeichnen. Die überschießende Fläche ergibt den Arbeitsüberschuß  $\mathcal{A}$ . Beispiel für eine Gebläsemaschine s. Abb. 450 (für eine Pumpe würde die gestrichelte Linie gelten).



### 3. Berücksichtigung der Kurbeltriebmassen.

Bei größeren Umlaufzahlen ist der Einfluss der hin und her gehenden Massen der Kurbeltriebe nicht mehr zu vernachlässigen. In den meisten Fällen genügt es, die Massendrücke der Kurbeltriebe unter folgenden Näherungsannahmen zu bestimmen: 1. die Schubstangenmasse wird ersetzt durch eine im Kreuzkopf gedachte Masse (die bei den üblichen Stangenformen etwa  $=0,4$  der Schubstangenmasse zu nehmen ist); 2. die Winkelgeschwindigkeit der Kurbelwelle ist konstant (gleich dem Mittelwert  $\omega$ ), so daß die Kolbenbeschleunigungen nach den S. 930 angegebenen Konstruktionen aufgesucht werden können.

#### $\alpha$ ) Verfahren von Radinger.\*)

Man trägt in die einzelnen Ueberdruckdiagramme die Massendrücke  $p_b$  (bezogen auf 1 qcm Kolbenfläche) als Ordinaten so auf, daß sie sich, falls sie Beschleunigungsdrücke sind, von dem Ueberdruck ab-

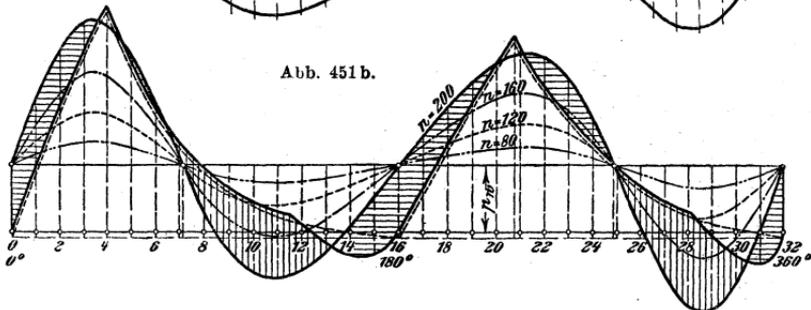
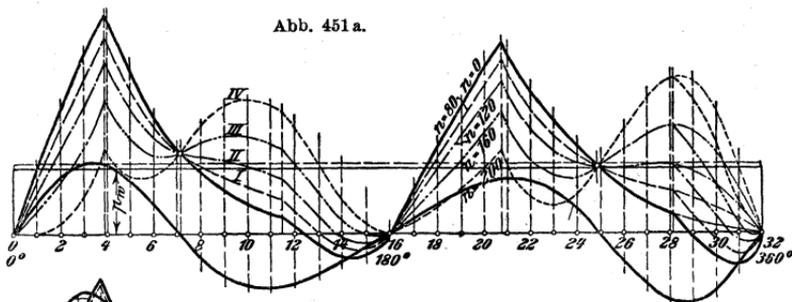
\*) Joh. Radinger, Ueber Dampfmaschinen mit großer Kolbengeschwindigkeit, 3. Aufl., Wien 1892.

ziehen, falls sie Verzögerungsdrücke sind, dazu addieren. Unter der Annahme einer unendlich langen Schubstange ( $\lambda = 0$ ) wird die Massendrucklinie eine Gerade (entsprechend  $AA'$  in Abb. 283 S. 930) für endliche Stangenlänge eine Parabel ( $A_0A_0'$  in Abb. 283 S. 930). Zu den Differenzwerten zwischen Ueberdruck und Massendruck sucht man dann, wie unter 2. S. 1005 ausgeführt, die gleichwertigen Drehkräfte und trägt diese zu einer Drehkraftkurve zusammen; weiter verfährt man, wie unter b) 2. angegeben.

Vorteil dieser Methode: Man erhält nebenbei die Kräfte, die bei der Berechnung der Abmessungen des Kurbeltriebes zugrunde zu legen sind, und erkennt aus dem Ueberdruckdiagramm, wie der Druckwechsel im Gestänge erfolgt. Nachteil: Beim Vergleich verschiedener Umlaufzahlen sind lauter neue Drehkraftkurven, von den einzelnen Ueberdruckdiagrammen ausgehend, zu konstruieren; der Einfluss der Massendrucke ist nicht leicht zu übersehen.

### β) Verfahren von Tolle.\*)

1. Man entwickelt zunächst die Drehkraftkurven für die reinen Dampfüberdrücke und trennt die **Drehkraftkurven für die Massen-**



**drücke.** Es ist nur nötig, die letzteren für eine Umdrehzahl  $n_1$  zu konstruieren; für andere Werte von  $n$  sind dann die Ordinaten der Massendruckdrehkräfte einfach im Verhältnis  $\left(\frac{n}{n_1}\right)^2$  abzuändern;

\*) Tolle, Regelung der Kraftmaschinen, 2. Aufl. S. 63 u. f.

ebenso kann eine für ein bestimmtes Stangenverhältnis  $\lambda = r : l$  konstruierte Massendruckdrehkraftkurve bei gleichem  $\lambda$  immer wieder benutzt werden, wenn nur die Ordinaten proportional den Grundwerten

$$\frac{q}{g} \omega^2 r = \frac{q}{g} \frac{v^2}{r} \quad (\text{vgl. S. 931})$$

abgeändert werden.

Subtrahiert man die Drehkräfte der Beschleunigungsdrücke für verschiedene Umdrehzahlen von den Drehkräften der Dampfüberdrücke und addiert die Drehkräfte der Verzögerungsdrücke zu den entsprechenden Ueberdruckdrehkräften, so erhält

Abb. 452. Links.

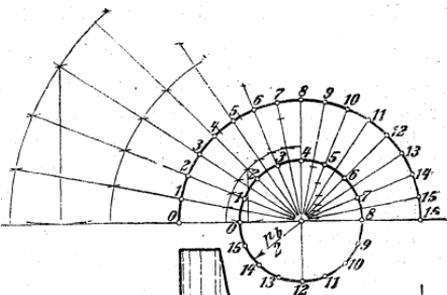
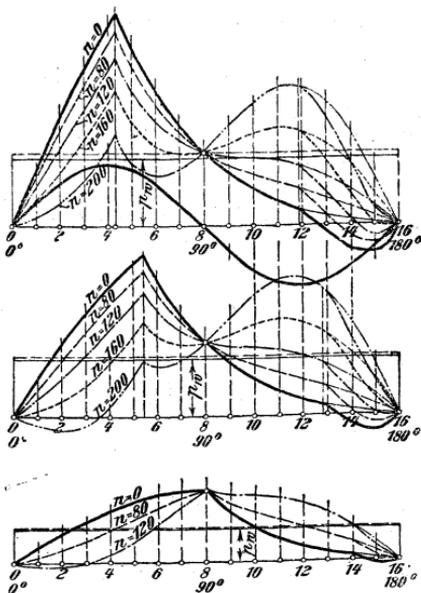


Abb. 452. Rechts.



man die resultierenden Drehkraftkurven (Abb. 451a); die zwischen ihnen und der Widerstandslinie im Drehkraftdiagramm liegenden Flächen  $f_a$  geben die Arbeitsüberschüsse  $\mathcal{A}$  an.

drehkräfte als Widerstände auffasst und zu dem Drehkraftwiderstand  $p_w$  addiert (Abb. 451b); da  $p_w$  in der Regel als unveränderlich anzunehmen ist, so hat man einfach über der Geraden, die  $p_w$  begrenzt, als Grundlinie die Drehkraftkurve der Massendrucke zu entwickeln und erhält sofort die Arbeitsüberschüsse in den Flächen zwischen der Ueberdruckdrehkraftkurve und der Massendruckdrehkraftkurve.

Noch bequemer gestaltet sich die Ermittlung von  $\mathcal{A}$ , wenn man die Massendruck- und zu dem Drehkraftwiderstand  $p_w$  addiert (Abb. 451b); da  $p_w$  in der Regel als unveränderlich anzunehmen ist, so hat man einfach über der Geraden, die  $p_w$  begrenzt, als Grundlinie die Drehkraftkurve der Massendrucke zu entwickeln und erhält sofort die Arbeitsüberschüsse in den Flächen zwischen der Ueberdruckdrehkraftkurve und der Massendruckdrehkraftkurve.

Anmerkung. In Abb. 451 sind, um den Einfluß der Kompression zu zeigen, zwei Varianten behandelt: die stark ausgezogene Linie der Ueberdrücke gilt für den Fall mit Kompression, die feine Linie in Abb. 451a ohne Kompression, dgl. in Abb. 451b die punktierte Linie; in Abb. 451a ist die Widerstandslinie für den Fall mit Kompression ausgezogen, ohne Kompression punktiert, ebenso in Abb. 451b die Grundlinie für die Ueberdruckdrehkräfte.

2. Unter der Annahme **unendlicher Stangenlänge** ( $\lambda = 0$ ) werden die Drehkraftkurven der Massendrücke besonders einfach: es ist

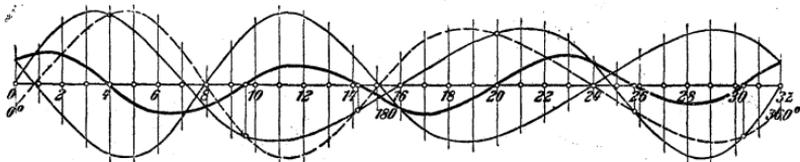
$$p_{tb} = \frac{1}{2} \frac{q}{g} \omega^2 r \cdot \sin 2\alpha,$$

die Drehkraftkurve für einen Kurbeltrieb also eine gewöhnliche Sinuslinie (Projektion einer Schraubenlinie), die in bekannter Weise leicht zu konstruieren ist. Abb. 452 zeigt die praktische Durchführung des Verfahrens für eine Einzylindermaschine, und zwar für verschiedene Anfangsspannungen  $p_a$  bei gleicher Endspannung, mit und ohne Kondensation und für verschiedene Umdrehzahlen  $n$ .

Bei Mehrkurbelmaschinen wird die resultierende Drehkraftkurve der Massendrücke (für  $\lambda = 0$ ) wieder eine einfache Sinuslinie, deren Amplitude und Phase durch geometrische Addition der Werte  $\frac{q}{g} \omega^2 r$  für die einzelnen Kurbeln gefunden wird, indem man die Strecken  $\frac{q}{g} \omega^2 r$  unter den verdoppelten Kurbelversetzungswinkeln gegeneinander geneigt aufträgt. Daraus folgt z. B., dafs bei Zwillingmaschinen mit  $90^\circ$  Kurbelversetzung ebenso bei Drillingsmaschinen mit je  $60^\circ$  oder je  $120^\circ$  Kurbelversetzung (für  $\lambda = 0$ ) die Massendrücke der Kurbelgetriebe sich vollständig aufheben.

3. Wird die **endliche Stangenlänge** berücksichtigt ( $\lambda = \lambda$ ), so findet man für ein Kurbelgetriebe die Massendruckdrehkraftkurve, indem man

Abb. 453.



einfach zu den Werten  $p_b$  (begrenzt von der Massendruckparabel, Abb. 283) die gleichwertigen Drehkräfte aufsucht. Die Gestalt der Drehkraftkurve für  $\lambda = \frac{1}{5}$  ist aus Abb. 453 zu erkennen; liegt einmal eine solche Kurve gezeichnet vor, so sind (für gleiches  $\lambda$ ) immer nur für andere Werte von  $\frac{q}{g} \omega^2 r$  die Ordinaten proportional zu verändern. Für Mehrkurbelmaschinen erhält man die gesamte Massendruckdrehkraftkurve durch Addieren der Ordinatenwerte für die einzelnen Kurven; Abb. 453 zeigt in den fein ausgezogenen Linien die letzteren

für eine Zwillingsmaschine mit 90° Kurbelversetzung, in der stark ausgezogenen Linie die resultierende Drehkraftkurve der Massendrücke. Die hier vorhandenen 6 Ueberschneidungen mit der Grundlinie finden sich auch bei beliebiger Kurbelzahl.

### c. Schwungradberechnung mit Hilfe des Massenwuchtdiagramms.\*)

#### 1. Allgemeines.

Bei diesem streng dynamischen, von Wittenbauer\*\*) angegebenen Verfahren brauchen keinerlei beschränkende Annahmen über die Winkelgeschwindigkeit gemacht zu werden; es eignet sich daher besonders für stark veränderliche Winkelgeschwindigkeiten, z. B. für die An- und Auslaufperiode oder für Maschinen mit besonders kleinen Schwungmassen. Dem Verfahren liegt der Wuchtsatz zugrunde: die Zunahme an Wucht (kinetischer Energie) ist gleich der von allen Kräften geleisteten Arbeit; nennt man für irgend eine Getriebestellung die von einer Anfangsstellung  $o$  aus von den Kräften geleistete Arbeit  $\mathfrak{A}_k$ , die Wucht in dieser Stellung  $= E$ , die Anfangswucht  $E_0$ , so ist also

$$E = E_0 + \mathfrak{A}_k.$$

Man wählt nun einen Bezugspunkt, hier am besten einen Kurbelzapfen; ist dessen augenblickliche Geschwindigkeit  $v_r$ , und haben die Massen  $m_1, m_2, m_3 \dots$  die Geschwindigkeiten  $v_1, v_2, v_3 \dots$ , so ist

$$E = \frac{1}{2} (m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 + \dots) = \frac{1}{2} \left[ m_1 \left( \frac{v_1}{v_r} \right)^2 + m_2 \left( \frac{v_2}{v_r} \right)^2 + \dots \right] v_r^2;$$

nennt man 
$$M_r = m_1 \left( \frac{v_1}{v_r} \right)^2 + m_2 \left( \frac{v_2}{v_r} \right)^2 + \dots$$

die reduzierte Masse, so ist  $E = \frac{M_r}{2} v_r^2$ ; daraus folgt die Geschwindigkeit des Bezugspunktes

$$v_r = \sqrt{\frac{2E}{M_r}} = \sqrt{\frac{2(E_0 + \mathfrak{A}_k)}{M_r}}.$$

Für jede Getriebestellung ist nun das Verhältnis der Geschwindigkeiten der einzelnen Punkte durch den geometrischen Zusammenhang gegeben, daher  $\frac{v_1}{v_r}, \frac{v_2}{v_r} \dots$  bekannt, die reduzierte Masse  $M_r$  somit leicht bestimmbar; ebenso kann die jedesmalige Arbeit  $\mathfrak{A}_k$  (durch graphische

Integration) bequem aufgesucht, darauf  $v_r = \sqrt{\frac{2(E_0 + \mathfrak{A}_k)}{M_r}}$  berechnet

und schliesslich mit Hilfe von  $v_r : v_1 = v_r \left( \frac{v_1}{v_r} \right), v_2 = v_r \left( \frac{v_2}{v_r} \right) \dots$ , d. h. die Geschwindigkeit aller Punkte für die einzelnen Getriebestellungen, ermittelt werden.

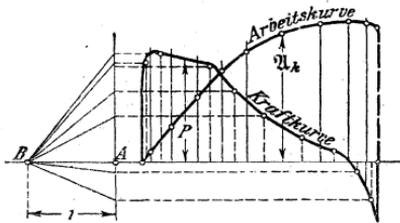
\*) Ausführliche Darstellung s. Tolle, Regelung der Kraftmaschinen, 2. Aufl. S. 97 u. f.

\*\*) Z. d. V. d. I. 1905 S. 471. F. Wittenbauer, Die graphische Ermittlung des Schwungrades, ein Beitrag zur graphischen Dynamik.

### 2. Integralkurve für die Arbeit $\mathcal{M}_k$ .

Ohne vorher irgendwelche Kräfte-Reduktionen vorzunehmen, bestimmt man die Arbeit der Kräfte (der Dampfdrücke und des Widerstandes), wo sie am bequemsten zu finden ist: der Dampfüberdrücke im Indikator-Diagramm, des tangential wirkenden Widerstandes im Drehkraftdiagramm, und trägt sie (unter Berücksichtigung des Vorzeichens) in irgend einem Diagramm zusammen, so daß natürlich die zusammengehörigen Kolben- und Kurbelstellungen entsprechenden Werte addiert werden. Die Einzelwerte der Arbeiten sucht man am besten mit Hilfe

Abb. 454.



je einer Integralkurve, deren Entwicklung für eine Dampfüberdruckkurve in Abb. 454 erläutert ist:

Man trägt auf der Grundlinie der gegebenen Kraftkurve im Kräftemaßstab die Strecke  $AB=1$  ab, zieht beliebige Ordinaten der Kraftkurve und überträgt sie auf die Senkrechte durch  $A$ ; zu den von  $B$  ausgehenden Strahlen laufen alsdann die Tangenten an die Arbeitskurve parallel. Um

diese selbst zu finden, beginnt man mit irgend einem Anfangswert für  $\mathcal{M}_k$  (in Abb. 454 mit Null) und setzt die Integralkurve aus lauter geraden Stückchen, die die Richtung der Tangenten haben, zusammen. Ist die Kraft konstant, wie z. B. der Tangentialwiderstand, so verläuft die Arbeitskurve geradlinig.

### 3. Die reduzierten Massen beim Kurbeltrieb.

Als Reduktionspunkt wählt man am besten den Kurbelzapfen. Die Masse  $M_2$  der Schubstange kann mit hinreichender Genauigkeit ersetzt werden durch eine Masse  $m_1 = \frac{J_2}{l^2}$  im Kurbelzapfen und eine Masse

$m_3 = M_2 - m_1$  im Kreuzkopfbolzen, wenn mit  $J_2$  das auf die Kreuzkopfbolzenmitte bezogene Trägheitsmoment der Schubstange und mit  $l$  die Stangenlänge bezeichnet wird. Im Durchschnitt kann man setzen:  $m_1 = 0,6 M_2$ ,  $m_3 = 0,4 M_2$ .

Ist das Trägheitsmoment der Kurbel einschließlich Schwungrad  $= J_1$ , der Kurbelhalbmesser  $r$ , so ist die reduzierte Masse von Kurbel und Schwungrad gleichbleibend  $= J_1 : r^2$ ; dazu kommt der gleichbleibende Wert  $m_1$ . Die Kolben- und Kreuzkopfmasse vermehrt um den Betrag  $m_3$  sei  $= M_3$ ; dann liefert  $M_3$  veränderliche Beiträge  $M_{r_3}$  zu der reduzierten Masse, die sich folgendermaßen bestimmen lassen.

Für unendliche Stangenlänge ( $\lambda = 0$ ) ist

$$M_{r_3} = M_3 \sin^2 \alpha;$$

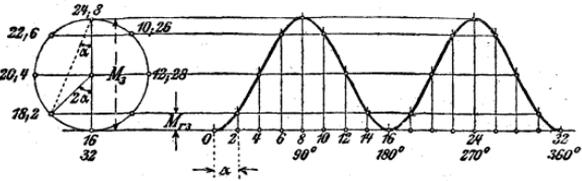
dieser Ausdruck läßt sich bequem konstruieren, wie Abb. 455 zeigt; es handelt sich um eine Sinuslinie mit zwei vollen Perioden für eine Kurbelumdrehung.

Für endliche Stangenlänge ( $\lambda = \lambda$ ) gilt

$$M_{r3} = M_3 \sin^2 \alpha (1 + 2\lambda \cos \alpha);$$

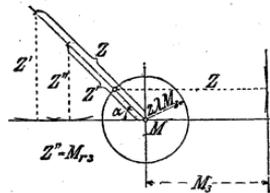
dieser Ausdruck läßt sich nach Abb. 456 konstruieren: Man schlage einen Kreis mit dem Halbmesser  $2\lambda M_3$ , von dessen Mittelpunkt man die Kurbelstellungen ausgehen läßt, und ziehe eine Senkrechte im Abstand  $M_3$  vom Mittelpunkt des Kreises entfernt; der senkrechte Abstand  $Z$  des Schnittpunktes von Kreis und Kurbelstellung beträgt dann  $Z = M_3 (1 + 2\lambda \cos \alpha)$ , ist also zweimal mit  $\sin \alpha$  zu multiplizieren, indem man  $Z$  auf der Kurbelstellung abträgt,  $Z' = Z \sin \alpha$  senkrecht herunter mißt,  $Z'$  auf der Kurbelstellung abträgt und wieder senkrecht hinunter mißt;  $Z'' = Z' \sin \alpha$  ist daher  $M_{r3}$ .

Abb. 455.



Für Mehrkurbelmaschinen finden sich die reduzierten Massen durch Addition der für die einzelnen Zylinder ermittelten Werte ihrer reduzierten Massen unter Berücksichtigung der Kurbelversetzungswinkel.

Abb. 456.



#### 4. Massenwuchtdiagramm.

Trägt man die zu den einzelnen Kurbelstellungen gehörigen reduzierten Massen  $M_r$  (oder auch die  $M_r$  entsprechenden Gewichte  $G_r = g M_r$ ) als Abszissen und die zu den gleichen Stellungen gehörenden Wuchtgrößen  $E = E_0 + \mathcal{U}_k$  als Ordinaten auf, so erhält man die Massenwuchtkurve, die zur Schwungradberechnung folgendermaßen zu benutzen ist.

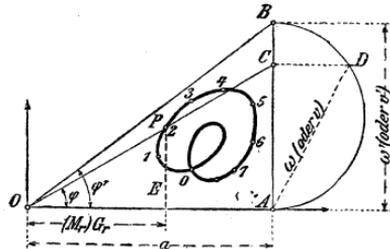
1. Aus  $G_r$  und  $E$  berechnet sich die der Stellung entsprechende **Kurbelzapfengeschwindigkeit**  $v$  oder die **Winkelgeschwindigkeit**  $\omega$  zu

$$v = \sqrt{\frac{2gE}{G_r}}, \quad \omega = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{2gE}{G_r}};$$

darin ist  $r$  = Kurbelhalbmesser. Bezeichnet (Abb. 457)  $\varphi$  den Winkel, den der nach einem Punkte  $P$  der Massenwuchtkurve vom Anfangspunkte  $O$  ausgezogene Strahl mit der Abszissenachse bildet, so ist

$$v = \sqrt{2g} \cdot \sqrt{\text{tg } \varphi}, \quad \omega = \frac{1}{r} \sqrt{2g} \cdot \sqrt{\text{tg } \varphi};$$

Abb. 457.



wächst also  $\varphi$ , so nimmt die Geschwindigkeit zu, wird  $\varphi$  kleiner, so nimmt die Geschwindigkeit ab. Der größten und der kleinsten Geschwindigkeit entsprechen die höchste und die tiefste durch  $O$  gehende Tangente an die Massenwuchtkurve.

Hat man für einen beliebigen Winkel  $\varphi'$  den zugehörigen Wert

$$v' = \sqrt{2g} \sqrt{\text{tg } \varphi'} \quad \text{oder} \quad \omega' = \frac{\sqrt{2g}}{r} \sqrt{\text{tg } \varphi'}$$

berechnet (besonders zweckmäÙig ist  $\varphi' = 45^\circ$  oder  $\varphi' = \varphi_{\max}$  zu nehmen), so kann man für jeden anderen Winkel den Wert von  $v$  oder  $\omega$  bequem aufsuchen, indem man (s. Abb. 457)  $v'$  oder  $\omega'$  als Ordinate  $AB$  zwischen Fahrstrahl und Abszissenachse einschiebt, über  $AB$  einen Halbkreis zeichnet, den beliebigen Strahl  $OP$  mit  $AB$  zum Schnitt in  $C$  bringt und  $CD$  horizontal bis zum Halbkreise über  $AB$  zieht;  $AD$  ist dann gleich dem zu  $\varphi$  gehörigen Wert von  $v$  oder  $\omega$ .

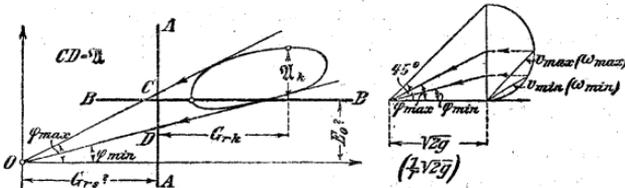
2. Bei der Schwungradberechnung ist das reduzierte Gewicht  $G_{rs}$  des Schwungrades in der Regel unbekannt, ebenso die Anfangswucht  $E_0$ ; dagegen kennt man bei vorgeschriebener mittlerer Geschwindigkeit  $v$  oder  $\omega$  und gegebenem Ungleichförmigkeitsgrad  $\delta_s$   $v_{\max}$  und  $v_{\min}$ : es ist nämlich

$$v_{\max} = v \left( 1 + \frac{\delta_s}{2} \right); \quad v_{\min} = v \left( 1 - \frac{\delta_s}{2} \right)$$

$$\omega_{\max} = \omega \left( 1 + \frac{\delta_s}{2} \right); \quad \omega_{\min} = \omega \left( 1 - \frac{\delta_s}{2} \right).$$

Hiermit können zunächst (Abb. 458 rechts) die Winkel  $\varphi_{\max}$  und  $\varphi_{\min}$ , d. h. die Richtungen der Fahrstrahlen festgelegt werden. Die

Abb. 458.



Massenwuchtkurve erhält man ohne Kenntnis des Koordinatenanfangspunktes  $O$ , indem man auf der beliebigen Horizontalen  $BB$  die reduzierten Gewichte  $G_{rk}$  des Kurbeltriebes (ohne Schwungradmasse) als Abszissen, die zu den gleichen Kurbelstellungen gehörigen Arbeitswerte  $U_k$  als Ordinaten aufträgt. Zieht man die berührenden Tangenten an die Massenwuchtkurve unter  $\varphi_{\max}$  und  $\varphi_{\min}$  geneigt, so liefern deren Schnittpunkt den Koordinatenanfangspunkt  $O$ , und der Abstand von  $O$  bis  $AA$  ist das reduzierte **Schwungradgewicht**. Bei den üblichen kleinen Werten von  $\delta_s$  wird  $G_{rs}$  im Verhältnis zu  $G_{rk}$  sehr groß, der Schnittpunkt  $O$  fällt sehr weit nach links und wird wegen des flachen Schnittes der beiden Strahlen unter  $\varphi_{\max}$  und  $\varphi_{\min}$  ziemlich ungenau. Man berechnet deshalb die Schwungradmasse  $M$  besser

nach der Grundgleichung  $\mathfrak{A} = J \omega^2 \delta_s = M V^2 \delta_s$ , wobei der vom Schwungrade aufzunehmende **Arbeitsüberschuss**  $\mathfrak{A}$  dem Massenwuchtdiagramm als Strecke  $CD$  (Abb. 458) entnommen wird, die auf der Senkrechten  $AA$  von den beiden äußersten Tangenten an die Massenwuchtkurve abgeschnitten wird.

## B. Kraftmaschinenregler.

### a. Allgemeines.

#### 1. Erklärungen.

Jeder brauchbare Regler muß auf allen Teilen seines Hubes **stabil** sein, d. h., fortschreitender Entfernung der Schwungmassen von der Achse muß ständiges Wachsen der Umlaufzahl entsprechen. Der umgekehrte, unbrauchbare Fall (**labil**) oder der indifferente Zustand (**astatisch**) kann durch den Regler allein oder durch die Anordnung der von ihm beeinflussten Teile verursacht sein.

**Statisch** sind Regler, wenn jeder höheren Muffenstellung eine größere minutliche Umlaufzahl entspricht.

**Astatisch** sind Regler, bei denen zu allen Muffenstellungen dieselbe Umlaufzahl gehört, die also nur bei einer einzigen Umlaufgeschwindigkeit in allen Muffenstellungen im Gleichgewicht sind. Bei allen übrigen Geschwindigkeiten verharren diese Regler an einer der beiden Hubbegrenzungen der Muffe.

**Pseudoastatisch** sind solche Regler, die sich dem astatischen Zustande stark nähern.

**Astatische Punkte** nennt man solche Stellungen der Schwungkörper, bei denen in zwei unendlich nahen Lagen die gleiche Winkelgeschwindigkeit vorhanden ist. Der Uebergang von labilen Lagen zu statischen und umgekehrt erfolgt in solchen astatischen Punkten.

Da bei den gebräuchlichsten Reglern Pendellagen in der Nähe astatischer Punkte benutzt werden, so darf man den Hub  $s$  eines in theoretischer Beziehung nicht genau bekannten Reglers nach keiner Richtung hin willkürlich erweitern, weil sonst labile Lagen herbeigeführt werden könnten.

**Ungleichförmigkeitsgrad**  $\delta$  heißt das Verhältnis des Unterschiedes zwischen der Umlaufzahl für die höchste und der für die niedrigste Muffenstellung zu der mittleren Umlaufzahl eines Reglers, der nicht mit dem Stellzeuge gekuppelt ist.

Von der richtigen Wahl des Ungleichförmigkeitsgrades hängt in erster Linie die Regelungsfähigkeit des Reglers ab. Wird  $\delta$  zu klein genommen, so vollführt der Regler bei Aenderung der Belastung der Maschine lang dauernde Pendelungen oder kommt nicht mehr zur Ruhe. Wird  $\delta$  zu groß gemacht, so nähert sich der Regler der neuen Gleichgewichtslage absatzweise in Perioden gleicher Dauer mit immer kleiner werdenden Wegstücken, erreicht also (theoretisch) die neue Lage erst in unendlich großer Zeit.

Der günstigste Ungleichförmigkeitsgrad, bei welchem ohne Ueberregeln sofort die neue Gleichgewichtslage erreicht wird, ist nach Tolle angenähert

$$\delta = 2 \sqrt[3]{\frac{s_r}{g T a^2}},$$

der kleinste zulässige Ungleichförmigkeitsgrad (ohne Anwendung einer Oelbremse) angenähert

$$\delta_{\min} = \sqrt[3]{\frac{s_r}{g T_a^2}},$$

worin

$T_a$  die Anlaufzeit in sk, d. h. die Zeit, in welcher der Motor vom Ruhezustande aus bei größter Füllung und ohne Belastung seine normale Umlaufzahl erlangt,

$g$  die Beschleunigung durch die Schwere = 981 cm/sk<sup>2</sup>,

$s_r$  den reduzierten Muffenhub des Reglers in cm

bedeutet, und zwar ist

$$s_r = \frac{\text{Summe aller Gewichte mal den Quadraten ihrer Wege}}{\text{Arbeitsvermögen des Reglers}}.$$

Bei Reglern mit verhältnismäßig großer Gewichtsbelastung der Muffe (großer Umlaufzahl) ist  $s_r \sim s$  = dem Muffenhub in cm. Federregler ergeben nur dann wesentlich kleinere Werte von  $s_r$  und gestatten somit kleinere Ungleichförmigkeitsgrade, wenn jede Gewichtsbelastung (außer der durch die Schwungmassen bedingten) vermieden, und wenn durch große Umlaufzahl und großen Abstand der Schwungmassen von der Spindel die Massen gering und ihr Ausschlag klein gehalten werden. (Vgl. die Angaben über  $s_r$  auf S. 1026 bis 1029.) Je kleiner  $s_r$  im Verhältnis zum wirklichen Hube, um so größer ist die Regelfähigkeit des Reglers, und um so kleiner darf unter gleichen Umständen  $\delta$  genommen werden.

Bezeichnet

$L$  die größte Leistung des Motors in mkg/sk,

$M$  die Masse des Schwungringes in  $\frac{\text{kg/sk}^2}{\text{m}}$ ,

$V$  dessen Geschwindigkeit in m/sk,

so ist die Anlaufzeit

$$T_a = \frac{MV^2}{L} \text{ sk.}$$

Kleine Werte von  $\delta$  erfordern also, da  $T_a$  gegen  $s_r$  im Quadrat erscheint, in erster Linie möglichst schwere Schwungräder bei großer Umfangsgeschwindigkeit.

Flüssigkeitskatarakte (Oelbremsen mit Hahn in dem Verbindungsrohre beider Kolbenseiten zum Berichtigten; senkrechte Stellung, damit der Kolben sich reibungsfrei im Zylinder bewegt) ermöglichen einen etwas kleineren Ungleichförmigkeitsgrad, als vorstehend angegeben, erzeugen aber durch ihren Widerstand größere Unempfindlichkeit.

**Unbeweglichkeits- oder Unempfindlichkeitsgrad  $\epsilon$ .** Der Widerstand  $P$ , den jeder mit Reguliervorrichtung verbundene Regler zu überwinden hat, gemessen an der Muffe im Sinne ihrer Verschiebung, setzt sich zusammen aus dem nützlichen Teile  $W$ , der durch das Stellzeug auf die Muffe übertragen wird, und dem von der Eigenreibung des Reglers herrührenden Teile  $R$ .  $P$  wirkt also, ähnlich wie die Reibung in einem Getriebe, stets der angestrebten Bewegung entgegen.

In jeder Stellung des durch die Kraft  $P$  belasteten Reglers tritt erst dann ein Steigen oder Sinken der Muffe ein, wenn die minutliche Umlaufzahl  $n$  eine bestimmte Aenderung in positivem oder negativem Sinne ( $+ \Delta n$  oder  $- \Delta n$ ) erfahren, d. h., wenn die Fliehkraft  $C$  der umlaufenden Schwungmassen um einen gewissen Betrag  $\Delta C$  zu- oder abgenommen hat. Die Muffe bleibt also bei einer Aenderung der Umlaufzahl zwischen  $n - \Delta n$  bis  $n + \Delta n$  unbeweglich oder unempfindlich; man bezeichnet das Verhältnis

$$\frac{(n + \Delta n) - (n - \Delta n)}{n} = \frac{2 \Delta n}{n} = \varepsilon$$

als den Unbeweglichkeits- oder Unempfindlichkeitsgrad.

Weil  $\Delta n$  im allgemeinen gegen  $n$  sehr klein ist, so ist auch angenähert

$$\varepsilon = \frac{(n + \Delta n)^2 - n^2}{n^2} = \frac{\Delta C}{C},$$

Der Unempfindlichkeitsgrad  $\varepsilon$  eines Reglers darf bei Maschinen mit hin und her gehender Bewegung nicht kleiner sein als der Ungleichförmigkeitsgrad  $\delta_s$  des zugehörigen Schwungrades (vgl. S. 999), wenn ein Zucken des Reglers während eines jeden Maschinenhubes vermieden werden soll. Manche Konstrukteure nehmen  $\varepsilon < \delta_s$ , um ein Tanzen des Reglers herbeizuführen, das den Regler absolut empfindlich macht und ferner die kleinen Geschwindigkeitsschwankungen beseitigt, die trotz gleichbleibender Maschinenbelastung innerhalb des Unempfindlichkeitsgrades auftreten.

**Muffendruck**  $S$  nennt man die Kraft, welche der ruhend und vom Stellzeuge nicht belastet gedachte Regler an der Muffe ausübt. Die Größe von  $S$  ist durch Auswägen des Muffendruckes bei ruhender Spindel für jede Muffenstellung praktisch leicht zu ermitteln.

Mit Hülfe des Muffendruckes  $S$  läßt sich  $\varepsilon$  auch schreiben:

$$\varepsilon = \frac{P}{S} = \frac{W + R}{S} = \frac{W}{S} + \frac{R}{S} = \varepsilon_w + \varepsilon_r.$$

Der Unempfindlichkeitsgrad  $\varepsilon$  setzt sich also aus zwei Teilen zusammen: aus

$\varepsilon_w$ , herrührend von der nützlichen Verstellkraft, und aus

$\varepsilon_r$ , bedingt durch die Eigenreibung des Reglers. Je niedriger  $\varepsilon_r$ , um so günstiger ist der Regler, um so größer darf bei vorgeschriebenem  $\varepsilon$  der nützliche Teil  $\varepsilon_w$  und um so kleiner demnach bei gegebener Verstellkraft  $W$  der Muffendruck  $S$  genommen werden.

Bei den meisten Reglern ist  $\varepsilon_r$  für die einzelnen Muffenstellungen verschieden. Zur vollständigen Beurteilung sind also Angaben von  $\varepsilon_r$  mindestens für die tiefste, mittlere und höchste Muffenstellung erforderlich. (Zahlenangaben für verschiedene Systeme s. S. 1026 bis 1028, Ermittlung von  $\varepsilon_r$  s. S. 1023.) Am zweckmäßigsten sind Regler mit möglichst unveränderlichem  $\varepsilon_r$ .

Von der Verstellkraft  $W$  ist meist nur ein Mittelwert bekannt; Abhängigkeit von den Muffenstellungen wird zwar häufig vorhanden, aber,

da meist unbekannt, nicht zu berücksichtigen, vielmehr gleichbleibende Verstellkraft  $W$  vorauszusetzen sein. [Bestimmung des Widerstandes  $W$  durch Auswägen an der vorhandenen Regelungsvorrichtung (unter Dampf), zweckmäßig mittels Federwage.]

Mit Rücksicht auf gleichbleibende Unempfindlichkeit für alle Muffenstellungen ist deshalb **unveränderlicher Muffendruck  $S$**  am günstigsten; bei Gewichtsbelastung der Muffe ist  $S$  für pseudoastatische Regler unveränderlich, wenn die Schwungmassen im Verhältnis zur Muffenbelastung klein, die Umlaufzahlen also groß gemacht werden. Viele der bekannten Regler mit Federbelastung zeigen starke Veränderlichkeit des Muffendruckes (Zunahme mit steigender Muffe bei Hartung, Trenck, Zabel, Steinle usw., Abnahme bei Proell); unveränderlichen Muffendruck haben die Federregler nach Tolle, die neueren Regler von Hartung und Steinle.

Unveränderlicher Muffendruck ermöglicht, ohne Aenderung des Ungleichförmigkeitsgrades die Hülsenbelastung zu vergrößern oder zu verkleinern und damit die Umlaufzahl zu ändern. Regler mit stark veränderlichem  $S$  erfordern auch genaues Auswuchten des Stellzeuges, damit nicht durch Be- oder Entlastung der Muffe der Ungleichförmigkeitsgrad verändert, z. B. labile Anordnung herbeigeführt wird.

**Gesamter Ungleichförmigkeitsgrad  $i$ .** Der gesamte und tatsächliche Ungleichförmigkeitsgrad, den der Regler für die Maschine herbeiführt, beträgt angenähert

$$i = \delta + \varepsilon;$$

er entspricht dem mit dem Stellzeuge gekuppelten Regler.

Der Wert von  $i$  ist schließlich für die größten auftretenden Geschwindigkeitsschwankungen des Motors maßgebend. Da sich  $\varepsilon$  und  $\delta$  gegenseitig bedingen ( $\varepsilon$  soll  $\sim \delta$  sein), so gestatten nur solche Regler die geringsten Schwankungen, die sowohl kleine Unempfindlichkeitsgrade  $\varepsilon$  (geringe Eigenreibung und großer Muffendruck) als auch kleine Ungleichförmigkeitsgrade  $\delta$  (Federbelastung, kleine Schwungmassen mit möglichst kleinen Ausschlägen) zulassen; außerdem muß natürlich der Motor selbst einen niedrigen Ungleichförmigkeitsgrad  $\delta_s$  des Schwungrades besitzen (da  $\varepsilon \geq \delta_s$ ).

**Arbeitsvermögen** des Reglers nennt man das Produkt aus dem mittleren Muffendruck  $S_m$  und dem Muffenhube  $s$ , also

$$\text{Arbeitsvermögen } \mathfrak{A} = S_m s = \int S ds.$$

**Unmittelbar wirkende Regler** sind beständig mit dem Regulierwerke verbunden und verstellen dieses mit der Kraft  $W$ , entsprechend der Beziehung

$$W = \varepsilon S - R = (\varepsilon - \varepsilon_r) S.$$

Bei käuflichen, unmittelbar wirkenden Reglern ist meist die obere Grenze des Arbeitsvermögens  $\sim 15$  bis  $18$  mkg bei Belastung der Muffe ausschließlich durch Gewichte; bei Belastung durch Federkraft steigt  $\mathfrak{A}$  bis auf etwa  $90$  mkg. Bei den größeren Nummern ist zu prüfen, ob nicht die Anlage eines mittelbar wirkenden Reglers billiger ausfällt.

**Mittelbar wirkende Regler mit Stellhemmung** kuppeln nur an den Hubgrenzen mittels der Kraft  $W$  eine Hilfskraft mit der Regelungsvorrichtung. Sie gestatten die Verwendung eines kleinen Muffenhubes.

was einen geringen Ungleichförmigkeitsgrad  $\delta$  zur Folge hat; da auch  $W$  klein gehalten werden kann, so ist es möglich, trotz großen Kraftbedarfs für Wasserschützen, Rider- und Meyer-Steuerung usw. noch mit dem üblichen Aufwande von Reglermassen den gesamten Ungleichförmigkeitsgrad  $i$  in niedrigen Grenzen zu halten. Sie sind jedoch durch die Regler mit Hilfsmotor fast ganz verdrängt.

### Mittelbar wirkende Regler mit Hilfsmotor s. S. 1029.

**Leistungsregler\***) für Pumpwerke, von F. J. Weiss in Basel eingeführt, erstreben nicht, wie die gewöhnlichen (Geschwindigkeits-)Regler, eine möglichst gleichbleibende Umlaufzahl der Maschine bei verschiedener Belastung, sondern gestatten bei gleicher Hubarbeit stark wechselnde Maschinengeschwindigkeit. Die Leistungsregler sind daher sehr stark statisch (Ungleichförmigkeitsgrad  $\delta$  bis zu 5,6). Indem die Lage der Reglermuffe zur Steuerung nach Belieben abgeändert werden kann, wird es möglich, dem gleichen Füllungsgrade der Dampfmaschine verschiedene Muffenstellungen, also auch verschiedene Umlaufzahlen des Reglers zuzuordnen.

Die Weisschen Regler haben Gewichtsbelastung; bequemer kann man stark statische Regler durch Federbelastung erzielen und dadurch sowohl die dynamische Wirkung verbessern wie auch die Eigenreibung bedeutend vermindern. (Regler von Tolle und von Stumpf, letztere mit astatischem Sicherheitshub).

**Beharrungsregler.** Ein Fliehkraftregler (meist Flachregler) wird mit einer Hilfsschwungmasse verbunden, die entweder mit der Fliehmasse des Reglers zu einem starren Stück vereinigt ist, oder um einen besonderen Bolzen (am besten um die Reglerachse) drehbar schwingt und an der Bewegung der Fliehmasse vermöge zwangläufiger Verbindung durch Zugstangen usw. teilnimmt. Der tangentialer Trägheitswiderstand der Hilfsschwungmasse (der sogen. Beharrungsmasse), der bei einer Aenderung der Winkelgeschwindigkeit der Reglerspindel wachgerufen wird, überträgt sich auf den eigentlichen Fliehkraftpendelregler und vergrößert dessen Verstellkraft.

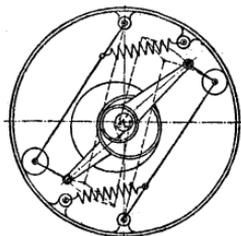
## 2. Einteilung der Fliehkraftregler.

Man unterscheidet:

a) Muffenregler, bei denen die Relativverschiebung der Schwungkörper gegen die Reglerwelle auf eine Muffe, die sich auf der Welle in der Längsrichtung verschiebt, übertragen und von dort mittels eines sich nicht drehenden Gleitringes auf das Steuerungsgestänge abgeleitet wird;

b) Achsenregler, bei denen sich die äußere Steuerung auf der Reglerwelle befindet, mit dieser sich gleichzeitig dreht und durch die Relativbewegung der Reglerschwungmassen eine Relativverschiebung erfährt (s. Abb. 459).

Abb. 459.



\*) Vrgl. Z. d. V. d. I. 1891 S. 1065 u. f.

Weiter kann man unterscheiden:

1. Kegelregler, bei denen die Schwungkörper um Zapfen schwingen, die senkrecht zur Reglerspindel stehen, und

2. Flachregler, bei denen die Schwungkörper sich in Ebenen senkrecht zur Reglerwelle bewegen. Die Muffenregler sind Kegel- oder Flachregler, die Achsenregler meist Flachregler.

Als Mittel zur Uebertragung der Bewegung der Schwungkörper auf die Muffe kommen als einfachste nur in Betracht:

- a) das Schubkurbelgetriebe und
- b) die Kurbelschleife.

Dabei können die Schwungmassen sich entweder um einen festen Drehpunkt an der Spindel (mit ihren sämtlichen Punkten in Kreisen) bewegen (unmittelbare Aufhängung) oder mit einem Gliede des Getriebes (z. B. der Lenkstange des Kurbelgetriebes) verbunden sein, wobei ihre einzelnen Punkte verschiedene Bahnen beschreiben (umgekehrte Aufhängung).

Die Fliehkraft der umlaufenden Schwungmassen wird im Gleichgewichte gehalten

1. entweder durch die Gewichtwirkung der Schwungmassen allein oder in Verbindung mit einer Gewichtbelastung der Hülse (Gewichtregler) oder
2. durch Federbelastungen (Federregler). Federregler ergeben wegen der geringeren zu beschleunigenden Massen einen kleineren reduzierten Muffenhub (vgl. S. 1016) und gestatten deshalb bei gleicher Regelungsfähigkeit einen kleineren Ungleichförmigkeitsgrad.

## b. Untersuchung und Berechnung der Fliehkraftregler auf Grund von Diagrammen.\*)

### 1. C-Kurven, Ungleichförmigkeitsgrad.

Bestimmt man für einen gegebenen Kegelregler durch Zeichnung oder Rechnung die Kräfte  $C$ , die im Schwerpunkte der Schwungmassen, winkelrecht zur Spindel nach außen wirkend, den belastenden Kräften (Hülsen-gewicht  $Q$ , Gewicht der Schwungkörper  $G$  und Federbelastung  $F$ ) in den verschiedenen Reglerstellungen das Gleichgewicht halten, und trägt diese als Ordinaten von einer Achse  $ON$  aus senkrecht unter den Schwerpunkten  $M$  ab, so liegen die Endpunkte auf der **Charakteristik** oder **C-Kurve** des Reglers (Abb. 460 bis 465). Um den Einfluß der einzelnen Größen zu erkennen, empfiehlt es sich, die Anteile, welche  $G$ ,  $Q$  und  $F$  zu  $C$  beitragen, d. h. die Kraft  $C_g$ , welche  $G$  allein, die Kraft  $C_q$ , welche  $Q$  allein, und  $C_f$ , welche  $F$  allein das Gleichgewicht halten würden, getrennt zu ermitteln und ebenso als Ordinaten zu einer  $C_g$ ,  $C_q$ - und  $C_f$ -Kurve aufzutragen.

Im folgenden sind stets **alle Kräfte auf eine Schwungmasse** bezogen gedacht; es bedeute also

- $G$  das Gewicht und  $M$  die Masse aller Schwungkörper zusammen,
- $C$  deren gesamte Fliehkraft,
- $Q$  die Hülsenbelastung,
- $x$  den Abstand des Schwerpunktes  $M$  von der Spindel,

\*) S. M. Tolle, Die Regelung der Kraftmaschinen, 2. Aufl.

dann ergibt sich die Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  und die minutliche Umlaufzahl  $n$  aus  $C$ :

$$C = \omega^2 M x = \left(\frac{n}{30}\right)^2 \frac{\pi^2}{g} G x$$

(wenn  $x$  in m gemessen, so wird  $\frac{\pi^2}{g} \sim 1$ ).

Das Arbeitsvermögen eines Reglers ist gleich dem Inhalte der von der  $C$ -Kurve, der  $ON$ -Achse und den beiden Endwerten der  $C$ -Kräfte eingeschlossenen Fläche ( $M =$  Fläche  $AP_uP_oB$  in Abb. 460).

Ist der Regler astatich, so ist die  $C$ -Kurve eine Gerade durch  $O$ .

Wächst der Winkel  $\varphi$ , den der Strahl  $OP$  in Abb. 460 mit der Achse  $ON$  bildet, mit wachsendem Pendelausschlage, so ist der Regler stabil, nimmt  $\varphi$  mit zunehmendem  $x$  ab, so ist der Regler labil. Der Berührungspunkt einer Tangente, die von  $O$  aus an die  $C$ -Kurve gezogen werden kann, bedeutet einen astatichen Punkt ( $P_a$  in Abb. 461 u. 462); falls nicht zufällig  $P_a$  ein Wendepunkt der  $C$ -Kurve ist, trennt  $P_a$  den

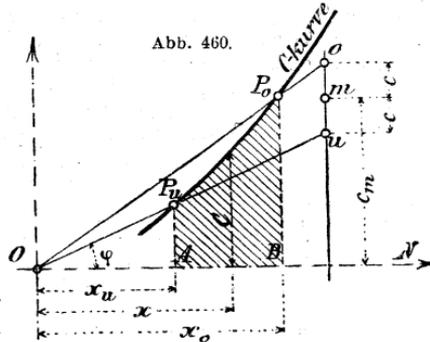


Abb. 460.

Abb. 461.

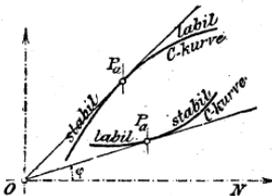


Abb. 462.



brauchbaren Teil — Regler stabil — von dem unbrauchbaren — Regler labil. Ist  $OP_a$  eine Wendetangente, so kann der Regler ganz stabil oder ganz labil sein (Abb. 462).

Zieht man in Abb. 460 durch die Endpunkte  $P_u$  und  $P_o$  des benutzten Teiles der  $C$ -Kurve Strahlen von  $O$  aus, schneidet diese durch eine beliebige Senkrechte in  $o$  und  $u$  und mißt die Strecke  $c_m$  von  $ON$  bis zur Mitte  $m$  zwischen  $o$  und  $u$ , so erhält man den **Ungleichförmigkeitsgrad**

$$J = \frac{c}{c_m}$$

Soll umgekehrt zu einer gegebenen tiefsten Muffenstellung die einem vorgeschriebenen Ungleichförmigkeitsgrade  $J$  (vgl. S. 1015) ent-

sprechende höchste Stellung ermittelt werden, so ziehe man  $Ou$  durch  $P_u$ , trage  $uo = 2c = 2\delta c_m$  nach oben ab und schneide mit  $Oo$  die  $C$ -Kurve im gesuchten höchsten Punkte  $P_o$ .

Da sich die  $C$ -Kurven **unabhängig** von der Lage der Spindel ergeben, so kann nachträglich beim Entwerfe eines Reglers der Ungleichförmigkeitsgrad  $\delta$  durch Verlegen der Spindel beliebig abgeändert werden:

rückt man die Spindel nach den Schwungmassen hin, so nimmt  $\delta$  ab, rückt man die Spindel von den Schwungmassen ab, so wächst  $\delta$ .

In der Nähe eines astatischen Punktes  $P_a$  ist  $\delta$  am leichtesten klein zu halten; deshalb verwendet man meist solche Stücke der  $C$ -Kurve, die ungefähr mit  $P_a$  beginnen und stabil sind. Ist die  $C$ -Kurve, wie bei den meisten Reglern, oben konkav, so liegt ihre benutzbare Strecke oberhalb des astatischen Punktes; ist sie oben konvex, so liegt jene Strecke unterhalb dieses Punktes.

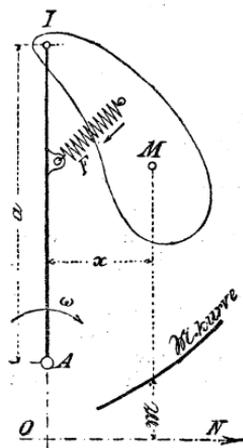
Vorstehende Beziehungen gelten nur, wenn die Schwungkörper so gestaltet sind, daß ihre Trägheitsmomente, bezogen auf Schwerachsen, die die Spindel schneiden, gleich groß sind, was z. B. für Umdrehungskörper zutrifft, deren Drehachse senkrecht zur Pendelebene steht. Schneidet eine Trägheitshauptachse der Schwungkörper deren Zapfenmitte, so ist die  $C$ -Kurve für konstante Winkelgeschwindigkeit zwar auch eine Gerade, die aber nicht durch  $O$  geht; in allen anderen Fällen ist die astatische  $C$ -Kurve eine krumme Linie (s. Tollé, Reg. d. Kr., 2. Aufl., S. 450).

Die den einzelnen Belastungen (Gewicht  $G$  der Schwungkörper, Muffenbelastung  $Q$ , Federkraft  $F$ ) entsprechenden  $C$ -Kurven geben Aufschluß, ob und wie weit eine Aenderung dieser Größen zulässig ist. Hat z. B. die  $C_q$ -Kurve den gleichen Charakter wie die gesamte  $C$ -Kurve (ist sie annähernd astatisch), so darf  $G$  ohne Beeinflussung von  $\delta$  abgeändert werden; ist die  $C_q$ -Kurve genau oder annähernd astatisch, so kann die Hülsenbelastung (z. B. zur Erhöhung der Umlaufzahl) vergrößert werden.

Regler mit astatischer  $C_q$ -Kurve erfahren auch durch grössere Verstellkräfte keine Aenderung ihres Ungleichförmigkeitsgrades; labile Anordnungen infolge des Stellzeuges sind deshalb hier ausgeschlossen.

Anspannen von Federn bedeutet Hinzufügen einer unveränderlichen Kraft; ergibt eine an Stelle der Feder gedachte unveränderliche Kraft eine astatische  $C$ -Kurve, so ist Anspannen der Feder zulässig. Federregler mit Federkraft unmittelbar an der Hülse gestatten also nur dann Aenderung der Umlaufzahl durch Aenderung der Federspannung, wenn die  $C_q$ -Kurve astatisch ist; andernfalls, z. B. wenn die  $C_q$ -Kurve (wie bei Trenck, Zabel, Hartung, Steinle) stark labil ist, wird durch Spannen der Feder labile Anordnung herbeigeführt.

Abb. 463.



reglers, der sich um  $A$  dreht, und bedeutet

Ist in Abb. 463  $M$  der Schwerpunkt des beliebig gestalteten Schwungkörpers eines **Flach-** die Achse  $A$  mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$

$a$  den Abstand des Zapfenmittelpunktes I von der Drehachse A,  $\mathfrak{M}$  das Moment der Fliehkraft des Pendels von der Masse  $M$  und dem Gewichte  $G$ , das dem Momente der belastenden Federkräfte in den einzelnen Stellungen das Gleichgewicht zu halten hat, so bleiben vorstehende Beziehungen gültig, wenn man von einer zu  $AI$  winkelrechten Achse  $ON$  aus unter  $M$  die Momente  $\mathfrak{M}$  als Ordinaten errichtet. Die  $\mathfrak{M}$ -Kurve ist dann genau so zu benutzen wie die  $C$ -Kurve beim Kegelregler. Hier gilt zur Bestimmung von  $\omega$  und  $n$ :

$$\mathfrak{M} = \omega^2 a M x = \left(\frac{n}{30}\right)^2 \frac{\pi^2}{g} a G x.$$

Rückt man beim Entwurfe Schwungkörper samt angreifender Feder in der Richtung  $AI$  von  $A$  fort, so bleibt die  $\mathfrak{M}$ -Kurve und der Anfangspunkt  $O$ , demnach auch der Ungleichförmigkeitsgrad erhalten; es ändert sich nur  $a$  und damit die Umlaufzahl gemäß vorstehender Gleichung.

## 2. Regler mit Schubkurbelgetriebe und Gewichtbelastung.

### 1. Direkte Aufhängung des Pendels.

Für den allgemeinen Fall ergibt Abb. 464 alle erforderlichen Größen durch Zeichnung, wie folgt:

$C_g$ : trage vom festen Pendeldrehpunkte I aus  $G$  nach unten, ziehe  $gg$  wagerecht; auf dieser schneiden die Strahlen  $IM$  die Werte  $C_g$  ab.

$C_q$ : trage von I aus  $Q$  nach oben ab, ziehe  $qq$  wagerecht, bringe die Wagerechte durch  $M$  mit der Lenkstange  $II$   $III$  zum Schnitt in  $B$ , ziehe  $BID$ , ferner  $IA$  parallel  $III$   $II$ , so ist  $DA$  auf  $qq$  gelegen =  $C_q$ .

$C = C_g + C_q$ .

**Muffendruck  $S$ :** Stets ist

$$\frac{S}{C} = \frac{Q}{C_q}, \text{ deshalb } S \text{ als}$$

Höhe aus einem zu  $DA$  ähnlichen Dreieck mit  $C$  als Grundlinie zu entnehmen.

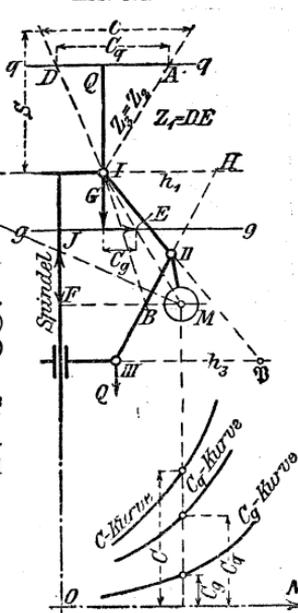
**Zapfendrucke:**  $Z_3$  (für den Zapfen III) =  $Z_2$  (für Zapfen II) =  $I A$ .  $Z_1$  (für Zapfen I) = Strecke  $DE$ .

Hieraus die Zapfendurchmesser  $d_1$ ,  $d_2$  und  $d_3$ .

**Eigenrelbung  $R$**  (auf die Hülse bezogen): entnimmt die Längen  $I H = h_1$  und  $III \mathfrak{B} = h_3$ , so ist

$$R = \frac{\mu}{2 h_1} (Z_1 d_1 + Z_2 d_2) + \frac{\mu}{2 h_3} (Z_2 d_2 + Z_3 d_3),$$

Abb. 464.



und wenn  $d_1 = d_2 = d_3 = d$ :

$$R = \frac{\mu d}{2} \left( \frac{Z_1 + Z_2}{h_1} + \frac{Z_2 + Z_3}{h_3} \right)$$

$$\epsilon_r = \frac{R}{S}; \quad \epsilon_w = \frac{W}{S}; \quad \epsilon = \epsilon_r + \epsilon_w.$$

$\mathcal{J}$  ( $= c:cm$ ) nach Abb. 460. Arbeitsvermögen nach Abb. 460.

Für **rhombische Aufhängung** (I und III haben gleichen Abstand von der Spindel,  $I II = II III$ , I, II, M liegen auf einer Geraden), d. h., bei den Reglern von Watt, Porter und Kley sind die  $C_g$ -,  $C_q$ - und C-Kurve von gleicher Gestalt, Q und G können, ohne  $\mathcal{J}$  zu beeinflussen, beliebig abgeändert werden; Muffendruck  $S$  unveränderlich; Eigenreibung  $R$  und somit  $\epsilon_r$ , am geringsten für Ausschlagwinkel  $= 45^\circ$ , zur Erzielung von genügend kleinem  $\mathcal{J}$ , dann Kreuzung der Stangen erforderlich. Je größer ferner  $G$  gegen  $Q$ , je niedriger also die Umlaufzahl gewählt wird, um so größer  $h_1$  und  $h_3$  in Abb. 464, d. h. je mehr Platz bei gleichem Muffendruck gestattet ist, um so kleiner fällt  $\epsilon_r$ , aus.

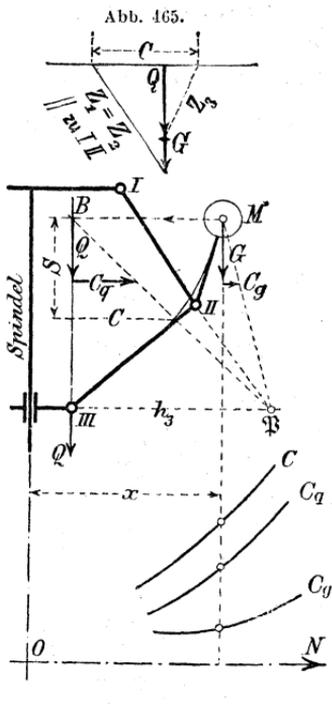


Abb. 465.

Nach Bartl\*) ergibt die Zeichnung durch Abtragen von  $IK = \frac{Q}{G} \cdot IH$ , Ziehen der Geraden  $KM$  und  $FM$  in der Strecke  $JF'$  den Wert von  $\frac{g}{\omega^2}$ , worin  $g = 9,81$  und  $\omega$  die Winkelgeschwindigkeit des Reglers bedeutet.

## 2. Umgekehrte Aufhängung des Pendels.

Für den allgemeinen Fall ergibt Abb. 465 durch Zeichnung:

$C_g$ : Bringe I II mit der Wagerechten durch III zum Schnitt im Pole P, ziehe  $M P$ , trage von  $M$  aus  $G$  nach unten ab; auf der Wagerechten durch den Endpunkt von  $G$  schneidet  $M P$  dann  $C_g$  ab.

$C_q$ : Ziehe die Wagerechte  $M B$ , mifs von  $B$  aus  $Q$  nach unten und lege durch den Endpunkt von  $Q$  eine Wagerechte; auf dieser schneidet  $B P$   $C_q$  ab.

$$C = C_g + C_q.$$

\*) Vgl. Civilingenieur 1893, 1896; dann auch Bartl, Die Berechnung der Zentrifugalregulatoren (Leipzig 1900). Dasselbst sind auch einfache Verfahren zur Ausmittlung von  $S$ , der Eigenreibung und des Einflusses der Stangenmassen angegeben.

**S:** Stets ist  $\frac{S}{C} = \frac{Q}{C_q}$ , deshalb  $S$  als Höhe aus einem Dreieck mit  $C$  als Grundlinie zu entnehmen, ähnlich dem, durch welches  $C_q$  aus  $Q$  gefunden wurde.

**Zapfendücke:** Trage von einer Wagerechten aus (Abb. 465 oben)  $Q + G$  nach unten ab, ziehe durch den Endpunkte von  $G$  eine Parallele zu I II, deren Länge =  $Z_1 = Z_2$  wird, und misß auf der Wagerechten  $C$  ab; der Endpunkte von  $C$  hat vom Endpunkte der Kraft  $Q$  einen Abstand =  $Z_3$ .

$R$  und  $\epsilon_r$ , wie unter 1. Ungleichförmigkeitsgrad  $\delta$  und Arbeitsvermögen nach Abb. 460 S. 1021.

Für **rhombische Aufhängung** sind die  $C_g$ ,  $C_q$  und  $C$ -Kurven von gleicher Gestalt (u. zw. wie bei direkter Aufhängung). Die umgekehrte Aufhängung des Pendels bietet keine Vorteile; Nachteile: bei gleichen Gewichten kleinerer Muffendruck und größere Eigenreibung ( $\epsilon_r$  wird um so größer, je größer  $G$  gegen  $Q$ , je kleiner also die Umlaufzahl genommen wird).

Verlegt man die Schwungmassenmittelpunkte  $M$  nach der Spindel

Abb. 466. Proell.

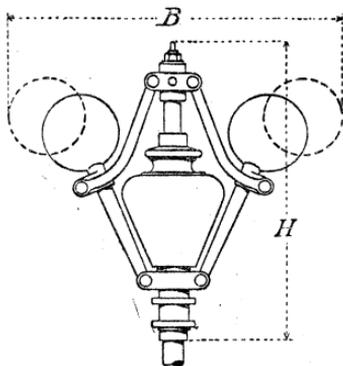
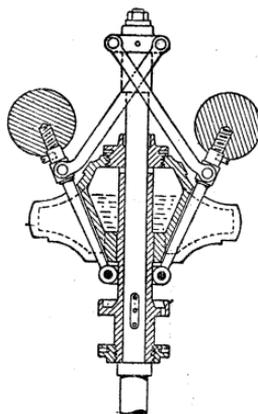


Abb. 467. Steinle.



zu (Regler von Proell, Abb. 466) oder kreuzt man nur die Stangen I II (nach Steinle, Abb. 467), so wird zunächst die  $C_q$ -Kurve labil, während die  $C_g$ -Kurve noch statisch bleibt. Durch Ausgleich beider erhält die gesamte  $C$ -Kurve die gewünschte Annäherung an die Astasie. Vergrößerung von  $Q$  vergrößert  $\delta$ , Vergrößerung von  $G$  vermindert  $\delta$ .

$$\epsilon_r = 1 \text{ bis } 1,5 \text{ vH.}$$

### c. Käufliche Federregler.

#### $\alpha$ ) Regler mit Längsfeder.

Da die  $C_q$ -Kurve bei den Reglern (nur) mit einer Feder an der Muffe stark labil sein muß, so bewirkt Aenderung der Muffenbelastung

starke Aenderung des Ungleichförmigkeitsgrades, das Stellzeug ist also genau auszugleichen.

### 1. Regler von R. Trenck, Erfurt, mit Gewicht- und Federbelastung.

Nach Abb. 468; Spannmutter der Feder unzugänglich. Aenderung der Umlaufzahl durch Aenderung der Federspannung ist unzulässig, deshalb wird eine besondere Einrichtung zur Aenderung der Umlaufzahl geliefert.  $C_g$ -Kurve astatisch; Energie nach oben zu stark zunehmend.  $\varepsilon_r \sim 1$  vH. Der reduzierte Hub  $s_r$  (s. S. 1016) ist i. M. gleich  $\frac{1}{2} s$ , gleich dem halben Muffenhube.

**Trenck-Regler.** (Abb. 468.)

Nr. des Reglers . . . . .	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Minutliche Umlaufzahl $n$ . . .	300	280	260	240	220	200	180	160	160
Mittlerer Muffendruck $S$ . kg	42	63	100	162	240	340	450	610	760
Muffenhub $s$ . . . . . mm	30	40	50	60	70	80	95	115	115
Arbeitsvermögen $\mathcal{A}$ . . mkg	1,3	2,5	5	9,7	16,8	27,2	42,7	70	87,5
Größte Breite $B$ . . . mm	300	365	430	510	600	700	820	950	990
Größte Höhe $H$ . . . mm	355	425	490	570	670	780	910	1075	1075

Abb. 468.

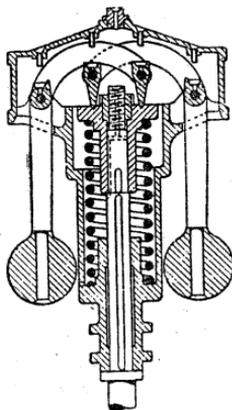
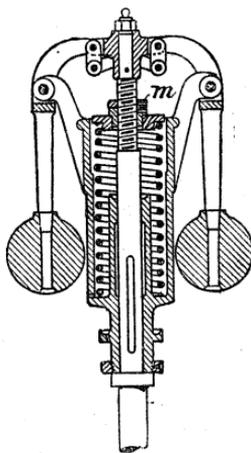


Abb. 469.



### 2. Federregler von Zabel & Co., Quedlinburg.

Nach Abb. 469; Spannmutter der Feder freigelegt zum Ausgleichen der Be- oder Entlastung durch das Stellzeug.  $C_g$ ,  $C_g$ ,  $S$ ,  $\varepsilon_r$  wie vorstehend bei Trenck. Reduzierter Hub  $s_r = 0,3$  bis  $0,4 s$ .

Erhöhung der Umlaufzahl durch 2 oder 3 Zusatzfedern.

**Zabel-Regler.** (Abb. 469.)

Nr. des Reglers . . . . .	1	2	3	4	5	6	7
Minutliche Umlaufzahl $n$ . . .	240	220	200	190	180	160	150
Mittlerer Muffendruck $S$ . kg	58	75	113	163	275	425	625
Muffenhub $s$ . . . . . mm	40	50	60	70	80	95	110
Arbeitsvermögen $\mathcal{A}$ . . . mkg	2,32	3,75	6,78	11,4	22,0	40,4	68,8
Größte Breite $B$ . . . . mm	380	430	520	610	710	830	960
Größte Höhe $H$ . . . . mm	380	440	530	630	730	850	950

**3. Federregler von Franz Beyer & Co., Erfurt.**

Nicht blofs die Umlaufzahl (durch Veränderung der Federspannung), sondern auch der Ungleichförmigkeitsgrad ist von aufsen einstellbar. Letzteres wird ermöglicht durch Verdrehen des oberen Federtellers (Abb. 470). Gröfseren Ungleichförmigkeitsgraden entspricht eine geringere Anzahl der wirksamen Federgänge.

$\beta$ ) Regler mit Querfedern.

Hier kann die  $C_q$ -Kurve beliebig gemacht werden; es empfiehlt sich, den Uebertragungsmechanismus so zu wählen, dafs die  $C_q$ -Kurve

Abb. 470.

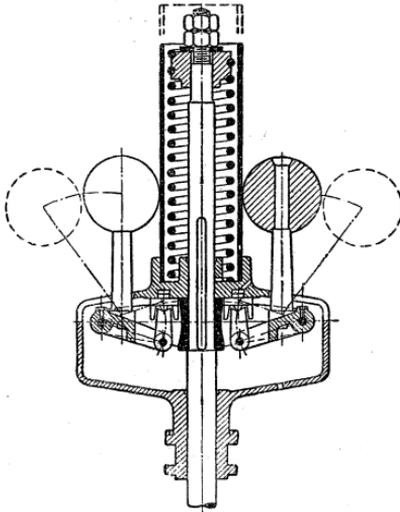
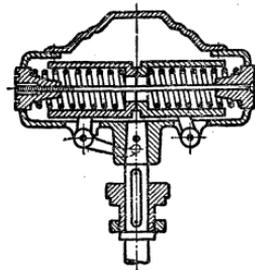


Abb. 471.



astatisch wird; dann ist beliebige Aenderung der Muffenbelastung zulässig.

**1. Federregler von H. Hartung Nachf., Düsseldorf.**

Bei den älteren Reglern (Abb. 471) ist  $C_q$  konstant (stark labil), daher Muffendruck  $E$  nach oben stark zunehmend.  $C_q$  nimmt proportional mit dem Pendelausschlage von  $+$  durch 0 nach  $-$  ab, also sehr labil; Eigenreibung, d. h.  $\epsilon_r$ , sehr gering, i. M.  $\epsilon_r = 0,3$  vH (ohne Muffenbelastung); für je  $1/10$  des Muffendrucks als zusätzliche Muffen-

belastung wird  $\varepsilon_r$  um  $\sim 0,2$  vH größer,  $s_r$  (s. S. 1016)  $= \frac{1}{5} s$  für die kleineren, bis  $\frac{1}{3} s$  für die größeren Nummern. Aenderungen der Umlaufzahl nur innerhalb enger Grenzen möglich.

Bei den neueren Reglern ist die  $C_q$ -Kurve fast astatisch, daher Aenderung der Muffenbelastung oder -Entlastung in beliebigen Grenzen möglich.

## 2. Regler von Steinle u. Hartung, Quedlinburg (Abb. 472).

Führung der Schwungkörper durch Parallelenkerführung fast genau in Geraden rechtwinklig zur Spindel; die  $C_q$ -Kurve ist astatisch, die Eigenreibung besonders klein,  $\varepsilon_r = 0,20$  bis  $0,14$  vH, selbst mit Federwage zur Erhöhung der Umdrehzahl um  $10$  vH noch  $\varepsilon_r = 0,37$  bis  $0,43$  vH.

Abb. 472.

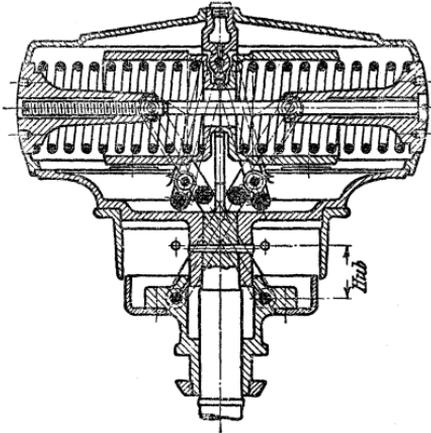
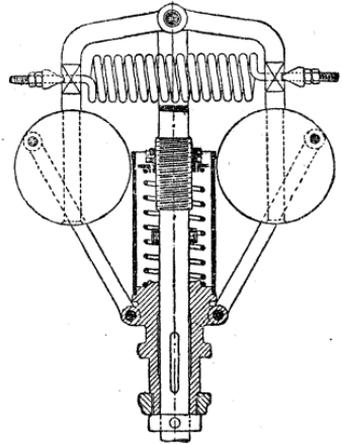


Abb. 473.



## 3. Federregler von Tolle.

Nach Abb. 473. Verkleinerung oder Vergrößerung des Ungleichförmigkeitsgrades durch Spannen oder Entspannen der Querfeder; Aenderung der Umlaufzahl ohne Beeinflussung von  $d$  durch Spannen oder Entspannen der Längsfeder in beliebigen Grenzen.  $C_q$  astatisch, ebenso  $C_g$ , Muffendruck unveränderlich; bei Ausführung nach Abb. 473  $\varepsilon_r = 0,5$  vH;  $s_r$  (s. S. 1016)  $= \frac{1}{12} s$  für die kleineren, bis  $\frac{1}{15} s$  für die größeren Nummern (sehr gering).

Außer den unten aufgeführten normalen Federreglern, deren Umlaufzahl durch Aenderung der Federspannung um  $15$  vH geändert werden kann, werden Regler mit Aenderung der Umlaufzahl während des Ganges 1) bis zu  $15$  vH, 2) bis  $50$  vH und 3) bis  $100$  vH geliefert.

**Federregler nach Tolle.** (Abb. 473.)

Nr. des Reglers . .	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Minutl. Umlaufzahl <i>n</i>	360	340	320	300	300	300	300	290	280	260	250	230	220
Muffendruck <i>S</i> . kg	31	53	80	112	130	151	175	212	252	296	394	567	770
Muffenhub <i>s</i> . . mm	28	33	38	44	48	51	55	60	66	72	82	100	115
Arbeitsvermögen mkg	0,87	1,75	3,1	4,9	6,2	7,7	9,6	12,7	16,6	21,3	37,4	56,7	88,5
Größte Breite <i>B</i> mm	260	306	358	410	438	474	510	560	608	666	762	910	1054
Größte Höhe <i>H</i> mm	278	322	383	426	457	485	534	581	634	685	791	940	1095

**d. Mittelbare Regelung.**

α) Bestandteile und Wirkungsweise der hydraulischen Regler.

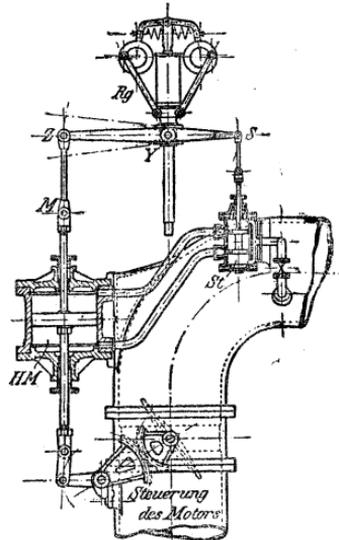
**1. Allgemeines.**

Praktisch kommen zur Zeit nur noch mittelbare Regler mit Hilfsmotor in Betracht; die sogen. mechanischen Regulatoren, bei denen als Hilfskraft zur Steuerungsverstellung ein Teil der vom Hauptmotor erzeugten, z. B. durch Riemenwendegetriebe abgeleiteten mechanischen Arbeit benutzt wird, werden wegen ihres verwickelten Baues und ihrer langsamen Wirkung bei besseren Regelungen kaum noch angewandt. Fast immer benutzt man sogen. hydraulische Regler, deren Hauptwirkung darin besteht, daß Pressflüssigkeit den Kolben eines Hilfsmotors verschiebt, dessen Bewegung auf die Steuerung der Hauptmaschine übertragen und der von einer durch den Flichkraftregler bewegten Hilfssteuerung beherrscht wird. Als Pressflüssigkeit dient bei Wasserturbinen, falls das Druckwasser rein ist und mindestens 3 bis 4 at Pressung hat, das Triebwasser selbst, sonst Oel, das durch Kapselpumpen auf 6 bis 10 at oder durch Mehrzylinderkolbenpumpen auf 12 bis 20 at gepresst wird. Meist läuft die Presspumpe ununterbrochen; das Pressöl fließt, soweit es nicht vom Hilfsmotor gebraucht wird, durch einen Rücklauf wieder in den Vorratsbehälter.

**2. Hydraulische Regler mit starrer Rückführung.**

Abb. 474 zeigt die wesentlichen Bestandteile eines hydraulischen Reglers und zwar der einfachsten Anordnung, eines Reglers

Abb. 474.



mit starrer Rückführung: *Rg* ist der Fliehkraftregler, *HM* der Hilfsmotor, *St* die Steuerung des Hilfsmotors, *MZ* die sogen. Rückführung, deren Wirkung darin besteht, daß der Drehpunkt *Z* des Reglerstellhebels *ZYS* nicht fest ist, sondern der Bewegung des Hilfsmotorkolbens folgt. Jedermal, nachdem eine Verstellung des Hilfsmotorkolbens durch Verschiebung der Reglermuffe und Einwirkung der Hilfssteuerung *St* erfolgt ist, muß diese wieder (bei anderer Lage der Reglermuffe) in die Mittelstellung zurückgeführt werden; dies geschieht durch die zwangläufige Verbindung des Hilfsmotorkolbens mit dem Reglerhebel. Ohne Rückführung ist eine richtige mittelbare Regelung unmöglich. Fast immer ist (wie in Abb. 476 angedeutet) eine Abstellvorrichtung vorgesehen, die auch zur Veränderung der Umdrehzahl innerhalb des Ungleichförmigkeitsgrades des Fliehkraftreglers dienen kann; zu diesem Zweck ist die Länge der Rückführstange *MZ* oder der Steuerstange *SSt* veränderlich. Verkürzt man *MZ* genügend, so bringt man *S* in die oberste Stellung, der Hilfsmotorkolben wird ebenfalls nach oben gedrängt, der Kraftzufluß zum Hauptrohr wird abgesperrt. Statt der starren Rückführung benutzt man auch die Muffen-

Abb. 475.

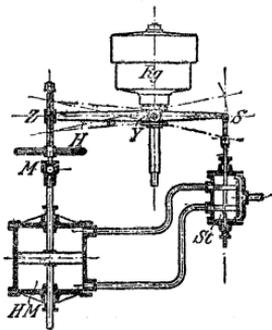
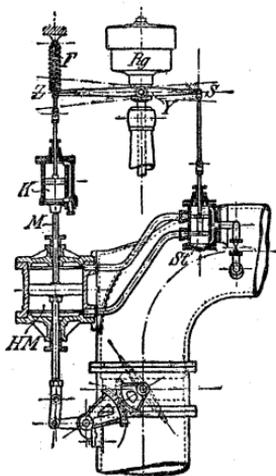


Abb. 476.



rückdrängung (nach Proell) oder die Tourenrückführung (beim Sturges Governor).

### 3. Isodromregler.

Die starre Rückführung ergibt wie bei unmittelbarer Einwirkung des Fliehkraftreglers auf die Hauptmaschinensteuerung für jeden Belastungsgrad eine andere Umdrehzahl (entsprechend der Ungleichförmigkeit des Reglers); die mittelbare Regelung ermöglicht aber auch genau die gleiche Umdrehzahl für alle Belastungsgrade. Solche Anordnungen heißen Isodromregler; sie haben (siehe Abb. 476) nachgiebige Rückführung, bestehend aus einer Rückführstange *MZ* von veränderlicher Länge, deren Aenderung nur mit Ueberwindung des Widerstandes einer Oelbremse *K* erfolgen kann, und aus einer Rück-

drängung des Rückführpunktes  $Z$  in die Mittellage durch Federkraft ( $F$  in Abb. 476) oder durch Flüssigkeitsdruck (wie z. B. bei dem Sturgess Governor). Ruhestellung des hydraulischen Reglers ist trotz verschiedener Stellung des Hilfsmotorkolbens hier nur möglich, wenn der Reglerhebel  $ZYS$  horizontal steht, der Regler  $Rg$  sich in Mittellage befindet, d. h. der Motor stets genau die gleiche Umdrehzahl hat. Durch Aenderung der Rückdrängung des Hebelpunktes  $Z$  läßt sich dem Motor eine beliebige, von dem Ungleichförmigkeitsgrad des Reglers abweichende Ungleichförmigkeit erteilen, sogar einer größeren Belastung eine größere Umdrehzahl zuordnen, ohne daß die Stabilität der Regelung verloren geht.

## β) Theorie der mittelbaren Regelung.

### 1. Grundgrößen.

Für die Wirkungsweise der hydraulischen Regler sind vor allem folgende Zeitkonstanten maßgebend:

$T_a$  = Anlaufzeit der Kraftmaschine (s. S. 1016);

$T_s$  = Schlußzeit des Hilfsmotors, d. i. ist die Zeit, in der bei unveränderlicher Geschwindigkeit der Hilfsmotorkolben seinen ganzen Hub durchläuft oder in der, falls die Geschwindigkeit des Hilfsmotorkolbens von der Stellung der Hilfssteuerung abhängt, der Hilfsmotorkolben bei größter Geschwindigkeit seinen ganzen Hub zurücklegt;

$T_r$  = halbe Fallzeit des Reglers =  $\sqrt{\frac{sr}{2g}}$ , d. i. die Hälfte der Zeit, in der ein stillstehender Regler, aus seiner obersten Stellung losgelassen, bis in die unterste Stellung gelangt;

$T_k$  = halbe Kataraktzeit des Reglers, d. i. die Hälfte der Zeit, in welcher der mit einer Oelbremse versehene stillstehende Regler durch den Muffendruck unter Ueberwindung des Widerstandes der Oelbremse mit gleichbleibender Geschwindigkeit den ganzen Muffenhub durchlaufen würde;

$T_i$  = Isodromzeit =  $\frac{k_i}{f_i}$ , wenn  $k_i$  der Widerstand der Oelbremse  $K$  in der Rückführungsstange (s. Abb. 476) für die Geschwindigkeit 1 cm/sk und  $f_i$  die Federkraft bedeutet, die bei einer Längenänderung der Rückführungsfeder ( $F$  in Abb. 476) um 1 cm entsteht. Für  $T_i = 0$  fehlt die Rückführung, für  $T_i = \infty$  ist die Rückführung starr.

Zur Beurteilung der Regelungsvorgänge eignen sich am besten folgende verhältnismäßigen Abweichungen:

$\varphi$  = Geschwindigkeitsabweichung =  $\frac{\Delta\omega}{\omega_m}$ , d. i. das Verhältnis des Unterschiedes  $\Delta\omega$  zwischen der augenblicklichen Winkelgeschwindigkeit und der anzustrebenden, der neuen Belastung entsprechenden Winkelgeschwindigkeit zu der mittleren Winkelgeschwindigkeit  $\omega_m$ ;

$\eta$  = Reglerabweichung =  $\frac{y}{y_{\max}}$ , d. i. das Verhältnis des Abstandes  $y$  der Muffe von der anzustrebenden Muffenstellung zum ganzen Muffenhub  $y_{\max}$ ;

$\mu$  = Motorabweichung =  $\frac{m}{m_{\max}}$ , d. i. das Verhältnis des augenblicklichen Abstandes des Hilfsmotorkolbens von der anzustrebenden Gleichgewichtsstellung zum ganzen Weg  $m_{\max}$  des Hilfsmotorkolbens.

Ist  $\mu = 0$ , so ist die richtige Füllung des Hauptmotors eingestellt; für  $\mu = 1$  stellt der Hilfsmotor die größte Füllung ein, während der Hauptmotor unbelastet ist.

$\sigma$  = Steuerungsverstellung =  $\frac{s}{s_{\max}}$ , d. i. die Verschiebung der Steuerung des Hilfsmotors aus der Mittellage im Verhältnis zur größten Ausweichung  $s_{\max}$  nach unten oder oben von der Mittellage.

$\zeta$  = Rückführungsabweichung =  $\frac{z}{z_{\max}}$ , d. i. das Verhältnis des Abstandes  $z$  des Rückführpunktes  $Z$  von der höchsten Lage zum ganzen Ausschlag  $z_{\max}$  des Rückführpunktes.

Zwischen den vorstehenden Größen bestehen folgende Grundgleichungen:

die Reglergleichung:  $T_r^2 \eta'' + T_k \eta' + \sigma \eta + \varphi = 0$

„ Motorgleichung:  $\mu = T_a \varphi'$

„ Steuerungsgleichung:  $\sigma = \eta - \zeta$

„ Rückführungsgleichung:  $\zeta + T_i \zeta' - \beta T_i \mu' = 0$

$$\left( \text{worin } \beta = \frac{m_{\max}}{z_{\max}} \right)$$

„ Hilfsmotorgleichung:  $\mu' = \frac{\sigma}{T_s}$  für den Fall veränderlicher Geschwindigkeit des Hilfsmotorkolbens oder

$$\mu' = \pm \frac{1}{T_s}$$

für den Fall konstanter Geschwindigkeit des Hilfsmotorkolbens.

$\eta'$  und  $\eta''$  sind der erste und zweite Differentialquotient von  $\eta$  nach der Zeit  $t$ , dsgl.  $\varphi'$ ,  $\mu'$  und  $\zeta'$  der erste Differentialquotient von  $\varphi$ ,  $\mu$  und  $\zeta$ .

## 2. Beurteilung der Regelungsvorgänge.

a) Regler mit veränderlicher Geschwindigkeit des Hilfsmotorkolbens.

Aus den Grundgleichungen ergeben sich für  $\varphi$  bis  $\zeta$  Gleichungen derselben Gestalt (nur mit verschiedenen Konstanten); für den Regler mit **starrer Rückführung** wird:

$$\varphi = C_1 e^{w_1 t} + C_2 e^{w_2 t} + C_3 e^{w_3 t} + C_4 e^{w_4 t},$$

worin  $w_1$  bis  $w_4$  die Wurzeln  $w$  der charakteristischen Gleichung:

$$T_a T_s T_r^2 w^4 + (T_a T_r^2 + T_a T_s T_k) w^3 + (\delta T_a T_s + T_a T_k) w^2 + \delta T_a w + 1 = 0.$$

Der Vorgang ist nur dann stabil, d. h.  $\varphi$  nähert sich der Grenze Null, wenn sämtliche Wurzeln  $w$  negativ sind oder negative reelle Teile haben; daraus ergibt sich die Stabilitätsbedingung:

$$\delta^2 T_a T_s^2 T_k + \delta T_a (T_r^2 + T_s T_k) T_k - (T_r^2 + T_s T_k)^2 > 0$$

oder mit den Verhältniszahlen

$$\tau_a = \frac{T_a}{T_s}; \quad \tau_k = \frac{T_k}{T_s} \quad \text{und} \quad \tau_r = \frac{T_r}{T_s};$$

$$\delta^2 \tau_a \tau_k + \delta \tau_a \tau_k (\tau_r^2 + \tau_k) - (\tau_r^2 + \tau_k)^2 > 0.$$

Hiernach ist erforderlich 1. ein positiver Ungleichförmigkeitsgrad  $\delta$  und 2. eine Oelbremse für den Regler; man kommt mit einer möglichst schwachen Oelbremse aus ( $\tau_k$  wird am kleinsten) für

$$\tau_k = \frac{\delta + \tau_r^2}{\delta - \tau_r^2} \tau_r^2 \sim \tau_r^2;$$

in diesem Falle muß sein

$$\tau_a \geq \left( \frac{2 \tau_r}{\delta + \tau_r^2} \right)^2 \gtrsim \left( \frac{2 \tau_r}{\delta} \right)^2.$$

Der Regler soll also ein möglichst kleines  $T_r$ , d. h. einen möglichst kleinen reduzierten Muffenhub haben, und  $\delta$  darf nicht zu klein genommen werden. Bei den modernen Turbinenreglern ist  $T_r$  meist so klein, daß  $\tau_r \sim 0$  gesetzt werden, daß gleichsam der Regler als masselos gelten kann; mit dieser Näherungsannahme werden in der Regel die Untersuchungen der mittelbaren Regler durchgeführt, wie auch nachstehend geschieht.

Für den **masselosen Isodromregler** wird:

$$\varphi = C_1 e^{w_1 t} + e^{p t} (C_2 \cos q t + C_3 \sin q t),$$

worin  $w_1$  die reelle Wurzel der charakteristischen Gleichung:

$$w^3 + \left( \frac{1}{T_i} + \frac{\beta}{T_s} \right) w^2 + \frac{w}{\delta T_a T_s} + \frac{1}{\delta T_a T_s T_i} = 0$$

und  $w_2 = p + q i, \quad w_3 = p - q i$

deren komplexe Wurzeln sind. Für den (seltener vorkommenden) Fall, daß alle drei Wurzeln reell sind (aperiodische Regelung), ist

$$\varphi = C_1' e^{w_1 t} + C_2' e^{w_2 t} + C_3' e^{w_3 t}.$$

Die Konstanten  $C_1$  bis  $C_3$  finden sich

$$C_1 = -\frac{\lambda}{T_a} \frac{2p}{(p - w_1)^2 + q^2}; \quad C_2 = -C_1;$$

$$C_3 = \frac{\lambda}{T_a} \frac{1}{q} \frac{q^2 - p^2 + w_1^2}{(p - w_1)^2 + q^2},$$

wenn mit  $\lambda$  die verhältnismäßige Entlastung der Maschine bezeichnet wird. Hiernach lassen sich die auftretenden Geschwindigkeitsschwankungen durch Aufzeichnen einer Kurve für  $\varphi$  bequem untersuchen. Nachstehende Tabelle gibt für einige gebräuchliche Verhältnisse die größten auftretenden Geschwindigkeitsschwankungen  $\varphi_{\max}$  und die Zeit  $t_1$  bis zur Erreichung dieses Maximums an; je größer  $\varphi_{\max}$  und  $t_1$ , um so ungünstiger ist der Regelungsverlauf.

Annahmen	$\varphi_{\max}$	$t_1$	
$\delta \tau_a = 0,05$	$\tau_i = 0$	$0,35 T_s$	
	$\tau_i = 0,5$ und $\beta = 2$	$0,40 T_s$	
	$\tau_i = 2,5$ und $\beta = 2$	$0,41 T_s$	
$\delta \tau_a = 0,25$	$\tau_i = 0$	$0,78 T_s$	
	$\tau_i = 0,5$ und $\beta = 2$	$1,00 T_s$	
	$\tau_i = 2,5$	$\beta = 2$	$1,10 T_s$
		$\beta = 1$	$0,90 T_s$
fast aperiodisch:			
$\delta \tau_a = 0,5;$ $\tau_i = 1,5;$ $\beta = 1$	$2,55 \lambda \delta$	$1,85 T_s$	
$\delta \tau_a = 1,0;$ $\tau_i = 3,0;$ $\beta = 1$	$1,50 \lambda \delta$	$2,12 T_s$	
$\delta \tau_a = 1,5;$ $\tau_i = 4,5;$ $\beta = 1$	$1,08 \lambda \delta$	$2,90 T_s$	
$\delta \tau_a = 2,0;$ $\tau_i = 6,0;$ $\beta = 1$	$0,98 \lambda \delta$	$3,60 T_s$	
aperiodisch:			
$\delta \tau_a = 2,37;$ $\tau_i = 8,0;$ $\beta = 1$	$0,95 \lambda \delta$	$4,32 T_s$	

Vergrößert man alle Zeitkonstanten auf das  $m$ -fache, so verlaufen die Regelungsvorgänge genau wie vorher, nur erfordern sämtliche entsprechenden Vorgänge die  $m$ -fache Zeit.

Versieht man einen Isodromregler mit einer Vorrichtung, durch die die Hauptmaschine einen (positiven oder negativen) Ungleichförmigkeitsgrad  $i\delta$  erhält, so darf die Masse  $M_i$  der Isodromeinrichtung höchstens so groß werden, daß sie der Gleichung genügt

$$\frac{M_i}{k_i} < \frac{\beta}{i} T_i + \frac{\delta T_a T_s}{T_i + i\delta T_a}$$

Für negatives  $i$  wird schon bei masseloser Isodromeinrichtung die Regelung labil, wenn der Absolutbetrag

$$i \geq \frac{\beta T_i^2}{\delta T_a (T_s + \beta T_i)}$$

b) Regler mit unveränderlicher Geschwindigkeit des Hilfsmotorkolbens.

Bei dieser Annahme kann die Verfolgung der Regelungsvorgänge nur zeichnerisch geschehen, da sich die Geschwindigkeit des Hilfsmotorkolbens sprunghaft ändert,  $\mu' = + \frac{1}{T_s}$  bei Umsteuerung des

Hilfsmotors in  $\mu' = -\frac{1}{T_s}$  überspringt. Die aus  $\mu' = \pm \frac{1}{T_s}$  folgenden Geraden

$$\mu = \mu_0 \pm \frac{t}{T_s}$$

heißen **Motorgerade**; ihre Ordinaten, gemessen von der der neuen Gleichgewichtslage entsprechenden Horizontalen NN, sind die Motorabweichungen  $\mu$ , bedeuten die in jedem Augenblick eingestellte Füllung des Hauptmotors (vgl. Abb. 477).

Die Rückführungsgleichung wird mit vorstehendem Wert von  $\mu$ :

$$\zeta = C e^{-\frac{t}{T_i}} \pm \frac{\beta T_i}{T_s};$$

sie stellt eine logarithmische Linie dar, die für jede Periode nur eine andere Konstante  $C$  aufweist; die ganze **Rückführungskurve** setzt sich also aus Stücken derselben logarithmischen Linie zusammen, welche in horizontaler Richtung so verschoben sind, daß (abwechselnd die konkave Seite nach unten und nach oben gerichtet) die Stücke ununterbrochen aneinandergereiht erscheinen (vgl. Abb. 478).

Bei starrer Rückführung fallen die Rückführungskurven und die Motorgeraden zusammen.

Die Motorgleichung lautet integriert:

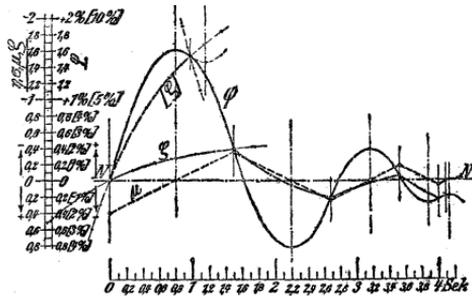
$$\varphi = \varphi_0 + \frac{\mu_0}{T_a} t \pm \frac{1}{2 T_a T_s} t^2;$$

sie stellt mit  $t$  als Abszissen und  $\varphi$  als Ordinaten eine Parabel, die **Geschwindigkeitsparabel** dar; bei jedem Vorzeichenwechsel von  $\sigma$ , d. h. mit jeder neuen Periode, beginnt eine neue Geschwindigkeitsparabel, jedoch mit dem gleichen Parameter  $p = T_a T_s$ . Die ganze Geschwindigkeitslinie zeigt sich als stetig verlaufende Wellenlinie, die einzelnen Parabelstücke setzen sich ohne Knick aneinander.

Abb. 477.



Abb. 478.



Nach der Reglergleichung  $T_r^2 \eta'' + T_k \eta' + \delta \eta + \varphi = 0$  wird die **Reglerabweichung**

$$\eta = e^{p t} (C_1 \cos q e t + C_2 \sin q e t) - \frac{\varphi}{\delta} + A + B t,$$

setzt sich also zusammen aus den Beträgen der Eigenschwingung des Reglers, aus dem der Geschwindigkeitsabweichung  $\varphi$  entsprechenden Betrage und aus einem mit der Zeit  $t$  linear veränderlichen Anteil. Die Aufzeichnung einer  $\eta$ -Kurve macht danach ziemlich Schwierigkeiten; man begnügt sich meist damit, einen masselosen Regler ( $T_r = 0$  und  $T_k = 0$ ) anzunehmen und erhält dann

$$\eta = -\frac{\varphi}{\delta};$$

abgesehen von dem Faktor  $-\frac{1}{\delta}$  werden  $\eta$  und  $\varphi$  identisch, d. h. die  $\eta$ -Kurve kann gleichzeitig als  $\eta$ -Kurve dienen.

Mit Hilfe der  $\eta$ -Kurve und der Rückführungskurve läßt sich der Regelungsvorgang verfolgen: jedesmal wenn  $\sigma = \eta - \zeta = 0$  wird, wird der Hilfsmotor umgesteuert, eine neue Periode beginnt in dem Augenblick, in dem sich die  $\eta$ -Kurve und die  $\zeta$ -Kurve schneiden. Man reißt nun  $\varphi$ -Parabel, Motorgerade,  $\eta$ -Kurve und  $\zeta$ -Kurve so lange aneinander, bis für  $\sigma = 0$   $\varphi$ ,  $\mu$  und  $\zeta$  den der anzustrebenden Gleichgewichtslage entsprechenden Wert annehmen.

Für den masselosen Regler mit starrer Rückführung beschränkt sich das Verfahren auf das Zeichnen einer Geschwindigkeitslinie (bestehend aus den  $\varphi$ -Parabeln) und der Motorgeraden (vgl. Abb. 477). Bei Aenderung des Ungleichförmigkeitsgrades  $\delta$  behält man die  $\varphi$ -Linie bei, ändert nur den Maststab für  $\varphi$  und gibt der  $\mu$ -Linie (eigentlich wird  $\mu \delta = \zeta \delta$  abgetragen) die entsprechende andere Neigung. Je größer  $\delta$ , um so schneller wird hier die neue Gleichgewichtslage erreicht. Trägt man in die erste Geschwindigkeitsparabel alle Motorgeraden so ein, daß sie sich zu einer ununterbrochenen Zickzacklinie zusammensetzen, so entsteht das Proellsche Diagramm.

Besonders nacheilig machen sich Verzögerung der Verstellbewegung (durch Spielräume in den Gelenken und Ueberdeckungen des Steuerkolbens) und die Unempfindlichkeit des Reglers bemerkbar, sind daher auf das kleinste Maß zu beschränken. Infolge eines Unempfindlichkeitsgrades  $\varepsilon$  z. B. tritt eine bleibende Geschwindigkeitsschwankung  $\pm \varphi_b$  auf, die  $\varepsilon$  weit übertreffen kann:

$$2 \varphi_b = \left( \frac{\varepsilon}{2 \delta} \right)^2 \frac{T_s}{T_a},$$

die also besonders bei kleinen Ungleichförmigkeitsgraden und großer Schlufszeit sehr groß ausfällt, wenn nicht  $\varepsilon$  ganz außerordentlich klein ( $< \frac{1}{2} vH$ ) gemacht wird.

# ANHANG.

## A. Münztafel.

GW. = Gold-, SW. = Silber-, DW. = Doppel-, PW. = Papierwährung.

Ländernamen	Münzsorten	Deutsche	
		<i>M</i>	<i>S</i>
<b>Abessinien.</b>	1 Maria-Theresien-Taler (Ber) . . . . .	4	21
	1 Menelik-Doll (Talari) zu 28,075 g 0,835 f. Silb. zu 16 Guerche . . . . .	2	—
<b>Afghanistan.</b>	1 Tilla Gold . . . . .	11	90
<b>Ägypten.</b> (GW.)	1 Sequin (ägypt. Pfd.) Gold zu 100 Piaster zu 10 Oaschrel-Gersch (7,4375 g Gold) . . . . .	20	75
	1 Beutel zu 500 Piaster	—	20,75
	1 Piaster (Tarif-, Regierungs-) zu 40 Para (Medini) zu 12 Gedid (Silber) . . . . .	—	20,75
<b>Arabien.</b>	1 Kurant-Piaster etwa 1/2 Tarif-Piaster.	—	—
	1 Krusch zu 40 Diwani . . . . .	1	67,5
	1 Mahmudi zu 20 Gafs . . . . .	—	21,4
	1 Mokkataler zu 80 Cabir . . . . .	3	55
	1 Maria-Theresien-Taler (Silberwert*) . . . . .	1	73
<b>Argentinien.</b> (GW. fakt. PW.)	1 Peso nacional (Gold) zu 100 Centavos . . . . .	4	05
	1 Peso fuerto (früher) . . . . .	3	87,7
	1 Papier-Peso offiziell = 0,44 Gold-Peso Goldstücke: 5 und 2 1/2 Pesos; Silberstücke: 1 Peso, 50, 20 und 10 Centavos.	1	78
	(Als neue Münzeinheit der Goldpiaster im Werte von in Aussicht genommen.)	1	78
<b>Belgien.</b> (DW.)	Wie Frankreich.	—	—
<b>Bolivien.</b> (SW.)	1 Boliviano (Peso nacional), Silberwert 1,56 M. zu 100 Centavos . . . . .	4	05
<b>Brasilien.</b> (GW. fakt. PW.)	10 Milreis (Goldstück) = 16,432 g Gold . . . . .	22	93
	1 Conto di Reis (Rechnungsmünze, Rs. 1:000 \$ 000) = 1000 Milreis (Rs. 1 \$ 000) . . . . .	2292	75
	1 Milreis zu 1000 Reis Silber-Schm.	—	—
	1 Cruzado zu 4 Tostoes zu 5 Vintem = \$ 400 Silber-Schm.	—	—
	1 Papiermilreis ~ 12 Pence . . . . .	1	02,1
<b>Bulgarien</b> u. Ostrumelien. (DW.)	1 Lew (Franc) zu 100 Stotinki . . . . .	—	81
	Wenige eigene Goldmünzen, nur Silbermünzen und in Gold einlösbare Banknoten.	—	—
<b>Chile.</b> (GW. fakt. PW.)	1 Peso (nuevo) Silber zu 100 Centavos . . . . .	1	53
	1 Peso oriente . . . . .	3	05
	1 Colon zu 11,982, 1 Dublone zu 5,991, 1 Escudo zu 2,9955 g 11/12 fein Gold = gesetzl. Goldmünzen, aber nicht im Umlaufe befindlich.	—	—
<b>China.**</b> (SW.)	Man zahlt in Silber und Gold nach Gewicht (Taël).	—	—
	1 Haikuan = (Regierungs-) Taël = 1,114 Shanghai- oder 1,1015 Swatau- oder 1,05 Tientsin-Taël usw., amtlich unter Zugrundelegung des längst nicht mehr bestehenden Gold-Silber-Verhältnisses 15,5:1 . . . . .	6	41
	1 Shanghai-Taël hat 38,46 g f. Silber, mithin Wert von 1 Haikuan-Taël bei dem Preise: 1 Unze Standard-Silber = 25 Pence = 2,13 <i>M</i> (1 kg f. Silber = 73,97 <i>M</i> ). Einzigste Münze: Käsch (Li, Tangtisan, Sapek, Pitie) aus Kupfer und Zinn; 1600 bis 1700 Käsch = 1 Taël Silber.	2	76

\* Als Silberwert ist in der Tafel angenommen 25 Pence für 1 Unze Standard-Silber (s. Anm. auf folg. Seite). Londoner Börsenkurs im März 1911 ~ 24,4 Pence.

\*\* Neue Währung in Aussicht genommen unter Zugrundelegung eines Dezimalsystems mit einem Silberdollar als Einheitsmünze (Gewicht = 7 Mahs, 2 Condorinen, vrgl. S. 1051). 1 Taël = 1,5 Silberdollar.

Ländernamen	Münzsorten	Deutsche	
		<i>M</i>	<i>ſ</i>
<b>Columbia.</b> (GW.)	1 Goldpeso zu 100 Cents . . . . .	4	05
	1 Papierpeso (= $\frac{1}{100}$ Goldpeso) . . . . .	—	04
<b>Costarica.</b> (GW.)	1 Colon = 0,7002 g f. Gold zu 100 Cents	1	95,4
	2-, 5-, 10-, 20-Colonstücke in Gold; 5-, 10-, 25-, 50-Centstücke in Silber.		
<b>Cuba.</b>	1 Peso = 0,6, 1 Peseta = 0,12, 1 Real = 0,06 \$.		
<b>Dänemark.</b> (GW.)	10-Kronenstück = 4,03225 f. Gold . . . . .	11	25
	1 Krone Silber zu 100 Oere . . . . .	1	12,5
Westindien.	1 Taler (auch Dollar) zu 100 Schillinge (Cents) . . . .	4	05 auch 19
	Seit 1905 GW. mit dem Franc als Münzeinheit.		
<b>Deutsches Reich.*)</b> (GW.)	1 Mark ( <i>M</i> ) zu 100 Pfennig ( <i>ſ</i> ) . . . . .	1	—
	1 Krone mit 3,584 g Gold . . . . .	10	—
	Bei $\frac{9}{10}$ Feingehalt wiegen 2511 Mark in Gold 1 kg (Rauhgewicht); dsgl. 180 Mark in Silber 1 kg.*)		
	In Gold: 20- u. 10-Markstücke von 8 u. 4 g Gewicht.		
	In Silber: 5-, 3-, 2-, 1-, $\frac{1}{2}$ -Markstücke.		
	In Nickel: 25-, 10-, 5-Pfennigstücke.		
	In Kupferbronze: 2- und 1-Pfennigstücke.		
	Fürther: 1 Taler = 30 Groschen zu 12 Pfennig . . . .	3	—
	7 Gulden süddeutsche Währung = 4 Taler.		
	1 kg f. Gold = 2790 Mark *)		
	In den Kolonien deutsche Reichswährung; auch die indische Rupie . . . . . =	1	36
<b>Dominikanische Republik.</b> (GW.)	faktisch PW. 1 Peso nacional (Gourde). . . . .	4	05
	Jetzt der nordamerikanische Golddollar Grundlage des Geldwesens.		
<b>Ecuador.</b> (GW.)	1 Condor mit 7,3224 g f. Gold zu 10 Sucré zu 100 Cents	20	43
<b>Frankreich.**)</b> (DW. fakt. GW.)	1 Franc = 20 Sous = 100 Centimes . . . . .	—	81
	1 20-Francstück mit 5,806 g Gold ( $\frac{9}{10}$ Feingehalt) . .	16	20
1 kg fein Gold = 3444,44 Francs } Gold = 15,5			
	1 kg fein Silber = 222,22 Francs } Silber = 15,5		
	3100 Frcs. Gold bzw. 40 silb. 5-Francstücke wiegen 1 kg.		
	In den Kolonien Franc-Währung, außerdem in		
<b>Tunis.</b>	1 Piaster (Sbiglen) zu 16 Karruben zu $3\frac{1}{2}$ Asper Silber	—	43,6
Vorderindien u. Cochinchina.	1 Goldpagode zu $3\frac{1}{2}$ Rupien zu 8 Fanous zu 24 Käsch	6	72
	1 Silberrupie . . . . .	1	36
Indochina.	1 Piaster Silber (24,49 g f. Silb.), Silberwert 1,81 Mark	4	40

\*) Durch Einführung der Goldwährung in Deutschland (Münzgesetze vom 4. Dezember 1871 und 9. Juli 1873) ist das Marksilber zur Scheidemünze herabgesetzt und das frühere Wertverhältnis zwischen Gold und Silber 15,5:1 hinfällig geworden. Wenn heute die Börsennotiz in London für 1 (Troy-) Unze Standard-Silber (Feingehalt 0,925) z. B. 25 Pence ist (am 9. Juli 1873 war sie  $60\frac{7}{8}$  Pence für 1 Unze; ferner ist 1 Unze = 31,103 496 g und 1 £ = 240 d = 20,43 Mark), so ist heute:

$$1 \text{ kg Feinsilber} = \frac{1000 \cdot 25 \cdot 20,43}{31,1035 \cdot 0,925 \cdot 240} = 73,97 \text{ M, oder Gold: Silber} = \frac{2790}{73,97} = 37,72:1.$$

Zur Ermittlung des Goldwertes der Silbermünzen würde also auf Grund des vorstehenden Kurses deren Silberwert mit 15,5:37,72 (= 25 d:  $60\frac{7}{8}$  d) = 0,411 zu multiplizieren sein. Hiernach wäre z. B. der Wert von 3 Mark Silber = 1,23 Mark Gold.

Nach dem Münzgesetze brauchen von dem als Scheidemünze geltenden Marksilber ( $\frac{1}{2}$ -, 1-, 2-, 3-, und 5-Markstücke) jedesmal nur für 20 Mark, von Nickel- und Kupfermünzen nur für 1 Mark in Zahlung angenommen zu werden. — In 200 Mark Silber ist 1 kg fein Silber enthalten.

\*\*) Frankreich steht in Münzunion mit Italien, Belgien, Griechenland und der Schweiz; diese Vereinigung wird lateinische Münzunion genannt; auch Luxemburg hat Franc-Währung.

Ländernamen	Münzsorten	Deutsche	
		<i>M</i>	<i>S</i>
<b>Frankreich.</b>			
Westindien.	100 Francs westind.-franz. Kurant = 54,054 Francs franz.	43	78,3
Réunion.	1 Piaster zu 100 Cents . . . . .	4	05
Madagaskar.	1 Parasana = 5 Francs, auch Maria-Theresien-Taler .	4	05
Neukaledonien und Tahiti.	1 Fünf-Francstück . . . . .	4	05
	1 Piaster . . . . .	3	76
<b>Griechenland.</b> (DW. fakt. PW.)	1 Neudrachme zu 100 Lepta . . . . .	—	8r
	1 Altdrachme zu 100 Lepta . . . . .	—	72,5
	1 20-Drachmenstück mit 5,8064 g Gold . . . . .	16	20
<b>Großbritannien.</b> (GW.)	1 Pfund Sterling od. 1 Sovereign (£) mit 7,3224 g Gold zu 20 Shilling (s) . . . . .	20	43
	1 Guinee zu 21 s . . . . .	2r	45
	1 Shilling = 12 Pence (deniers, d) zu 4 Farthings . . Silberscheidemünzen: 1 Shilling = 94 Pf, Kronen zu 5, Florins zu 2 s; sixpence, fourpence, three- pence zu 6, 4, 3 d.	1	02
	1 Troypfund Standard-(Münz-)Gold enthält 11 Unzen fein Gold = 46 £ 14,5 s, also ein Troypfund (12 Unzen) fein Gold = 50 £ 19,5 s.		
Cypern.	9 Kupferpiaster = 1 s.		
Indien.	1 Pfund Sterling zu 15 Rupien gesetzl. Zahlungsmittel 1 Rupie (10,692 g fein Silber) zu 16 Annas zu 12 Pie (oder 4 Pice) gesetzl. = 1 s 4 d . . . . .	1	36
	1 Crore zu 4 Arebs zu 25 Laes zu 100 000 Rupien = 10 Mill. Rupien.		
	1 Mohur mit 10,69 g Gold zu 15 Rupien (nominell) ~	29	83
	1 10-Rupienstück = 2 5-Rupienstücke in Gold . . .	19	89
Australien.	Englisches Geld.		
Kanada.	1 Dollar Kurant zu 100 Centimes zu 4 s 1 d 1 f. . .	4	19,8
	1 Sovereign = 4,86 \$. . . . .		
	1 Dollar . . . . .	4	24
Westindien.	Engl. Währung ohne Begrenzung der Zahlkraft von Silbergeld. Es kursieren Schillinge, Golddollar, Gold- dublonen (zu 64 s).		
Honduras.	1 Peso von Guatemala . . . . .	4	05
Afrika.	Engl. Geld; in Mauritius 1 indische Rupie . . . . .	1	36
Sansibar.	1 Nordamer.k. Dollar zu 2 Nusu zu 2 Ruba . . . . .	4	19
	1 Rupie . . . . .	1	36
	aufserdem Maria-Theresien-Taler (Januario).		
<b>Guatemala.</b> (SW. fakt. PW.)	1 Peso zu 100 Cents . . . . .	4	05
	1 Papierpeso . . . . .	—	64
<b>Haiti.</b> (DW. fakt. PW.)	1 Gourde zu 100 Cents . . . . .	4	05
	Silberwert . . . . .	1	85
	100 Gold-Gourde = 258 Papier-Gourde (1903)		
<b>Honduras.</b> (SW.)	1 Dollar zu 8 Reales oder 100 Cents (Silberwert 1,85 <i>M</i> )	4	05
<b>Italien.</b> (DW. fakt. GW.)	1 Lire (= 1 Franc) zu 100 Centesimi . . . . .	—	8r
	1 Scudo zu 5 Lire. 1 20-Lirestück mit 5,8064 g Gold	16	20
<b>Japan.</b> (GW.)	1 Goldyen zu 100 Sen zu 10 Rin . . . . .	2	09,2
	Goldstücke: 5, 10 (7,4999 g Gold), 20 Yen. Nickelstücke: 5 Sen; Kupferstücke: 1 und 5 Rin.		
<b>Korea.</b> (GW.)	1 Golddollar = 1 Yen = 2 alte Silberdollar zu 100 Nickelcents . . . . .	1	—
<b>Luxemburg.</b>	Französische, niederländische, deutsche Münzen. Eigene Landesmünzen zu 10 und 5 Centimes.		

Ländernamen	Münzsorten	Deutsche	
		M	S
<b>Marokko.</b> (SW.)	1 Piaster (26,2 g f. Silber) zu 10 Unzen od. 100 Centavos (Silberwert 1,94)	4	72
<b>Mexiko.</b> (SW.)	1 Peso (Dollar) zu 100 Centavo (24,438 g f. Silber gesetzlich = 0,75 g f. Gold) Goldmünzen zu 5 und 10 Peso (3,75 und 7,5 g f. Gold = 10,5 und 21 M. Silbermünzen: 50, 20, 10 Centavo. Nickelmünzen: 5 Centavo; Bronzemünzen: 2 und 1 Centavo.	2	02
<b>Montenegro.</b>	Oesterreichische, türkische, russische Münzen.		
<b>Nicaragua.</b> (SW.)	1 Peso zu 100 Cents (Silberwert ~ 1,85 M.) 1 Papier-Peso	4	05 58—68
<b>Niederlande.</b> (GW.)	1 Gulden zu 100 Cents 1 Tientje (Willemsdor) zu 10 Gulden (6,048 g Gold) In den Kolonien außerdem altspanische Piaster gesetzlich = 2,5 fl. holl., mexikanische Pesos gesetzlich = 2,55 fl. holl., Rupien.	1 16	68,7 87
<b>Norwegen.</b> (GW.)	1 Krone zu 100 Öre 1 20-Kronenstück (8,0645 g Gold)	1 22	12,5 50
<b>Oesterreich-Ungarn.</b> (GW.)	1 Krone zu 100 Heller = 50 Kreuzer 1 Gulden ö. W. zu 100 Kreuzer 1 Gold-Gulden = 2 Kronen 38 Heller Goldmünzen: 20 Kronen (6,0975 g Gold) und 10 Kronen; Silbermünzen: 1 Krone und 50 Heller (2,0875 g f. Silber); Nickelmünzen: 20 und 10 Heller; Bronzemünzen: 2 und 1 Heller; Handelsmünzen: 1 Dukaten (3,442 g Gold) 1 Maria-Theresien-(Levantine)-Taler = 23,3723 g Silber.	— 1 2	85 70 02,5
<b>Panama.</b> (GW.)	1 Gold-Balboa 1,5048 g Gold = 1 \$	4	19
<b>Paraguay.</b> (PW.)	1 Peso zu 100 Centavos oder 8 Reales zu 4 Cuartilos in Gold (\$) 1 Peso fuerte, Papier	4	05 40
<b>Persien.</b> (SW.)	1 Toman zu 10 Nenkran zu 10 Senaar zu 10 Bisti zu 10 Dinar 1 Gold-Toman (2,5536 g Gold), nicht im Verkehr 1 Silber-Kran 4,14 g Silber.	8 7	10 14
<b>Peru.</b> (GW.)	1 Peruanisches Pfd. (7,3224 g Gold) zu 10 Sol 1 Sol (Silber) zu 10 Dinaros zu 10 Centavos (Centimos) gesetzlich = 2 Sh.	20 2	43 04,3
<b>Portugal.</b> (GW. fakt. PW.)	1 Krone (16,257 g Gold) zu 10 Milreis (\$) = 10 000 Reis (Realen) 1 Conto (Rechnungsmünze) = 1000 \$ 1 Tostao (Silber) zu 100 Reis = 41,2 Pf., gerechnet zu 1 Crusado meist = 480 Reis.	45	36
Guinea.	1 Makuta zu 50 Reis (1½ m Leinwand)	—	22,5
<b>Mozambique.</b>	Minderwertige Milreisstücke . . . . . 2,7 M. bis	1	08
Goa.	1 Silberrupie	1	36
Macao.	1 mexikan. Piaster zu 640 Reis.		
Timor.	1 holl. Gulden zu 360 Reis.		
<b>Rumänien.</b> (GW.)	1 Leu zu 100 Bani 1 Carol'or zu 20 Lei (5,8064 g Gold)	— 16	81 20
<b>Rußland.</b> (GW.)	1 Imperial (11,6135 g Gold) zu 15 Rubel Goldstücke: 10 und 5 Rubel (10,80 bzw. 21,60 M.) 1 Rubel (17,9961 g Silber) zu 100 Kopeken gesetzl. 100 Rubel Papier.	32 2 216	40,17 16 15

Ländernamen	Münzsorten	Deutsche	
		<i>M</i>	<i>S</i>
<b>Rußland.</b>			
Finnland (GW.)	1 Mark zu 100 Penni (3100 aus 1 kg $\frac{9}{10}$ Gold) . . . . . 20- und 10-Markstücke in Gold (16,20 und 8,10 M.)	—	8r
Chiwa. Buchar.	Russisches Papiergeld. 1 Tilla Gold zu 21 (in Chiwa 28) Tangas (Silber) zu 44 Pulli (Kupfer) . . . . .	11	90
<b>Schweden.</b> (GW.)	1 Krona zu 100 Oere . . . . . 1 20-Kronenstück (8,0645 g Gold) . . . . .	1 22	12,5 50
<b>Schweiz.</b> (DW. fakt. GW.)	1 Franc zu 100 Centimes (Rappen) . . . . . 1 20-Francstück (5,8064 g Gold) . . . . .	— 16	8r 20
<b>Serbien.</b> (DW.)	1 Dinar zu 100 Para . . . . . 1 20-Dinarstück (5,806 g Gold) . . . . .	— 16	8r 20
<b>Siam.</b>	1 Tikal (Bat) Silber (13,86 g f.) zu 4 Salungs zu 2 Fuangs zu 2 Songpai zu 2 Pai zu 2 Att zu 2 Lot (5 Tikal = 3 mexikanische Piaster = fakt. 1,52 M.) . . . . . 10-Tikalstücke 6 g 20 f. Gold.	2	49
<b>Spanien.</b> (DW. fakt. PW.)	1 Peseta zu 100 Centimos . . . . . 1 Duro nuevo (5-Silberpeseta) . . . . . 1 Papierpeseta . . . . . Goldstücke: 20 Peseta (5,8064 g Gold), 10 und 5. Silberstücke: 5 und 1 Peseta.	— 4 —	8r 05 64
<b>Türkel.</b> (GW.)	1 türk. Piaster (Gersch) zu 40 Para zu 3 Asper (oder zu 100 Cents) nominell in Gold . . . . . 1 Medschidie (türk. Lira, türk. Pfund, Jüslük) zu 100 Piaster (6,615 g Gold) . . . . . 1 Beutel zu 500 Piaster . . . . . 1 Medschidie Silber (19,966 g f. Silber) zu 20 Piaster, Silberwert etwa 1,50 M., seit 1880 = 19 Goldpiaster In Kleinasien und Afrika: 1 türk. Pfund = 127, 135 und 140 minderwert. Silberpiaster.	— 18 92 3	18,44 44 20 40
Tripolis.	1 Mahbub zu 20 minderwert. Piaster zu 40 Para, Silberwert 1,39 M. . . . . 1 Oetschlik zu 3 Gersch . . . . . 1 Maria-Theresien-Taler (Silberwert 1,73 M.) . . . . .	— 4 4	20 65 21
<b>Uruguay.</b> (GW.)	1 Goldpeso (1,55615 g Gold) zu 100 Centimos . . . . .	3	34,17
<b>Venezuela.</b> (DW.)	1 Bolivar zu 100 Cents . . . . . 1 Venezolano oder Peso zu 5 Bolivar . . . . .	— 4	8r 05
<b>Vereinigte Staaten von Nord-Amerika.</b> (GW.)	1 Dollar (\$) zu 100 Cents (c.) = 1,672 g Münzgold $\frac{9}{10}$ f. = 23,22 Grän f. Gold . . . . . Goldstücke: 20 \$ (Doppel-Eagle), 10 \$ (Eagle), 5, 2 $\frac{1}{2}$ und 1 \$. Silberstücke: 1, $\frac{1}{2}$ , $\frac{1}{4}$ , $\frac{1}{10}$ Dollar. Nickelstücke zu 5, Bronzestücke zu 1 cent. 1 neuer Sovereign = 4 \$ 86 $\frac{1}{2}$ c. 1 abgenutzter = 4 \$ 85 $\frac{9}{10}$ c.	4	19,8
Philippinen.	1 Philippino Peso (\$) = 50 cents . . . . .	2	10

Umrechnungssätze an der Berliner Börse, März 1911: 1 Fr., Lire, Leu, Peseta: 80 Pf. — Oest. 1 f. Gold: 2 *M.*, Währ.: 1,70, 1 Kr.: 0,85. — 7 fl. südd. 12. — 1 fl. holl.: 1,70. — 1 M. Banco: 1,50. — 1 Kr.: 1,12 $\frac{1}{2}$ . — 1 Rbl.: 2,16, 1 Gold-Rbl.: 3,20. — 1 Peso: 4. — 1 Doll. 4,20. — 1 Lstrl.: 20,40 *M.*

## B. Vergleich der Mafse verschiedener Länder mit dem metrischen Mafs.

	Preussen. <sup>*)</sup> Dänemark. 1 F. = 12 Z.	Bayern. 1 F. = 12 Z.	Sachsen. 1 F. = 12 Z.	Württemberg. 1 F. = 10 Z.	Baden, Schweiz. 1 F. = 10 Z.	Oesterreich. 1 F. = 12 Z.	England, Rußland. 1 F. = 12 Z.	Schweden. 1 F. = 10 Z.	Frankreich. 1 Par. F. = 12 Z.
<b>1. Fufse.</b>									
	1 Meter = $n$ Fufs.								
$n$	3,1862	3,4263	3,5312	3,4905	3,3333	3,1637	3,2809	3,3681	3,0784
	1 Fufs = $1/n$ Meter.								
$1/n$	0,3139	0,2919	0,2832	0,2865	0,3000	0,3161	0,3048	0,2969	0,3248
<b>2. Quadrat-Fufse.</b>									
	1 Quadrat-Meter = $n$ Quadrat-Fufs.								
$n$	10,152	11,740	12,469	12,184	11,111	10,008	10,764	11,344	9,4768
	1 Quadrat-Fufs = $1/n$ Quadrat-Meter.								
$1/n$	0,0985	0,0852	0,0802	0,0821	0,0900	0,0999	0,0929	0,0882	0,1055
<b>3. Kubik-Fufse.</b>									
	1 Kubik-Meter = $n$ Kubik-Fufs.								
$n$	32,346	40,224	44,032	42,528	37,037	31,660	35,317	38,208	29,174
	1 Kubik-Fufs = $1/n$ Kubik-Meter.								
$1/n$	0,0309	0,0249	0,0227	0,0235	0,0270	0,0316	0,0283	0,0262	0,0343
<b>4. Ruten.</b>									
	10 Meter = $n$ Ruten (Klafter, Faden, Toisen).								
$n$	2,6552	3,4263	3,2383	3,4905	3,3333	5,2726	1,9884	4,6870	5,1307
	1 Rute (Klafter, Faden, Toise) = $10/n$ Meter.								
$10/n$	3,7662	2,9186	4,2950	2,8649	3,0000	1,8965	5,0291	2,1336	1,9490
<b>5. Quadrat-Ruten.</b>									
	1 Ar (100 Quadrat-Meter) = $n$ Quadrat-Ruten usw.								
$n$	7,0499	11,740	5,4208	12,184	11,111	27,800	3,9538	21,968	26,324
	1 Quadrat-Rute usw. = $100/n$ Quadrat-Meter.								
$100/n$	14,185	8,5181	18,447	8,2077	9,0000	3,5971	25,292	4,5521	3,7987
<b>6. Kubik-Ruten.</b>									
	1000 Kubik-Meter = $n$ Kubik-Ruten usw.								
$n$	18,719	40,223	12,621	42,527	37,037	146,58	7,8618	102,96	135,06
	1 Kubik-Rute usw. = $1000/n$ Kubik-Meter.								
$1000/n$	53,423	24,861	79,233	23,515	27,000	6,8224	127,20	9,7123	7,4039

<sup>\*)</sup> Mit Linie (—) bezeichnet man im Duodezimalsystem den 12. Teil des Zolles (—), im Dezimalsystem den 10. Teil.

**7. Meilen.**

1 Aequ.-Gr. = 111307 km. 1 durchschnittlicher Meridiangrad = 60 Seemeilen  
=  $\frac{1}{30}$  des Meridianquadranten = 111,120 km.

	Geograph. Meile 15 = 1 Aequ.-Gr.	Preußen. 1 Me. = 24000 F.	Baden. 1 Meile = 28629,6 F.	Oesterreich. 1 Me. = 24000 F.	Schweiz. 1 Wegstunde = 16000 F.	Franz. Seemeile (lieue marine) = $\frac{1}{3}$ Myriameter.	Engl. Seemeile = 6080 F. (Vergl. S. 644.)	Engl. Landmeile (Statute Mile) = 5280 F.	Russland. 1 Werst = 500 Sa- schehn.
<b>n</b>	1 Kilometer = n Meilen (Seemeilen, Wegstunden, Werst).								
	0,1348	0,1328	0,1125	0,1318	0,2083	0,1800	0,5396	0,6214	0,9374
<b>1/n</b>	1 Meile usw. = 1/n Kilometer.								
	7,4204	7,5325	8,8890	7,5859	4,8000	5,5556	1,8532	1,6093	1,0668

**8. Feldmaße.**

	Preußen. 1 Morgen = 180 Qu.-Ruten.	Bayern. 1 Tagewerk = 400 Qu.-Ruten.	Sachsen. 1 Acker = 300 Qu.-Ruten.	Württemberg. 1 Morgen = 400 Qu.-Ruten.	Baden. 1 Morgen = 400 Qu.-Ruten.	Oesterreich. 1 Wiener Joch = 300 Qu.-Ruten.	England. 1 Acre = 160 Qu.-Ruten.	Russland. Desätine = 2400 Qu.-Saschehn.
<b>n</b>	1 Hektar = n Morgen (Tagewerke usw.).							
	3,9166	2,9349	1,8069	3,1729	2,7778	1,7377	2,4711	0,9153
<b>1/n</b>	1 Morgen (Tagewerk usw.) = 1/n Hektar.							
	0,2553	0,3407	0,5534	0,3152	0,3600	0,5755	0,4047	1,0925

**9. Flüssigkeitsmaße.**

	Preußen. 1 Quart = 64 Kub. Z.	Bayern. 1 Maßkanne = 0,048 Kub. F.	Sachsen. 1 Dresdener Kanne = 71,186 Kub. Z.	Württemberg. 1 Heileichmaß = 78,125 Kub. Z.	Baden. 1 Maß = 0,05556 Kub. F.	Oesterreich. 1 Maß = 0,0448 Kub. F.	England. 1 Kruschenka (GooF) = 79,697 Kub. Z.	England.* 1 Imp. Gallon = 277,2738 Kub. Z.	Amerika. 1 alteagl. Gallon = 201 Kub. Z.
<b>n</b>	1 Liter = n Quart (Kannen usw.).								
	0,8733	0,9354	1,0688	0,5444	0,6667	0,7068	0,8131	0,2201	0,2642
<b>1/n</b>	1 Quart (Kanne usw.) = 1/n Liter.								
	1,1450	1,0690	0,9356	1,8371	1,5000	1,4147	1,2299	4,5435	3,7852

**10. Getreidemaße.**

	Preußen. 1 Scheffel = 3072 Kub. Z.	Bayern. 1 Scheffel = 208 Maßkannen.	Sachsen. 1 Dresd. Scheffel = 7900 Kub. Z.	Württemberg. 1 Scheffel = 7587 Kub. Z.	Baden. 1 Malter = 100 Maß.	Oesterreich. 1 Wiener Metze = 1,9471 Kub. F.	England.* 1 Bushel = 8 Gallonen.	Russland. 1 Tschetwert = 1601,2 Kub. Z.	Schweden. 1 Spann = 28 Kannen.
<b>n</b>	1 Hektoliter = n Scheffel (Malter usw.).								
	1,8194	0,4497	0,9631	0,5642	0,6667	1,6264	2,7512	3,8113	1,3646
<b>1/n</b>	1 Scheffel (Malter usw.) = 1/n Hektoliter.								
	0,5496	2,2236	1,0383	1,7723	1,5000	0,6149	0,3635	0,2624	0,7328

\* Vrgl. die Fußnote S. 1053.

## 11. Verwandlung des preussischen Maßes in Metermaß.

Fufs Quadr.-F. Kubik-F.	m	qm	ebm	Zoll Quadr.-Z. Kubik-Z.	em	qem	eem
1	0,31385	0,09850	0,03092	1	2,6154	6,8406	17,891
2	0,6277	0,19701	0,06183	2	5,2309	13,681	35,782
3	0,9415	0,29551	0,09275	3	7,8463	20,522	53,673
4	1,2554	0,39402	0,12366	4	10,462	27,362	71,564
5	1,5693	0,49252	0,15458	5	13,077	34,203	89,456
6	1,8831	0,59102	0,18549	6	15,693	41,043	107,35
7	2,1970	0,68953	0,21641	7	18,308	47,884	125,24
8	2,5108	0,78803	0,24733	8	20,924	54,724	143,13
9	2,8247	0,88654	0,27824	9	23,539	61,565	161,02

## 12. Verwandlung des Metermaßes in preussisches Maß.

m, qm, ebm	Fufs	Zoll	Quadr.-Fufs	Quadr.-Zoll	Kubik-Fufs	Kubik-Zoll
1	3,1862	38,234	10,152	1461,9	32,346	55894
2	6,3724	76,469	20,304	2923,7	64,692	111787
3	9,5586	114,703	30,456	4385,6	97,038	167681
4	12,7448	152,938	40,607	5847,5	129,384	223575
5	15,9310	191,172	50,759	7309,3	161,729	279468
6	19,1172	229,406	60,911	8771,2	194,075	335362
7	22,3034	267,640	71,063	10233,1	226,421	391256
8	25,4896	305,875	81,215	11695,0	258,767	447150
9	28,6758	344,109	91,367	13156,8	291,113	503043

## 13. Verwandlung des englischen Maßes in Metermaß.

Fufs Quadr.-F. Kubik-F.	m	qm	ebm	Zoll Quadr.-Z. Kubik-Z.	em	qem	eem
1	0,304794	0,092900	0,028315	1	2,5400	6,4514	16,386
2	0,609589	0,185799	0,056631	2	5,0799	12,9028	32,772
3	0,914383	0,278699	0,084946	3	7,6199	19,3542	49,159
4	1,219178	0,371599	0,113261	4	10,1598	25,8055	65,545
5	1,523972	0,464498	0,141577	5	12,6998	32,2569	81,931
6	1,828767	0,557398	0,169892	6	15,2397	38,7083	98,317
7	2,133561	0,650298	0,198207	7	17,7797	45,1597	114,703
8	2,438356	0,743197	0,226522	8	20,3196	51,6111	131,089
9	2,743150	0,836097	0,254838	9	22,8596	58,0625	147,476

## 14. Verwandlung des Metermaßes in englisches Maß.

m, qm, ebm	Fufs	Zoll	Quadr.-Fufs	Quadr.-Zoll	Kubik-Fufs	Kubik-Zoll
1	3,2809	39,3708	10,7643	1550,06	35,3166	61027,1
2	6,5618	78,7416	21,5286	3100,12	70,6332	122054,1
3	9,8427	118,1124	32,2929	4650,18	105,9498	183081,2
4	13,1236	157,4832	43,0572	6200,24	141,2664	244108,2
5	16,4045	196,8540	53,8215	7750,30	176,5830	305135,3
6	19,6854	236,2247	64,5858	9300,35	211,8996	366162,3
7	22,9663	275,5955	75,3501	10850,41	247,2162	427189,4
8	26,2472	314,9663	86,1144	12400,47	282,5328	488216,4
9	29,5281	354,3371	96,8787	13950,53	317,8494	549243,5

17. Verwandlung von Schachtruten in Kubik-Fußs und Kubik-Meter, und umgekehrt.\*)

1 Schachtrute = 144 Kubik-Fußs = 4,4519 cbm.

Schtr.	Kub.F.	cbm	Schtr.	Kub.F.	cbm	Schtr.	Kub.F.	cbm	Schtr.	Kub.F.	cbm
1/144	1	0,031	18/48	57	1,763	1	144	4,452	46	6624	204,79
1/72	2	0,062	5/12	60	1,855	2	288	8,904	47	6768	209,24
1/48	3	0,093	7/16	63	1,948	3	432	13,356	48	6912	213,69
1/40	3 2/5	0,111	4/5	64	1,979	4	576	17,808	49	7056	218,14
1/36	4	0,124	11/24	66	2,040	5	720	22,260	50	7200	222,59
1/30	4 2/5	0,148	17/24	68	2,102	6	864	26,711	51	7344	227,05
1/28	5 1/7	0,159	23/48	69	2,134	7	1008	31,163	52	7488	231,50
1/24	6	0,185	1/3	72	2,226	8	1152	35,615	53	7632	235,95
1/20	7 1/5	0,223	25/48	75	2,319	9	1296	40,067	54	7776	240,40
1/18	8	0,247	19/24	76	2,350	10	1440	44,519	55	7920	244,85
1/16	9	0,278	13/24	78	2,412	11	1584	48,971	56	8064	249,31
1/15	10	0,309	5/6	80	2,473	12	1728	53,423	57	8208	253,76
1/14	11 1/14	0,342	9/10	81	2,504	13	1872	57,875	58	8352	258,21
1/12	12	0,371	7/12	84	2,597	14	2016	62,327	59	8496	262,66
1/11	13 1/11	0,405	4/5	86 2/5	2,671	15	2160	66,779	60	8640	267,11
1/10	14 2/5	0,445	29/48	87	2,690	16	2304	71,230	61	8784	271,57
1/9	16	0,494	11/18	88	2,722	17	2448	75,682	62	8928	276,02
1/8	16 10/17	0,524	5/6	90	2,782	18	2592	80,134	63	9072	280,47
1/8	18	0,556	23/28	92	2,844	19	2736	84,586	64	9216	284,92
1/8	20	0,618	31/48	93	2,875	20	2880	89,038	65	9360	289,37
1/7	20 4/7	0,636	9/8	96	2,968	21	3024	93,490	66	9504	293,82
1/6	21	0,649	11/10	99	3,061	22	3168	97,942	67	9648	298,28
1/6	21 2/5	0,668	25/38	100	3,092	23	3312	102,394	68	9792	302,73
1/6	24	0,742	7/10	100 4/5	3,116	24	3456	106,845	69	9936	307,18
1/6	26 2/11	0,809	10 2/11	102	3,153	25	3600	111,297	70	10080	311,63
1/5	27	0,835	13/12	104	3,215	26	3744	115,75	71	10224	316,08
1/5	28	0,865	35/48	105	3,246	27	3888	120,20	72	10368	320,55
1/5	28 3/5	0,890	8/5	108	3,339	28	4032	124,65	73	10512	324,99
1/5	30	0,927	27/48	111	3,432	29	4176	129,10	74	10656	329,44
1/5	32	0,989	7/9	112	3,463	30	4320	133,56	75	10800	333,89
1/4	33	1,020	19/24	114	3,525	31	4464	138,01	76	10944	338,34
1/4	36	1,113	29/38	116	3,586	32	4608	142,46	77	11088	342,80
1/4	38	1,206	13/18	117	3,617	33	4752	146,91	78	11232	347,25
1/4	40	1,237	5/6	120	3,710	34	4896	151,36	79	11376	351,70
1/4	41 1/7	1,272	41/48	123	3,803	35	5040	155,82	80	11520	356,15
1/4	42	1,298	31/38	124	3,834	36	5184	160,27	81	11664	360,60
1/4	43 1/5	1,336	7/8	126	3,895	37	5328	164,72	82	11808	365,05
1/4	44	1,360	8/9	128	3,957	38	5472	169,17	83	11952	369,50
1/4	45	1,391	40/48	129	3,988	39	5616	173,62	84	12096	373,96
1/4	48	1,484	11/12	132	4,081	40	5760	178,08	85	12240	378,41
1/4	50	1,546	15/18	135	4,174	41	5904	182,53	86	12384	382,86
1/4	51	1,577	17/18	136	4,205	42	6048	186,98	87	12528	387,31
1/4	52	1,608	23/24	138	4,267	43	6192	191,43	88	12672	391,76
1/4	54	1,670	25/24	140	4,328	44	6336	195,88	89	12816	396,21
1/4	56	1,731	47/48	141	4,359	45	6480	200,34	90	12960	400,67

\*) Diese Tafel kann auch zur Verwandlung der Quadrat-Zolle in Quadrat-Fußs, und ferner der Quadrat-Fußs in Quadrat-Ruten, und umgekehrt, benutzt werden.  
 Z. B.: 5040 Qu.Z. = 56 Q.F.; 112 Q.F. = 7/8 Q.Rt.; 69 1/2 Q.Rt. = 9936 + 48 = 9984 Q.F.

15. Verwandlung von preussischen Zollen in Millimeter.  
 Ganze, halbe, Viertel-, Achtel- und Sechzehntel-Zoll = Millimeter.

1 preufs. Zoll = 26,1545 mm

Zoll	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{11}{16}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{13}{16}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{15}{16}$	Zoll
0	0,00	1,63	3,27	4,90	6,54	8,17	9,81	11,44	13,08	14,71	16,35	17,98	19,62	21,25	22,89	24,52	0
1	26,15	27,79	29,42	31,06	32,69	34,33	35,96	37,60	39,23	40,87	42,50	44,14	45,77	47,40	49,04	50,67	1
2	52,31	53,94	55,58	57,21	58,85	60,48	62,12	63,75	65,39	67,02	68,66	70,29	71,93	73,56	75,19	76,83	2
3	78,46	80,10	81,73	83,37	85,00	86,64	88,27	89,91	91,54	93,18	94,81	96,45	98,08	99,71	101,35	102,98	3
4	104,62	106,25	107,89	109,52	111,16	112,79	114,43	116,06	117,70	119,33	120,96	122,60	124,23	125,87	127,50	129,14	4
5	130,77	132,41	134,04	135,68	137,31	138,95	140,58	142,21	143,85	145,48	147,12	148,75	150,39	152,02	153,66	155,29	5
6	156,93	158,56	160,20	161,83	163,47	165,10	166,73	168,37	170,00	171,64	173,27	174,91	176,54	178,18	179,81	181,45	6
7	183,08	184,72	186,35	187,99	189,62	191,25	192,89	194,52	196,16	197,79	199,43	201,06	202,70	204,33	205,97	207,60	7
8	209,24	210,87	212,50	214,14	215,77	217,41	219,04	220,68	222,31	223,95	225,58	227,22	228,85	230,49	232,12	233,76	8
9	235,39	237,02	238,66	240,29	241,93	243,56	245,20	246,83	248,47	250,10	251,74	253,37	255,01	256,64	258,28	259,91	9
10	261,54	263,18	264,81	266,45	268,08	269,72	271,35	272,99	274,62	276,26	277,89	279,53	281,16	282,80	284,43	286,06	10
11	287,70	289,33	290,97	292,60	294,24	295,87	297,51	299,14	300,78	302,41	304,05	305,68	307,31	308,95	310,58	312,22	11
12	313,85	315,49	317,12	318,76	320,39	322,03	323,66	325,30	326,93	328,57	330,20	331,83	333,47	335,10	336,74	338,37	12
13	340,01	341,64	343,28	344,91	346,55	348,18	349,82	351,45	353,09	354,72	356,35	357,99	359,62	361,26	362,89	364,53	13
14	366,16	367,80	369,43	371,07	372,70	374,34	375,97	377,60	379,24	380,87	382,51	384,14	385,78	387,41	389,05	390,68	14
15	392,32	393,95	395,59	397,22	398,86	400,49	402,12	403,76	405,39	407,03	408,66	410,30	411,93	413,57	415,20	416,84	15
16	418,47	420,11	421,74	423,38	425,01	426,64	428,28	429,91	431,55	433,18	434,82	436,45	438,09	439,72	441,36	442,99	16
17	448,63	446,26	447,90	449,53	451,16	452,80	454,43	456,07	457,70	459,34	460,97	462,61	464,24	465,88	467,51	469,15	17
18	470,78	472,41	474,05	475,68	477,32	478,95	480,59	482,22	483,86	485,49	487,13	488,76	490,40	492,03	493,67	495,30	18
19	496,93	498,57	500,20	501,84	503,47	505,11	506,74	508,38	510,01	511,65	513,28	514,92	516,55	518,19	519,82	521,45	19
20	523,09	524,72	526,36	527,99	529,63	531,26	532,90	534,53	536,17	537,80	539,44	541,07	542,71	544,34	545,97	547,61	20
21	549,24	550,88	552,51	554,15	555,78	557,42	559,05	560,69	562,32	563,96	565,59	567,22	568,86	570,49	572,13	573,76	21
22	575,40	577,03	578,67	580,30	581,94	583,57	585,21	586,84	588,48	590,11	591,74	593,38	595,01	596,65	598,28	599,92	22
23	601,55	603,19	604,82	606,46	608,09	609,73	611,36	613,00	614,63	616,26	617,90	619,53	621,17	622,80	624,44	626,07	23
24	627,71	629,34	630,98	632,61	634,25	635,88	637,51	639,15	640,78	642,42	644,05	645,69	647,32	648,96	650,59	652,23	24

25	653,86	655,50	657,13	658,77	660,40	662,03	663,67	665,30	666,94	668,57	670,21	671,84	673,48	675,11	676,75	678,38	25
26	660,02	661,65	663,29	664,92	666,55	668,19	669,82	671,46	673,09	674,73	676,36	678,00	679,63	681,27	682,90	684,54	26
27	706,17	707,81	709,44	711,07	712,71	714,34	715,98	717,61	719,25	720,88	722,52	724,15	725,79	727,42	729,06	730,69	27
28	732,32	733,96	735,59	737,23	738,86	740,50	742,13	743,77	745,40	747,04	748,67	750,31	751,94	753,58	755,21	756,84	28
29	758,48	760,11	761,75	763,38	765,02	766,65	768,29	769,92	771,56	773,19	774,83	776,46	778,10	779,73	781,36	783,00	29
30	784,63	786,27	787,90	789,54	791,17	792,81	794,44	796,08	797,71	799,35	800,98	802,61	804,25	805,88	807,52	809,15	30
31	810,79	812,42	814,06	815,69	817,33	818,96	820,60	822,23	823,87	825,50	827,13	828,77	830,40	832,04	833,67	835,31	31
32	836,94	838,58	840,21	841,85	843,48	845,12	846,75	848,39	850,02	851,65	853,29	854,92	856,56	858,19	859,83	861,46	32
33	863,10	864,73	866,37	868,00	869,64	871,27	872,91	874,54	876,17	877,81	879,44	881,08	882,71	884,35	885,98	887,62	33
34	889,25	890,89	892,52	894,16	895,79	897,42	899,06	900,69	902,33	903,96	905,60	907,23	908,87	910,50	912,14	913,77	34
35	915,41	917,04	918,68	920,31	921,94	923,58	925,21	926,85	928,48	930,12	931,75	933,39	935,02	936,66	938,29	939,93	35
36	941,56	943,20	944,83	946,46	948,10	949,73	951,37	953,00	954,64	956,27	957,91	959,54	961,18	962,81	964,45	966,08	36
37	967,71	969,35	970,98	972,62	974,25	975,89	977,52	979,16	980,79	982,43	984,06	985,70	987,33	988,97	990,60	992,23	37
38	993,87	995,50	997,14	998,77	1000,4	1002,0	1003,7	1005,3	1006,9	1008,6	1010,2	1011,9	1013,5	1015,1	1016,8	1018,4	38
39	1020,0	1021,7	1023,3	1024,9	1026,6	1028,2	1029,8	1031,5	1033,1	1034,7	1036,4	1038,0	1039,6	1041,3	1042,9	1044,5	39
40	1046,2	1047,8	1049,4	1051,1	1052,7	1054,4	1056,0	1057,6	1059,3	1060,9	1062,5	1064,2	1065,8	1067,4	1069,1	1070,7	40
41	1072,3	1074,0	1075,6	1077,2	1078,9	1080,5	1082,1	1083,8	1085,4	1087,0	1088,7	1090,3	1091,9	1093,6	1095,2	1096,9	41
42	1098,5	1100,1	1101,8	1103,4	1105,0	1106,7	1108,3	1109,9	1111,6	1113,2	1114,8	1116,5	1118,1	1119,7	1121,4	1123,0	42
43	1124,6	1126,3	1127,9	1129,5	1131,2	1132,8	1134,4	1136,1	1137,7	1139,4	1141,0	1142,6	1144,3	1145,9	1147,5	1149,2	43
44	1150,8	1152,4	1154,1	1155,7	1157,3	1159,0	1160,6	1162,2	1163,9	1165,5	1167,1	1168,8	1170,4	1172,0	1173,7	1175,3	44
45	1177,0	1178,6	1180,2	1181,9	1183,5	1185,1	1186,8	1188,4	1190,0	1191,7	1193,3	1194,9	1196,6	1198,2	1199,8	1201,5	45
46	1203,1	1204,7	1206,4	1208,0	1209,6	1211,3	1212,9	1214,5	1216,2	1217,8	1219,5	1221,1	1222,7	1224,4	1226,0	1227,6	46
47	1229,3	1230,9	1232,5	1234,2	1235,8	1237,4	1239,1	1240,7	1242,3	1244,0	1245,6	1247,2	1248,9	1250,5	1252,1	1253,8	47
48	1255,4	1257,0	1258,7	1260,3	1262,0	1263,6	1265,2	1266,9	1268,5	1270,1	1271,8	1273,4	1275,0	1276,7	1278,3	1279,9	48
49	1281,6	1283,2	1284,8	1286,5	1288,1	1289,7	1291,4	1293,0	1294,6	1296,3	1297,9	1299,5	1301,2	1302,8	1304,5	1306,1	49
50	1307,7	1309,4	1311,0	1312,6	1314,3	1315,9	1317,5	1319,2	1320,8	1322,4	1324,1	1325,7	1327,3	1329,0	1330,6	1332,2	50
51	1333,9	1335,5	1337,1	1338,8	1340,4	1342,1	1343,7	1345,3	1347,0	1348,6	1350,2	1351,9	1353,5	1355,1	1356,8	1358,4	51
52	1360,0	1361,7	1363,3	1364,9	1366,6	1368,2	1369,9	1371,5	1373,1	1374,7	1376,4	1378,0	1379,6	1381,3	1382,9	1384,6	52
53	1386,2	1387,8	1389,5	1391,1	1392,7	1394,4	1396,0	1397,6	1399,3	1400,9	1402,5	1404,2	1405,8	1407,4	1409,1	1410,7	53
54	1412,3	1414,0	1415,6	1417,2	1418,9	1420,5	1422,1	1423,8	1425,4	1427,1	1428,7	1430,3	1432,0	1433,6	1435,2	1436,9	54

Zoll	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{8}$	Zoll
------	---	----------------	---------------	---------------	---------------	---------------	---------------	---------------	---------------	---------------	----------------	---------------	---------------	---------------	---------------	---------------	------

Verwandlung von Preussischen Zoll in Millimeter.

16. Verwandlung von englischen Zollen in Millimeter.  
 Ganze, halbe, Viertel-, Achtel- und Sechzehntel-Zoll = Millimeter.

1 engl. Zoll 25,399541 mm

Zoll	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{11}{16}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{13}{16}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{15}{16}$	Zoll
0	0,000	1,587	3,175	4,762	6,350	7,937	9,525	11,112	12,700	14,287	15,875	17,462	19,050	20,637	22,225	23,812	0
1	25,400	26,987	28,574	30,162	31,749	33,337	34,924	36,512	38,099	39,687	41,274	42,862	44,449	46,037	47,624	49,212	1
2	50,799	52,387	53,974	55,561	57,149	58,736	60,324	61,911	63,499	65,086	66,674	68,261	69,849	71,436	73,024	74,611	2
3	76,199	77,786	79,374	80,961	82,549	84,136	85,723	87,311	88,898	90,486	92,073	93,661	95,248	96,836	98,423	100,011	3
4	101,600	103,187	104,774	106,361	107,949	109,536	111,123	112,711	114,298	115,886	117,473	119,061	120,648	122,236	123,823	125,411	4
5	127,000	128,587	130,174	131,761	133,349	134,936	136,523	138,111	139,698	141,286	142,873	144,461	146,048	147,636	149,223	150,811	5
6	152,400	153,987	155,574	157,161	158,749	160,336	161,923	163,511	165,098	166,686	168,273	169,861	171,448	173,036	174,623	176,211	6
7	177,800	179,387	180,974	182,561	184,149	185,736	187,323	188,911	190,498	192,086	193,673	195,261	196,848	198,436	200,023	201,611	7
8	203,200	204,787	206,374	207,961	209,549	211,136	212,723	214,311	215,898	217,486	219,073	220,661	222,248	223,836	225,423	227,011	8
9	228,600	230,187	231,774	233,361	234,949	236,536	238,123	239,711	241,298	242,886	244,473	246,061	247,648	249,236	250,823	252,411	9
10	254,000	255,587	257,174	258,761	260,349	261,936	263,523	265,111	266,698	268,286	269,873	271,461	273,048	274,636	276,223	277,811	10
11	279,399	280,987	282,574	284,161	285,749	287,336	288,923	290,511	292,098	293,686	295,273	296,861	298,448	300,036	301,623	303,211	11
12	304,799	306,387	307,974	309,561	311,149	312,736	314,323	315,911	317,498	319,086	320,673	322,261	323,848	325,436	327,023	328,611	12
13	330,199	331,786	333,374	334,961	336,549	338,136	339,723	341,311	342,898	344,486	346,073	347,661	349,248	350,836	352,423	354,011	13
14	355,599	357,187	358,774	360,361	361,949	363,536	365,123	366,711	368,298	369,886	371,473	373,061	374,648	376,236	377,823	379,411	14
15	380,999	382,587	384,174	385,761	387,349	388,936	390,523	392,111	393,698	395,286	396,873	398,461	400,048	401,636	403,223	404,811	15
16	406,399	407,987	409,574	411,161	412,749	414,336	415,923	417,511	419,098	420,686	422,273	423,861	425,448	427,036	428,623	430,211	16
17	431,799	433,387	434,974	436,561	438,149	439,736	441,323	442,911	444,498	446,086	447,673	449,261	450,848	452,436	454,023	455,611	17
18	457,199	458,786	460,374	461,961	463,549	465,136	466,723	468,311	469,898	471,486	473,073	474,661	476,248	477,836	479,423	481,011	18
19	482,599	484,187	485,774	487,361	488,949	490,536	492,123	493,711	495,298	496,886	498,473	500,061	501,648	503,236	504,823	506,411	19
20	507,999	509,587	511,174	512,761	514,349	515,936	517,523	519,111	520,698	522,286	523,873	525,461	527,048	528,636	530,223	531,811	20
21	533,399	534,987	536,574	538,161	539,749	541,336	542,923	544,511	546,098	547,686	549,273	550,861	552,448	554,036	555,623	557,211	21
22	558,799	560,387	561,974	563,561	565,149	566,736	568,323	569,911	571,498	573,086	574,673	576,261	577,848	579,436	581,023	582,611	22
23	584,199	585,786	587,374	588,961	590,549	592,136	593,723	595,311	596,898	598,486	600,073	601,661	603,248	604,836	606,423	608,011	23
24	609,599	611,187	612,774	614,361	615,949	617,536	619,123	620,711	622,298	623,886	625,473	627,061	628,648	630,236	631,823	633,411	24

25	634,99	636,58	638,16	639,75	641,34	642,93	644,51	646,10	647,69	649,28	650,86	652,45	654,04	655,63	657,21	658,80	26
26	660,39	661,98	663,56	665,15	666,74	668,33	669,91	671,50	673,09	674,68	676,26	677,85	679,44	681,03	682,62	684,20	27
27	685,79	687,38	688,96	690,55	692,14	693,72	695,31	696,90	698,49	700,07	701,66	703,25	704,84	706,42	708,01	709,60	28
28	711,19	712,77	714,36	715,95	717,54	719,12	720,71	722,30	723,89	725,47	727,06	728,65	730,24	731,82	733,41	735,00	29
29	736,59	738,17	739,76	741,35	742,94	744,52	746,11	747,70	749,29	750,87	752,46	754,05	755,64	757,22	758,81	760,40	30
30	761,99	763,57	765,16	766,75	768,34	769,92	771,51	773,10	774,69	776,27	777,86	779,45	781,04	782,62	784,21	785,80	31
31	787,39	788,97	790,56	792,15	793,74	795,32	796,91	798,50	800,09	801,67	803,26	804,85	806,44	808,02	809,61	811,20	32
32	812,79	814,37	815,96	817,55	819,14	820,72	822,31	823,90	825,49	827,07	828,66	830,25	831,83	833,42	835,01	836,60	33
33	838,18	839,77	841,36	842,95	844,53	846,12	847,71	849,30	850,88	852,47	854,06	855,65	857,23	858,82	860,41	862,00	34
34	863,58	865,17	866,76	868,35	869,93	871,52	873,11	874,70	876,28	877,87	879,46	881,05	882,63	884,22	885,81	887,40	35
35	888,98	890,57	892,16	893,75	895,33	896,92	898,51	900,10	901,68	903,27	904,86	906,45	908,03	909,62	911,21	912,80	36
36	914,38	915,97	917,56	919,15	920,73	922,32	923,91	925,50	927,08	928,67	930,26	931,85	933,43	935,02	936,61	938,20	37
37	939,78	941,37	942,96	944,55	946,13	947,72	949,31	950,90	952,48	954,07	955,66	957,25	958,83	960,42	962,01	963,60	38
38	965,18	966,77	968,36	969,94	971,53	973,12	974,71	976,29	977,88	979,47	981,06	982,64	984,23	985,82	987,41	988,99	39
39	990,58	992,17	993,76	995,34	996,93	998,52	1000,11	1001,70	1003,28	1004,87	1006,45	1008,04	1009,63	1011,21	1012,80	1014,39	40
40	1016,0	1017,6	1019,2	1020,7	1022,3	1023,9	1025,5	1027,1	1028,7	1030,3	1031,9	1033,4	1035,0	1036,6	1038,2	1039,8	41
41	1041,4	1043,0	1044,6	1046,1	1047,7	1049,3	1050,9	1052,5	1054,1	1055,7	1057,3	1058,8	1060,4	1062,0	1063,6	1065,2	42
42	1066,8	1068,4	1070,0	1071,5	1073,1	1074,7	1076,3	1077,9	1079,5	1081,1	1082,7	1084,2	1085,8	1087,4	1089,0	1090,6	43
43	1092,2	1093,8	1095,4	1096,9	1098,5	1100,1	1101,7	1103,3	1104,9	1106,5	1108,1	1109,6	1111,2	1112,8	1114,4	1116,0	44
44	1117,6	1119,2	1120,8	1122,3	1123,9	1125,5	1127,1	1128,7	1130,3	1131,9	1133,5	1135,0	1136,6	1138,2	1139,8	1141,4	45
45	1143,0	1144,6	1146,2	1147,7	1149,3	1150,9	1152,5	1154,1	1155,7	1157,3	1158,9	1160,4	1162,0	1163,6	1165,2	1166,8	46
46	1168,4	1170,0	1171,6	1173,1	1174,7	1176,3	1177,9	1179,5	1181,1	1182,7	1184,3	1185,8	1187,4	1189,0	1190,6	1192,2	47
47	1193,8	1195,4	1197,0	1198,5	1200,1	1201,7	1203,3	1204,9	1206,5	1208,1	1209,7	1211,2	1212,8	1214,4	1216,0	1217,6	48
48	1219,2	1220,8	1222,4	1223,9	1225,5	1227,1	1228,7	1230,3	1231,9	1233,5	1235,1	1236,6	1238,2	1239,8	1241,4	1243,0	49
49	1244,6	1246,2	1247,8	1249,3	1250,9	1252,5	1254,1	1255,7	1257,3	1258,9	1260,5	1262,0	1263,6	1265,2	1266,8	1268,4	50
50	1270,0	1271,6	1273,2	1274,7	1276,3	1277,9	1279,5	1281,1	1282,7	1284,3	1285,9	1287,4	1289,0	1290,6	1292,2	1293,8	51
51	1295,4	1297,0	1298,6	1300,1	1301,7	1303,3	1304,9	1306,5	1308,1	1309,7	1311,3	1312,8	1314,4	1316,0	1317,6	1319,2	52
52	1320,8	1322,4	1324,0	1325,5	1327,1	1328,7	1330,3	1331,9	1333,5	1335,1	1336,6	1338,2	1339,8	1341,4	1343,0	1344,6	53
53	1346,2	1347,8	1349,4	1350,9	1352,5	1354,1	1355,7	1357,3	1358,9	1360,5	1362,1	1363,6	1365,2	1366,8	1368,4	1370,0	54
54	1371,6	1373,2	1374,8	1376,3	1377,9	1379,5	1381,1	1382,7	1384,3	1385,9	1387,4	1389,0	1390,6	1392,2	1393,8	1395,4	55
Zoll	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{11}{16}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{13}{16}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{15}{16}$	Zoll

## C. Mafse und Gewicht

Meter-Konvention vom 20. Mai 1875. Dieser gehören an: Deutsches Reich, Oesterreich, Schweden, Norwegen, Schweiz, Türkei, Argentinische Republik, Vereinigte Staaten von Mexiko (1890), Bolivien, Brasilien, Chile, Columbia, Costarica, Ecuador, Guatemala, Honduras.

1. Herstellung und Vergleich der für die einzelnen Staaten bestimmten neuen Urmaße; 2. Herstellung und Vergleich der für die einzelnen Staaten bestimmten neuen Urmaße; 3. periodische Vergleichung

Ländernamen	Längenmafse	$\frac{1}{n}$ *)	Flächenmafse	$\frac{1}{n}$ *)
<b>Aegypten.</b>	metrisch, früher: 1 Pik Beledi = 0,5826 m 1 Pik Endaseh = 0,6384 m 1 Pik Stambuli = 0,677 m 1 Pik Meimari = 0,750 m 1 Pik Nili = 0,5245 m	1,7164 1,5664 1,4771 1,3333 1,9066	metrisch, früher: 1 Feddan = 42,008 33 a	0,023 8
<b>Argentinische Republik.</b>	metrisch, früher: 1 Braza zu 2 Vara zu 4 Palmas oder 3 Pies = 1,732 m 1 Legua zu 3000 Braza = 5,196 km	0,5774 0,1925	metrisch, früher: 1 Qu.-Legua = 26,998 42 qkm	0,037 0
<b>Brasilien.</b>	metrisch, früher altportugiesisch: 1 Covado zu 2 Pè zu 1,5 Palmos = 0,660 m 1 Brazza zu 2 Vara = 2,2 m 1 Legua = 6,183 km 1 Pè = 0,33 m	1,5152 0,4545 0,1617 3,0303	metrisch, früher altportugiesisch: 1 Qu.-Covado = 0,4356 qm 1 Qu.-Pè = 0,1039 qm 1 Qu.-Brazza = 4,84 qm 1 Qu.-Legua = 38,2295 qkm	2,295 7 9,182 7 0,206 6 0,026 1
<b>China.</b>	1 Yin zu 10 Ttschi (Covid, Fufs) zu 10 Tsun (Pant) zu 10 Fän = 3,73 m 1 Yin nach Vertrag mit England = 3,581 m 1 Li (Meile) zu 180 Faden zu 10 Feldmesser-Covid = 0,5755 km	0,2681 0,2798 1,7376	1 Mau = 631 qm 1 King = 0,2453 ha Seidenzeug nach Gewicht.	1,584 8 1000 4,076 6
<b>Deutsches Reich.</b> (Deutsche Mafs- und Gewichts-Ordnung vom 17. August 1868, 11. Juli 1884, 26. April 1893 und 30. Mai 1903.)	1 Meter (m) (= 1,000 003 01 Mètre des Archives = 443,297 27 Pariser Linien) zu 10 Dezimeter (dm) zu 10 Zentimeter (cm) zu 10 Millimeter (mm) 1 Kilometer (km) = 1000 m 1 dtsh. Landmeile = 7,5 km 1 geographische Meile (15 = 1 Aequator-Grad) = 7,420 438 54 km 1 deutsche (und französ.) Seemeile (60 = 1 Meridian-Grad) = 1,852 km 1 Faden = 1,829 m 1 Kabel zu 120 Faden = 0,22 km 1 Aeq.-Grad = 111,8064 km 1 Mer.-Grad = 111,1111 km	0,1333 0,1348 0,5400 0,5467 4,545	1 Quadratmeter (qm) zu 100 Quadratdezimeter (qdm) zu 100 Quadratzentimeter (qcm) zu 100 Quadratmillimeter (qmm) 1 Hektar (ha) zu 100 Ar (a) zu 100 qm 1 Quadratkilometer (qkm) = 100 ha 1 geographische Quadratmeile = 55,062 91 qkm	0,018 16

\*) Anmerkung. In der Tafel sind alle Mafs- und Gewichtseinheiten durch eine Vergleichszahl  $n$  auf das metrische Mafs bezogen. In den Spalten  $\frac{1}{n}$  sind die reziproken Werte der Vergleichszahlen angegeben. Es bedeutet also  $n$  die Anzahl metrischer Einheiten, welche der betreffenden Mafseinheit entspricht, und  $\frac{1}{n}$  die Anzahl der betreff. Mafseinheiten, welche der metrischen Einheit entspricht. Z. B. Großbritannien (s. S. 1052): 1 Fathom =  $n$  Meter = 1,828 767 m  
1 m =  $\frac{1}{n}$  Fathoms = 0,5468 Fathoms, mithin beispielsweise 633,5 m = 633,5 . 0,5468 = 373,7 Fathom

**verschiedener Länder.**

Jugarn, Belgien, Niederlande, Dänemark, Spanien, Frankreich, Italien, Portugal, Rußland, Amerika, Peru, Venezuela, Serbien (1879), Rumänien (1882), Großbritannien (1884), Japan (1885), Luxemburg, Nicaragua, Paraguay, Salvador, Uruguay. — Die Meter-Konvention bezweckt: 1. Meters und Kilogramms; 2. Auswahl und Aufbewahrung neuer, das Meter und das Kilogramm mit den internationalen Urmaßen, usw.

Raummaße	$\frac{1}{n}$	Gewichte	$\frac{1}{n}$	Ländernamen
metrisch, früher: 1 Ardeb zu 6 Quebèhs zu 4 Roubèhs zu 12 Keles = 1,9775 hl	0,5057	metrisch, früher: 1 Cantaro forforo zu 36 Oka oder zu 100 Rottoli zu 144 Drachmen = 44,4931 kg	2,247 54 100	<b>Aegypten.</b>
metrisch, früher: 1 Fanega zu 4 Cuartillas zu 3 Almudes = 1,372 hl 1 Barril zu 4 Cannecas zu 8 Frascos = 0,76 hl 1 Pipa zu 4 Cargas zu 16 Cor- tagnes zu 3 Frascos = 4,56 hl	0,7259 1,3158 0,2193	metrisch, früher: 1 Libra zu 2 Marcos zu 8 Onzas zu 16 Adarmes zu 36 Granos = 0,459 37 kg 1 Quintal zu 4 Arrobas zu 25 Libras = 45,9367 kg	2,176 91 2,176 91 100	<b>Argen- tinische Republik.</b>
metrisch, früher: 1 Mojo zu 15 Fangas zu 4 Al- queiras 1 Alqueira zu 4 Maquias in Rio de Janeiro = 0,3628 hl in Bahia = 0,3114 hl 1 Pipa zu 25 Almudes = 4,007 hl	2,7563 3,2113 0,2496	metrisch, früher altportugiesisch: 1 Quintal zu 4 Arrobas zu 32 Arratels = 58,752 kg 1 Tonnelada = 13,5 Quintal = 793,152 kg	1,702 05 100 0,126 08 100	<b>Brasilien.</b>
1 Tschì Getreide zu 10 Sching = 1,081 hl 1 Sai Getreide zu 2 Hwo zu 10 Sching = 1,2243 hl (Getreide und Flüssigkeiten sonst meist nach Gewicht.)	0,9708 0,8168	1 Pikul zu 100 Kätties zu 16 Taël (Liang) = 60,453 kg 1 Taël zu 10 Mähds oder Tsin zu 10 Condorin oder Fän zu 10 Käsck (Sabeck) = 37,783 g (für Silber [Canton] = 37,573 g) als Haikuan Taël = 38,246 g	1,654 2 100 2,646 69 100 2,661 48 100 2,614 65 100	<b>China.</b>
1 Kubikmeter (cbm) zu 1000 Kubikdezimeter (cdm) oder Liter (l) zu 1000 Kubik- zentimeter (ccm) zu 1000 Kubikmillimeter (cmm) 1 Hektoliter (hl) = 100 l 1 Liter = 1000 Milliliter 1 Scheffel = 0,5 hl (nicht mehr amtlich)	0,01	1 Kilogramm (kg) (= 0,999 999 842 Kilo- gramme prototype) zu 1000 Gramm (g) zu 1000 Milligramm (mg) 1 kg = 2 (alte) Zoll-Pfund 1 Tonne (t) (früher zu 20 Zentner) = 1000 kg 1 Doppelzentner (dz) = 100 kg	0,5 0,001 0,01	<b>Deutsches Reich.</b> (Mafs- und Ge- wichtsbezeich- nung gemäß Verordnung des Bundesrates vom 8. Oktober 1877.)*
1 Oxhoft = 2,20 hl 1 Stückfaß zu 7½ Ohm = 12,0 hl 1 Tonne (Schiffsmafs) = 2,12cbm	0,4545 0,0833 0,4717	1 Schiffslast zu 2 Tonnen 2000 kg	0,0005	

\*) Hiernach gilt noch folgendes: 1. Den Buchstaben werden Schlupfpunkte nicht beigefügt. 2. Die Buchstaben werden an das Ende der vollständigen Zahlenausdrücke — nicht über das Dezimalkomma — gesetzt, also 5,37 m, nicht 5 m 37 und nicht 5 m 37 cm. 3. Zur Trennung der Einerstellen von den Dezimalstellen dient das Komma, nicht der Punkt. Sonst ist das Komma bei Mafs- und Gewichtszahlen nicht anzuwenden, besonders nicht zur Abtheilung mehrstelliger Zahlenausdrücke. Diese Abtheilung ist durch Anordnung der Zahlen in Gruppen zu je 3 Ziffern, vom Komma aus gerechnet, mit angemessenem Zwischenraume zwischen den Gruppen zu bewirken. Eichfähig sind: Die Längenmaße, die dem Meter oder seinen ganzen Vielfachen, oder seiner Hälfte, seinem 5. oder seinem 10. Teile entsprechen; die Körpermaße, die dem ganzen oder halben Kubikmeter oder Hektoliter, oder den ganzen Vielfachen dieser Mafsgrößen, oder dem Liter, seinem 2-, 5-, 10- oder 20-fachen, oder seiner Hälfte, seinem 4., 5., 10., 20., 50. oder 100. Teile entsprechen; die Gewichte, die dem Kilogramm, dem Gramm oder dem Milli-  
gramm, oder dem 2-, 5-, 10-, 20- oder 50-fachen dieser Größen oder der Hälfte, dem 4., 5., 8. oder

Ländernamen	Längenmaße	$\frac{1}{2}$	Flächenmaße	$\frac{1}{2}$
<b>Frankreich.</b>	metrisch, früher: 1 Pariser Fufs = 0,324 839 m (1 m = 443,295 936 Par. Lin.)	3,0784 0,002 255 8	metrisch.	
<b>Griechenland.</b>	metrisch. 1 griechische Meile = 10 km	0,1	metrisch. 1 Stremma = 10 a	0,1
<b>Großbritannien.</b> (Das metrische Maß und Gewicht sind zugelassen.)	1 Zoll. Inch (16- oder 12-teilig) = 2,539 954 cm 1 Fufs (= 12 Zoll) = 0,304 794 49 m 1 Yard (= 3 Fufs) = 0,914 383 5 m 1 Fathom = 2 Yards = 6 Fufs = 72 Zoll = 1,823 767 m 1 Chain zu 100 Links zu 7,92 Inches = 20,12 m 1 Statute Mile zu 8 Furlongs zu 40 Ruten zu 2,75 Fathoms zu 2 Yards = 1760 Yards = 1,609 314 9 km Gewöhnl. engl. Meile = 5000 F. = 1,523 986 km 1 Nautical Mile (Knot) zu 6080 Fufs = 1,853 15 km *) Kaufmännisch: 12 Yards = 11 m	0,8937 3,2809 1,0936 0,5468 0,0497 0,6214 0,6562 0,5396	1 Qu.-Zoll = 6,451 4 qcm 1 Qu.-Fufs = 0,092 90 qm 1 Qu.-Yard = 0,8361 qm 1 Acre = 160 Qu.-Ruten = 4840 Qu.-Yard = 40,4671 a 1 Yard of land = 30 Acres = 12,1401 ha 1 Hide of land = 100 Acres = 40,467 ha 1 Mile of land = 640 Acres = 2,59 qkm	0,156 10,76 1,196 0,024 0,082 0,024 0,386
<b>Ostindien (britisch).</b>	1 Guz zu 2 Hat zu 24 Angli = 1 engl. Yard = 0,9144 m 1 Meile zu 1000 engl. Faden zu 4 Cubits oder 2 Bombay-Guz = 1,8288 km 1 Cubit (Madras) = 0,4572 m 1 Guz (Bombay) = 0,6858 m 1 Guz (Bengalen) = 0,9144 m Im Großhandel d. engl. Yard.	1,0936 0,5468 2,1872 1,4582 1,0936	1 Qu.-Yard = 0,8361 qm 1 Acre = 40,4671 a 1 Qu.-Fufs = 0,0929 qm 1 Qu.-Cubit = 0,209 qm 1 Qu.-Guz (Bombay) = 0,4703 qm 1 Qu.-Meile = 3,3444 qkm	1,196 0,024 10,76 4,784 2,126 0,299
<b>Japan.</b>	metrisch und englisch. 1 Shaku Kane zu 10 Sun zu 10 Bu = 0,303 m 1 Ri zu 36 Tchô zu 60 Ken zu 6 Shaku = 3,927 km	3,3003 0,2546	metrisch und englisch. 1 Qu.-Tschô = 0,991 74 ha 1 Shaku f. Stoffe = 0,379 m	1,008 2,638
<b>Oesterreich-Ungarn.</b>	metrisch. 1 m = 0,999 997 64 Mètre des Archives = 443,294 889 8 Pariser Linien. 1 Seemeile = 1,852 km Früher: 1 Wr. Fufs zu 12 Zoll zu 12 Linien = 0,316 081 m 1 Wr. Elle = 0,777 558 m 1 Wr. Klafter = 1,896 484 m 1 Postmeile = 7,585 936 km	0,5400 3,1637 1,2861 0,5273 0,1318	metrisch, früher: 1 Qu.-Fufs = 0,099 907 qm 1 Qu.-Klafter = 3,596 652 qm 1 n.-österreich. Joch = 0,575 464 2 ha 1 Qu.-Meile zu 10 000 Joch zu 1600 Qu.-Klafter = 57,546 42 qkm	10,007 0,278 1,737 7 0,017 3
<b>Paraguay.</b>	metrisch, früher: 1 Vara = 0,866 m 1 Legua = 4,33 km	0,1549 0,2312	metrisch, früher: 1 Qu.-Legua = 18,75 qkm	0,053 3

\*) 6080 engl. F. ist die abgerundete Länge des Mittels aus den 60-sten Teilen des Meridian- und des Aequatorgrades, dabei die Meridianlänge = 40 000 km und die Aequatorlänge = 5400 geographische Meilen gerechnet. Die engl. Admiralität rechnet 1 Admiralty Mile = 6086,5 Fufs = 1,8551 km =  $\frac{1}{60}$  des Aequatorgrades =  $\frac{1}{4}$  geographische Meile.

Raummaße	$\frac{1}{n}$	Gewichte	$\frac{1}{n}$	Ländernamen
metrisch. stère = 1000 l	0,001	metrisch.		<b>Frankreich.</b>
metrisch. Kiló = 1 hl	1	metrisch. 1 Stater = 56,32 kg	1,775 56 100	<b>Griechenland.</b>
Kub.-Zoll = 16,386 ccm Kub.-Fuß = 0,028 315 cbm Kub.-Yard = 0,7645 cbm Register-Ton = 100 Kub.-Fuß = 2,832 cbm Imperial Gallon v. 277,2738 Kub.-Zoll = 4,5435 l*) alter (Winchester-) Gallon von 231 Kub.-Zoll = $\frac{5}{8}$ Imp. Gallon = 3,785 203 l Last zu 10 Quarters zu 8 Bushels zu 4 Peks zu 2 Gallons = 29,078 924 hl Barrel zu 2 Kilderkin zu 2 Firkin zu 9 Gallons = 1,635 hl Anker = 10 Imp. Gallons von 1824 = 0,454 35 hl Tun zu 2 Pipes (Butts) zu 2 Hogsheds zu 63 Gallons = 11,45 hl	0,0610 3 35,3166 1,3080 0,3532 0,2201 0,2642 0,0344 0,6116 2,2009 0,0873	1 Pfd. avoirdupois (lbs.) [Handelsgewicht] zu 16 Ounces zu 16 Drams = 0,453 592 65 kg = 7000 Troygrains Silber- und Münz-, sowie Apothekergewicht] zu 12 Ounces zu 20 Pennyweights (dw) = 5760 Grains = 0,373 241 95 kg 1 Schiffston (short ton, Kanada, Ver. St. [s. u.] = 2000 Pfund (lbs.) = 907,1853 kg 1 Ton (long ton) = 20 Hundred- (cent-) weight zu 4 Quarters zu 28 Pfund (= 2240 lbs.) = 1016,0475 kg	2,204 62 2,679 23 1,102 31 1000 0,984 206 1000	<b>Großbritannien.</b> (Das metrische Maß und Gewicht sind zugelassen.)
flüssigkeiten nach engl. Imperial Gallons oder, wie Getreide, nach Gewicht. Khahoon (Bengalen) zu 16 Soallees wiegt 1354,73 kg Kandry Reils (Bombay) wiegt 97,95 kg Garce (Madras) zu 80 Parahs zu 5 Markals = 4,916 cbm	0,738 15 1000 0,0102 0,2034	1 Bazar Maund zu 40 Sihrs (Seers) zu 16 Chittaks zu 5 Tolas = 37,324 kg 1 Faktorei Maund = 33,868 kg 1 Madras Maund = 11,34 kg 1 Bombay Maund zu 40 Sihrs zu 30 Parahs = 12,70 kg	0,026 79 0,029 53 0,088 18 0,078 74	<b>Ostindien</b> (britisch).
metrisch und englisch. Sho zu 10 Go zu 10 Sai zu 10 Satsu = 1,803 907 l Koko zu 10 To zu 10 Sho = 1,803 907 hl	0,5544 0,5544	metrisch und englisch. 1 Kin zu 160 Momme zu 10 Fun zu 10 Rin = 0,600 kg 1 Kwan zu 1000 Momme = 3,7565 kg	1,664 0,266 19	<b>Japan.</b>
metrisch, früher: 1 Kub.-Fuß = 0,031 578 67 cbm 1 Kub.-Klafter = 6,820 099 2 cbm 1 Schachtrute = 3,157 867 cbm 1 Wr. Metze zu 16 Maß = 0,614 868 3 hl 1 Eimer zu 40 Maß = 0,565 890 hl 1 Maß = 1,414 724 l	31,667 0,1466 0,3167 1,6264 1,7671 0,7069	metrisch. 1 kg = 0,999 997 8 Kilogramme prototyp. Früher: 1 Wr. (und bayerisches) Pfund zu 32 Lot = 0,560 060 kg 1 Wr. Lot = 17,501 87 g 1 Wr. Ztr. = 56,0060 kg 1 Apotheker-Pfund = 0,420 kg 1 Stein zu 20 Pfund = 11,212 kg	1,785 52 0,057 14 0,017 86 2,381 0,891 00	<b>Oesterreich-Ungarn.</b>
metrisch, früher: 1 Fanega = 2,88 hl 1 Pipa = 5,8157 hl	0,3472 0,171 95	metrisch, daneben: 1 Quintal zu 4 Arrobas zu 25 Libra = 46,008 kg	0,021 74	<b>Paraguay.</b>

\*) Imperial Gallon von 1824. Mit der Jahreszahl 1890 wird ein Imperial Gallon zu 277,463 Kub.-Zoll = 4,546 503 713 l angegeben; 1 l = 0,219 949 Imperial Gallons. Hieraus ergibt sich 1 hl = 2,7466 Bushel; 1 Bushel = 0,8637 hl. Ein Imperial Gallon zu 4 Quarts zu 2 Pints zu 4 Gills.

Ländernamen	Längenmaße	$\frac{1}{72}$	Flächenmaße	$\frac{1}{72}$
<b>Preußen.</b> (Altes Maß.)	1 Fufs zu 12 Zoll zu 12 Linien = 0,313 853 5 m 1 Elle = 0,666 94 m 1 Lachter = 2,092 36 m 1 Rute zu 12 Fufs = 3,766 24 m	3,1862 1,4994 0,4779 0,2655	1 Qu.-Fufs = 0,098 50 qm 1 Qu.-Rute = 14,185 qm 1 Morgen zu 180 Qu.-Ruten = 0,255 322 4 ha 1 Qu.-Zoll = 6,8406 qcm	10,15 0,07 3,91 0,14
<b>Dänemark.</b> <b>Norwegen.</b>	In Dänemark, Norwegen: 1 Rute zu 5 Alen zu 2 Fufs = 3,138 535 m 1 Meile zu 2000 preufs. Ruten = 7,532 484 km in Norwegen 1 Meile zu 6000 Faden = 11,295 km	0,3186 0,1328 0,0885	In Dänemark: 1 Qu.-Rute zu 100 Qu.-Fufs = 9,85 qm 1 Tonne Land zu 560 Qu.- Ruten = 0,551 63 ha	0,101 1,814
<b>Rufsland.</b> (In Finnland und den Ostseeprovinzen besondere Maße und Gewichte.)	metrisch, engl. Fufsmafs. 1 Saschehn (zu 7 Fufs oder zu 2 Arschin zu 16 Wer- schock = 2,133 57 m 1 russ. Fufs = 1 engl. Fufs (Zoll 10-teilig) 1 Werst zu 500 Saschehn = 1,066 781 km 1 Meile zu 7 Werst = 7,467 465 km	0,4687 0,9374 0,1339	metrisch, engl. Fufsmafs. 1 Dessätine = 1,0925 ha 1 Qu.-Saschehn = 2400 Dessätinen = 4,5521 qm 1 Qu.-Werst = 1,138 02 qkm 1 Lofstelle $\sim$ $\frac{1}{2}$ Dessätine	0,915 0,219 0,878
<b>Schweden.</b>	metrisch, früher: 1 Famn zu 3 Alen zu 2 Fufs zu 10 Zoll = 1,7814 m 1 Meile = 10,6886 km	0,5614 0,0936	metrisch, früher: 1 Tunmland zu 2 Spanland zu 16 Kappland zu $3\frac{1}{2}$ Kannland = 56000 Qu.- Fufs = 0,493 641 ha	2,025
<b>Schweiz.</b>	metrisch, früher: 1 Rute (= $1\frac{2}{3}$ Klafter) zu 10 Fufs zu 10 Zoll = 3,000 m	0,3333	metrisch, früher: 1 Qu.-Klafter = 3,24 qm 1 Juchart = 0,36 ha	0,309 2,777
<b>Süd- amerika.*)</b>	metrisch, altkastilisch. 1 Vara = 3 Piks = 4 Palmos = 0,8359 m 1 Legua zu 3 Millas = 5,572 km	1,1963 0,1795	metrisch, altkastilisch.  In Venezuela: 1 Fanegada = 0,6987 ha	1,4456
<b>Uruguay.</b>	metrisch, früher: 1 Vara = 0,859 m 1 Legua = 5,154 km	1,1641 0,1940	metrisch, früher: 1 Qu.-Legua = 26,6 qkm	0,0376
<b>Vereinigte Staaten von Nordamerika.</b> (Das metrische Maß und Ge- wicht sind zu- gelassen.)	englisch, jedoch: 1 Statute Mile = 1.609 32 km 1 Naut. M. = 1.854 96 km 1 League = 3 Naut. Miles oder = 3 Statute Miles	0,6214 0,5391	englisch. 1 Qu.-Meile (Sektion) = 2,5899 qkm 1 Township zu 36 Sek- tionen = 93,236 qkm	0,3861 0,010 75

\*) Die Angaben gelten für Bolivia, Chile, Columbia, Costarica, Ecuador, Guatemala, Honduras, Nicaragua, Peru, S. Salvador und Venezuela.

\*\*) Anm. zu S. 1055: Die Fanega weicht von dem angegebenen Werte oft ab.

Raummafse	$\frac{1}{n}$	Gewichte	$\frac{1}{n}$	Ländernamen
1 Kub.-Fufs = 0,030 92 cbm 1 Kub.-Zoll = 17,891 ccm 1 Klafter zu 108 Kub.-Fufs = 3,339 cbm	32,342 0,0559 0,2995	1 (Zoll-) Pfund zu 80 Lot zu 10 Quentelen zu 100 Korn = 0,500 kg	2,000 2,1381	<b>Preußen.</b> (Altes Mafs.)
1 Schachtrute zu 144 Kub.-Fufs = 4,452 cbm 1 Oxhoft zu 1,5 Ohm zu 2 Eimer zu 2 Anker zu 30 Quart zu 64 Kub.-Zoll = 2,061 05 hl	0,2246 0,4852	1 alt. preufs. (u. württemberg.) Pfund = 0,4677 kg 1 Schiffslast zu 40 Zentner zu 100 Pfund = 2000 kg 1 Hamburger Komm.-Last = 6000 Pfund	0,02 100 0,033 33 100	
1 Scheffel zu 16 Metzen zu 3 Quart = 0,549 61 hl	1,8195	<b>In Dänemark:</b> 1 Komm.-Last zu 5200 Pfund = 2600 kg	0,038 46 100	<b>Dänemark.</b>
		<b>In Norwegen:</b> 1 Zentner = 49,811 kg	2,007 59 100	<b>Norwegen.</b>
metrisch, engl. Fufsmafs. 1 Kub.-Saschehn = 9,7123 cbm 1 Botscha zu 40 Wedro zu 100 Tscharka = 4,9195 hl	0,1030 0,2038	1 Pfund = 0,409 531 kg 1 Pud zu 40 Pfund zu 32 Lot zu 3 Solotnik = 16,380 48 kg	2,441 82 0,061 05	<b>Rufsland.</b>
1 Krutschka (Stoof) = 1,229 89 l 1 Tschetwert zu 8 Tschetwerik zu 8 Garnitzl = 2,099 hl 1 Wedro zu 10 Krutschka	0,8181 0,4764	1 Tonne zu 6,2 Berkowitz zu 10 Pud = 1015,5 kg 1 Last = 2025,44 kg	0,098 47 100 0,049 87 100	
metrisch, früher: 1 Ahm zu 6 Kub.-Fufs zu 10 Kannen = 1,570 313 hl 1 Tonne = 1,6489 hl	0,6368 0,6065	metrisch, früher: 1 Zentner zu 100 Skalpund zu 100 Ort = 42,507 58 kg 1 Schiffspfund = 170,028 kg 1 Schiffslast = 5760 Pfund = 2450 kg	2,352 87 100 5,881 88 1000	<b>Schweden.</b>
metrisch, früher: 1 Saum zu 4 Eimer zu 25 Mafs = 1,5 hl	0,6667	metrisch, früher: 1 Zentner = 100 Pfund = 50 kg	0,02	<b>Schweiz.</b>
metrisch, auch altkastilisch. 1 Cahiz zu 12 Fanegas**) zu 12 Celemines = 6,66 hl 1 Cantara zu 8 Acumbres zu 4 Cuartillas = 16,328 l 1 Moyo = 2,5826 hl 1 Pipa = 4,3570 hl 1 Bota = 4,8411 hl	0,1502 0,0612 0,3872 0,2295 0,2066	metrisch, auch altkastilisch. 1 Quintal zu 4 Arrobas zu 25 Libras zu 2 Marco zu 8 Oncas = 46,0093 kg 1 Tonnelada = 20 Quintal = 920 kg	2,173 47 100 0,108 674 100	<b>Süd-amerika.</b>
metrisch, früher: 1 Pipa = 4,554 24 hl 1 Fanega**) = 1,372 72 hl 1 Galon = 3,805 l	0,2196 0,7285 2,6281	metrisch, früher: 1 Quintal zu 4 Arrobas zu 25 Libras = 45,94 kg 1 Tonnelada = 918,8 kg	2,172 40 100 0,108 620 100	<b>Uruguay.</b>
altenglisch. 1 (Wein-) Gallon zu 4 Quarts zu 2 Pints zu 4 Gills zu 4 Fluid Ounces = 3,7852 l 1 Trocken-Gall. (Getreidem.) von 268,803 Kub.-Zoll = 4,4046 l (1 Bushel = 8 Trocken-Gall.) 1 gehäuft. Gallon = $\frac{1}{4}$ Trocken-Gallons 1 Barrel Petroleum zu 42 Gallons = 1,5898 hl 1 Barrel Bier zu 31 Gallons = 1,173 hl	0,2642 0,2270 0,6291 0,8525	englisch. 1 Hundred-weight häufig (z. B. in New-York) zu 4 Quarters zu 25 Pfund = 45,359 kg 1 Ton (short ton) zu 2000 Pfund (lbs.) = 907,1853 kg 1 long ton zu 2240 Pfund (lbs.) = 1016,0475 kg 1 Barrel Mehl zu 196 Pfund = 88,9 kg 1 Barrel Fleisch zu 200 Pfund = 90,72 kg 1 Barrel Salz = 280 Pfund 1 Humpheon Maismehl zu 800 Pfund = 362,88 kg	2,204 63 100 1,102 31 1000 0,984 206 1000 1,125 100 1,1023 100 2,756 1000	<b>Vereinigte Staaten von Nordamerika.</b> (Das metrische Mafs und Gewicht sind zugelassen.)

## D. Vergleichungstabellen zusammengesetzter Maßeinheiten.

### 1. Gewichtseinheit für die Längeneinheit.

kg/m	Pfund/Fufs			Pfund/Fufs	kg/m aus		
	preufs.	engl.	österr.		preufs. Mafs.	engl. Mafs.	österr. Mafs.
1	0,6277	0,6719	0,5644	1	1,5931	1,4882	1,7719
2	1,2554	1,3439	1,1287	2	3,1862	2,9764	3,5438
3	1,8831	2,0158	1,6931	3	4,7793	4,4646	5,3157
4	2,5108	2,6878	2,2575	4	6,3724	5,9528	7,0875
5	3,1385	3,3597	2,8218	5	7,9655	7,4410	8,8594
6	3,7662	4,0317	3,3862	6	9,5586	8,9292	10,6313
7	4,3939	4,7036	3,9506	7	11,1517	10,4174	12,4032
8	5,0217	5,3756	4,5150	8	12,7448	11,9057	14,1751
9	5,6494	6,0475	5,0793	9	14,3379	13,3939	15,9470

### 2. Gewichtseinheit für die Flächeneinheit.

kg/qcm	Pfund/Quadrat-Zoll			Pfund/Qu.-Zoll.	kg/qcm aus		
	preufs.	engl.	österr.		preufs. Mafs.	engl. Mafs.	österr. Mafs.
1	13,681	14,223	12,388	1	0,0731	0,0703	0,0807
2	27,361	28,445	24,776	2	0,1462	0,1406	0,1614
3	41,042	42,668	37,164	3	0,2193	0,2109	0,2422
4	54,722	56,891	49,552	4	0,2924	0,2812	0,3229
5	68,403	71,114	61,940	5	0,3655	0,3516	0,4036
6	82,083	85,336	74,328	6	0,4386	0,4219	0,4843
7	95,764	99,559	86,716	7	0,5117	0,4922	0,5651
8	109,444	113,782	99,103	8	0,5848	0,5625	0,6458
9	123,125	128,004	111,491	9	0,6579	0,6328	0,7265

kg/qcm	Tons/engl. Qu.-Zoll.								
100	0,635	2300	14,6	4600	29,2	1	157,5	26	4095
200	1,27	2400	15,2	4700	29,8	2	315,0	27	4252
300	1,905	2500	15,9	4800	30,5	3	472,5	28	4410
400	2,54	2600	16,5	4900	31,1	4	630,0	29	4567
500	3,175	2700	17,1	5000	31,75	5	787,5	30	4725
600	3,81	2800	17,8	5100	32,4	6	945,0	31	4882
700	4,445	2900	18,4	5200	33,0	7	1102,5	32	5040
750	4,762	3000	19,0	5300	33,7	8	1260,0	33	5197
800	5,08	3100	19,7	5400	34,3	9	1417,5	34	5355
900	5,715	3200	20,3	5500	34,9	10	1574,9	35	5512
1000	6,35	3300	21,0	5600	35,6	11	1732	36	5670
1100	6,985	3400	21,6	5700	36,2	12	1890	37	5827
1200	7,62	3500	22,2	5800	36,8	13	2047	38	5985
1300	8,254	3600	22,9	5900	37,5	14	2205	39	6142
1400	8,889	3700	23,5	6000	38,1	15	2362	40	6300
1500	9,524	3800	24,1	6500	41,3	16	2520	41	6457
1600	10,159	3900	24,8	7000	44,4	17	2677	42	6615
1700	10,794	4000	25,4	7500	47,6	18	2835	43	6772
1800	11,429	4100	26,0	8000	50,8	19	2992	44	6930
1900	12,064	4200	26,7	8500	54,0	20	3150	45	7087
2000	12,699	4300	27,3	9000	57,1	21	3307	46	7245
2100	13,334	4400	27,9	9500	60,3	22	3465	47	7402
2200	13,969	4500	28,6	10000	63,5	23	3622	48	7560
						24	3780	49	7717
						25	3937	50	7875

## 3. Gewichtseinheit für die Raumeinheit.

kg/cbm	Pfund/Kubik-Fufs			Pfund/Kubik-Fufs	kg/cbm aus		österr. Mafs
	preufs. Mafs	engl. Mafs	österr. Mafs		preufs. Mafs	engl. Mafs	
1	0,06183	0,06242	0,05638	1	16,7729	16,0196	17,7354
2	0,12366	0,12485	0,11277	2	32,3459	32,0392	35,4708
3	0,18550	0,18727	0,16915	3	48,5188	48,0588	53,2062
4	0,24733	0,24969	0,22554	4	64,6918	64,0784	70,9416
5	0,30916	0,31212	0,28192	5	80,8647	80,0980	88,6770
6	0,37099	0,37454	0,33831	6	97,0376	96,1175	106,4123
7	0,43282	0,43697	0,39469	7	113,2106	112,1371	124,1477
8	0,49465	0,49939	0,45108	8	129,3835	128,1567	141,8831
9	0,55649	0,56181	0,50746	9	145,5565	144,1763	159,6185

## 4. Metrische (neue) Atmosphäre, alte at und Höhe der gleichwertigen Quecksilbersäule (Q.-S.). (Vrgl. I. Bd. S. 341 u. 412.)

1 neue at = 1 kg/qcm.

	Die alte at angenommen zu		Höhe der Quecksilbersäule in			
	76 cm Q.-S.	28 Par. Zoll Q.-S.	cm	preufs. Zoll	engl. Zoll	Par. Zoll
$n =$	1 metr. at = $n$ alte at 0,96778	0,97039	1 metr. at = $n$ Q.-S.-Einheiten 73,551	28,122	28,958	27,171
	1 alte at = $\frac{1}{n}$ metr. at		1 Q.-S.-Einheit = $\frac{1}{n}$ metr. at			
$\frac{1}{n} =$	1,03296	1,0305	0,013596	0,0356	0,0345	0,0368

## 5. Vergleich der Arbeitseinheiten.

Verglichene Arbeitseinheit	preufs.	engl.	österr.	russ.	schwed.	
1 mkg = $n$ Fufspfund	6,3724	7,2331	5,6489	8,0114	7,9236	= $n$
1 Fufspfund = $\frac{1}{n}$ mkg	0,1569	0,1383	0,1770	0,1248	0,1262	= $\frac{1}{n}$

## 6. Vergleich der Pferdestärken. (Vrgl. I. Bd. S. 200.)

	England	Oesterreich	Preussen	Sachsen	Baden	Württemberg
	1 PS = 560 Fufspfd./sk	1 PS = 480 Fufspfd./sk	1 PS = 480 Fufspfd./sk	1 PS = 530 Fufspfd./sk	1 PS = 500 Fufspfd./sk	1 PS = 525 Fufspfd./sk
$n =$	1 metr. PS = 75 mkg/sk = $n$ PS der verschiedenen Länder					
	0,9863	0,9853	0,9957	0,9994	1,000	0,9973
	1 PS der verschiedenen Länder = $\frac{1}{n}$ metr. PS					
$\frac{1}{n} =$	1,0139	1,0149	1,0043	1,0006	1,000	1,0027
	1 PS der verschiedenen Länder = $\frac{75}{n}$ mkg/sk					
$\frac{75}{n} =$	76,041	76,119	75,325	75,045	75,000	75,204

## Zeitvergleichung.

**Mitteuropäische Zeit** (M. E. Z.) nach dem 15. Längengrade östl. von Greenwich: in Deutschland, Luxemburg, Oesterreich-Ungarn, Dänemark, Schweden, Norwegen, in der Schweiz, Italien, Bosnien, Serbien, westl. Türkei (Saloniker Netz).

**Westeuropäische Zeit** (W. E. Z.) nach dem Längengrade von Greenwich, 1 Stunde nach gegen M. E. Z.: in Großbritannien, Frankreich, Belgien, Spanien und Portugal.

**Osteuropäische Zeit** (O. E. Z.) nach dem 30. Längengrade östlich von Greenwich, 1 Stunde vor gegen M. E. Z.: in Bulgarien, Rumänien, in der östl. Türkei (Konstantinopeler Netz) und in Aegypten.

**Einheitliche Landeszeiten** nach den Längengraden der Hauptstädte: in Griechenland und Rußland.

### Gegen die mitteleuropäische Zeit gehen die Eisenbahn-Uhren

im westlichen Europa		nach		
		Stund.	Min.	
Frankreich . . . . .	}	W. E. Z. . . . .	I	—
Belgien . . . . .				
Großbritannien . . . . .				
Spanien . . . . .				
Portugal . . . . .				

im östlichen Europa		vor		
		Stund.	Min.	
Griechenland . . . . .	}	O. E. Z. . . . .	I	—
Bulgarien . . . . .				
Rumänien . . . . .				
Oestl. Türkei . . . . .				
Rußland . . . . .				

in außereuropäischen Orten		nach	
		Stund.	Min.
Rio de Janeiro . . . . .		3	53
Halifax . . . . . (Inter. Colonial Time) . . . . .	X	5	—
Boston . . . . . (Eastern Time) . . . . .	X	6	—
New York . . . . . (Eastern Time) . . . . .	X	6	—
Chicago . . . . . (Central Time) . . . . .	X	7	—
New Orleans . . . . . (Central Time) . . . . .	X	7	—
Salt Lake City . . . . . (Mountain Time) . . . . .	X	8	—
San Francisco . . . . . (Pacific Time) . . . . .	X	9	—
Honolulu . . . . .		11	32
Apia (Samoa-Inseln) . . . . .		12	27

in außereuropäischen Orten		vor	
		Stund.	Min.
Bombay . . . . .		3	52
Calcutta . . . . .		4	54
Hongkong . . . . .		6	37
Albany . . . . . (wie ganz Westaustralien) . . . . .	X	7	—
Shanghai . . . . . (wie die ganze chinesische Küste) . . . . .	X	7	—
Yokohama . . . . . (wie ganz Japan) . . . . .	X	8	—
Adelaide . . . . . ( " " Süd-Australien) . . . . .	X	8	—
Melbourne . . . . . ( " " Victoria) . . . . .	X	9	—
Sydney . . . . . ( " " Neu-Süd-Wales) . . . . .	X	9	—
Brisbane . . . . . ( " " Queensland) . . . . .	X	9	—

X Stundenzonenzeit.

In einigen Ländern, wie Oesterreich, Rußland usw., werden die Uhren mancher Orte nach mittlerer Ortszeit gestellt. Sie gehen dann auf jeden Grad, um welchen der Ort östlicher oder westlicher liegt, als der für den Fahrplan maßgebende Meridian um 4 Minuten vor oder nach gegen die Eisenbahn-Uhr.

Für die Niederlande ist der Meridian von Amsterdam für die Einheitszeit zugrunde gelegt.

## Beförderungsdauer in Tagen für Postsendungen von europäischen Häfen nach Uebersee.\*)

Abgangshäfen: b = belgische, d = deutsche, e = englische, f = französische,  
h = holländische, i = italienische, p = portugiesische, sp = spanische.

Adelaide . . . . . 27—30 i	Frz.-Guinea . . . . . 10—12 f	Padang . . . . . 22—23 f
Aden . . . . . 7—10 i	Fremantle (West-Australien) . . . . . 23—26 i	Palau . . . . . 36—57 i
Akkra (Goldküste) . . . . . 15 e u. f	Gambia (Bathurst) . . . . . 13 e	Panama siehe Colon
Alexandrien . . . . . 29/4—4 i	Grand Bassa (Liberia) . . . . . 18—26 h	Para . . . . . 10—12 p
Algier . . . . . 3—4 v. Berlin	Grand Bassam (Elfenbeinküste) . . . . . 13—16 f	Paraguay über Buenos Aires . . . . . 18—20 i
Amiranten . . . . . 17—24 f	Guadeloupe . . . . . 10—12 f	Penang . . . . . 18—20 i
Angola (Loanda) . . . . . 15—24 p	Guatemala von New York über New Orleans nach Puerto Barrios . . . . . 15 e	Pernambuco . . . . . 10—13 p
Arica (Chile) . . . . . 29—39 d	Guyana . . . . . 5 e	Peru über Colon
Ascension . . . . . 14 e	Hawaii v. Berlin nach Honolulu . . . . . 20—24	Philippinen über Singapore
Auckland . . . . . 37 e	Haiti . . . . . 17—19 f	Pisagua . . . . . 29—36 d
Autofagast . . . . . 32—39 d	Honduras 5 v. New York	Port au Prince 9 von New York
Azoren . . . . . 3—7 p	Hongkong . . . . . 25—29 i	Porto Rico 4—6 v. New York
Bahama-Ins. 4—5 v. New York	Jaffa . . . . . 4—6 i	Port Said . . . . . 21/4—4 i
Bahia . . . . . 11—13 p	Jamaika 5—7 von New York	Portg.-Guinea . . . . . 6—10 p
Barranquilla 12—13 v. New York	Jap . . . . . 39 i	Puerto Columbia . . . . . 19 b
Batavia . . . . . 23—25 i	Japan . . . . . 14 v. Berlin	Punta Arenas . . . . . 23—24 p
Beira (Mosambik) 23—24 i	Karolinen . . . . . 51 i	Quebec . . . . . 1 v. New York
Beirut . . . . . 6—7 i	Kilindini (Deutsch-Ostafrika) . . . . . 16—18 i	Réunion . . . . . 24—29 f
Bender-Abbas (Persien) 18—25 i	Kingston 5—6 v. New York	Rhodesia über Capstadt
Betschuanaland über Capstadt	Kribi (Kamerun) . . . . . 20 f	Rio de Janeiro . . . . . 13—14 p
Bolivien über Panama	Lagos . . . . . 16 e	Rio del Rey . . . . . 23 e
Boma (Kongo) . . . . . 19 b	La Guayra . . . . . 15—16 f	Sabang . . . . . 20 i
Bombay . . . . . 12—18 i	Libreville (Kongo) . . . . . 16 f	Saigon . . . . . 24 i u. f
Brisbane . . . . . 4 v. Adelaide	Loanda . . . . . 15—24 p	Salvador . . . . . 17—22 d
Buenos Aires . . . . . 15—20 i	Loango . . . . . 18 f	Samao 29—31 v. Queenstown
Buschir . . . . . 19—28 i	Lome . . . . . 16 f	San Domingo 9 v. New York
Calabar (Kamerun) . . . . . 19 e	Lüderitzbucht . . . . . 20—21 e	San Thomé . . . . . 11—17 p
Canarische Ins. . . . . 2—5 sp	Madagaskar . . . . . 19—21 i	Shanghai . . . . . 29—32 i
Cape Palmas . . . . . 17—18 h	Madeira (Funchal) . . . . . 2—4 p	Seychellen-Ins. . . . . 17—24 f
Capstadt . . . . . 17 e	Manaos . . . . . 17—25 p	Sierra Leone . . . . . 11 p
Capverdische Ins. 5—7 p	Maracaibo 10 von New York	Singapore . . . . . 21 i
Cartagena (Columbien) 11 v. New York	Marianen (Saipan) . . . . . 44 i	Smyrna . . . . . 4—5 v. Berlin
Colombo . . . . . 13—15 i	Marschall-Ins. (Jaluit) . . . . . 54—57 i	St. Helena . . . . . 17 e
Colon (Panama) . . . . . 6—8 v. New York	Martinique . . . . . 11—12 f	St. John's (Canada) 8—11 e
Conakry (Frz.-Guinea) 10—12 f	Matadi . . . . . 20 f	St. Lucia . . . . . 14 f
Costa Rica 6—8 v. New York	Mauritius . . . . . 26—31 f	St. Thomas . . . . . 15 f
Coquimbo (Chile) . . . . . 32—35 f u. p	Melbourne 1 von Adelaide	Swakopmund . . . . . 20—24 e
Cuba 12—14 v. Berlin nach Havanna	Mexiko 5 von New York	Sydney . . . . . 2 v. Adelaide
Curacao 8—10 v. New York	Mombasa . . . . . 15 i	Tahiti 12 v. S. Francisco
Cypern . . . . . 4—5 i	Monrovia . . . . . 12 f	Tampico . . . . . 18 e
Dahomey über Lome	Montevideo . . . . . 15—18 p	Tanga . . . . . 16—19 i
Dakar (Senegal) . . . . . 5 p	Montreal 14 Stunden von New York	Tanger 2 1/2, 6 1/2 St. sp
Daressalam 17—18 f u. i	Mosambik . . . . . 21 i	Tenerife . . . . . 2—5 sp
Delagoabai . . . . . 21—28 i	Natal über Capstadt	Togo (Lome) . . . . . 16 f
Djibouti . . . . . 9—11 f	Neu-Fundland . . . . . 6—7 e	Tonkin über Sibirien
Duala (Kamerun) . . . . . 18 f	Neu-Guinea . . . . . 40—45 i	Transvaal über Capstadt
Ecuador über Colon-Panama	Neu-Seeland über Adelaide	Trinidad . . . . . 13 f
Falkland-Ins. . . . . 27 e	New York . . . . . 5—10	Tripolis . . . . . 2 i
Fayal . . . . . 6—7 p	Nicaragua (Westküste) 3—5 von Colon	Tsingtau . . . . . 33—36 i
Fernando Po . . . . . 23 sp	Nigeria . . . . . 17—18 e u. d	Tunis . . . . . 10—36 St. i
Fidschi-Ins. . . . . 30 e		Valparaiso von Buenos Aires 1 1/2

\* Näheres in dem monatlich erscheinenden Beiheft zum Amtsblatt des Reichs-Postamts.

## E. Gebührenordnung der Architekten und Ingenieure.\*)

### I. Allgemeine Bestimmungen.

#### § 1. Grundsätze für die Bemessung der Gebühren.

1. Die Gebühren werden im allgemeinen nach der Bausumme in Rechnung gestellt, u. zw. für Vorarbeiten und Ausführungsarbeiten\*\*) gesondert. Für erstere ist die Summe des Kostenanschlages oder — falls, oder solange ein Kostenanschlag noch nicht aufgestellt ist — die Kostenschätzung maßgebend, für letztere die Summe der Baukosten.

2. Vorarbeiten sind:

- a) der Vorentwurf in Skizzen nebst Kostenschätzung und gebotenenfalls Erläuterungsbericht,
- b) der Entwurf in solcher Durcharbeitung, daß danach der Kostenanschlag c) aufgestellt werden kann,
- c) der Kostenanschlag zur genauen Ermittlung der Baukosten,
- d) die Bauvorlagen, bestehend in den zur Nachsuchung der behördlichen Genehmigungen nötigen Zeichnungen und Schriftstücken.

Ausführungsarbeiten sind:

- e) die Bau- und Werkzeichnungen in einem für die Ausführung genügenden Maßstabe,
- f) die Oberleitung. Diese umfaßt die Vorbereitung der Ausschreibungen, den Entwurf der Verträge über Arbeiten und Lieferungen, die Verhandlungen über die Verträge mit den Lieferanten und Unternehmern bis zum Vertragsabschlusse; die Bestimmung der Fristen für den Beginn, die Fortführung und die Fertigstellung der Bauarbeiten; die Ueberwachung der Bauausführung; den Schriftwechsel in den bei der Ausführung vorkommenden Verhandlungen mit Behörden und dritten Personen; die Prüfung und Feststellung der Baurechnungen.

3. Die für die Berechnung der Gebühren in Betracht zu ziehende Gesamtbau-summe umfaßt sämtliche Kosten, welche für den Bau aufgewandt werden, mit Ausschluß der Kosten des Grunderwerbes und der Bauleitung, sowie der Gebühren für den Architekten und Ingenieur. Uebernimmt der Bauherr selbst Materiallieferungen und Arbeitsleistungen, so werden deren Kosten bei der Berechnung der Gebühren nach ortsüblichen Preisen zu den übrigen Baukosten hinzugerechnet.

4. Die Zahlung der Gebühr berechtigt den Auftraggeber nur zu einmaliger Ausführung des gelieferten Entwurfes; Benutzung zu wiederholter Ausführung ist von neuem gebührenpflichtig.

5. Umfaßt ein Auftrag mehrere Bauwerke nach demselben Entwurfe, so sind die Gebühren, vorausgesetzt, daß diese Bauwerke auf einmal ausgeführt werden, für Vorentwurf und Oberleitung nach der Gesamtsumme, für die übrigen Arbeiten den erforderlichen Leistungen entsprechend zu berechnen. Umfaßt ein Auftrag mehrere gleichartige Bauwerke nach verschiedenen Entwürfen, so sind die Gebühren für jedes Bauwerk einzeln zu berechnen.

6. Umfaßt ein Bauauftrag mehrere verschiedenen Gebieten, Gruppen oder Bauklassen angehörende Bauwerke, so darf die Gebühr für jedes getrennt berechnet werden.

7. Wird auf Veranlassung oder unter Zustimmung des Auftraggebers durch Veränderung des Entwurfes eine Vermehrung der vorbereitenden Arbeiten erforderlich, so ist dafür eine der Mehrleistung entsprechende Gebühr zu zahlen.

8. Wird nur der **Vorentwurf** als eine in sich abgeschlossene Leistung geliefert, so erhöht sich die Gebühr um die Hälfte.

9. Werden für eine Baustelle mehrere Vorentwürfe nach verschiedenen Bauprogrammen verlangt, so ist jeder Vorentwurf besonders zu berechnen. Sind nach demselben Bauprogramme und für dieselbe Baustelle mehrere Vorentwürfe auf Verlangen des Bauherrn aufgestellt, so wird die Gebühr für den ersten voll, für alle weiteren nach Verhältnis der Mehrleistung berechnet.

10. Für den **Entwurf** sind die Teilbeträge aus § 1, 2a) und b) zusammen zu berechnen, auch wenn ein Vorentwurf nicht geliefert worden ist.

\*) Siehe auch: Gebührenordnung der beratenden Ingenieure für Elektrotechnik, aufgestellt vom Verein beratender Ingenieure für Elektrotechnik (E. V.) in Berlin. 1908

\*\*) Unter „Bausausführung“ ist nicht die „Bauunternehmung“ zu verstehen.

11. Sind im Auftrage des Auftraggebers mehrere Entwürfe für dieselbe Bauaufgabe angefertigt worden, so sind die Gebühren für den ersten Entwurf aus § 1, 2a) und b), für jeden der weiteren Entwürfe nach Verhältnis der Mehrleistung, jedoch mindestens mit der Hälfte der Gebühren aus § 1, 2a) und b) zu berechnen.

12. Die Gebühren für die **Überleitung** gelten unter der Voraussetzung, daß die Bauausführung durch Einzel- oder Gesamtunternehmer erfolgt. Für solche Leistungen, welche ohne Zuziehung von Unternehmern ausgeführt werden, verdoppelt sich die Gebühr für § 1, 2f) bezüglich des von dieser Ausführungsart betroffenen Teiles der Bau-summe. Die Gebühr für § 1, 2c) kommt auf alle Fälle auch dann zur Verrechnung, wenn die Pläne des Entwurfes ganz oder zum Teil als Bau- und Werkzeichnungen verwendet werden können.

13. Erstreckt sich der Auftrag nur auf die Ausführungsarbeiten, so erhöht sich die Gebühr für § 1, 2e) und f) um ein Viertel.

14. Für Umbauten erhöhen sich die Gebühren den erforderlichen Leistungen entsprechend, mindestens aber um die Hälfte.

15. Werden seitens eines Lieferanten oder Unternehmers Provisionen oder Rabatte auf Bestellungen gewährt, so fallen diese dem Bauherrn zu.

16. Dem Auftraggeber ist auf Verlangen eine Ausfertigung des Entwurfes ohne besondere Vergütung zu übergeben.

## § 2. Nebenkosten.

In die festgesetzten Gebühren sind nicht eingeschlossen und daher vom Auftraggeber besonders zu vergüten:

17. die Kosten aller für die Aufstellung des Entwurfes notwendigen Unterlagen als: Katasterauszüge, Lage- und Höhenpläne;\*) Bauaufnahmen, Bodenuntersuchungen Bohrungen, Wassermessungen, Analysen, statistische Erhebungen u. dgl.; die Bau-skizzen und Bauzeichnungen des zu bearbeitenden Gebäudes für Entwürfe zu Heizungs-, Lüftungs-, Beleuchtungs-, Be- und Entwässerungs- sowie elektrischen Anlagen;

18. die Kosten der besonderen Bauleitung, d. h. die Gehaltsbezüge der Bau-führer, Bauaufseher, Bauwächter usw.; die Kosten für die Beschaffung und Unterhaltung eines besonderen Neubureaus, für die Vervielfältigung der Unterlagen und für die Ausschreibung und Vergebung der Arbeiten, Lieferungen u. dgl., sowie für die zur Abrechnung erforderlichen Vermessungen. Die Gehaltsbezüge eines zur besonderen Bauleitung erforderlichen Bauführers sind auch dann — u. zw. nach Verhältnis des Zeitaufwandes — zu erstatten, wenn der Bauführer zur Leitung mehrerer Bauten vom Architekten oder Ingenieur bestellt ist;

19. bei Hochbauten die Gebühren der mit statischen Berechnungen, Konstruktionen, maschinellen Anlagen u. dgl. betrauten Ingenieure; bei Ingenieurbauten diejenigen des mit der künstlerischen Ausbildung des Entwurfes betrauten Architekten und der zugezogenen Spezialisten;

20. die Mühewaltung bei Auswahl, Erwerb, Veräußerung, Benutzung und Belastung von Grundstücken, Baulichkeiten usw., sowie bei Ordnung der Rechtsverhältnisse;

21. die aus Anlaß des Baues erforderlichen Reisen;

22. etwa geforderte Revisions- und Inventarzeichnungen, sowie bei Straßen, Eisenbahnen und Kanälen die Schlußvermessungen.

## § 3. Zahlungen.

23. Abschlagzahlungen auf die Gebühren sind auf Verlangen bis zu  $\frac{3}{4}$  der nach dieser Gebührenordnung zu bewertenden, bereits bewirkten Leistungen zu gewähren. Insbesondere sind die Gebühren für die Vorarbeiten zu  $\frac{3}{4}$  sofort nach deren Ab-lieferung fällig. Die Restzahlungen sind, gesondert nach Vorarbeiten und Aus-führungsarbeiten, längstens 3 Monate nach Erfüllung des Auftrages zu leisten.

## § 4. Besondere Gebühren.

24. Gutachten, Schätzungen, schiedsgerichtliche Arbeiten, statische Berechnungen, künstlerische Darstellungen u. dgl. stehen außerhalb dieser Gebührenordnung und sind nach der darauf verwendeten geistigen Arbeit, nach der fachlichen Stellung des Beauftragten und nach der wirtschaftlichen Bedeutung der Frage zu bewerten.

\*) Bezüglich der Kosten der Arbeiten des Feldmessers wird auf den Entwurf des deutschen Geometer-Vereines für einen Gebührentarif für geometrische Arbeiten, Zeitschrift für Vermessungswesen Bd. XV Heft 10 bis 12, verwiesen, welcher als Sonderdruck von dem Bibliothekar des Vereines aus München zu beziehen ist.

25. Für nach der Zeit zu vergütende Arbeiten sind zu berechnen

für die erste Stunde . 20 *M*  
für jede fernere Stunde 5 „

26. Für Reisen im Inlande sind außer den im § 4, 24 und 25, oder § 6 und §§ 8 bis 10 aufgeführten Gebühren 30 *M* für den Tag zu vergüten. Dieser Satz kommt auch für Teile eines Tages voll in Ansatz; jedoch kann er für einen Tag nur einmal angesetzt und soll nach Verhältnis verteilt werden, wenn gleichzeitig mehrere Auftraggeber beteiligt sind. Neben diesem Tagessatze sind die Auslagen für Fahrten, Gepäckbeförderung und Arbeiter zu erstatten.

27. Die Leistungen von Gehülfen werden deren Stellung entsprechend in Rechnung gestellt.

## II. Gebühren der Architekten.

### § 5. Grundlagen der Berechnung.

28. Die Gebühren für die Leistungen der Architekten bei der Vorbereitung und Ausführung von Bauten werden

sowohl nach der **Bausumme**,  
als nach der **Art**,  
als nach der **Ausbausumme**

der Bauwerke bemessen.

29. Die **Bausumme** umfasst die sämtlichen Baukosten. Sie ist bei Berechnung der Gebühren für die Vorarbeiten dem Kostenanschlag, und für die Ausführungsarbeiten der Bauabrechnung zu entnehmen. Wenn und solange die Bauabrechnung nicht vorliegt, tritt an deren Stelle der Kostenanschlag und, solange auch dieser fehlt, an deren Stelle die Kostenschätzung.

30. Nach der **Art** der Bauwerke werden unterschieden:

- Gruppe I: Schuppen, Scheunen, Ställe, Remisen, Gewächshäuser; Lagerhäuser, Speicher, Schlacht- und Viehhöfe; Werkstätten, Betriebsanlagen, Fabriken; Aborts- und Barackenbauten;  
Gruppe II: Wohn-, Gast-, Kaufhäuser, Banken; Schulen, Kasernen, Gefängnisse, Bade-, Heil- und Pflegeanstalten, Markt- und provisorische Hallenbauten, Geschäfts-, Bureau-, Verwaltungs-, Verkehrs-, sowie alle solche Gebäude, welche nicht unter den Gruppen I und III besonders benannt sind;  
Gruppe III: Kirchen aller Art, Friedhofsbauten, Gedenkhallen; Hochschulen, Akademien, Bibliotheken; Museen, Theater, Konzerthäuser; Börsen, Parlaments- und Rathäuser;  
Gruppe IV: Denkmäler, Brunnen, Grotten, Lauben, Bänke; Raumausstattungen; Fest- und Trauerdekorationen, bauliche Ausstattungsgegenstände (Altäre, Kanzeln usw.);  
Gruppe V: Möbel und kunstgewerbliche Gegenstände (Lichtträger, Geräte, Schmucksachen usw.).

31. Die **Ausbausumme** umfasst den auf den Ausbau und die Ausschmückung des Bauwerkes fallenden Teil der Bausumme, welcher in Kostenanschlägen und Bauabrechnungen im einzelnen nachzuweisen ist. Dabei werden die Bauarbeiten wie folgt geschieden:

Rohbau:	Ausbau:
Ausschachtungsarbeiten	—
Maurerarbeiten . . . . .	Putzarbeiten und Mehrkosten für Ziegelverblendung
Steinmetzarbeiten:	Mehrkosten für Profilierung und Verzierung (durchschnittlich zu $\frac{1}{3}$ der Gesamtkosten anzunehmen)
Lieferung und Versetzen des Materiales	
in einfacher glatter Bearbeitung (durchschnittlich zu $\frac{2}{3}$ der Gesamtkosten anzunehmen)	
Asphalt- und Isolierarbeiten	—
Zimmerarbeiten:	Zulagen für Verzierung und Verkleidung sichtbarer Holzteile; Fußböden; hölzerne Treppen
Balken, Fachwände, Dachverband	Kunstschmiedearbeiten
Eisenkonstruktionen . . . . .	

## Gebühren der Architekten in Hundertstein der Bausumme.\*)

## Gebühren der Architekten in Procenten der Bausumme.\*)

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
Für Bausummen bis	In den Gruppen					
	I	II	III	IV	I bis IV Zuschlag	V
	beim Verhältnis der Ausbausumme zur Bausumme bis					
M	20/100	30/100	40/100	50/100	je 1/100 mehr	
1 000	6,00	9,00	12,00	15,00	0,135	21,00
2 000	5,60	8,40	11,20	14,00	0,125	19,60
3 000	5,30	8,00	10,60	13,30	0,120	18,60
4 000	5,10	7,70	10,20	12,80	0,115	17,90
5 000	4,90	7,40	9,80	12,30	0,110	17,30
6 000	4,80	7,20	9,60	12,00	0,108	16,80
7 000	4,70	7,00	9,40	11,70	0,106	16,40
8 000	4,60	6,90	9,20	11,50	0,104	16,10
9 000	4,55	6,85	9,10	11,40	0,103	15,95
10 000	4,50	6,80	9,00	11,30	0,102	15,80
15 000	4,30	6,50	8,60	10,80	0,097	15,10
20 000	4,10	6,20	8,20	10,30	0,093	14,50
25 000	4,00	6,00	8,00	10,00	0,090	14,00
30 000	3,90	5,85	7,80	9,70	0,088	13,60
35 000	3,80	5,70	7,60	9,50	0,086	13,30
40 000	3,70	5,55	7,40	9,30	0,084	13,00
50 000	3,60	5,40	7,20	9,00	0,081	12,50
60 000	3,50	5,25	7,00	8,70	0,079	12,20
70 000	3,40	5,10	6,80	8,50	0,077	11,90
80 000	3,35	5,05	6,70	8,40	0,076	11,75
90 000	3,30	5,00	6,60	8,30	0,075	11,60
100 000	3,25	4,95	6,50	8,20	0,074	11,45
150 000	3,10	4,70	6,20	7,80	0,070	10,90
200 000	3,00	4,50	6,00	7,50	0,067	10,50
250 000	2,90	4,30	5,80	7,20	0,065	10,10
300 000	2,80	4,20	5,60	7,00	0,063	9,80
350 000	2,75	4,10	5,50	6,90	0,062	9,65
400 000	2,70	4,00	5,40	6,80	0,061	9,50
500 000	2,65	3,90	5,30	6,60	0,059	9,25
600 000	2,60	3,80	5,20	6,40	0,058	9,00
700 000	2,55	3,75	5,10	6,30	0,057	8,85
800 000	2,50	3,70	5,00	6,20	0,056	8,70
900 000	2,45	3,65	4,90	6,10	0,055	8,55
1 000 000	2,40	3,60	4,80	6,00	0,054	8,40
1 250 000	2,30	3,45	4,60	5,80	0,052	8,10
1 500 000	2,20	3,30	4,45	5,60	0,050	7,80
2 000 000	2,10	3,20	4,30	5,40	0,049	7,50
2 500 000	2,05	3,10	4,15	5,20	0,047	7,25
3 000 000	2,00	3,00	4,00	5,00	0,045	7,00
4 000 000	1,95	2,95	3,90	4,90	0,044	6,85
5 000 000	1,90	2,90	3,80	4,80	0,043	6,70
6 000 000	1,85	2,85	3,70	4,70	0,042	6,55
7 000 000	1,80	2,80	3,65	4,60	0,041	6,40
10 000 000	1,75	2,70	3,55	4,50	0,040	6,30

\*) Die Bausumme wird nach der nächst unteren Stufe abgerundet, solange die Gebühr dadurch höher ausfällt.

Dachdecker- und Klempnerarbeiten . . .	Metallverzierungen
—	Putz- und Stuckarbeiten
—	Bildhauerarbeiten mit Modellen
—	Bekleidung aus Stuckmarmor, Terrazzo, Mosaik, Steinplatten, Fliesen, Kacheln, Formsteinen, Terrakotten usw.
—	Tischler-, Glaser- und Schlosserarbeiten
—	Maler- und Tapezierarbeiten
—	Heizungs- und Lüftungsanlagen, Ofensetzerarbeiten
—	Wasser- und Gasleitungen, Abortanlagen
—	Elektrische und Maschinenanlagen
Pflasterungen, Wege- und Gartenanlagen .	—
Insgemein . . . . .	Unvorhergesehene Arbeiten des Ausbaues.

### § 6. Berechnung der Gebühren.

32. Die Gesamtgebühren werden nach Maßgabe der beigefügten Tafel in Prozenten der Bausumme berechnet, welche mit den Gruppen und mit steigendem Ausbaue wachsen, dagegen mit steigenden Bausummen abnehmen.

33. Die Grundgebühren der Tafel in den Gruppen I bis IV entsprechen den am Kopfe der Spalten 2 bis 5 bezeichneten Mindestsätzen für das Verhältnis der Ausbausumme zur Bausumme und werden für jedes weitere Hundertstel dieses aus dem Kostenanschlag bzw. aus der Bauabrechnung nachzuweisenden Verhältnisses um den in Spalte 6 angegebenen Zuschlag erhöht.

34. Solange die Ausbausumme nicht nachgewiesen ist, wird das Ausbauverhältnis zu den Mindestsätzen der Tafel angenommen. Nach geschehener Lieferung des Entwurfes steht es dem Architekten jedoch zu, den Nachweis durch Vorlage eines Kostenanschlages zu führen.

35. An Einzelgebühren werden berechnet

für Vorarbeiten	{	a) Vorentwurf . . . . .	10	} 30	} 40	Hundertstel der in der Tafel angegebenen Sätze	
		b) Entwurf . . . . .	20				
		c) Kostenanschlag . . . . .	7				} 10
		d) Bauvorlagen . . . . .	3				
für Ausführungs- arbeiten	{	e) Bauzeichnungen . . . . .	20	} 40	} 60		
		und Werkzeichnungen . . . . .	20				
		f) Bauleitung . . . . .	20				20

### Beispiele der Gebührenberechnung.

Beispiel 1. Villa. Gebühren für Vorentwurf und Entwurf. Nach der Kosten-schätzung: Bausumme 100 000  $\mathcal{M}$

$$\text{Gruppe II: } \frac{100\,000}{100} \cdot 4,95 \cdot 0,30 = 1485 \mathcal{M}.$$

Beispiel 2. Dieselbe Villa. Gebühren für alle Vorarbeiten. Nach dem Kosten-anschlage: Bausumme 100 000  $\mathcal{M}$ , Ausbausumme 50 000  $\mathcal{M}$ , Ausbauverhältnis =  $\frac{50}{100}$ .

$$\text{Gruppe II: } \frac{100\,000}{100} [4,95 + (50 - 30) \cdot 0,074] \cdot 0,40 = 2572 \mathcal{M}.$$

Beispiel 3. Dieselbe Villa. Gebühren für alle Arbeiten.

Nach dem Kostenanschlage: Bausumme 100 000  $\mathcal{M}$ , Ausbausumme 50 000  $\mathcal{M}$ , Ausba-verhältnis =  $\frac{50}{100}$ .

Nach der Bauabrechnung: Bausumme 120 000  $\mathcal{M}$ , Ausbausumme 66 000  $\mathcal{M}$ , Ausba-verhältnis =  $\frac{55}{100}$ .

Gruppe II:

$$\frac{100\,000}{100} (4,95 + 20 \cdot 0,074) \cdot 0,40 + \frac{120\,000}{100} (4,70 + 25 \cdot 0,070) \cdot 0,60 = 7216 \mathcal{M}.$$

## III. Gebühren der Ingenieure.

### § 7. Art der Berechnung.

36. Für die Gebührenberechnung werden die Ingenieurarbeiten, sofern sie nicht als Hochbauten nach II. zu verrechnen sind, in drei Gruppen geteilt, u. zw. in solche die

- A. nach Hundertstel der Baukosten (§ 8),  
 B. nach der Länge der Linie (§ 9),  
 C. nach der Größe der Fläche vergütet werden (§ 10).

Die Gruppe A. zerfällt in vier Bauklassen 1., 2., 3. und 4.

37. Für die Arbeiten der Gruppen B. und C. werden Gebührengrenzen für einfache und schwierige Verhältnisse angegeben. Die zu zahlenden Gebühren sind in jedem Falle vertragsmäßig zwischen diesen Grenzen mit dem Bauherrn zu vereinbaren.

38. Die Frage, ob einfache oder schwierige Verhältnisse vorliegen, wird gleichzeitig nach der Geländegestaltung, nach den wirtschaftlichen Umständen und nach technischen Gesichtspunkten entschieden.

39. Alle Arbeiten, deren Baukosten den Betrag von 5000 *M* nicht erreichen, dürfen nach den Sätzen für Zeitgebühren (§ 4, 25) verrechnet werden.

40. Die Anteile der Einzelleistungen an der Gesamtgebühr werden für Ingenieurarbeiten folgendermaßen festgesetzt:

Bezeichnung der Einzelleistung	Teilbeträge in Hundertstel
Vorentwurf und Kostenschätzung . . . . .	25
Entwurf . . . . .	} 30
Kostenanschlag . . . . .	
Bauvorlagen . . . . .	5
Bau- und Werkzeichnungen . . . . .	10
Oberleitung der Bauausführung . . . . .	30

### § 8.

#### Gebührensätze für Arbeiten, welche nach der Bausumme vergütet werden.

41. Hierher gehören alle Bauwerke, welche nicht nach den Bestimmungen für die Gruppen B. § 9 und C. § 10 zu berechnen sind, nämlich:

##### Bauklasse 1.

Bohlwerke, Brücken, gerade feste bis 10 m Spannweite; einfache Deichsiele; einfache Durchlässe; E.darbeiten jeder Art; Anlagen zur Fortleitung und Verteilung der Elektrizität; Faschinenbauten; Felssprengungen; Futtermauern, Gerinne für Wasserleitungen ohne Kunstbauten; einfache Hafenanlagen ohne Kunstbauten; Pflasterungen als Uferdeckung; Rohrleitungen ohne Abzweige; einfache Straßenanlagen; Straßenebefestigungen; Stützmauern mit einfacher Gründung; Trockenmauern; einfache Uferdeckungen; einfache feste Wehre.

##### Bauklasse 2.

Einfache Anschlußgleise und Bahnhöfe mit mehr als 2 Nebengleisen für jedes Hauptgleis (kleinere Bahnhöfe werden mit den Strecken-km nach B. § 9 verrechnet); unterirdische Behälter für Flüssigkeiten; feste Brücken von 10 bis 30 m Spannweite; Anlagen zur Entwässerung von Städten; schwierigere Deichsiele; Düker; schwierigere Durchlässe; Fabrikgebäude mit maschineller Einrichtung; kleine Fähren für Fußgänger und Wagen; Flufskanalisationen; Flufsregelungen; Anlagen zur Gewinnung, Reinigung, Aufbewahrung und Verteilung von Gas; Gründungen ausschließlic der Luftdruck- und Gefriergründungen; schwierigere Hafenanlagen; Heizungsanlagen; Hellinge; Installationen für Elektrizität, Gas und Wasser; einfache Konstruktionen für Hochbauten; Lüftungsanlagen; Schöpfwerkanlagen; einfache Schiffschleusen; Speicher mit maschineller Einrichtung; schwierige Straßenanlagen; kleine Talsperrn; einfache Tunnel; Ufermauern mit schwieriger Gründung; Anlagen zur Gewinnung, Reinigung, Aufbewahrung und Verteilung von Wasser; Wasserbauten für Kraftgewinnungsanlagen; einfache bewegliche Wehre; schwierige feste Wehre.

##### Bauklasse 3.

Schwierige Anschlußgleise und Bahnhöfe; oberirdische Behälter für Gase und Flüssigkeiten; hohe Wasserleitungsbrücken; bewegliche Brücken, schwierige Konstruktionen für Hochbauten; Doppelbrücken; schiefe Hausteibrücken (falls der Steinschnitt ausgetragen wird); schwierige und große Brücken über 30 m Spannweite; Fähranstalt für Eisenbahnen; Gefriergründungen; geneigte Ebenen; Luftdruckgründungen; Schiffshebwerke; schwierige Schiffschleusen; Schiffswerften; Schwimmdocks; große Talsperrn; hohe Talübergänge; Trockendocks; schwierige Tunnel; schwierige bewegliche Wehre.

## Bauklasse 4.

Maschinentechnische Anlagen aller Art, insbesondere Azetylenanlagen; Anlagen zur Verarbeitung von Abfallstoffen; Appreturanstalten; Aufbereitungen; Aufzüge; Badeanstalten; Bagger; Bergwerksmaschinenanlagen; Brauereien, Brennereien; chemische Fabriken; Zementfabriken; Dampfanlagen; Dampfkessel, Dampfmaschinen, Dampfleitungen, Dampfüberhitzer usw.; Destillieranlagen; Druckluftanlagen; Eiszeugungsanlagen; Anlagen zur Erzeugung, Aufspeicherung und Umformung des elektrischen Stromes; Färbereien; Feuerlöschanlagen; Gebläse; Gerbereien; Gesteinbohranlagen; Gießereien; Glashütten; Hammerwerke; Hebewerke; Hochöfen; Holzbearbeitungsanlagen; Holzschleifereien; Hüttenwerke; hydraulische Kraftanlagen; Kältezeugungsanlagen; Karbidfabriken; Kesselschmieden; Koch- und Waschküchen; Kokereien; Kompressoren für Luft und Gase; Kondensationen; Kühlanlagen; Ladevorrichtungen; landwirtschaftliche mechanische Einrichtungen; Lederbearbeitungsanlagen; Mälzereien; Maschinenfabriken; Molkereien; Mühlen; Öfen für technische Zwecke; Papierfabriken; Pressen; Pumpwerke; Sägewerke; Schachtanlagen; Schiffe; Separationsanlagen; Spinnereien; Transmissionen; Transportvorrichtungen; Trockenanstalten; Walzwerke; Waschanstalten; Wasserdrukwerke; Wasserkraftanlagen; Webereien; Werkzeugmaschinen; Windkraftmaschinen; Zuckerfabriken usw.

## Gebühren der Ingenieure nach Hundertstein der Bausumme.

Bausumme <i>M</i>	Bauklasse				Bausumme <i>M</i>	Bauklasse			
	1	2	3	4		1	2	3	4
5000	8,0	12,0	16,0	16,0	200000	3,4	5,2	7,5	5,5
10000	6,7	10,5	13,4	13,4	300000	3,2	4,8	6,8	4,9
20000	5,8	8,7	11,7	11,7	400000	3,2	4,6	6,4	4,6
30000	5,3	7,9	10,6	10,6	500000	3,2	4,4	6,0	4,4
40000	4,9	7,4	9,9	9,9	600000	3,2	4,3	5,6	4,3
50000	4,7	7,0	9,5	9,3	700000	3,1	4,2	5,3	4,2
60000	4,5	6,8	9,2	8,8	800000	3,1	4,1	5,2	4,1
70000	4,3	6,5	9,0	8,4	900000	3,0	4,1	5,1	4,1
80000	4,1	6,3	8,8	8,0	1000000	3,0	4,0	5,0	4,0
90000	4,0	6,2	8,6	7,7	2000000	2,7	3,6	4,5	3,6
100000	3,9	6,0	8,5	7,3	3000000	2,4	3,2	4,0	3,2
150000	3,5	5,6	7,9	6,2					

42. Die Gebührensätze für diese vier Bauklassen sind nach der folgenden Zusammenstellung in Hundertstein der Bausumme zu berechnen. Die Bausumme wird nach der nächst unteren Stufe abgerundet, solange die Gebühr dadurch höher ausfällt.

## § 9.

## B. Gebührensätze für Arbeiten, welche nach der Länge der Linie vergütet werden.

Die Leistungen des Ingenieurs sind die folgenden:

Allgemeine Vorarbeiten [§ 1, 2a)]: Bereisung der Linie, Eintragung der Linie in Abzeichnungen vorhandener Karten, Anfertigung eines Höhenplanes auf Grund von Höhenaufnahmen, Erläuterungsbericht, Kostenschätzung.

Ausführliche Vorarbeiten [§ 1, 2b) c) d)]: Aufstellung der besonderen Vorarbeiten unter Benutzung vorhandener, nach Bedarf zu ergänzender Karten; Auftragung des Höhenplanes und etwa erforderlicher Querschnitte; Aufstellung der Regelentwürfe für wiederkehrende Bauten und Bauteile; Eintragung der Streckenbauwerke; Erläuterungsbericht, Kostenanschlag. Alle Einzelbauwerke, welche nicht nach Regelentwürfen hergestellt werden können, werden nach § 8 nach Maßgabe ihrer Bausumme besonders vergütet.

Bauausführung: alle in § 1 unter e) und f) aufgeführten Arbeiten.

44. Deichanlagen, Straßenanlagen.

Die Gebühren betragen für 1 km Länge bei

einfachen	Verhältnissen	schwierigen
800 <i>M</i>		2400 <i>M</i>

45. Haupteisenbahnen, Neben-, Klein- und Straßsenbahnen aller Betriebsarten, Leitungs- und Schiffahrtskanäle.

Die Gebühren betragen für 1 km Länge bei

einfachen	Verhältnissen	schwierigen
1200 <i>M</i>		3600 <i>M</i>

### § 10.

#### C. Gebührensätze für Arbeiten, welche nach der Fläche vergütet werden.

46. Die Leistungen des Ingenieurs sind in dieser Gruppe die folgenden:

Allgemeine Vorarbeiten [§ 1, 2a)]: Begehung der Fläche, Eintragung des Vorentwurfes in vorhandene Lage- und Höhenpläne, Darstellung der allgemeinen Anordnungen der beabsichtigten Anlage, Erläuterungsbericht, Kostenschätzung.

Ausführliche Vorarbeiten [§ 1, 2b) c) d)]: Beschaffung aller Unterlagen für die Bauausführung unter Benutzung vorhandener Lage- und Höhenpläne; Aufstellung der Regelentwürfe für wiederkehrende Bauten und Bauteile; Eintragung der Hauptmaße der nicht nach Regelentwürfen herzustellenden Einzelbauwerke, welche nach § 8 vergütet werden; Erläuterungsbericht, Kostenanschlag.

Bauausführung: alle in § 1 unter e) und f) aufgeführten Arbeiten.

47. Bebauungspläne.

Die Gebühren, welche den Teilleistungen a) und b) in § 7, 40 entsprechen und eintretendenfalls nach dem Verhältnis 1:1 zu teilen sind, betragen für 1 ha Fläche bei

einfachen	Verhältnissen	schwierigen
20 <i>M</i>		60 <i>M</i>

48. Bewässerungs- und Entwässerungsanlagen für landwirtschaftliche Zwecke.

Die Gebühren betragen für 1 ha Fläche bei

einfachen	Verhältnissen	schwierigen
30 <i>M</i>		90 <i>M</i>

## F. Gesetze zum Schutze des gewerblichen Eigentums.

### a. Internationale Union zum Schutze des gewerblichen Eigentums.

(Auszug aus den Bestimmungen.)

Die Angehörigen oder Eingesessenen, die in irgend einem der Vertrag schließenden Staaten vorschrittsmäßig eine Patentanmeldung eingereicht haben, genießen in den anderen Staaten vom Tage der ersten Anmeldung an ein Prioritätsrecht

1. von zwölf Monaten, wenn die Anmeldung im Auslande auf ein Patent gerichtet war, und
2. von vier Monaten, wenn die Anmeldung im Auslande sich auf Gebrauchsmuster bezog; gleichviel in den Fällen zu 1 und 2, ob auf die Erfindung ein Patent oder Gebrauchsmuster nachgesucht wird.

Für die Bemessung der für das Prioritätsrecht bestimmten Frist ist nach ständiger Rechtsprechung des deutschen Patentamtes die erste von mehreren Auslands Anmeldungen maßgebend.

Zur Ausübung der Erfindung ist eine Minimalfrist von drei Jahren festgesetzt, die in den meisten Staaten von dem Tage der dortigen Anmeldung läuft. Nichtausübung kann unter Umständen entschuldigt werden. Bzgl. der Ausübung (nicht aber der Prioritätsfristen) bleiben die früheren Uebereinkommen in Kraft, wonach in Italien und der Schweiz eine patentierte Erfindung für ausgeübt gilt, wenn die Ausübung in Deutschland (sofern sie dort gleichfalls durch Patent geschützt) erfolgt ist, und umgekehrt.

## b. Die wichtigsten Bestimmungen der deutschen

Land	Patentdauer	Unterlagen zur Anmeldung	Prüfung, Geschäftsgang
<b>Belgien. (Union.)</b>	Vom Tage der Anmeldung 20 Jahre. Bei gleichlautenden früheren Auslandspatenten läuft das belg. Patent („Einführungspatent“) mit demjenigen von längster Dauer ab.	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Gesuch an den Minister.</li> <li>2. 2 Beschreibungen, französisch, vlämisch, deutsch, für Ausländer mindestens 1 französisch.</li> <li>3. 2 Satz Zeichnungen auf Pausleinwand 34 cm hoch, 21—22 oder 44 oder 66 cm breit; links Rand von 40 bis 50 mm.</li> <li>4. Vollmacht, nicht beglaubigt.</li> <li>5. Erste Jahrestaxe.</li> </ol>	Keine Vorprüfung. Erteilung ohne Garantie, vorbehaltlich der Rechte Dritter auf Gefahr des Anmelders.
<b>Deutsches Reich. (Union.)</b>	Von dem auf die Anmeldung folgenden Tage an 15 Jahre. Das deutsche Patent wird durch gleichlautende ältere Auslandspatente in seiner Dauer nicht beeinflusst.	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Gesuch an das K. Patentamt.</li> <li>2. 2 Beschreibungen.</li> <li>3. 1 Hauptzeichnung auf Karton 33 cm hoch, 21, ausnahmsweise 42 cm breit.</li> <li>4. 1 Nebenzeichnung auf Pausleinwand desselben Formats.</li> <li>5. Ev. Vollmacht, nicht beglaubigt.</li> <li>6. Proben bei Verfahren zur Herstellung neuer chem. Stoffe; bei Farbstoffen Ausfärbungen auf Wolle, Seide od. Baumwolle.</li> <li>7. Anmeldegebühr 20 M.</li> </ol>	Vorprüfung, Anmeldeabteilung (Entscheidung über Patentfähigkeit), nach 2 monatlicher Auslage und Prüfung der etwaigen Einsprüche Patenterteilung.
<b>Frankreich. (Union.)</b>	Vom Tage der Einreichung ab je nach Antrag 5, 10 oder 15 Jahre (da die Gebühren dieselben, Anmeldung auf 15 Jahre üblich); dabei darf die Dauer eines französ. Patents („Einführungspatent“) diejenige eines früher erteilten Auslandspatents nicht überschreiten.	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Gesuch an den Minister für Handel und Industrie.</li> <li>2. 2 französ. Beschreibungen.</li> <li>3. 2 Zeichnungen wie in Deutschland.</li> <li>4. 1 Vollmacht, nicht beglaubigt.</li> <li>5. Erste Jahrestaxe 100 Frcs. (Zusatzpatente 20 Frcs.).</li> <li>6. Verzeichnis der eingesandten Unterlagen.</li> </ol>	Keine Prüfung auf Neuheit oder Patentfähigkeit. Ausfertigung der Urkunde 3 bis 4 Monate nach der Anmeldung.

\*) Nach Dr. L. Fischer u. P. C. Roediger, Die Patentgesetze, Berlin 1905, 1907

## und einiger ausländischen Patentgesetze.\*)

Zusatzpatente	Gebühren	Ausübung, Einfuhr	Veröffentlichung, Patentschriften
Zusatzpatente (Verbesserungspatente) werden erteilt, endigen mit dem Hauptpatent.	1. Jahr 10 Frs. 2. „ 20 „ für jedes weitere Jahr 10 Frs. mehr bis 200 Frs. Fälligkeit: Jahrestag der Einreichung, 1 Monat Frist; in den folgenden 5 Monaten 10 Frs. Zuschlag. Für Zusatzpatente keine Gebühren, wenn dem Inhaber des Hauptpatents erteilt.	Ausübung innerhalb drei Jahren. Einfuhr gestattet.	3 Monate nach Einreichung der Anmeldung sind die Unterlagen für jedermann zugänglich. Patentschriften werden nicht ausgegeben, aber kurze Auszüge amtlich veröffentlicht.
Werden erteilt, endigen mit dem Hauptpatent.	Für alle Patente: Bei der Anmeldung 20 M. für das 1. Jahr: 30 „ Nur für Hauptpatente: für das 2. Jahr: 50 M. für jedes folgende Jahr 50 M. mehr, im 15. Jahre also 700 M. Frist 6 Wochen nach der jährlichen Wiederkehr des auf die Anmeldung des Patents folgenden Tages; innerhalb weiterer 6 Wochen 10 M. Zuschlag.	Ausübung innerhalb drei Jahren vom Tage der Anmeldung. Einfuhr gestattet.	Unterlagen während der 2 monatlichen Auslage beim Patentamt für jedermann zur Einsicht frei. Patentschriften zum Preise von 1 M. werden ausgegeben, außerdem Auszüge im Patentblatt.
Werden erteilt und laufen mit dem Hauptpatent ab. Während d. 1. Jahres des Hauptpatents hat nur dessen Inhaber das Recht, ein solches anzumelden.	Bei Anmeldung eines Hauptpatents 100 Frs. (gilt zugleich als 1. Jahrestaxe), eines Zusatzpatents 20 Frs. Für Hauptpatente vom 2. Jahr ab jährlich 100 Frs. Aufschlag: 5, 10, 15 Frs. für 1-, 2- bzw. 3 monatige Frist.	Ausübung innerhalb drei Jahren; die Einfuhr des pat. Gegenstandes nach Frankreich aus einem Unionsstaate zieht nicht mehr den Verfall des französischen Patents nach sich; doch gilt diese nicht als Ausübung.	Unterlagen nach Erteilung eines Patents für jedermann im Ministerium für Handel u. Industrie einzusehen. Nach Zahlung der 2. Jahrestaxe werden Beschreibungen u. Zeichnungen veröffentlicht. (Patentschriften z. Pr. v. 1 Fr.) Jährliche Ausgabe eines Verzeichnisses der erteilten Patente, alle 3 Monate Bekanntmachung derselben.

Land	Patentdauer	Unterlagen zur Anmeldung	Prüfung, Geschäftsgang
Großbritannien und Irland. (Union.)	Vom Tage der Anmeldung ab vorläufig 6 Monate und nach definitiver Patenterteilung 14 Jahre von obigem Termin an gerechnet. Verlängerung um 7, ausnahmsw. um 14 Jahre möglich. Etwaige früher ablaufende Auslandspatente haben keinen Einfluß.	Für provis. Patent: 1. 2 vorläufige englische Beschreibungen. 2. 2 Zeichnungen auf glattem, weißem Zeichenpapier, 13" Höhe, 8" oder 16" Breite, ringsum $\frac{1}{2}$ " breiter Rand. 3. Vollmacht, nicht beglaubigt. Erklärung des Erfinders. 4. Anmeldegebühr 1 £. Für das definitive Patent: 5. 2 engl. Beschreibungen. 6. 2 Zeichnungen i. obigem Format. 7. Anmeldegebühr 3 £. Bei sofortiger Erlangung eines definitiven Patents die unter 3, 5, 6 angegebenen Unterlagen u. 4 £.	Prüfung nur auf formelle Richtigkeit der Unterlagen und darauf, daß die Erfindung nicht schon vor < 50 Jahren in G. patentiert worden ist, worauf vorläufiger Schutz auf 6 Monate (bis zur Patenterteilung) beginnt. Nach Eingang, bzw. Annahme der definitiven Beschreibungen Auslage auf 2 Monate, Einspruch zulässig; dann Erteilung des definitiven Patents.
Italien. (Union.)	Patentschutz tritt mit dem Tage der Anmeldung ein; die Dauer des Patents berechnet sich vom letzten Tage des Vierteljahres, während dessen die Anmeldung erfolgte, u. kann nach Wahl 1 bis 15 Jahre betragen. Bei gleichlautenden früheren ausländischen Patenten läuft das ital. („Einführungspatent“) mit demjenigen ab, dessen Dauer die längste ist.	1. Gesuch mit Angabe der gewünschten Patentdauer. 2. 3 ital. oder französis. Beschreibungen auf Stempelpapier. 3. 1 Kartonzeichnung und 2 Leinwandpausen bis zu 33·42 cm, ringsum Randlinien, außerhalb dieser etwaige Erläuterungen. 4. Vom ital. Konsul beglaubigte Vollmacht. 5. Bei Einführungspatent die Urkunde für das ausländ. Patent im Original oder beglaubigter Abschrift. (Für Zusatzpatente dieselben Unterlagen.)	Prüfung auf Neuheit findet nicht statt. Das Gesuch wird bei der nächsten Präфекtur eingereicht und von hier an das Handelsministerium eingesandt. Kurze Zeit nachher Ausfertigung der Urkunde. 3 Monate nach Patenterteilung öffentliche Auslegung der Unterlagen.
Oesterreich. (Union.)	Beginnt mit dem Tage der Bekanntmachung im Patentblatt u. beträgt längstens 15 Jahre. Verfall früherer Auslandspatente ohne Einfluß.	1. Gesuch in deutscher Sprache mit 6 K. gestempelt. 2. 2 Beschreibungen (deutsch) pro Bogen bzw. pro 2 Blatt — 30 K. Stempelgebühr. 3. 1 Zeichnung auf Karton 33 oder 34 cm Höhe, 21 oder 42 oder 63 cm Breite, 2 cm Randlinie, außerdem oben 3 cm freier Raum. Stempelgebühr pro Blatt kleineren oder mittleren Formats — 30 K., großen Formats — 60 K. 4. 1 Zeichnung auf Pausleinwand (gleiches Format). 5. Vollmacht nicht beglaubigt. Stempelgebühr 1 K. 6. Anmeldegebühr 20 K.	Vorprüfung auf Neuheit, Abhängigkeit und Schutzzgrenzen, Patentfähigkeit und Vorschrittmäßigkeit der Unterlagen; nach 2 monatlicher Anslage Patenterteilung.

Zusatzpatente	Gebühren	Ausübung, Einfuhr	Veröffentlichung, Patentschriften
Werden erteilt und gelten für die Dauer des Hauptpatents.	Bei Anmeldung einseitigen Schutzes 1 £; bei Einreichung der endgültigen Beschreibung 3 £ (oder sogleich zusammen 4 £). Bei Ausfertigung des Patents für die Prüfung auf Neuheit 1 £. Vor Ablauf von 4 bzw. 8 Jahren seit dem Patentdatum für die Erneuerungsbescheinigung 50 bzw. 100 £. O der statt letzterer Gebühren vor Ablauf des 4., 5., 6., 7. Jahres je 10 £, des 8., 9. Jahres je 15 £, des 10. bis 13. Jahres je 20 £. Fristverlängerung bis zu 3 Monaten bei 10 £ Zuschlaggebühr. Für Zusatzpatente keine Erneuerungsgebühren.	Ausübung siehe Unions-Bestimmungen. Einfuhr gestattet. Dem inländischen Bedarf muß durch Fabrikation im Inlande entsprochen werden. (Zurücknahme des Patents zu befürchten, wenn die Erfindung nach 4 Patentjahren größtenteils oder ganz außerhalb G. ausgeführt wird.)	Nach Annahme der vollständigen Beschreibungen kann Jedermann im Patentamt gegen 1 sh. von den Unterlagen Einsicht nehmen; 3 Wochen später Ausgabe von Patentschriften (8 d pro Stück); außerdem Veröffentlichung durch den Comptroller im Official Journal.
Werden erteilt und gelten stets für die ganze Dauer des Hauptpatents; innerhalb 6 Monaten nach Erteilung eines Patents kann nur der Patentinhaber Verbesserungen anmelden.	Bei der Anmeldung: 10 Lire $\times$ der Anzahl Jahre, für die das Patent nachgesucht wird, + 40 Lire erste Jahrestaxe (z. B. 5jähr. Pat. : 90 Lire). Jahrestaxen: 2. — 3. Jahr: je 40 Lire 4. — 6. „ „ 65 „ 7. — 9. „ „ 90 „ 10. — 12. „ „ 115 „ 13. — 15. „ „ 140 „ Für Zusatzpatente eine einmalige Abgabe von 20 Lire. Gebühren für Einführungs-patent = Hauptpatent. Für Verlängerung von Patenten: $(40 + 10) \times$ Anzahl der Jahre, welche das Pat. verlängert werden soll + der am Anfang der Verlängerungsperiode fälligen Jahrestaxe + Stempelspesen (2,4 Lire).	Bei Patenten von 1 bis 5 jähr. Dauer Ausübung innerhalb 1 Jahres, bei 6 bis 15 jähriger Dauer innerhalb 2 Jahre. Einfuhr gestattet.	Gedruckte Verzeichnisse der erteilten Patente werden monatlich veröffentlicht; Unterlagen 3 Monate nach Erteilung zugänglich. Patentschriften nicht ausgegeben; Beschreibungen u. Zeichnungen in monatlich erscheinenden Heften veröffentlicht.
Werden erteilt, endigen mit dem Hauptpatent.	Bei Anmeldung von Haupt- oder Zusatzpatent 20 K. 1. Jahr 40 K. 9. Jahr 240 K. 2. „ 50 „ 10. „ 280 „ 3. „ 60 „ 11. „ 360 „ 4. „ 80 „ 12. „ 440 „ 5. „ 100 „ 13. „ 520 „ 6. „ 120 „ 14. „ 600 „ 7. „ 160 „ 15. „ 680 „ 8. „ 200 „ Termin: Jahrestag der Bekanntmachung der Anmeldung im Patentblatt, während 3 Monate nachher Zuschlag 10 K. Für Zusatzpatente eine einmalige Gebühr von 50 K.	Ausübung hat innerhalb 3 Jahre nach Erteilung des Patents zu erfolgen oder muß mindestens gesichert sein. Einfuhr ist gestattet.	Einsichtnahme der Patentunterlagen während 2 Monate. Gedruckte Patentschrift zum Preise v. 1 K. nach Erteilung des Patents.

Land	Patentdauer	Unterlagen zur Anmeldung	Prüfung, Geschäftsgang
<b>Rußland.</b>	15 Jahre vom Tage der Unterzeichnung der Patenturkunde; erlischt (als „Einführungspatent“), wenn vor Nachscheidung erteilte, gleiche Auslandspatente vorhanden, mit demjenigen kürzester Dauer, sofern letztere nicht wegen Nichtzahlung der Taxe verfallen sind.	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. 2 Beschreibungen in russischer Sprache.</li> <li>2. 2 Zeichnungen 330 mm hoch, 203 oder 406 oder 609 mm breit, ringsum Randlinie 25 mm.</li> <li>3. Vollmacht beglaubigt.</li> <li>4. Event. beglaubigte Kopie des Auslandspatents von kürzester Dauer.</li> <li>5. Anmeldegebühr 30 Rubel.</li> </ol>	Vorprüfung; Ausstellung eines Schutzscheines und Bekanntmachung der Anmeldung. Beschlussfassung durch ein Komitee für technische Angelegenheiten beim Departement für Handel u. Manufakturen; bei Patenterteilung nach Einzahlung der ersten Jahresrate Ausstellung der Urkunde.
<b>Schweden. (Union.)</b>	15 Jahre vom Tage der Anmeldung ab, ohne Beeinflussung durch ausländische Patente.	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Gesuch an das Kgl. Patentamt Stockholm.</li> <li>2. 2 Beschreibungen in schwedischer Sprache.</li> <li>3. 1 Karton und 1 Leinwandzeichnung nach deutschem Format.</li> <li>4. Vollmacht nicht beglaubigt.</li> </ol>	Vorprüfung; dann Bekanntmachung und 60tägige Auslage der Unterlagen zur öffentlichen Einsichtnahme, hierauf Patenterteilung.
<b>Schweiz. (Union.)</b>	15 Jahre vom Tage der Anmeldung ab. Für Arzneimittel 10 Jahre.	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. 2 Beschreibungen in deutscher, französischer oder italienischer Sprache.</li> <li>2. 2 Zeichnungen (1 auf Karton, 1 auf Pausleinwand, Format wie Deutschland).</li> <li>3. Vollmacht nicht beglaubigt.</li> <li>4. Für Patente auf Herstellung chemischer Stoffe eine Probe, sowie Proben der Ausgangsstoffe.</li> <li>5. Anmeldegebühr von 20 Frcs. und 1. Jahresgebühr (20 Frcs.).</li> </ol>	Keine Vorprüfung auf Neuheit. Aufgebot oder Bekanntmachung zum Zwecke des Einspruchs findet nicht statt. Sind die Unterlagen in Ordnung, so erfolgt Erteilung der Urkunde und Bekanntmachung.
<b>Ungarn. (Union.)</b>	15 Jahre vom Tage der Anmeldung ab; Verfall früherer Auslandspatente ohne Einfluß.	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Gesuch in ungarischer, event. kroatischer und italienischer Sprache mit 6 K. gestempelt.</li> <li>2. Anmeldegebühr 20 Kronen.</li> <li>3. Vollmacht beglaubigt von einem deutschen Amtsgericht.</li> <li>4. 2 Beschreibungen der Erfindung in ungarischer Sprache pro Bogen mit —30 K. gestempelt.</li> <li>5. 2 Zeichnungen, eine Karton- und eine Leinwandzeichnung, pro Blatt mit —30 K. gestempelt. Format und Ausführung siehe Oesterreich.</li> </ol>	Keine Vorprüfung auf Neuheit; nach Bekanntmachung der Anmeldung 2 monatliche Auslage, dann Ausstellung der Patenturkunde.

Zusatzpatente	Gebühren	Ausübung, Einfuhr	Veröffentlichung, Patentschriften
Werden erteilt, endigen mit dem Hauptpat., dritte Personen können erst ein Jahr nach Veröffentlichung des Hauptpatents ein Abhängigkeitspatent erlangen.	Anmeldegebühr bei Hauptpatent und Zusatzpatent 30 Rubel. 1. Jahr 15 Rubel 9. Jahr 125 R. 2. " 20 " 10. " 150 " 3. " 25 " 11. " 200 " 4. " 30 " 12. " 250 " 5. " 40 " 13. " 300 " 6. " 50 " 14. " 350 " 7. " 75 " 15. " 400 " 8. " 100 " Für Zusatzpatente eine einmalige Gebühr von 20 Rubel.	Ausübung vor Ablauf von 5 Jahren. Einfuhr gestattet.	Druck der Patentschrift nach Bewilligung und noch vor Erteilung des Patents.
An den Inhaber des Hauptpatents für die Dauer desselben erteilt.	Mit dem Gesuch 20 Kronen, für Zusatzpatente sonst keine Gebühren. Hauptpatente: für das 2. bis 5. Jahr je 25 Kronen; für das 6. bis 10. Jahr je 50 Kronen, für das 11. bis 15. Jahr je 75 Kronen voraus zu bezahlen; innerhalb 90 Tage nach dem Jahrestag der Anmeldung 20 vH. Zuschlag.	Ausübung innerhalb drei Jahren. Einfuhr gestattet.	Durch Auslage der Anmeldung sind die Unterlagen für jedermann zugänglich. Patentschriften werden ausgegeben nach Erteilung zum Preise v. 1 Kr.
Laufen mit d. Hauptpatent ab.	Hinterlegungsgebühr (Anmeldegebühr) 20 Frcs., 1. Jahresgebühr 20 Frcs., 2. Jahresgebühr 30 Frcs., 3. Jahresgebühr 40 Frcs. usw. je 10 Frcs. mehr bis 160 Frcs. für das 15. Jahr.	Ausübung innerhalb drei Jahren. Einfuhr gestattet.	4 bis 8 Wochen nach Erteilung. Patentschriften in deutsch oder französisch oder italienisch. Preis 1 Frc., Ausland 1,20 Frcs.
Nur an den Inhaber des Stammpatents; Ablauf mit dem Hauptpatent.	Für Nachsuehung aller Patente eine Anmeldegebühr von 20 Kronen. 1. Jahr 40 K. 9. Jahr 160 K. 2. " 50 " 10. " 200 " 3. " 60 " 11. " 250 " 4. " 70 " 12. " 300 " 5. " 80 " 13. " 350 " 6. " 100 " 14. " 400 " 7. " 120 " 15. " 500 " 8. " 140 " Für Zusatzpatente nur die erste Jahresgebühr. Frist 60 Tage nach Beginn des Patentjahres, nach 30 Tagen bereits Zuschlag von 20 K.	Ausübung vor Ablauf von drei Jahren. Einfuhr gestattet.	Einsichtnahme der Unterlagen während 2 Monate vom Tage der Bekanntmachung an. Gedruckte Patentschriften in ungarischer Sprache zum Einzelpreise von 1 Krone.

Land	Patentdauer	Unterlagen zur Anmeldung	Prüfung, Geschäftsgang
Vereinigte Staaten von Nordamerika. (Union.)	17 Jahre vom Tage der Erteilung ab. Auslandspatente ohne Einfluß.	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Gesuch an den Patentkommissar.</li> <li>2. 1 englische Beschreibung.</li> <li>3. 1 Zeichnung auf Karton 15" Höhe <math>\times</math> 10" Breite, 1" Randlinie.</li> <li>4. Vollmacht und eidesstattliche Versicherung des Erfinders, nach bestem Wissen der erste und wahre Erfinder zu sein, vom amerikanischen Konsul beglaubigt.</li> <li>5. Anmeldegebühr 15 Dollar.</li> </ol>	Vorprüfung. Nach Zahlung v. 20 Dollar Schlußtaxe Erteilung des Patents.

### c. Deutsche Bestimmungen über die Anmeldung von Erfindungen.

(Bekanntmachung des Kaiserl. Patentamtes vom 22. November 1898.)

Auf Grund des § 20 Abs. 2 des Patentgesetzes vom 7. April 1891 werden die nachfolgenden Bestimmungen über die Erfordernisse einer Patentanmeldung erlassen.

§ 1. Die Anmeldung einer Erfindung behufs Erteilung eines Patentes geschieht in der Form eines schriftlichen Gesuches, dem die sonst erforderlichen Stücke als Anlagen beizufügen sind.

§ 2. Das Gesuch muß enthalten:

- a) die Angabe des Namens und des Wohnortes oder der Hauptniederlassung des Anmelders;
- b) eine für die Veröffentlichung (§ 23 Abs. 2 des Patentgesetzes) geeignete Benennung der Erfindung;
- c) die Erklärung, daß für die Erfindung ein Patent nachgesucht werde. Bei Zusatzanmeldungen ist die Angabe des Hauptpatentes nach Gegenstand und Nummer oder der Hauptanmeldung nach Gegenstand und Aktenzeichen erforderlich;
- d) die Erklärung, daß die gesetzliche Gebühr von zwanzig Mark an die Kasse des Kaiserl. Patentamtes gezahlt worden ist oder gleichzeitig mit der Anmeldung gezahlt werden soll;
- e) die Aufführung der Anlagen unter Angabe ihrer Nummer und ihres Inhaltes;
- f) falls der Anmelder einen Vertreter bestellt hat, die Angabe der Person, der Berufstellung und des Wohnortes des Vertreters; als Anlage ist eine Vollmacht beizufügen (§ 28 der Kaiserl. Verordnung vom 11. Juli 1891);
- g) die Unterschrift des Anmelders oder seines Vertreters.

§ 3. Die Beschreibung ist in zwei Ausfertigungen einzureichen. Dasselbe gilt für alle Nachträge. Die Schriftstücke, welche die Beschreibung bilden, müssen sowohl am Rande als auch zwischen den Zeilen ausreichenden Raum für Zusätze und Aenderungen frei lassen.

Masse, Gewichte, sowie elektrische Einheiten müssen nach den gesetzlichen Vorschriften, Temperaturen nach Celsius angegeben werden. Bei chemischen Formeln sind die in Deutschland üblichen Atomgewichtszeichen und Molekularformeln anzuwenden.

Die Einfügung von Figuren in die Beschreibung ist nicht zulässig.

§ 4. Die für die Veranschaulichung der Erfindung bestimmten Zeichnungen sind auf das zur Klarstellung der Erfindung Erforderliche zu beschränken. Sie sind in zwei Ausfertigungen einzureichen.

a) Für die Hauptzeichnung ist weißes, starkes und glattes Zeichenpapier, sogen. Kartonpapier, für die Nebenzeichnung Zeichenleinwand zu verwenden.

Das Blatt der Hauptzeichnung soll 33 cm hoch und 21 cm breit sein. In Ausnahmefällen ist, falls die Deutlichkeit es erfordert, ein Blatt in der Höhe von 33 cm und in der Breite von 42 cm zulässig. Die Nebenzeichnung muß bei beliebiger Breite 33 cm hoch sein. Für die Hauptzeichnung wie für die Nebenzeichnung ist die Verwendung mehrerer Blätter zulässig.

Zusatzpatente	Gebühren	Ausübung, Einfuhr	Veröffentlichung, Patentschriften
Werden nicht erteilt.	Mit dem Gesuch 15 Dollar. Bei der Erteilung 20 Dollar.	Ausübung nicht vorgeschrieben, doch kann nach der Rechtsprechung dauernde Untätigkeit vernichtend wirken, wenn ein anderer Erfinder später anmeldet und ausführt. Einfuhr gestattet.	Gedruckte Patentschriften vom Tage der Erteilung an zum Einzelpreise von 5 Cts.

b) Die Figuren und Schriftzeichen sind in tiefschwarzen, kräftigen, scharf begrenzten Linien auszuführen. Auf der Hauptzeichnung sind Querschnitte entweder tiefschwarz anzulegen oder durch Schrägstriche in tiefschwarzen Linien zum Ausdruck zu bringen. Ist zur Darstellung unebener Flächen ausnahmsweise eine Schattierung erforderlich, so darf sie ebenfalls nur in tiefschwarzen Linien ausgeführt werden. Die Anwendung bunter Farben ist bei der Hauptzeichnung unzulässig.

Alle auf den Zeichnungen angebrachten Schriftzeichen müssen einfach und deutlich sein. Die Hauptzeichnung muß sich zur photographischen Verkleinerung eignen.

c) Die einzelnen Figuren müssen durch einen angemessenen Zwischenraum voneinander getrennt sein.

d) Die Figuren sind nach ihrer Stellung fortlaufend und ohne Rücksicht auf die Anzahl der Blätter mit Zahlen zu versehen.

e) Erläuterungen sind in die Zeichnung nicht aufzunehmen. Ausgenommen sind kurze Angaben wie „Wasser“, „Dampf“, „Schnitt nach A—B (Fig. 3)“, sowie Inschriften die auf den dargestellten Gegenständen angebracht werden sollen, z. B. „offen“, „zu“.

f) In der rechten unteren Ecke jedes Blattes ist der Name des Anmelders anzugeben.

g) Die Hauptzeichnungen dürfen weder gefaltet noch gerollt werden, sondern sind in glattem Zustande vorzulegen.

§ 5. Die für die Veranschaulichung der Erfindung bestimmten Modelle und Probestücke brauchen nur in einer Ausführung eingereicht zu werden.

Proben sind stets einzureichen zu den Anmeldungen, welche die Herstellung neuer chemischer Stoffe betreffen. Ausgenommen sind explosive und leicht entzündliche Stoffe, deren Einsendung nur auf besondere Aufforderung zulässig ist.

Bildet ein chemisches Verfahren von allgemeiner Anwendbarkeit, nach dem ganze Gruppen von Stoffen hergestellt werden können, den Gegenstand der Anmeldung, so sind Proben der typischen Vertreter der Gruppen einzureichen. Werden jedoch besondere Ausführungsformen eines chemischen Verfahrens unter Aufzählung der einzelnen nach ihnen entstehenden Stoffe beansprucht, so sind die Stoffe sämtlich mit Proben zu belegen. Bei Farbstoffen sind außerdem Ausfärbungen auf Wolle, Seide oder Baumwolle in je einer Ausführung beizufügen.

Ueber die Beschaffenheit der Modelle und Probestücke gilt folgendes:

a) Modelle und Probestücke, die leicht beschädigt werden können, sind in festen Hüllen einzureichen. Gegenstände von kleinem Umfange sind auf steifem Papier zu befestigen.

b) Proben von giftigen, ätzenden, explosiven oder leicht entzündlichen Stoffen sind auf der Umhüllung und, soweit möglich, auf dem Gegenstande selbst durch eine deutliche Aufschrift als solche zu kennzeichnen.

c) Proben chemischer Stoffe sind in Glasflaschen ohne vorspringenden Fuß von etwa 3 cm äußerem Durchmesser und 8 cm Gesamthöhe einzureichen; die Flaschen sind mit einem haltbaren Siegel zu verschließen und mit einer dauerhaft befestigten Inhaltsangabe zu versehen. Den Proben ist ein nach der Beschreibung oder dem Patentansprüche geordnetes Verzeichnis beizulegen.

- d) Ausfärbungen müssen möglichst flach auf steifem Papier von 33 cm Höhe und 21 cm Breite dauerhaft befestigt und mit genauen, den Angaben der Beschreibung entsprechenden Aufschriften versehen sein. Den Ausfärbungen ist eine Beschreibung des angewendeten Färbeverfahrens beizulegen mit genauen Angaben über den Gehalt der Flotte an Farbstoff, die etwa gebrauchten Beizen, die Temperatur usw., sowie auch darüber, ob die gebrauchte Flotte erschöpft war oder erheblichere Mengen von Farbstoff zurückgehalten hat.

§ 6. Die Anlagen des Gesuches müssen mit einer ihre Zugehörigkeit zur Anmeldung kennzeichnenden Aufschrift versehen sein. Dasselbe gilt für Modelle und Probestücke.

Schriftstücke, die zur Mitteilung an andere Personen bestimmt sind, sind in der dazu erforderlichen Zahl von Ausfertigungen einzureichen.

Zu allen Schriftstücken ist dauerhaftes, nicht durchscheinendes weißes Papier, zu Schriftstücken, die Anträge enthalten oder zur Beschreibung der Erfindung gehören, Papier in Seitengröße von 33 cm zu 21 cm zu verwenden.

Alle Schriftstücke müssen leicht lesbar sein. Die Schriftzüge müssen in dunkler Farbe ausgeführt sein. Schriftstücke, die mittels der Schreibmaschine hergestellt sind, müssen deutliche Druckzeichen und zwischen den einzelnen Buchstaben, Worten und Zeilen einen angemessenen Zwischenraum aufweisen.

Auf den später eingereichten Anmeldestücken ist der Name des Anmelders und das Aktenzeichen anzugeben.

### d. Deutsches Reichsgesetz, betreffend den Schutz von Gebrauchsmustern.

(Vom 1. Juni 1891.)

[Auszug.]

§ 1. Modelle von Arbeitsgerätschaften oder Gebrauchsgegenständen oder von Teilen derselben werden, insoweit sie dem Arbeits- oder Gebrauchszwecke durch eine neue Gestaltung, Anordnung oder Vorrichtung dienen sollen, als **Gebrauchsmuster** nach Maßgabe dieses Gesetzes geschützt.

Modelle gelten insofern nicht als neu, als sie zur Zeit der auf Grund dieses Gesetzes erfolgten Anmeldung bereits in öffentlichen Druckschriften beschrieben oder im Inlande offenkundig benutzt sind.

§ 2. Modelle, für welche der Schutz als Gebrauchsmuster verlangt wird, sind bei dem Patentamt schriftlich anzumelden.

Die Anmeldung muß angeben, unter welcher Bezeichnung das Modell eingetragen werden und welche neue Gestaltung oder Vorrichtung dem Arbeits- oder Gebrauchszwecke dienen soll.

Jeder Anmeldung ist eine Nach- oder Abbildung des Modells beizufügen.

Ueber die sonstigen Erfordernisse der Anmeldung trifft das Patentamt Bestimmung.

[Diese Bestimmungen s. unter e., S. 1077.]

Gleichzeitig mit der Anmeldung ist für jedes angemeldete Modell eine Gebühr von **fünfzehn Mark** einzuzahlen.

§ 3. Entspricht die Anmeldung den Anforderungen des § 2, so verfügt das Patentamt die Eintragung in die **Rolle der Gebrauchsmuster**.

Die Eintragung muß den Namen und Wohnsitz des Anmelders, sowie die Zeit der Anmeldung angeben.

Die Eintragungen sind durch den Reichs-Anzeiger in bestimmten Fristen bekannt zu machen.

Änderungen in der Person des Eingetragenen werden auf Antrag in der Rolle vermerkt. Die Einsicht der Rolle sowie der Anmeldungen, auf Grund deren die Eintragungen erfolgt sind, steht jedermann frei.

§ 4. Die Eintragung eines Gebrauchsmusters im Sinne des § 1 hat die **Wirkung**, daß dem Eingetragenen ausschließlich des Recht zusteht, gewerbsmäßig das Muster nachzubilden, die durch Nachbildung hervorgebrachten Gerätschaften und Gegenstände in Verkehr zu bringen, feilzuhalten oder zu gebrauchen.

Das durch eine spätere Anmeldung begründete Recht darf, soweit es in das Recht des auf Grund früherer Anmeldung Eingetragenen eingreift, ohne Erlaubnis des letzteren nicht ausgeübt werden.

Wenn der wesentliche Inhalt der Eintragung den Beschreibungen, Zeichnungen, Modellen, Gerätschaften oder Einrichtungen eines anderen ohne Einwilligung desselben entnommen ist, so tritt für den Verletzten der Schutz des Gesetzes ein.

§ 5. Soweit ein nach § 4 begründetes Recht in ein Patent eingreift, dessen Anmeldung vor der Anmeldung des Modells erfolgt ist, darf der Eingetragene das Recht ohne Erlaubnis des Patentinhabers nicht ausüben.

Ingleichen darf, soweit in ein nach § 4 begründetes Recht durch ein später angemeldetes Patent eingegriffen wird, das Recht aus diesem Patente ohne Erlaubnis des Eingetragenen nicht ausgeübt werden.

§ 6. Liegen die Erfordernisse des § 1 nicht vor, so hat jedermann gegen den Eingetragenen Anspruch auf Löschung des Gebrauchsmusters.

Im Falle des § 4 Abs. 3 steht dem Verletzten ein Anspruch auf Löschung zu.

§ 7. Das durch die Eintragung begründete Recht geht auf die Erben über und kann beschränkt oder unbeschränkt durch Vertrag oder Verfügung von Todes wegen auf andere übertragen werden.

§ 8. Die Dauer des Schutzes ist drei Jahre; der Lauf dieser Zeit beginnt mit dem auf die Anmeldung folgenden Tage. Bei Zahlung einer weiteren Gebühr von sechzig Mark vor Ablauf der Zeit tritt eine Verlängerung der Schutzfrist um drei Jahre ein. Die Verlängerung wird in der Rolle vermerkt.

Wenn der Eingetragene während der Dauer der Frist auf den Schutz Verzicht leistet, so wird die Eintragung gelöscht. Die nicht infolge von Ablauf der Frist stattfindenden Löschungen von Eintragungen sind durch den Reichs-Anzeiger in bestimmten Fristen bekannt zu machen.

§ 9. Wer wissentlich oder aus grober Fahrlässigkeit den Bestimmungen der §§ 4 und 5 zuwider ein Gebrauchsmuster in Benutzung nimmt, ist dem Verletzten zur Entschädigung verpflichtet.

Die Klagen wegen Verletzung des Schutzrechtes verjähren rücksichtlich jeder einzelnen dieselbe begründenden Handlung in drei Jahren.

§ 13. Wer im Inlande einen Wohnsitz oder eine Niederlassung nicht hat, kann nur dann den Anspruch auf den Schutz dieses Gesetzes geltend machen, wenn in dem Staate, in welchem sein Wohnsitz oder seine Niederlassung sich befindet, nach einer im Reichsgesetzblatte enthaltenen Bekanntmachung deutsche Gebrauchsmuster einen Schutz genießen.

Wer auf Grund dieser Bestimmung eine Anmeldung bewirkt, muß gleichzeitig einen im Inlande wohnhaften Vertreter bestellen. Name und Wohnsitz des Vertreters werden in die Rolle eingetragen. Der eingetragene Vertreter ist zur Vertretung des Schutzberechtigten in den das Gebrauchsmuster betreffenden Rechtsstreitigkeiten und zur Stellung von Strafanträgen befugt. Der Ort, wo der Vertreter seinen Sitz hat, gilt im Sinne des § 24 der Reichs-Zivilprozefs-Ordnung als der Ort, wo der Vermögensgegenstand sich befindet.

## e. Deutsche Bestimmungen über die Anmeldung von Gebrauchsmustern.

(Bekanntmachung des Kaiserl. Patentamtes vom 22. November 1898, abgeändert durch Bekanntmachung vom 3. Februar 1904).

Auf Grund des § 2 Abs. 4 des Gesetzes, betreffend den Schutz von Gebrauchsmustern, vom 1. Juni 1891 (s. S. 1076) werden die nachfolgenden Bestimmungen über Erfordernisse einer Gebrauchsmusteranmeldung erlassen.

§ 1. Die Anmeldung eines Modells behufs Eintragung in die Rolle für Gebrauchsmuster geschieht in der Form eines schriftlichen Gesuches, dem die sonst erforderlichen Stücke als Anlagen beizufügen sind. Für jedes Modell ist eine besondere Anmeldung erforderlich.

§ 2. Das Gesuch muß enthalten:

- a) die Angabe des Namens und des Wohnortes oder der Hauptniederlassung des Anmelders;
- b) eine für die Eintragung und Veröffentlichung geeignete Bezeichnung;
- c) die Angabe, welche neue Gestaltung oder Vorrichtung dem Arbeits- oder Gebrauchszwecke dienen soll;
- d) den Antrag, daß das Modell in die Rolle für Gebrauchsmuster eingetragen werde;
- e) die Erklärung, daß die gesetzliche Gebühr von fünfzehn Mark an die Kasse des Kaiserl. Patentamtes gezahlt worden ist oder gleichzeitig mit der Anmeldung gezahlt werden soll;
- f) die Aufzählung der Anlagen unter Angabe ihrer Nummer und ihres Inhaltes;

- g) falls der Anmelder einen Vertreter bestellt hat, die Angabe der Person, der Berufstellung und des Wohnortes des Vertreters; als Anlage ist eine Vollmacht beizufügen (§ 28 der Kaiserl. Verordnung vom 11. Juli 1891);  
 h) die Unterschrift des Anmelders oder seines Vertreters.

§ B. Erachtet der Anmelder eine Beschreibung des Modells für erforderlich, so ist sie entweder in das Gesuch aufzunehmen oder als Anlage beizufügen.

§ 4. Dem Gesuche ist eine Abbildung oder eine Nachbildung des Modells beizufügen.

- a) Die Abbildung ist in zwei Ausfertigungen einzureichen.

Für die Abbildung ist weißes, starkes und glattes Zeichenpapier, sogenanntes Kartonpapier, oder Zeichenleinwand zu verwenden. Das Blatt der Abbildung auf Kartonpapier muß 33 cm hoch und 21 cm breit sein. Das Blatt der Abbildung auf Zeichenleinwand muß bei beliebiger Breite 33 cm hoch sein.

Die Figuren und Schriftzeichen sind in tiefschwarzen, kräftigen, scharf begrenzten Linien auszuführen.

- b) Die Nachbildung braucht nur in einer Ausführung eingereicht zu werden; sie muß sauber und dauerhaft sein und darf in Höhe, Breite und Tiefe 50 cm nicht überschreiten.

Nachbildungen, die leicht beschädigt werden können, sind in festen Hüllen einzureichen. Gegenstände von kleinem Umfange sind auf steifem Papier zu befestigen.

§ 5. Die Anlagen des Gesuches müssen mit einer ihre Zugehörigkeit zur Anmeldung kennzeichnenden Aufschrift versehen sein. Dasselbe gilt für die Nachbildungen.

Zu allen Schriftstücken ist dauerhaftes, nicht durchscheinendes, weißes Papier, zu Schriftstücken, die Anträge enthalten oder die Anmeldung selbst betreffen, Papier in der Seitengröße von 33 cm zu 21 cm zu verwenden.

Alle Schriftstücke müssen leicht lesbar sein. Die Schriftzüge müssen in dunkler Farbe ausgeführt sein. Schriftstücke, die mittels der Schreibmaschine hergestellt sind, müssen deutliche Druckzeichen und zwischen den einzelnen Buchstaben, Worten und Zeilen einen angemessenen Zwischenraum aufweisen.

§ 6. Die die Anmeldung bildenden Schriftstücke müssen in doppelter Ausfertigung eingereicht werden. Auf den nachträglich eingereichten Anmeldestücken ist der Name des Anmelders und das Aktenzeichen anzugeben.

## G. Gebührenordnung für Zeugen und Sachverständige.

(Reichsgesetz vom 30. Juni 1878.)

§ 1. In den vor die ordentlichen Gerichte gehörigen Rechtssachen, auf welche die Zivilprozess-Ordnung, die Strafprozess-Ordnung oder die Konkurs-Ordnung Anwendung findet, erhalten die Zeugen und Sachverständigen Gebühren nach Maßgabe der folgenden Bestimmungen.

§ 2. Der Zeuge erhält eine Entschädigung für die erforderliche Zeitversäumnis im Betrage von zehn Pfennig bis zu einer Mark auf jede angefangene Stunde. — Die Entschädigung ist unter Berücksichtigung des von dem Zeugen versäumten Erwerbes zu bemessen und für jeden Tag auf nicht mehr als zehn Stunden zu gewähren.

§ 3. Der Sachverständige erhält für seine Leistungen eine Vergütung nach Maßgabe der erforderlichen Zeitversäumnis im Betrage bis zu zwei Mark auf jede angefangene Stunde. — Die Vergütung ist unter Berücksichtigung der Erwerbsverhältnisse des Sachverständigen zu bemessen und für jeden Tag auf nicht mehr als zehn Stunden zu gewähren. — Außerdem sind dem Sachverständigen die auf die Vorbereitung des Gutachtens verwendeten Kosten, sowie die für eine Untersuchung verbrauchten Stoffe und Werkzeuge zu vergüten.

§ 4. Bei schwierigen Untersuchungen und Sachprüfungen ist dem Sachverständigen auf Verlangen für die aufgetragene Leistung eine Vergütung nach dem üblichen Preise derselben und für die außerdem stattfindende Teilnahme an Terminen die in § 3 bestimmte Vergütung zu gewähren.

§ 5. Als versäumt gilt für den Zeugen oder Sachverständigen auch die Zeit, während welcher er seine gewöhnliche Beschäftigung nicht wieder aufnehmen kann.

§ 6. **Mufste der Zeuge oder Sachverständige auferhalb seines Aufenthaltsortes einen Weg bis zur Entfernung von mehr als zwei Kilometer zurücklegen, so ist ihm, aufer den Beträgen, eine Entschädigung für die Reise und für den durch die Abwesenheit von dem Aufenthaltsorte verursachten Aufwand nach Maßgabe der folgenden Bestimmungen zu gewähren.**

§ 7. **Soweit nach den persönlichen Verhältnissen des Zeugen oder Sachverständigen oder nach äußeren Umständen die Benutzung von Transportmitteln für angemessen zu erachten ist, sind als Reiseentschädigung die nach billigem Ermessen in dem einzelnen Falle erforderlichen Kosten zu gewähren. — In anderen Fällen beträgt die Reiseentschädigung für jedes angefangene Kilometer des Hinweges und des Rückweges fünf Pfennig.**

§ 8. **Die Entschädigung für den durch Abwesenheit von dem Aufenthaltsorte verursachten Aufwand ist nach den persönlichen Verhältnissen des Zeugen oder Sachverständigen zu bemessen, soll jedoch den Betrag von fünf Mark für jeden Tag, an welchem der Zeuge oder Sachverständige abwesend gewesen ist, und von drei Mark für jedes auferhalb genommene Nachtquartier nicht überschreiten.**

§ 9. **Mufste der Zeuge oder Sachverständige innerhalb seines Aufenthaltsortes einen Weg bis zu einer Entfernung von mehr als zwei Kilometer zurücklegen, so ist ihm für den ganzen zurückgelegten Weg eine Reiseentschädigung nach den Vorschriften des § 7 zu gewähren.**

§ 10. **Konnte der Zeuge oder Sachverständige den erforderlichen Weg ohne Benutzung von Transportmitteln nicht zurücklegen, so sind die nach billigem Ermessen erforderlichen Kosten auch aufer den in den §§ 6 und 9 bestimmten Fällen zu gewähren.**

§ 11. **Abgaben für die erforderliche Benutzung eines Weges sind in jedem Falle zu erstatten.**

§ 12. **Bedarf der Zeuge wegen jugendlichen Alters oder wegen Gebrechen eines Begleiters, so sind die bestimmten Entschädigungen für beide zu gewähren.**

§ 13. **Soweit für gewisse Arten von Sachverständigen besondere Taxvorschriften bestehen, welche an dem Orte des Gerichtes, wo diese Ladung erfolgt, und an dem Aufenthaltsorte des Sachverständigen gelten, kommen lediglich diese Vorschriften in Anwendung. Gelten solche Taxvorschriften nur an einem dieser Orte, oder gelten an demselben Orte verschiedene Taxvorschriften, so kann der Sachverständige die Anwendung der ihm günstigeren Bestimmungen verlangen.**

§ 14. **Oeffentliche Beamte erhalten Tagegelder und Erstattung von Reisekosten nach Maßgabe der für Dienstreisen geltenden Vorschriften, falls sie zugezogen werden: 1. als Zeugen über Umstände, von denen sie in Ausübung ihres Amtes Kenntnis erhalten haben; 2. als Sachverständige, wenn sie aus Veranlassung ihres Amtes zugezogen werden und die Ausübung der Wissenschaft, der Kunst oder des Gewerbes, deren Kenntnis Voraussetzung der Begutachtung ist, zu den Pflichten des von ihnen versehenen Amtes gehört.**

Werden nach den Vorschriften dieses Paragraphen Tagegelder und Reisekosten gewährt, so findet eine weitere Vergütung an den Zeugen oder Sachverständigen nicht statt.

§ 15. **Ist ein Sachverständiger für die Erstattung von Gutachten im allgemeinen beeidigt, so können die Gebühren für die bei bestimmten Gerichten vorkommenden Geschäfte durch Uebereinkommen bestimmt werden.**

§ 16. **Die Gebühren der Zeugen und Sachverständigen werden nur auf Verlangen derselben gewährt. Der Anspruch erlischt, wenn das Verlangen binnen drei Monaten nach Beendigung der Zuziehung oder Abgabe des Gutachtens bei dem zuständigen Gerichte nicht angebracht wird.**

§ 17. **Die einem Zeugen oder Sachverständigen zu gewährenden Beträge werden durch das Gericht oder den Richter, vor welchem die Verhandlung stattfindet, festgesetzt.**

Sofern die Beträge aus der Staatskasse bezahlt und dieser nicht erstattet sind, kann die Festsetzung von dem Gerichte oder dem Richter, durch welche sie erfolgt ist, sowie von dem Gerichte der höheren Instanz von Amts wegen berichtigt werden.

Gegen die Festsetzung findet Beschwerde nach Maßgabe der §§ 531 bis 538 der Zivilprozess-Ordnung und des § 4 Abs. 3 des Gerichtskosten-Gesetzes, in Strafsachen nach Maßgabe der §§ 346 bis 352 der Strafprozess-Ordnung statt.

## H. Tafeln für Fallhöhen

Geschwindigkeits- (Fall-) Höhen  $h$  in m  
für Endgeschwindigkeiten  $v$  zwischen 0 und 1000 m sk.

$$h = v^2/2g \quad g = 9,81 \text{ m/sk}^2.$$

$v$	$h$	$v$	$h$	$v$	$h$	$v$	$h$	$v$	$h$
0	0,00000	40	81,5494	80	326,198	285	4139,91	645	21204,1
1	0,05097	41	85,6779	81	334,404	295	4435,52	655	21866,7
2	0,20387	42	89,9083	82	342,712	300	4587,16	665	22539,5
3	0,45872	43	94,2406	83	351,121	305	4741,34	675	23222,5
4	0,81549	44	98,6748	84	359,633	315	5057,34	685	23915,7
5	1,27421	45	103,211	85	368,247	325	5383,54	695	24619,0
6	1,83486	46	107,849	86	376,962	335	5719,93	700	24974,5
7	2,49745	47	112,589	87	385,780	345	6066,51	705	25332,6
8	3,26198	48	117,431	88	394,699	355	6423,29	715	26056,3
9	4,12844	49	122,375	89	403,721	365	6790,26	725	26790,3
10	5,09684	50	127,421	90	412,844	375	7167,43	735	27534,7
11	6,16718	51	132,669	91	422,069	385	7554,79	745	28288,7
12	7,33945	52	137,819	92	431,397	395	7952,34	755	29053,3
13	8,61366	53	143,170	93	440,826	400	8154,94	765	29828,0
14	9,98981	54	148,624	94	450,357	405	8360,09	775	30612,9
15	11,4679	55	154,179	95	459,990	415	8778,03	785	31408,0
16	13,0479	56	159,837	96	469,725	425	9206,17	795	32213,3
17	14,7299	57	165,596	97	479,562	435	9644,50	800	32619,8
18	16,5138	58	171,458	98	489,501	445	10093,0	805	33028,8
19	18,3996	59	177,421	99	499,541	455	10551,7	815	33854,5
20	20,3874	60	183,486	100	509,684	465	11020,6	825	34690,4
21	22,4771	61	189,653	105	561,927	475	11499,7	835	35536,4
22	24,6687	62	195,924	115	674,057	485	11989,0	845	36392,7
23	26,9623	63	202,294	125	796,381	495	12488,5	855	37259,2
24	29,3578	64	208,767	135	928,899	500	12742,1	865	38135,8
25	31,8552	65	215,341	145	1071,61	505	12998,2	875	39022,7
26	34,4546	66	222,018	155	1224,52	515	13518,1	885	39919,7
27	37,1560	67	228,797	165	1387,61	525	14048,2	895	40827,0
28	39,9592	68	235,678	175	1560,91	535	14588,4	900	41284,4
29	42,8644	69	242,661	185	1744,39	545	15138,9	905	41744,4
30	45,8716	70	249,745	195	1938,07	555	15699,5	915	42672,0
31	48,9807	71	256,932	200	2038,74	565	16270,4	925	43609,8
32	52,1917	72	264,220	205	2141,95	575	16851,4	935	44557,8
33	55,5046	73	271,611	215	2356,01	585	17442,7	945	45516,1
34	58,9195	74	279,103	225	2574,34	595	18044,1	955	46484,5
35	62,4363	75	286,697	235	2814,73	600	18348,6	965	47463,1
36	66,0551	76	294,393	245	3059,38	605	18655,3	975	48451,8
37	69,7757	77	302,192	255	3314,22	615	19277,5	985	49450,8
38	73,5984	78	310,092	265	3579,26	625	19909,5	995	50460,0
39	77,5229	79	318,094	275	3854,48	635	20551,7	1000	50968,4

## und Endgeschwindigkeiten.

Endgeschwindigkeiten  $v$  in m/sk  
für Geschwindigkeits- (Fall-) Höhen  $h$  zwischen 1 und 1000 m.

$$v = \sqrt{2gh} \quad g = 9,81 \text{ m/sk}^2.$$

$h$	$v$	$h$	$v$	$h$	$v$	$h$	$v$	$h$	$v$
1	4,42945	41	28,3623	81	39,8650	210	64,1888	610	109,399
2	6,26418	42	28,7061	82	40,1103	220	65,6993	620	110,292
3	7,67202	43	29,0458	83	40,3542	230	67,1759	630	111,435
4	8,85889	44	29,3816	84	40,5032	240	68,6207	640	112,057
5	9,90454	45	29,7136	85	40,8375	250	70,0357	650	112,929
6	10,8499	46	30,0420	86	41,0770	260	71,4227	660	113,795
7	11,7192	47	30,3668	87	41,3151	270	72,7832	670	114,653
8	12,5284	48	30,6881	88	41,5519	280	74,1188	680	115,506
9	13,2883	49	31,0061	89	41,7873	290	75,4308	690	116,352
10	14,0071	50	31,3209	90	42,0214	300	76,7202	700	117,192
11	14,6908	51	31,6326	91	42,2542	310	77,9884	710	118,026
12	15,3440	52	31,9412	92	42,4858	320	79,2364	720	118,855
13	15,9706	53	32,2469	93	42,7160	330	80,4649	730	119,677
14	16,5730	54	32,5497	94	42,9451	340	81,6750	740	120,494
15	17,1553	55	32,8496	95	43,1729	350	82,8673	750	121,305
16	17,7178	56	33,1469	96	43,3995	360	84,0429	760	122,111
17	18,2630	57	33,4416	97	43,6250	370	85,2021	770	122,912
18	18,7925	58	33,7337	98	43,8493	380	86,3458	780	123,708
19	19,3075	59	34,0232	99	44,0724	390	87,4746	790	124,498
20	19,8091	60	34,3105	100	44,2945	400	88,5889	800	125,284
21	20,2983	61	34,5951	105	45,3883	410	89,6895	810	126,064
22	20,7759	62	34,8775	110	46,4564	420	90,7767	820	126,840
23	21,2428	63	35,1577	115	47,5005	430	91,8510	830	127,611
24	21,6998	64	35,4356	120	48,5224	440	92,9129	840	128,378
25	22,1472	65	35,7113	125	49,5227	450	93,9627	850	129,140
26	22,5858	66	35,9850	130	50,5037	460	95,0010	860	129,897
27	23,0161	67	36,2566	135	51,4655	470	96,0281	870	130,650
28	23,4384	68	36,5262	140	52,4099	480	97,0443	880	131,399
29	23,8535	69	36,7938	145	53,3376	490	98,0500	890	132,143
30	24,2611	70	37,0594	150	54,2492	500	99,0454	900	132,883
31	24,6621	71	37,3232	155	55,1462	510	100,031	910	133,620
32	25,0567	72	37,5851	160	56,0284	520	101,007	920	134,352
33	25,4452	73	37,8452	165	56,8973	530	101,974	930	135,080
34	25,8279	74	38,1035	170	57,7529	540	102,931	940	135,804
35	26,2050	75	38,3601	175	58,5961	550	103,880	950	136,525
36	26,5767	76	38,6150	180	59,4272	560	104,820	960	137,241
37	26,9433	77	38,8682	185	60,2470	570	105,752	970	137,954
38	27,3049	78	39,1198	190	61,0555	580	106,675	980	138,664
39	27,6619	79	39,3698	195	61,8539	590	107,591	990	139,369
40	28,0143	80	39,6182	200	62,6418	600	108,499	1000	140,071

# SACHVERZEICHNIS

des ersten, zweiten und dritten Bandes.

Die arabischen Ziffern bedeuten die Seitenzahlen, die römischen die der Bände,  
\* bedeutet Tafel.

- A.**
- Abdampfbenutzung** II 204  
— heizung . . . . III 459
- Abdichtung** . . . I 308  
—, Dampfturb. II 227, 229
- Abessyrierbrunnen** III 715
- Abfallrohr** . . . . II 560
- Abfertigungsräume** III 839
- Abfluss d. Niederschlag-**  
**wassers** III 703, 705\*  
— menge (Regen)  
III 618, 620\*  
— mengenkurve (Flussbau)  
III 533  
— rohrnormalien Blei-  
od. Steinzeug- I 982  
— rohrnormalien, guße-  
eiserne . . . . I 964\*
- Abkühlungsverlust**  
d. Dampfmasch. II 119  
— von Rohrleitungen I 469
- Abort** II 713\*; III 512, 693
- Ablafsrichtung, Kessel-**  
II 75, 80, 803; III 903
- Abrichtemaschine**  
II 380; III 508
- Abschamventil** . . II 803
- Abscherungsbeanspruch-**  
**ung, zulässige** I 523\*,  
524\*; III 62
- Abschnitt, Kreis-** . . I 36\*
- Abschreibungssumme** I 55\*
- Absolutes Maßsystem**  
I 144, 166; II 857
- Absorptionsmittel für**  
CO<sub>2</sub>, O, CO . . . II 326  
— svermögen (Strahlg.) I 409  
— v. Gasen . . . . I 282
- Absperrbahn** . . . I 998  
— schieber . . . . I 959, 997  
— schieber, Lokomotiv-  
III 903  
— schieber, Wasserleitungs-  
III 733  
— ventil . . . . . I 995  
— ventil, Dampf-  
II 74, 80, 800
- Absperrvorrichtung,**  
Kessel . . II 74, 80, 800  
— vorrichtung, Widerstands-  
zahlen . . . . I 806
- Abstellbahnhof** . . III 840
- Abteufpumpe** . . . II 620
- Abtsche Weiche** . III 958  
— Zahnstange . . . III 954
- Abwärmeheizung** . III 460
- Abwasserleitung s.**  
Städteentwässerung  
— reinigung . . . . III 758
- Achsbüchse, —halter**  
(Eisenb.) . . . . III 929
- Achse** . . . . . I 850, 854  
—, Dynamomasch. II 910  
—, Eisenbahn- . . III 872  
—, freie . . . . . I 223  
—, Lenk- . . . . . III 931  
—, Lokomotiv- . . . I 987  
—, neutrale (Biegungs-  
festigk.) . . . . I 541  
—, verschiebbare  
III 912, 931  
—, Treib- . . . . . III 912  
—, Zentral- . . . . I 173
- dkreuz, Koordinaten-**  
I 92  
—nkreuz, festes und be-  
wegliches . . . I 220  
—nmoment . . . . I 170  
—nregler . . . . . II 167
- Adhäsion (Fahrzeug)** II 807
- Adiabate vollkommener**  
Gase . . . . . I 424, 425\*  
— von Dämpfen . . I 439
- Admiralitätsanker** II 708
- A. E. G. Curtis-Turbine**  
II 241
- Äerodynamik** . . . I 847  
— gen gas . . . . . II 838  
— statik . . . . . I 842
- A-Fläche, — Linie (Statik)**  
III 95
- Afonassieffsche Formel**  
(Schiffswiderstand)  
II 750
- Aggregatformänderg.** I 397\*
- Ahmung** . . . . . II 655
- Ähnlichkeitsgesetz,**  
(Aerodynamik) I 367  
—, Newtons (Hydr.) I 327  
— (Schiffb.) . . . II 744\*
- Akkumulator, elek-**  
**trischer** . . II 824\*, 879  
— enbatterie . . . II 824, 881  
— enbatterie, Ladung II 882,  
956, 957, 961  
— enbatterie, Regelg. II 960  
— enbatterie, Schaltg. II 962  
— enbetrieb (Straßenb.)  
II 1018  
—, Fahrzeug- . . . II 824\*  
—, hydraul. . . . . II 392  
—, Regelung der Blei-  
II 960  
— wagen . . . . . II 824; III 924
- Aktion d. Wasserstrahls**  
I 318  
— sturbine, Dampf- II 223
- Alabaster** . . . . . I 700
- Alfenide** . . . . . I 697
- Alhidade** . . . . . III 14
- Alkohol, Heizwert, Luft-**  
**bedarf** . . . II 251\*, 252  
—, spez. Gew. u. Mischungs-  
verhältn. wässrigen —  
I 638\*
- , thermodyn. Werte  
I 498\*
- Allan-Umsteuerung** II 186
- Alterungskoeffizient**  
(Magnetism.) . . II 861
- Aluminium** . . I 630, 633  
— bronze . . . . . I 697  
— bronze, Festigkeitszahlen  
I 516\*, 521\*  
—, Festigkeitsz. I 516\*, 521  
— messing . . . . . I 697  
— messing, Festigkeitszahlen  
I 516\*
- Aluminothermisches**  
Schweißverfahren I 688
- Amagatsche Kohlensäure** —  
Versuche . . . . I 453
- Amalgam, Spiegel-** I 697

Ambfols . . . . . II 337  
**Ammoniak** . . . . . I 638  
 —, Krit. Zust. . . . . I 431\*  
 —, Löslichkeit i. Wasser . . . . . I 400\*  
 —, Thermodyn. Werte I 417, 418\*, 452\*  
 —maschine, Kälteleistung . . . . . I 451\*  
**Ampere** . . . . . II 857, 858  
 —sches Gesetz . . . . . II 870  
 —sche Schwimmregel . . . . . II 869  
 —windung . . . . . II 867  
 Amplitude . . . . . I 205  
**Amtl. Vorschriften,**  
 s. a. Lieferungs-  
 vorschritten, Normalien.  
 —, Ausführung v. Hochbau-  
 Eisenbetonkonstrukt. . . . . III 267, 273, 275, 276, 277  
 —, Baugrundbeanspruchg. . . . . I 527\*; III 64, 230  
 —, Bau u. Betrieb d. Eisen-  
 bahnen . . . . . III 765  
 —, Beanspruchung d. Bau-  
 stoffe f. Brückenbau . . . . . III 76  
 —, Beanspruchung d. Bau-  
 stoffe b. Hochbauten . . . . . I 524\*; III 62\*  
 —, Belastung u. Eigenge-  
 gewichte f. d. Hochbau . . . . . III 57  
 —, Belastung v. Brücken . . . . . III 65, 67, 71  
 —, Belastungsvorschr. f. d.  
 preussischen Staats-  
 bahnen . . . . . III 71  
 —, Belastungsvorschr. f. d.  
 Schutzgebietsbahnen . . . . . III 79  
 —, Dampfkesselgesetz . . . . . II 77  
 —, Dampfkesselnietung . . . . . I 776; II 27  
 —, Deutsches Reichsgesetz  
 betr. elektr. Maßein-  
 heiten . . . . . II 858  
 —, Einrichtung u. Betrieb  
 v. Aufzügen . . . . . II 433  
 —, Einrichtung u. Betrieb  
 v. Fahrstühlen II 425  
 —, Eisenkonstruktions-  
 nietung . . . . . I 773  
 —, Gesetze u. Vorschr. f.  
 Städtebau . . . . . III 687  
 —, Kraftfahrzeuge . . . . . II 823  
 —, Ladegewicht f. Straßen-  
 fuhrwerk . . . . . III 647  
 —, Landstraßenbreite . . . . . III 657  
 —, Leistungsversuche a.  
 Dampfkesseln u. -ma-  
 schinen . . . . . II 103  
 —, Luftscheulen . . . . . III 254

**Amtl. Vorschriften,**  
 —, Mafse v. Motordroschken . . . . . II 806  
 —, Materialbedarf v. Maner-  
 werk . . . . . III 322  
 —, Material f. Landdampf-  
 kessel . . . . . II 85  
 —, Mauerstärken . . . . . III 325  
 —, Normalien f. Bewertg.  
 u. Prüfg. elektr. Masch.  
 u. Transformat. . . . . II 914  
 —, Preufs. Bestimmg. f.  
 Dächer III 418—421\*  
 —, Preufs. Bestimmg. f.  
 Decken III 408—413\*  
 —, Preufs. Wasserrechtl.  
 Bestimmungen III 614  
 —, Reinigung u. Anstrich v.  
 Eisenkonstrukt. I 686  
 —, Schiffselemente II 704  
 —, Schutzvorrichtungen . . . . . III 505  
 —, Spurweite v. Straßen-  
 fuhrwerk . . . . . III 646  
 —, Wasserdichte Schotten f.  
 Personendampfer II 695,  
 696\*, 697\*, 698\*  
 —, Wegerecht . . . . . III 683  
 —, Wohnräume auf Schiffen . . . . . II 699  
 —, Winddruck I 369, 371;  
 III 61, 75  
**Analysator, Gas-** . . . . . II 326  
 —, harmonischer . . . . . I 133  
**Analytische Geometrie**  
 d. Ebene . . . . . I 90  
 — d. Raumes . . . . . I 115  
**Anemometer** . . . . . I 384  
**Aneroid** . . . . . III 33  
**Anfahrregler f. Förder-**  
 maschinen . . . . . II 469  
 —vorrichtung f. Verbund-  
 lokomotiven . . . . . III 916  
**Anhydrit** . . . . . I 700  
**Ankerbolzen I 771; II 38**  
 89, 92, 101  
 —, Drehstrom—Gleichstrom  
 — Umformer . . . . . II 953\*  
 —, Fundament- . . . . . I 771  
 —, Gleichstrommasch. Be-  
 rechnung II 889, 894, 900  
 —, Gleichstrommasch. . . . .  
 Vergleich verschiedener . . . . . II 899  
 —, Grundbau . . . . . III 233  
 —, Kessel- II 39, 89, 92, 101  
 —kette . . . . . II 709, 726  
 —, Kurzschluß- . . . . . II 939  
 —, mit Gegenschaltg. II 943  
 —, Schiffs- . . . . . II 708, 726  
 —, Sicherheits- (Zahnradb.) . . . . . III 987, 975  
 —spill . . . . . II 709\* 710\*  
 —, Stufen- . . . . . II 943  
 —, Turbodynamo- . . . . . II 931  
 —, Umformer- . . . . . II 932

**Anker, Wechselstrom-**  
 maschinen- II 921, 931  
 —wicklung . . . . . II 889  
 —wicklg., Aenderg. II 894  
 —wicklung (Gleichstrom) . . . . . II 898  
 —wicklg., Schaltung II 883  
 —widerstand (Gleichstrom-  
 dynamo) . . . . . II 897  
**Anlassen d. Stahles I 647**  
**Anlafsvorrichtung f. Elektromotoren II 917, 942**  
 —widerstand II 917, 918, 943  
**Anstrengungsgrad d. Kessels u. d. Feuerung II 42**  
**Anstrich I 685, 686, II 724\***  
**Anthrazit . . . . . I 475**  
**Audifrikationskurve I 113**  
**Antimon . . . . . I 630, 638**  
**Antrieb d. Kraft . . . . . I 202**  
**Anziehung d. Massen I 195**  
**A. P. B. (Dampfkesselbest.) I 776; II 6, 78**  
**A-Polygon (Statik) III 85**  
**Aequipotentialverbindung II 892**  
 —valente Brennweite . . . . . III 11  
**Aräometer . . . . . I 638**  
**Arbeit, elektr. II 857, 864**  
 — (Erkl.) . . . . . I 196  
 — d. Massenpunktgruppe . . . . . I 217  
 —, nutzbare (Thermodyn.) . . . . . I 414  
 —, starrer Körper I 218, 221  
 —, zeichn. Darst. . . . . I 201  
**Arbeitertagewerk (Mauerw.) III 322\***  
**Arbeitsdiagramm I 416**  
 —diagramm für Fabrik-  
 anlagen . . . . . III 472  
 —einheiten, Vergleich der— . . . . . I 1057\*  
 —festigkeit gerader Stäbe . . . . . I 531  
 —maschinen, Fördermittel  
 für körnige Stoffe II 513  
 —maschinen, Gebläse u.  
 Kompressoren II 625  
 —maschinen, Hebemasci-  
 nen . . . . . III 382  
 —maschinen, Hebewerke  
 f. flüssige Körper II 596  
 —maschinen, Schweb-  
 bahnen . . . . . II 576  
 —maschinen, Werkzeug-  
 maschinen . . . . . II 332  
 —messung . . . . . II 327  
 —prozefs . . . . . I 413, 426  
 —verlust d. Exzenter I 939  
 —verlust d. Geirlebe I 249  
 —verlust d. Keile . . . . . I 249  
 —verlust d. Kurbeltriebe . . . . . I 933  
 —verlust d. Schrauben I 257

**Arbeitsverlust d. Zapfen**  
 u. Lager . . . I 251  
 —verlust d. Zugmittel I 261  
 —verlust durch Drosselung . . . I 473  
 —verlust durch Zahnreibung . . . I 259, 787  
 —verlust (Thermodyn.) I 414  
 —verlust, verhältnismäßiger I 249  
 —vermögen . . . I 200  
 —vermögen (Formänderung) . . . I 505  
 —vermögen d. Menschen II 1; III 322\*, 791\*, 792\*  
 —vermögen d. Regler I 1018  
 —vermögen d. Tieres II 2\*; III 651\*, 793\*, 794\*  
 —zahnrad . . . I 801  
**Archimedische Spirale** I 111  
**Arcus** . . . I 58, 61, 66  
**Argandbrenner** . . . II 836  
**Arithmetik** . . . I 45  
**Arithmetische Reihen** I 56  
**Armatur, Kessel-** II 72, 800  
 803, III 901  
**Armierter Beton, s. a.**  
 Eisenbeton . . . III 279  
 —es Rohr . . . I 625  
**Armierung, Torpedo-**  
 (Gew.) . . . II 732\*  
**Artesischer Brunnen** III 715  
**Artillerie, Schiffs-** u. Munition (Gew.) II 731\*  
**Asbest** . . . I 698, 731  
 —isolation . . . I 470\*  
 —zementschiefer . . I 705  
**Asphalt** . . . I 685, 733  
 —, Gufs . . . III 675  
 —, Platten . . . III 677  
 —, Stampf . . . III 676  
**Astatischer Punkt** I 1015  
 — Regler . . . I 1015  
**Astrois** . . . I 110  
**Asymptoten** . . I 94, 101  
 —ischer Punkt . . . I 112  
**Asynchronmotor** II 939, 979  
**Atelierdach** . . . III 182  
**Aether, Elastizität** I 265  
**Atmosphäre** I 341, 412, 1057\*  
**Atomgewicht** . . I 630\*  
 —zahl vollkommener Gase I 417, 418\*  
**Atwoodsche Stabilitätsformel** . . . II 671  
**Anerbrenner** . . . II 836  
**Aufkündigung** . . II 655  
**Auflager** . . . I 177  
 —druck, s. a. Flächendruck, Stützdruck I 167, 543, 564\* u. dgd.; II 470  
 —druck (Brückenb.) III 73  
 —druck (Brückenlager) III 1037\*, 1038\*, 1040\*, 1042\*  
 —druck v. Brückenquerträgern . . . III 1062\*

**Auflagerdruck f. Verbrennungsmotoren** II 276  
 —platte . . . I 654; III 360  
 —quader . . . III 1044  
 —, Träger- . . . III 860  
**Auflandung** . . . III 603  
**Aufnehmer (Receiver)**  
 II 131, 141, 201  
**Aufschleppen (Schiffb.)**  
 II 691  
**Auftrieb** . . . I 267  
 — v. Gasballonen I 314  
**Aufzug** . . . II 521  
 — Ausführungsanweisung, betr. Einrichtg. u. Betrieb von — . . II 433  
 —, Bau- . . . III 529  
 —, Berg- . . . II 595  
 —, brennse . . . II 418, 427  
 —, Druckwasser- . . II 422  
 —, elektrischer . . II 414  
 —, Fahrkorb . . . II 429  
 —, Fangvorrichtung II 416, 427  
 —, Gicht- . . . II 524  
 —, Hand- . . . II 413  
 —, Lasten- . . . II 414, 429  
 —, Paternoster- (Personen) II 433, 440  
 —, Personen- . . II 415, 428  
 —, Polizeivorschr. für Einrichtg. u. Betrieb II 425  
 —, Regulator . . . II 418  
 —, Schräg- . . . II 524, 593  
 —, Speise- . . . II 414  
 —, Steuerung . . . II 420  
 —, Transmissions- II 414  
 —, Türverschlüsse u. Sicherungen II 418, 427, 428, 429  
 —, zulässige Geschwindigkeit . . . II 426  
**Augit** . . . I 698  
**Ausatmung u. Ausdünstung d. Menschen** . . III 424  
**Ausbalancierte Körper** I 223  
**Ausblasevorrichtung (Dampfkessel)** II 75, 80, 803; III 903  
**Ausdehnung durch Wärme** . . . I 391  
 —gefäßs (Heizung) III 465  
 —skraft . . . I 392  
 —skupplung . . I 858, 859\*  
 —rohr . . I 962, 970\*, 973\*;  
 II 203  
 —szahlen . . . I 391\*  
**Ausfluchten** . . . III 2  
**Ausflufs aus Düsen (Gas- u. Dampf)** I 461; II 223  
 — d. Wassers a. Gefäßsen od. Stauanlagen I 270, 274  
 — exponent von Gasen und Dämpfen . . . I 460  
 — von Gasen u. Dämpfen I 459  
 — von Luft . . . I 386, 463

**Ausflufswirkungsgrad**  
 I 271  
 —zahl (Dampfdüse) I 464\*;  
 II 225  
 —zahl (Hydr.) I 271, 277, 284  
**Ausgleichgetriebe (Automobil)** . . . II 820  
 —hebel (Balancier) III 914  
 —seil . . . III 976  
 —strom (Dynamom.) II 892  
 —ungsrechnung (Vermessungsk.) . . III 49  
 —vorrichtg. f. d. elektr. Spannungsverlust . . II 986  
 —vorrichtung (Rohr) I 962; II 203  
**Ausglühen** . . . I 647  
**Ausklünteuerung (Dampf.)** II 169, 174  
**Auspufftemperatur**  
 —topf . . . II 262, 263  
 — . . . II 286  
**Ausrückbare Kupplung**  
 I 864, 865  
 —vorrichtung . . . III 508  
**Außenbeleuchtg.** II 854\*  
 —polmaschine . . . II 919  
 —answeichestelle . . II 1007  
**Autogenes Schneiden und Schweißen** . . I 688, 689  
**Automatische Bahn** II 519  
**Automobilbau s. a. Verbrennungsmotor** II 804  
 —, Bauliches II 819, 823  
 —, Bauteile . . . II 811  
 —, Bremse . . . II 823  
 —, Elektr. Motorwag. II 824  
 —, Fahrwiderstand II 806, 807\*  
 —, Getriebe . . . II 818  
 —, Kühlung . . . II 814  
 —, Kupplungen . . II 817  
 —, Lenkung . . . II 822  
 —, Maschinen f. Luftfahrzeuge . . . II 816  
 —, Maschinen f. Motorwagen II 810  
 —, Maschinen für Wasserfahrzeuge . . II 815  
 —, Motorfahrzeuge, Fahrzeugmaschinen II 804  
 —, Steuerung . . . II 811  
 —, Vergaser . . . II 808  
 —, Zündvorrichtung II 809  
 —, Autotransformator. II 947  
 —, Avogadrosches Gesetz I 416  
**Axonometrisches Verfahren**  
 I 142  
**Azetylen** . . . II 838  
 —schweifung . . . I 638  
 —, spez. Gew. . . I 638  
 —, Verbrennung . . I 493\*,  
 494\*  
**A. Z. L.** . . . III 423  
**Azyklische Dynamomasch.**  
 II 889

**B.**

Babcock u. Wilcox-Kessel II 799\*  
 Bach-Schüle, Gesetz v. I 503  
 Baderraum II 713; III 511  
**Baggerarbeiten** III 228, 513  
 —, Eimerketten- III 513, 515\*, 516, 519  
 —, Eimerkettentrocken- II 555, 559\*; III 519  
 —, Fluß- III 516  
 —, Greif- III 513  
 —, Löffel- III 513, 519  
 —, Nafs- III 513  
 —, Saug- II 563; III 515, 516  
 —, Schacht- III 517  
 —, See- III 515  
 —, Trocken- III 519  
**Bahn** s. a. Eisenbahn II 515  
 —, automatische II 519  
 —, Bremsberg- II 519  
 —, damm III 786  
 —, druck I 211  
 —, en mit gezahnter Mittelschiene III 951  
 —, en mit glatter Mittelschiene III 951  
 —, Gefälle III 518  
 —, gleislose II 515  
 —, Gleisseil- II 516  
 —, Hänge- II 521  
 —, Kabel- III 518  
 —, Ketten- III 516, 518  
 —, motor II 1019, 1020\*, 1024, 1026  
 —, räumer III 914  
 —, schmalspurige II 516  
 —, Schweb- II 576  
 —, Schwerkraft- II 519  
 —, Seil- II 516, 521  
 —, steig III 836  
 —, Verlade- II 532  
 —, widerstand III 210  
**Bahnhofsanlagen** III 832  
 —, Abstellanlagen III 840  
 —, Anlagen für Personenverkehr III 836  
 —, Bahnsteige III 836  
 —, Beleuchtung II 855  
 —, Betriebswerkstätten III 869  
 —, Drehscheiben III 842  
 —, Empfangsgebäude III 836  
 —, Gleisanordnung, Gleisverbindung, III 835  
 —, Gliederg. d. Anlg., Uebersicht u. Anwendg. der Grundformen III 832  
 —, Güterverkehrseinrichtungen III 837  
 —, Hilfszüge III 870  
 —, Kohlenversorgg. III 860  
 —, Längen-, Richtungs-, Neigungsverhältn. III 833  
 —, Lokomotivschupp. III 862

**Bahnhofsanlagen,**

Schiebebahnen III 850  
 —, Verschiebeanlag. III 840  
 —, Wägeeinrichtung, III 869  
 —, Wagenschuppen III 867  
 —, Wagenumsetzeinrichtungen III 869  
 —, Wasserversorgg. III 854  
 Balancier, Lokomot. III 914  
 Balatarriemen III I 824  
**Balkenaufleger** III 360  
 —, brücke, Eisenbet. III 307  
 —, bucht III 655, 666  
 —, lage, Amtl. Gewicht III 57  
 —, lage, Eigengew. III 408\*  
 —, stärken I 741\*, 742\*;  
 III 339  
 —, einfacher, Biegemomente u. Querkräfte (graph. Stat.) I 184  
 —, einf., Elast. Gew. vollwandiger — III 138  
 —, einfacher, Querkräfte u. Biegemom. III 83  
 —, einfacher, Spannkraften im — III 87  
 —, einfacher, Verwertung der  $M_x$ -Linie III 101  
 —, einfacher, vollwandiger III 138  
 —, verdübelte u. verzahnte III 343

**Balken auf mehreren Stützen**

—, Anal. Ermittl. d. Festpunkte III 148  
 —, Balken auf 4 u. 5 Stützen III 164  
 —, Einflußlinie für d. Biegemomente III 153  
 —, Einflußlinien für die Stützendrücke III 156  
 —, Einflußlinien d. Stützenmomente III 151  
 —, Einflußlinien für die Querkräfte III 155  
 —, Einfluß d. Temperatur III 150, 167  
 —, Fachwerkbalken auf 3 Stützen III 166  
 —, Gleichf. belast. Balken auf 3 u. 4 Stützen III 157, 158\*  
 —,  $\omega$ -Tabelle III 152\*  
 —, Parabelförmige Einflußlinien III 142  
 —, Parabelförm. Einflußlinien f. d. kontinuierl. Balken unveränderl. Querschnitts III 157  
 —, T-Momente III 150  
 —, Vollwandige Träger auf 3 Stützen III 160  
 —, Wirkung bewegl. Einzelasten III 150

Balkenträger I 611  
**Ballastleitung** II 791  
 —, pumpe III 788  
 —, Schiffs- II 732  
**Ballon, Gas-, Auftrieb u. Gleichgewicht** I 344  
 —, Gas-, Statische Stabilität I 346  
**Bandbremse** I 903, 904  
 —, eisen III 655  
 —, säge III 377  
**Barometer** III 33  
 —, Aneroid- II 321  
 —, Metall- III 33  
 —, Quecksilber- III 321  
 —, stand III 342  
 —, stand, mittlerer I 412\*  
 Basalt I 518, 698  
 Basismessung (Triangulation) III 48  
**Batterie, Akkumulatoren-** s. a. dort II 381, 957  
 —, Akkumulatorwagen- II 824, 1018; III 924  
**Baublock** III 688  
 —, grube, Einschließung, Abdämmung, Trockenlegung III 231  
 —, holz I 741\*, 742\*, 743;  
 III 339  
 —, konstruktionen, Statik der — s. unter Statik d. Bauk. III 56  
 —, plan III 687  
 —, winden III 525  
**Baugrund, Berechnung v. Bohlwerken u. Verankerungen** III 232  
 —, Tragfähigkeit III 226, 229  
 —, zulässige Beanspruchung I 527\*; III 64, 230  
**Baummaschinen, Bagger** III 513  
 —, Beseitigung d. Baggerbodens III 517  
 —, Grundsägen III 523  
 —, Hebmachines III 525  
 —, Mörtelmischmaschinen III 523  
 —, Pumpen III 530  
 —, Rammen u. Hilfsmaschinen III 519  
 —, Rammen mittels Wasserspülung III 522  
 Rammé III 638  
**Baumpflanzung a. Landstraßen** III 658, 685  
 —, a. städt. Straßen III 694  
**Baumwollriemen** I 823  
 —, selbstbetrieb I 834\*  
 —, Berechnung I 839  
**Baustoffe, Eigengewichte** III 59  
 —, Festigkeitsz. I 513—526\*  
 —, i. Flußbau III 541

- Baustoffe**, zulässige Beanspruchung I 526\*; III 62  
**Beales** Kegelraderfräsmaschine . . . II 374  
**Beanspruchung**, zulässige f. Brücken III 76 81  
 —, zulässige für d. Maschinenbau . . . I 522  
 —, zulässige — v. Baustoffen f. d. Hochbau I 524\*, 526\*; III 62  
**Beaufort**-(Wind-)Skala . . . II 684  
**Behauungsarten** . . . III 687  
**Becherkette**, — kabel, — werk . . . II 548, 552  
**Becken**, Klär- . . . III 716  
**Bedingte Beobachtung** (Vermessungsk.) . . . III 53  
**Beförderungsdauer** v. Postsendungen . . . I 1059\*  
**Behälter**, s. a. Becken, Hochbehälter, Lagermittel, Wasserturm.  
 —, Eisenbeton- III 304, 729  
 —, gemauert . . . III 722  
 —, niertung . . . I 780  
 —, Stampfbeton- . . . III 724  
 —, Wasser- . . . III 722, 857  
 —turm mit Eisenbottich . . . III 726  
**Beharrungsregler** . . . I 1019  
**Belagensein** . . . I 655, 662\*  
**Belastung v. Brücken** . . . III 65  
 — v. eisernen Brücken III 65  
 — v. gewölbten Brücken . . . III 65  
 —sgleichwerte (Brückenbau) . . . III 72  
 —svorschriften, amtlich . . . III 71, 79, 81, 82  
 —, zulässige d. Baugrundes I 527\*; III 64, 230  
**Belebte Motoren** . . . II 1, 2\*  
**Beleuchtung** . . . II 826  
 —, Außen- . . . II 854\*  
 —, Bahnhofs- . . . II 855  
 —, Beleuchtungsarten s. a. dort . . . II 834  
 —, Berechnung . . . II 851  
 —, Berechnung v. Lichtstärken u. Beleuchtung . . . II 831  
 —, Eisenbahnwagen II 854; III 934  
 —, Gleis- . . . II 855, 856\*  
 —, indirekte . . . II 833, 853  
 —, Innen- . . . II 852\*  
 —, Kohlensäureausscheidung . . . III 424  
 —, Lichtmessung . . . II 830  
 —, Messung von Licht- u. Beleuchtungsstärken, Photometrische Einheiten II 827\*, 828, 829\*  
**Beleuchtung**, Physikalische Grundlagen II 826  
 —, Wärmeabgabe III 423\*  
 —, Wärme-, Kohlensäureentwicklung d. Lichtquellen, Luftbedarf . . . II 850\*  
 —, Lichtstärke, Farbe verschiedener Lichtquellen . . . II 850\*  
 —, Wahl u. Berechnung . . . II 849  
**Beleuchtungsanlagen**.  
 Allgemeines üb. Wahl u. Berechnung d. Beleuchtg. . . II 849, 850\*, 851  
 —, Brennzeiten . . . II 856\*  
 —, Entwerfen v. . . II 849  
 —, Erforderliche Beleuchtungs- u. Lichtstärke . . . II 852\*, 854\*  
 —, Gasverbrauch. Strombedarf verschiedener Lichtquellen . . . II 852\*  
 —, Reflektoren, Glocken . . . II 849\*  
 —, Wirtschaftlichk. . . II 850  
**Beleuchtungsarten**, Elektrische Bogenlampen mit Kohleelektroden . . . II 842  
 —, Elektrische Bogenlampen mit Metall- elektroden . . . II 847  
 —, Elektrische Glühlampen . . . II 839  
 —, Elektrische Quecksilberdampflampen . . . II 847  
 —, Elektrisches Moorelicht . . . II 848  
 —, Lampen f. flüssige Brennstoffe . . . II 834, 835  
 —, Lampen f. gasförm. Brennstoffe . . . II 836  
**Belichtung** . . . II 828  
 —, Fabrik- . . . III 478  
 —, Belleville-Kessel II 796, 799\*  
**Benoidgas** . . . II 838  
**Benzin** . . . I 479; II 252  
 —, Heizwert, Luftbedarf . . . II 251  
 —, thermodyn. Werte I 498  
 —, motor . . . II 267\*  
**Benzol**, Heizwert, Luftbedarf . . . II 251, 252  
 —, thermodyn. Werte I 498\*  
**Beobachtungsfehler** . . . III 49  
 —, Theorie der —, s. a. Fehler . . . I 85, 86  
**Bergaufzug** . . . II 595  
**Berieselung** . . . III 609  
**Berme** . . . III 787  
**Bernoullische Zahlen** . . . I 84  
**Berührung** von Kurven I 90  
**Beschickungseilbahn** II 593  
**Beschleunigung** . . . I 145  
 —, Coriolis- . . . I 154  
 —, Fall- . . . I 164  
 —, Normal- . . . I 148  
 —, Winkel- . . . I 149  
 —, Tangential- . . . I 148  
 —, Zusammensetzg. d. —en . . . I 152  
 —, Zusatz- . . . I 152  
 —, s-arbeit bewegter starrer Körper . . . I 221  
 —, s-druck (Kolben) . . . I 931  
 —, s-kraft . . . I 215  
 —, s-pol . . . I 162  
 —, s-zustand . . . I 161  
**Bessels** Rotationsellipsoid . . . III 1  
**Bessemmergebläse** . . . II 639  
**Beton** s. a. Eisenbetonbau . . . I 718  
 —, behälter . . . III 724  
 —, brunnen . . . III 247  
 —, Eisen- s. a. dort . . . I 722  
 —, Festigkeitsz. I 518, 519\*, 520\*  
 —, Gewichte I 723\*; III 59  
 —, Grundbau unter Wasser . . . III 239  
 —, mauerwerk . . . III 320  
 —, mischmaschine . . . III 523  
 —, Stampf- . . . I 720  
 —, Zuläss.Spannung I 526, 527  
**Bettung**, Eisenbahn- . . . III 786, 814  
 —, Zahnradbahn- . . . III 957  
**Bewässerung**, Fabrik- . . . I 314; III 502  
 —, landwirtschaftl. III 608  
**Bewegung** a. vorgeschriebener Bahnlinie I 211  
 — auf vorgeschriebener Führungsfläche I 212  
 —, beschleunigte . . . I 146  
 —, Dreh- . . . I 149, 208, 209  
 —, ebene . . . I 159  
 —, Elementar- . . . I 154  
 —, Fahrzeug- . . . I 153  
 —, freie geradlinige Massenpunkt- . . . I 204  
 —, freie krummlinige Massenpunkt- . . . I 208  
 —, geradlinige Punkt- I 144  
 —, gleichförmige . . . I 146  
 —, komplane . . . I 163  
 —, kräftefreie . . . I 216  
 —, kreisende . . . I 149  
 —, krummlinige Punkt- . . . I 147  
 —, Massenpunktgruppen- infolge Kraftwirkg. I 214  
 —, Mittel- . . . I 150  
 —, periodische . . . I 147  
 —, Prinzip der Schwerpunkt- . . . I 217  
 —, projizierte . . . I 149  
 —, Relativ- . . . I 153, 214

**Bewegung, sphärische**

- I 155
- starrer Körper . . . I 154, 218, 220
- , umgekehrte . . . I 160
- , unfreie Massenpunkt- . . . I 210
- , unfreie Massenpunktgruppen- . . . I 215
- , Wasser- in Flußkrümmungen . . . III 536
- , zusammengesetzte I 214
- , Zusammensetzung der
  - en . . . I 150
  - sdreieck . . . I 155
- gleichungen des starren Körpers . . . I 221
- sgröße . . . I 201
- lehre, geometrische I 144

**Bewegungswiderstand**

- v. Drehscheiben III 848
- v. Eisenbahnen III 768
- v. Schiebebühnen III 853
- v. Schiffen I 323; II 741
- v. Schleusentoren III 588
- v. Seilbahnen III 971, 979
- v. Straßentransportwerk III 649
- v. Zahnradbahnen III 967

**Bewegung wirklicher**

- Flüssigkeiten, Strömung an eingetauchten Körpern . . . I 364
- , Strömung in Leitungen I 362
- , Unstetigkeits- (Diskontinuitäts-)flächen I 362
- , Zähigkeit, innere Reibung I 361

Beyer-Regler . . . I 1027

**Biegemaschine** . . . II 341

—sames Rohr . . . I 973\*

—same Welle . . . I 855

**Biegung u. Drehung I 605\***— u. Drehlung, Werte  $\xi = 0,35$ 

$$+ 0,65 \sqrt{1 + \left(\frac{\alpha_0 \cdot M \cdot d}{M}\right)^2}$$

I 605\*—607\*

— u. Schub . . . I 604

— u. Zug (Druck) I 592

—sarbeit . . . I 550

—sbeanspruchung, zulässige I 523\*, 524\*; III 62

—druckfestigkeit . . . III 278

—feder . . . I 613

—fester Stab . . . III 135

—linie . . . III 124, 128

—linie d. stetig gekrümmten Bogens . . . III 137

—spannung . . . I 541

—spannung, Momentenebene geht durch die Hauptachse d. Querschn.

I 542

**Biegun**spannung, Beliebige Momentenebene (Unsymmetrische Belastung) . . . I 545

—zugfestigkeit (Eisenbeton) III 279

**Biegun**gsfestigkeit

I 506, 540

—, Aeußere Kräfte gerader Träger . . . I 540

—, Beispiele f. d. Berechnung auf Biegung beanspr. Träger . . . I 578

—, Elast. Formänderung gerader Träger . . . I 549

— gerader Stäbe . . . I 540

—, Querschnittmittlung f. Wälzträger mit Rücksicht auf Durchbiegung I 577

—, Spannungen . . . I 541

—, Träger a. mehreren Stützen . . . I 585

—, Träger mit unveränderlichem Querschnitt I 564\*

—, Träger von gleichem Widerst. gegen Biegung I 580, 581\*

—, Träger von kleinstem Biegun

Binomischer Satz . . . I 45

Binormale . . . I 119

**Blech** . . . I 676\*, 677\*, 678

—, Brückenbau- . . . III 987

—kantenhobelmaschine II 358

—, Kessel-, Materialvorschriften II 85, 94

—, Kessel-, Ueberpreisliste f. Grobbleche, Böden usw. . . . II 114

—, Kupfer- . . . I 692

—lehre, Fein- I 642\*, 690\*

—schere . . . II 343

—schornstein . . . II 64

—, Steh-, s. dort.

—träger . . . I 551; III 988

—, verzinkt, verbleit, verkupfert, vernickelt I 679

—, Zink- . . . I 690, 691\*

**Blei** . . . I 630, 633, 693

—, Amtl. Gewicht III 60

—draht . . . I 693\*

—, Festigkeitss. I 517, 521

—platte, Gewicht . . . I 641\*

—rohr . . . I 981\*

—rohr, Normalien f. Abfußrohr . . . I 982

**B-Linie (Statik)** . . . III 95

Blitzableiter . . . II 976

Blockkran II 508\*, 509\*, 512

Blondin . . . II 532

**Bobine** . . . II 450

—nördermaschine. II 1030

**Bodenauflockerg.** III 790\*

—druck des Getreides II 568, 569\*

—durchlässigkeit, s. a. Versickerung I 314; III 709

—filtration . . . III 762

—speicher . . . II 564

**Bogenabsteckung.** III 40

—, Bestimmung d. Elemente b. Abstecken III 45

—differential. . . I 93, 119

—höhe, Kreis- . . . I 36\*

—lampe . . . II 842, 855\*

—lampe, Stromverbrauch II 852\*

—länge (Gleich.) I 97

—länge, Kreis- I 36\*, 38\*

—, Schwerpunkt . . . I 191

—träger, Dreigelenkbogen III 111

—träger, Elastisches Gewicht für d. vollwandigen . . . III 137

—träger, Holz- . . . III 352

—träger, vollwand. III 1013

—träger, Zweigelenk- III 1141

**Bohlenrost** . . . III 238

—wand . . . III 231

—werk, Berechnung III 232

**Bohrer** . . . II 348

—maschinen . . . II 361

- Bohrmaschine**, Holz- II 382  
 —rohr . . . . . I 968  
 —widerstand . . . . . II 348  
**Boot** . . . . . II 714, 716\*  
 —, Gewicht . . . . . II 728\*  
 —, sdavit . . . . . II 717  
**Böschung** III 535\*, 604, 658  
 —, Bahndamm- . . . . . III 788  
 —, Graben- . . . . . III 787  
 —, smesser . . . . . III 3  
 —, Standfestigkeit III 535\*  
 —, swinkel II 514, 560; III 201\*, 535\*, 604, 787, 788  
 Boylesches Gesetz I 416  
 Brandmauer . . . . . III 27  
 Brauchwassermenge III 736  
 Brauerarbeitsdiagramm III 472  
**Brauersches Dynamometer** . . . . . II 328  
 — Wassermessverfahren I 340  
**Braunkohle**, Heizwert I 475  
 —, Wärmeverlust durch d. Verbrennungsgase I 487\*  
 Breccie . . . . . I 700  
 Bremse-Umsteuerung II 192  
**Bremsbandlastdruckbremse** . . . . . II 403  
 —) and, Reibung . . . . . I 262  
 —) bergförderung . . . . . II 519  
 —) dynamometer . . . . . III 327  
 —) gestänge (Eisenb.) III 879  
 —) klotz . . . . . III 877  
 —) kraft (Brückenb.) III 1060  
 —) löfsmagnet II 398\*, 404\*  
 —) löfsmotor . . . . . II 398  
 —) scheibe . . . . . II 328  
 —) verband (Brückenb.) III 1049  
 —) weg . . . . . III 885  
**Bremse** . . . . . I 246, 901  
 —, Automobil- . . . . . II 823  
 —, Band- . . . . . I 903, 904  
 —, Beckersche Schneckenlastdruck- II 383, 402  
 —, Eisenbahn- s. a. dort III 877  
 —, elektr., Fördermasch. II 1038  
 —, elektrische, Zahnrad. III 966  
 —, Fall- . . . . . II 418  
 —, Fördermaschinen- II 465  
 —) f. Dampfhebmachines III 890  
 —) für elektr. Hebmach. II 394  
 —) f. Hebmach. . . . . II 388  
 —, Grubenbahn- . . . . . III 971  
 —, Hebezeug- . . . . . II 383  
 —, Kegel- . . . . . I 905  
 —, Klotz- . . . . . I 901, 902  
 —, Lastdruck- II 383, 401  
 —, Lokomotiv- . . . . . III 915  
**Bremse**, Magnet- . . . . . II 397  
 —, Scheiben- . . . . . I 905  
 —, Senk- . . . . . II 395  
 —, Sperrad- . . . . . I 908  
 —, Stopp- . . . . . II 395  
 —, Strafsenbahn- . . . . . II 1022  
 —, Wasser- . . . . . II 328  
 —, Westonsche Gewinde- Lastdruck- II 384, 402  
 —, Windhoffsche Schräg- zahn-Lastdr. II 384, 402  
 —, Zahnradbahn- . . . . . III 966  
 —, Zahnrad- (Vergnügungs- bahn) . . . . . III 977  
 —, Zangen- (Seilb.) III 978  
**Brennerarten** . . . . . II 836  
 —) punkt . . . . . I 98; III 11  
 —) weite . . . . . III 11  
 —) zeiten . . . . . II 856\*  
**Brennstoffe** . . . . . I 474  
 —, Eigenschaften der Motor- II 248, 250, 251\*  
 —, flüssige . . . . . II 793  
 —, flüssige, Feuerung II 49, 793  
 —, flüssige, thermodyn. Werte I 498\*, 499\*  
 —, gasförmige u. flüssige I 489  
 —) verbrauch d. Motoren II 250\*, 251\*  
 Brikett, Heizwert . . . . . I 479  
 Britanniametall . . . . . I 697  
 Brixsche Formel, Tragfähig- keit v. Pfählen III 226  
**Bronze** . . . . . I 694, 695  
 —, Aml. Gewicht . . . . . III 60  
 —, draht . . . . . I 521\*, 695  
 —, Festigkeitszahlen I 514\*, 515\*, 521\*  
 —) platte, Gewicht . . . . . I 641\*  
 —) rohr . . . . . I 969, 971\*  
**Brown. Boveri-Parsons- Turbine** . . . . . II 237  
 —) sche Umsteuerung II 193  
**Bruchsicherheit** . . . . . I 513  
 —) spannung . . . . . I 504  
 —) steinmauerwerk. III 320  
 —, unbestimmte Form eines . . . . . I 69  
**Brüche**, imaginäre I 71  
 —, reelle . . . . . I 71  
 —, Wurzeln einiger I 43\*  
 —, Zerlegung rationaler I 70  
**Brücke** s. a. Strafsenbrücke, Eisenbahnbrücke, Fuß- gängerbrücke, Brücken- und Dachkonstruktion, Brückenbau, Eiserne Brücke.  
 —, Eisenbeton- . . . . . III 307  
 —, Eisenbetonbogen- III 312  
 —, eiserne, Balken-Momente und Querkräfte für den Lastenzug III 72\*, 73\*, 80\*, 81\*  
**Brücke**, eiserne, Brems- kraft . . . . . III 75  
 —, eiserne, Eigengewicht III 65, 66, 68, 70  
 —, eiserne, Fliehkraft III 75  
 —, eiserne, Nietung I 780  
 —, eiserne, Verkehrslasten III 67, 71, 79, 81, 82  
 —, eiserne, Wärmespannun- gen . . . . . III 76, 81  
 —, eiserne, Winddruck III 75  
 —, eiserne, Zulässige Beanspruchungen III 76, 81  
 —, Fachwerk-Eisenbeton- III 311  
 —, Gelenk-Wölb- . . . . . III 316  
 —, gewölbte III 1094\*—1096\*  
 —, gewölbte, Belastung- III 65  
 —, gewölbte, Eigengewicht III 65  
 —, gewölbte, Verkehrslasten III 65  
 —, Kanal- . . . . . III 573, 574  
 —) nbreite III 981, 1057, 1073  
 —) nlager, Balken- III 1035  
 —) nlager, bewegliches III 1040  
 —) nquerträger . . . . . III 1062\*, 1063\*  
 —) nwage (Mechanik) I 176  
 —, Verlade- . . . . . III 312  
 —, vollwandige Eisenbeton- III 307  
**Brückenbau**, Allgemeines III 980  
 —, Eisenbahnbrücken s. dort III 1054  
 —, Eiserne Brücken s. dort III 983  
 —, Gewichtsberechnungen III 1086  
 —, Pfeiler u. Widerlager III 1089  
 —, Spannweite, Bauwerks- länge (Wirtschaftlich.) III 981  
 —, Strafsenbrücken s. dort III 1073  
 —, Wahl d. Baustoffes III 981  
**Brückenkrane** II 478, 531  
 —, Krawaherwerk . . . . . II 482  
 —, Kianträger . . . . . II 481  
 —, Laufwinde . . . . . II 478  
**Brücken- u. Dachkonstruktionen**, s. a. Bal- kenbrücke, Brückenbau, Dächer, Eisenbahnbrücke, Eiserne Brücke, Eisenbetonbau, Fachwerkträger, Träger, Tragwerk III 83  
 —, Besondere Fülle, Gleich- förmige Belastung III 102

**Brücken- u. Dachkonstruktionen**, Dreieckbinder . . . III 108  
 —, Dreigelenkbogen III 111  
 —, Einfacher Balken III 83  
 —, Englischer Dachbinder III 108  
 —, Gerberbalken . . . III 97, 1010, 1017  
 —, Kranträger I 571; II 475, 481; III 110  
 —, Parabelträger . . . III 103, 378, 1035  
 —, Parallelträger III 78, 102  
 —, Pauliträger . . . III 105  
 —, Polonceau-Dachbinder III 106, 398  
 —, Schwedlerträger III 105  
 —, Sichelträger III 106, 170  
 —, Versteifte Kette III 115  
 —, Verwertung d.  $M_p$ -Linie des einfachen Balkens III 101  
 —, Zeltächer III 109, 349, 395  
**Brunnen** . . . III 235, 708  
 —, Abessynier . . . III 715  
 —, artesischer . . . III 715  
 —, Beton- . . . III 247, 713  
 —, eiserne Schacht- III 713  
 —, gründung . . . III 246  
 —, Kessel . . . III 712  
 —, Rohr . . . III 713  
 —, schlinge . . . III 247  
 —, Senk- . . . III 247, 249  
 —, stat. Untersuch. III 249  
 —, stube . . . III 707  
 —, Tief- . . . III 714  
 B T U (Britische Wärmeinheit) I 393  
 Buckelplatte I 677; III 1060, 1075  
 Bühne . . . III 539  
 Bulbeisendecke . . . III 414  
 Bunsenbrenner . . . I 488  
 Bürgerlicher Druck (Wasservers.) . . . III 702  
**Bürste**, Dynamomaschine II 907, 908  
 —nkupplung . . . I 864  
 Bussoleninstrumente III 16

**C.**

Cailletet- u. Mathiasseche Versuche (Schweflige Säure) . . . I 451\*  
 Caisson . . . III 251  
**Cardangetriebe** . . . II 820  
 —isches Problem . . . I 160  
 Carnotscher Kreisprozess I 426  
**Castiglianoscher Satz**, Beispiele . . . III 182  
 —s Prinzip d. kleinst. Formänderungsarbeit III 139  
 Celsius-Thermometer I 388

**D.**

C-G-S-System I 144, 166; II 857  
 C: H (Lokomotive) III 890\*  
**Charakteristik d. Gleichstr.-Dynamomasch.** II 886  
 — d. Logarithm. . . I 48  
 — d. Regler . . . I 1020  
 — d. Wechselstrommaschine (Kurzschluss) . . . II 926  
 —, Leerlauf- . . . II 926, 928\*  
**Chemische Elemente u. Verbindungen**. I 630\*  
 — Formeln . . . I 630\*  
 Chromsilicium - Federstahl, Festigkeitszahlen I 512\*  
**C-Kurve (Regler)** . . . I 1020  
**Clapeyronsche Gleichung** (Biegemoment) . . . I 585  
 — (gesätt. Dampf) . . . I 433  
 — (Statik) . . . III 147  
 Clausiusscher Satz I 413  
 Collmannstenerung II 171, 173, 175  
**Compounddraht** . . . I 695  
 —masch. s.a. Verbundmasch. —verzahnung . . . I 812  
**Coriolisbeschleunigung** —kraft . . . I 154  
 — . . . I 214  
**Corliffschieber** II 149, 159, 197  
 —steuerung . . . II 177  
**Cosinus** . . . I 26\*, 58, 60  
 —, arc cos . . . I 61, 66  
 —, Arc Cof . . . I 66  
 —, hyperb. I 31\*, 33\*, 65  
**Cotangens** . . . I 28\*, 58  
 —, arc ctg . . . I 61, 66  
 —, Arc Ctg . . . I 66  
 —, hyperb. . . . I 65  
**Coulomb** . . . II 857  
 —sche Erddruck-Theorie III 200  
**Cremonascher Kräfteplan** . . . I 186; III 94  
 — für  $A = 1$  (Spannkräfte in einfachen Fachwerkbalken) . . . III 94  
**Culmannsche E-Linie** (Erddruck) . . . III 201  
 —, K-Linie (Erdr.) III 202  
 —s Verfahren (Kräfteermittlung) . . . I 187  
 —s Verfahren (Spannkraftermittlung) . . . III 93  
 Curtis-Turbine . . . II 241  
 C W L (Konstrukt.-Wasserlinie) . . . II 654, 655, 669

**Dachreiter** . . . III 395  
 —verband, Eigengewichte III 358  
 —ziegel . . . . . I 708  
**Dachbinder s. a. Binder**, Dreieck . . . III 108  
 —, englischer . . . III 108  
 — mit 3 fachem Hängewerk III 199  
 —, Polonceau- III 106, 398  
**Dächer**, Atelier- III 182  
 —, Belastung . . . III 58, 61  
 —, Dachverbände . . . III 344  
 —, Eisenbeton- . . . III 800  
 —, Eiserne Kuppeln III 390  
 —, Fabrik- . . . III 476  
 —, Glas- . . . III 421  
 —, Hallenbinder . . . III 352  
 —, Holzzement- III 420, 422  
 —, Kehlbalcken- . . . III 199  
 —, Krag- . . . III 379  
 —, Kronen- . . . III 418, 422  
 —, Kupfer- . . . III 419, 422  
 —, Kuppel- . . . III 188, 349  
 —, Mansard- . . . III 348  
 —, Mönch- u. Nonnen- III 418, 422  
 —, Papp- . . . III 420, 422  
 —, Pfannen- . . . III 419, 422  
 —, Pletten- . . . III 198, 345  
 —, Pult- . . . III 348  
 —, Rahmen- . . . III 389  
 —, Rohr- . . . III 420  
 —, Sägen- (Shed-) . . . III 348  
 —, Sattel- . . . III 345  
 —, Schiefer- . . . III 419, 422  
 —, Schindel- . . . III 421  
 —, Sparren- . . . III 345  
 —, Stroh- . . . III 420  
 —, Turm- . . . III 349  
 —, Walm- . . . III 348  
 —, Wellblech- III 419, 422  
 —, Zeit- III 109, 349, 395  
 —, Ziegel- . . . III 418, 422  
 —, Zink- . . . III 419, 422  
**Dachkonstruktionen**, s. a. Brücken- u. Dachkonstr. Binderanordnung III 377  
 —, Pletten . . . III 373  
 —, Stabquerschnitte III 375  
 —, Tragwerke . . . III 374  
 D'Alembertsches Prinzip I 214  
 Daltonsches Gasmischungsgesetz . . . I 420  
 Dammerde . . . I 701  
**Dampfausflus** I 459, 460, 464  
 —, Ausflus aus Düsen I 461, 465; II 223  
 —diagramm I 444; II 135  
 —diag. Ueberdruck- I 1004  
 —dichte . . . I 434\*, 436\*  
 —drosselung I 471; II 117  
 —druckpumpe . . . II 597  
 —düse . . . I 461; II 224

**Dampfgeschwindigkeit in Rohrleitungen** . . . I 467

—geschwindigkeit i. Steuerungskanälen II 143, 769

—hammer . . . II 337

—haspel II 442, 443, 444\*

—kabel . . . II 442, 444\*

—kanal . . . II 143, 149

—kran, Schiffs- . . . II 711\*

—lässigkeit . . . II 119

—leitung . . . I 466

—leitung, Dampfmasch.-Zu- II 203, 790

—, Normalien I 974, 976\*

—, Wärmersparnis durch Umhüllung I 471\*

—messer . . . II 325

—, nasser . . . I 431

—peife . . . III 902

—ramme . . . III 520, 521\*

—strahlgebläse . . . II 653

—strahlpumpe . . . II 598

—strömung I 453; II 223

—tafeln I 432\*, 434—438\*

—, trockener . . . I 442

—überhitzer . . . II 25, 794

—, überhitzer I 440, 469; III 39, 141

— u. Wärmersparnis durch Umhüllung v. Leitungen I 471\*

—verbrauch d. Dampfmasch. II 134, 138, 147

—verbrauch d. verlustfreien Dampfmasch. . . I 442

—verbrauch, nutzbarer II 119, 121\*, 123\*, 129\*

—verbrauch, reduzierter d. Dampfmasch. . . I 443

—walze . . . III 67, 665\*

—warmwasserheizung II 454

—wasserheizung . . . III 455

—, Wasser-, thermodyn.

—, Werte . . . I 417, 418\*

—zylinder . . . I 953; II 194, 199, 470, 770

—zylinder, Lokomotiv- III 906

**Dämpfe, Allgemeines** I 430

—, Besondere Zustandsänderungen (Expansionskurven) . . . I 439

—, Bewegung in Rohrleitungen . . . I 466, 469

—, Drosselung . . . I 472

—, Druck d. gesätt. Wasserdampfes . . . I 432\*

—, kritischer Zustand I 431

—, Nasser Dampf . . . I 431

—, spez. Gew. . . I 638\*

—, Strömung . . . I 458

—, Theorie der Dampfmaschine . . . I 442

—, Theorie der Kältemaschine . . . I 446

**Dämpfe, Ueberhitzer**

Dampf . . . I 440

—, Zähigkeit I 400, 401\*

**Dampfheizung** III 451,

—, Eisenbahn . . . III 903

—, Fern- . . . III 462

—, in Verbindung mit Kraftbetrieben . . . III 458

**Dampfkessel, s. a. Kessel,**

Lokomotivk. . . II 6

—, Absperrventil II 74, 80, 800

—, Allgemeines . . . II 6

—, Anstrengungsgrad II 42

—, (A. P. B.) Allgemeine Polizeiliche Bestimmungen II 27

—, Armatur, II 72, 80, 800; III 901

—, Arten . . . II 7

—, Aufstellungsort II 7, 83

—, Ausblasevorrichtung II 75, 80

—, Anrüstung II 72, 80, 800; III 901

—, Bauvorschriften f. Landdampf. . . II 94

—, Bestimmung der Wärmeverluste . . . II 110

—, Blechdickenberechnung II 94

—, Blechstärken II 27, 28\*

—, Brennstoffverbrauch II 42, 793

—, Dampfdom II 6, III 899

—, Dampfraum . . . II 6\*

—, Doppelkessel . . . II 10

—, Einflammrohrkessel II 7\*, 8

—, Einmauerung II 49, 84

—, Feuerbüchse . . . II 102

—, Feuergeschränk II 44

—, Feuerung . . . II 40, 795

—, Feuerungsarten II 46

—, Feuerzüge . . . II 52, 79

—, Flammrohrkessel II 6, 8

—, für Eisenbahntriebwagen III 922

—, Gewicht . . . II 7

—, Gewichte der Schiffskesselanl. II 802\*, 803

—, Großwasserraumkessel II 7, 8\*

—, Heizfläche II 41, 43\*, 65, 792; III 445

—, Heizkanäle, Fuchs II 52

—, Heizrohrkessel II 12\*, 98

—, Heizungskessel III 445, 451, 462, 464

—, Innenfeuerung II 13

—, Kesselmantel . . . II 28\*

—, Kesselwandung II 79

—, Kleinkessel II 23, 84; III 922

—, Konstruktion II 27, 795

**Dampfkessel, Konstruktionseinzelheiten** II 36

—, Künstlicher Zug (Schiffskessel) . . . II 793

—, Lagerung . . . II 49

—, Leistung (Schiffsk.) II 792\*

—, Manometer . . . II 77

—, Materialvorschr. II 85

—, Nietung . . . I 775; II 27, 28\*, 89, 92, 94

—, Nietungstafeln II 34\*, 35\*

—, Normen f. Leistungsversuche an — u. Dampfmaschinen . . . II 103

—, Oberkessel . . . II 15

—, Prüfung . . . II 82, 85

—, Rauchkammer (Lokomotiv-) . . . III 900

—, Rauchverhütung II 43

—, Reichsgesetzl. Bestimmungen üb. Anlegung u. Betrieb v. Dampf. II 77

—, Rostfläche II 42, 43, 792\*

—, Roststäbe . . . II 45, 803

—, Schiffs- . . . II 791

—, Schornstein . . . II 53

—, Schornstein (Lokomot.) III 900

—, Schornstein, Rauchfang (Schiffsk.) . . . II 803

—, Schrauben u. Verschraubungen . . . II 100, 101\*

—, Schweifung II 36, 94

—, Sicherheitsventil I 465; II 72, 81, 800\*; III 902

—, Siederohr I 966\*; II 89, 93, 795

—, Siederohrkessel II 15\*

—, Speiseraum . . . II 7

—, Speiseventil und -Rohr II 75, 80, 800

—, Speisevorrichtungen II 65, 80, 800; III 901

—, Speisewasser . . . III 855

—, Speisewasserreinigung II 63

—, Speisewasservorwärmer II 65

—, Ueberhitzer . . . II 25, 794

—, Unterfeuerung . . . II 12

—, Verankerung II 39, 52, 89, 92, 101

—, Verbindung der Kesselteile . . . II 27, 36

—, Verbrennung . . . II 43

—, Verdampfung II 42, 793

—, Verdampfungsversuche II 111

—, Verstärkungen . . . II 38

—, Wahl d. Nietverbindung II 32

—, Wandstärke . . . II 33

—, Wasserkammer II 15

**Dampfkessel, Wasser-**  
 raum II 6\*  
 —, Wasserrohrkessel II 15\*,  
 796  
 —, Wasserstandzeiger  
 II 76, 80, 81, 800; III 902  
 —, Wellrohrkessel. II 9  
 —, Wirkungsgrad. II 42  
 —, Zubehör. . . II 72  
 —, Zugregler. . . II 46  
 —, Zweiflamrohrkessel  
 II 6\*, 8, 9  
 —, Zylinder-Schiffskessel  
 II 795, 797\*

**Dampfmaschine, s. a.**  
 Schiffsmaschinenbau  
 II 116, 760  
 —, Analytische Berechnung  
 II 116, 130, 760  
 —, Arbeitsverteilung auf d.  
 Zylinder. . . II 146  
 —, Ausmittlung II 130, 141  
 —, Ausstattung. . . II 207  
 —, Berechnung mittels  
 Dampfdiagramms II 135  
 —, Bestimmung der Arbeits-  
 verluste. . . II 112  
 —, Dampfdiagramm II 135  
 —, Dampfdröslung II 117  
 —, Dampfmantel II 140, 195  
 —, Dampftriebweg. III 922  
 —, Dampfverbrauch  
 II 134, 138, 147  
 —, Dampfverlust. II 119  
 —, Einfluß d. Zylinder-  
 heizung. . . II 129\*  
 —, Füllung. II 117, 121\*  
 —, für Hebemasc. II 390  
 —, Gleichstrom- II 138, 179  
 —, Heiß-. . . II 135, 146  
 —, indizierte Spannung  
 II 116, 124\*, 125\*  
 —, kalorimetrische Unter-  
 suchung. . . I 445  
 —, Kolbengeschwindigkeit  
 I 929; II 117, 120\*  
 —, Kondensation. II 207  
 —, Kurbelager. II 205  
 —, Leergangswiderstand  
 II 127\*  
 —, Lokomotiv-. . . III 904  
 —, Luftpumpe. . . II 213  
 —, Normen f. Leistungs-  
 versuche II 103, 108  
 —, nutzbarer Dampfver-  
 brauch II 119, 128\*, 129\*  
 —, nversuche, Auswertung  
 I 443  
 —, Rahmen. . . II 204  
 —, Raumdigramm II 142  
 —, Raumverhältnis d. Zyl.  
 II 131, 142, 761, 762\*, 764\*  
 —, Rückkühlung. . . II 219  
 —, Schwungrad. I 999  
 —, Spannungskoeffizienten  
 II 122\*

**Dampfmaschine, Steue-**  
 rungen s. dort. II 148  
 —, Steuerung (Förderm.)  
 II 461  
 —, Teile der —. II 194  
 —, Theorie der —. I 442  
 —, Verbundmaschine  
 II 124\*, 125\*, 131—133\*,  
 142, 144, 201  
 —, verlustfreie. . . I 442  
 —, vorteilh. Füllung. II 121\*  
 —, Wirkungsgrad  
 II 116, 126\*  
 —, Zu- und Ableitung II 203  
 —, Zwischenüberhitzung  
 II 141  
 —, Zylinder s. a. Dampf-  
 zylinder I 955; II 194

**Dampfturbine**. II 220  
 —, Aktionsturbine II 225  
 —, Druckstufen. II 231  
 —, Einfluß d. Kondensation  
 II 222  
 —, Einfluß d. Ueberhitzung  
 II 221  
 —, Einstufige Gleichdruck-  
 turbine. . . II 223  
 —, Einstufige Ueberdruck-  
 turbine. . . II 230  
 —, Geschwindigkeitsstufen  
 II 228  
 —, Gleichdruckturb. II 783  
 —, Mehrstufige Gleichdruck-  
 turbine. . . II 228  
 —, Reaktionsturbine II 230  
 —, Rückwärts-. . . II 780  
 —, Schiffs-. . . II 780  
 —, Systeme u. Bauarten  
 II 232  
 —, Theorie. . . II 220  
 —, Ueberdruckturbine  
 II 230, 781  
 —, Vielstufige Ueberdruck-  
 turbine. . . II 231  
 —, Wirtschaftlichkeit II 222

**Dämpfungsfaktor** I 205  
 —widerstand. . . II 976  
 Dauerbrandlampe. II 846

**Daemensenkremse** II 400  
 —stoppbremse. . . II 395  
 Davit, Boots-. . . II 717  
 Dechers Prismentrommel  
 III 7

**Decke**. . . . . III 407  
 —, Belastung. . . III 57  
 —, Eigengew. III 408—418\*  
 —, Eisenbeton- III 270, 297  
 —, gewölbte III 408\*, 409\*  
 —, Holz-. . . . . II 408\*  
 —, Massiv- I 579; III 410\*  
 —, Massiv-, Amlt. Gewicht  
 III 58  
 —, Massiv-, Baupolizeibe-  
 stimmungen. . III 276  
 —, Ziegel-. . . . . III 411\*  
 —, Zwischen-. . . III 408\*

**Decklage (Strafsenb.)**  
 III 661, 663\*

**Dehnfuge**. . . . . III 397

**Dehnung (Festigkeitsl.)**  
 —, elastische. . . I 502  
 —, s-ellipse. . . . . I 544  
 —, sfähigkeit von Eisenbeton  
 III 284  
 —, s-gesetz (Aerodyn.) I 342  
 —, s-rohr I 962, 970\*, 973\*;  
 II 203  
 —, s-zahl (Festigkeitsl.) I 503  
 Deichbau. . . . . III 611  
 Dekrement, logarithm.-  
 d. Schwingung. I 206

**Deltametall**. . . I 696  
 —, Festigkeitszahlen I 514\*,  
 515\*, 521\*

**Displacement** I 267; II 655,  
 664\*

**Dériwicklung**. . . II 907  
 Derrick-Kran. . . . III 527  
 Descartessches Blatt I 114  
 Deseniss & Jacobische Was-  
 serenteisnung III 721  
 Desinfektionsanlage III 946  
 Determinanten. . . I 49

**Deviationsmoment** I 232  
 —widerst. d. Kreisels I 230

**Diabas**. . . . . I 698

**Diagramm, Arbeits- der**  
 Verbrennungsmotoren  
 II 246  
 —, Arbeits- für Fabrik-  
 lagen. . . . . III 472  
 —, Dampf- I 444; II 136  
 —, elektr. Fördermaschine  
 II 1040, 1041, 1042  
 —, Heyland-. . . . . II 941  
 —, Kappsches Phasen-  
 verschiebungs- II 92c  
 —, Kompressor- II 641, 642  
 —, Raum- (Dampf-) II 142  
 —, Massenwucht-  
 I 1011, 1013  
 —, Mehrzylindergesamt-  
 II 139  
 —, Schieber-. . . . . II 152  
 —, (Thermodyn.) . . I 416  
 —, Ueberdruck- u. Wider-  
 stand- (Schwungrad)  
 I 1004

**Diaphragmapumpe**  
 —ring. . . . . III 530  
 —. . . . . III 13

**Dichte d. Wassers** I 892\*  
 —e v. Gasen. . . . . I 418\*  
 —heit d. Dampfabschlüsse  
 II 149

**Dichtung, Kolben-** I 909  
 —, Labyrinth-. I 310, 909  
 —, Rohr- I 963, 979; III 904  
 —, Ventilfläche. . . I 934  
 Diele. . . . . III 494  
 Dielektrizitätszahl. . I 865

- Dieselmotor s. Verbrennungsmotor.**  
 —en, Oele für . . . I 499\*  
 Dieterici u. Wobasche Versuche, Ammoniakdampf I 452  
 Differdinger I-Träger I 655, 669\*
- Differentialformeln** I 67  
 —gleichung . . . I 81  
 —pumpe . . . II 617  
 —quotient . . . I 67  
 —rechnung . . . I 67  
 Diffuser . . . II 628  
 Dimension s. Maßsystem.
- Dioptrische Instrumente** III 4  
 Diorit . . . I 698  
 Direktionskonstante II 933  
 Direktrix . . . I 98  
 Diskontfaktor . . . I 54  
 Diskontinuitätsfläche I 362  
 Diskriminante . . . I 98  
 Distanzmesser . . . III 35  
 Divergenz . . . I 127
- D-Linie, Fläche (Statik)** III 96  
 Doerfelsteuerung . . II 171  
 Doergens-Prisma . . II 7  
 Dohmen-Leblanc-Reibungskupplung . . I 866\*  
 Dolomit . . . I 699
- Doppelfrequenzmesser** II 968  
 —kegel-Reibgkupplg. I 868  
 —kessel . . . II 10  
 —kollektormotor . . II 981  
 —laschenietung . . II 32  
 —punkt . . . I 96  
 —scheiben-Reibungskupplung . . I 868  
 —schiebersteuerung II 161  
 —schiebersteuerung mit Achsenreglern II 167  
 —schlufsmaschine II 883, 884\*, 886  
 —T-Eisen . . . I 659\*  
 —T-Eisen, Grey-Profil . I 655, 669\*
- Dowsongas** . . . I 495  
 Drachen . . . I 355
- Draht, Blei-** . . . I 693\*  
 —, Bronze- . . . I 695  
 —, Eisen- . . . I 655  
 —, Festigkeitszahlen I 521\*  
 —, Gewichte verschiedener Drahtsorten . . I 640\*  
 —, Kupfer- . . . I 692  
 —, glas . . . I 726  
 —, lehre . . . I 642\*  
 —, riesen . . . II 580
- Drahtseil** . . . I 890  
 —, Arbeitsverlust I 263, 264  
 —, betrieb . . I 831; III 496  
 —, Festigkeitsz. . . I 521  
 —, Förder- . . I 892\*, 893\*  
 —, f. Grubenbahnen III 969\*
- Drahtseil für Riesen** II 576\*, 577\*  
 — f. Schwebebahnen II 577  
 — f. Touristenbahnen III 970  
 —, Kran- I 894\*, 895\*, 896\*  
 —, Schiffs- . . . II 726\*  
 —, Triebwerk- (Gewicht) I 892\*  
 I 892\*
- Drainage, s. a. Landwirtschaftl. Wasserb.** III 604  
 —genossenschaft . . III 607  
 Drainrohr . . . III 605\*, 718
- Drall** . . . I 202  
 —, Satz vom . . . I 216  
 —, starrer Körper I 219, 225  
 Drängewassermenge III 600
- Drehbank, Holz-** . . II 381  
 —bank, Metall- . . II 358  
 —bewegung I 149, 208, 209  
 —erei . . . III 946  
 —feld . . . III 939  
 —gestell, Eisenb.-Wagen- III 931  
 —gestell, Lokomotiv- III 911, 913  
 —kraftkurve I 1004, 1005  
 —maschine (Schiffb.) II 789  
 —moment . . . I 169  
 —moment, zul. I 588, 589\*  
 —schieber II 149, 159, 177, 197  
 —stahl . . . II 345  
 —vektor . . . I 154
- Drehkran** . . II 483, 531  
 —, Ausleger . . . II 491  
 —, Ausleger mit Laufkatze II 498  
 —, Ausleger mit Laufwinde II 494  
 —, Bau- III 526, 528, 529  
 —, fahrbarer Turm- II 500  
 —, fahrbarer . . . II 497  
 —, Gegengewicht . . II 491  
 —, Gründung . . . II 492  
 —, hängender . . . II 501  
 —, Hubwerk . . . II 490  
 —, Lagerung d. drehbaren Teils . . . II 484  
 —, mit Endzapfen II 484  
 —, mit feststehender Säule II 487  
 —, mit drehb. Säule II 486  
 —, mit Rollendrehscheibe II 488  
 —, m. Säulendrehsch. II 487  
 —, mit Walzendrehscheibe II 489  
 —, Portalkran . . . II 500  
 —, Schwenkwerk II 491  
 —, Veränderung der Ausladung . . . II 493  
 —, Wippausleger mit Rollenzug . . . II 494  
 —, Wippausleger mit Schraubenspindel II 495  
 —, Zweiradkran . . II 501
- Drehscheibe, Bau und Bauarten** . . . III 845  
 —, Bewegungswiderstand III 848  
 —, Drehvorrichtung III 847  
 —, Feststellvorrichtung III 848  
 —, geometrische Anordnung d. Gleise . . . III 842  
 —, Größe u. Anordnung III 845  
 — mit Strahlengleisen III 843\*  
 —, Parallelgleise, nach d. Scheibe zusammenlaufend . . . III 843  
 — und Weiche III 845  
 —, Unterbau . . . III 849
- Drehstrom** . . II 876, 983  
 —generator II 963, 967, 969  
 —motor . . . II 983  
 —motor, Umlaufzahlen II 984\*  
 —, Normalschaltung II 963  
 —, Regelung . . . II 969  
 —serienmotor . . . II 980  
 —verteilung . . II 979, 991
- Drehung** I 152, 154, 217  
 — einer Kurve . . I 120  
 — starrer Körper I 219, 221, 226  
 —arbeit . . . I 591\*  
 —sfedern . . . I 616\*  
 —sfestigkeit . . I 506, 588  
 — u. Biegung . . . I 605\*  
 — u. Schub . . . I 603  
 — u. Zug (Druck) I 605
- Dreieckdachbinder** III 108  
 —, ebenes . . . I 62  
 —fläche, Trägheitsmoment I 237  
 —, Fl.-Inh. . . . I 133  
 —, Kugel- . . . I 63  
 —, lenker . . . I 951  
 —, querschnitt, Drehmoment I 589, 591  
 —, querschnitt, Kern I 595  
 —, Schwerpunkt . . I 191  
 —, querschnitt, Trägheits- u. Widerstandsmom. I 553  
 —, Randspannung I 610
- Dreifachexpansionsmaschine** II 123\*, 125\*, 127, 128\*, 129\*, 132\*, 145, 762\*  
 —gelenkbinder . . . III 386  
 —gelenkbogen . . . III 111  
 —gelenkbogen (Drucklinie) I 132  
 —leiteranlage . . . II 958  
 —Drittelsenkrechte (kontinuierliche Träger) III 148  
 Drempel . . . III 577
- Drosselklappe, Widerstandszahlen** . . I 307  
 —spule . . . II 948, 976

Droßlung d. Dampfes I 471;  
II 117  
**Druck** auf Körper mit ge-  
wölbter Oberfläche I 529  
—beanspruchung, zulässige  
I 523\*, 524\*, 526\*; III 62  
—, bürgerlicher (Wasser-  
versorgung) . . . III 702  
— des Getreides II 568, 569\*  
—einheiten . . . I 412  
—, exzentrischer . . . I 598  
—festigkeit . . . I 505  
—festigk. gerad. Stäbe I 527  
—festigkeit von Eisenbeton-  
stützen . . . III 278  
—gasanlagen . . . II 289  
—, hydraulischer . . . I 283  
—, hydrostatischer I 266, 283  
—knopfsteuerung, elektr.  
II 421  
—, kritischer . . . I 431\*  
—messung . . . I 412  
—rohr . . . III 630  
—, Sättigungs- . . . I 430  
—, Schnitt-(Werkz.) II 347  
—spannung . . . I 505  
—steigerung infolge Ab-  
sperrung einer Rohr-  
leitung . . . I 307  
—stufen (Dampfturb.) II 231  
— u. Biegung . . . I 592  
— u. Drehung . . . I 605  
— u. Schub . . . I 604  
—wasseranfang . . . II 422  
—wasserförderer . . . II 563  
—wasserhebemaschine II 391  
—wasserhebezeug, Reibung  
I 247  
—welle (Schiff) . . . II 776  
**Druckluftbremse** III 883  
—förderer . . . II 561  
—gründung . . . III 251, 257\*  
—heber . . . II 597  
—hebemaschine . . . II 391  
Düker . . . III 574  
Dulac-Bauweise . . . III 287  
Dunstdruck . . . III 33  
Duplexpumpe . . . II 618  
Duraluminium . . . I 696  
**Durana-Gußmetall**,  
Festigkeitszahlen I 516\*  
—metall . . . I 696  
**Durchbiegung** I 564\* u. f.  
— d. einfachen vollwandig.  
Balkens . . . III 188  
— d. Schiffskörpers II 740  
—, Ermittlung mittels Seil-  
polygon . . . III 129  
— d. Fachwerkträger III 1034  
—, Kragträger- . . . III 1012  
—, Lotrechte (Statik) III 124  
—, Querschnittmittl. für  
Walzträger . . . I 577  
—, Träger kleinsten — I 554\*  
— vollwand. Träger III 1007

**Durchbiegung v. Trägern**  
I 550; III 103, 105, 139  
Durchfahrthöhe (Brücken)  
III 980  
**Durchfluß d. gefüllte**  
**Rohrleitungen**. All-  
gemeines über Wider-  
stände u. Fließzustände  
I 281  
—, Besondere Fälle u. Er-  
scheinungen . . . I 285  
—, Gerader Rohrstrang mit  
gleichförmigem Wider-  
stand . . . I 287  
—, Leitungen mit wechseln-  
den Höhenlagen, Quer-  
schnitten und Wider-  
ständen . . . I 282  
—, Widerstandszahlen für  
verschiedene Formen v.  
Rohrleitungen . . . I 292  
**Durchlaß (Hydr.)** I 272,  
276  
—, (Kanal) . . . III 574  
—, (Straßenbau) III 660, 685  
—, Eisenbeton- III 805, 306  
**Durchlässige Bauten**  
(Flußb.) . . . III 540  
—keit, magnetische II 859  
—keit von Bodenarten s. a.  
Versickerung I 316;  
III 709  
**Durchlaufender Träger** s. a.  
Balken a. mehreren  
Stützen . . . I 585, 587\*  
**Durchsickern d. Wassers d.**  
**Erdreich** . . . I 814;  
III 565, 703, 704\*. 738  
Durchstich . . . III 541  
Dürr-Kessel . . . II 796, 799\*  
**Düse**, Wasser- I 317; II 309  
—, Dampfturbinen- II 224  
**Dynamik luftförmiger**  
**Körper**, Allgem. I 847  
—, Bewegung wirklicher  
Flüssigkeiten . . . I 861  
—, Grundbegriffe, Lehrsätze  
d. theoretischen Hydro-  
dynamik . . . I 349  
—, Luftbewegung, Luft-  
widerstand . . . I 868  
**Dynamik starrer**  
**Körper** . . . I 195  
—, Bewegung des Massen-  
punktes, s. a. dort I 204  
—, Bewegung der Massen-  
punktgruppe s. a. dort  
I 214  
—, Grundbegriffe u. allge-  
meine Gesetze I 195  
—, Stofs s. a. dort I 241  
—, Trägheits- u. Zentrifugal-  
momente s. a. dort I 231  
**Dynamik tropfbar flüs-  
siger Körper**, s. a.  
Hydrodynamik I 268, 349

**Dynamik tropfbar flüs-  
siger Körper**, Allge-  
meines . . . I 268  
—, Ausfluß d. Öffnungen  
i. Gefäßen oder Stau-  
anlagen . . . I 270  
—, Durchfluß durch gefüllte  
Rohrleitungen I 281  
—, Fließen d. Wassers d.  
Erdreich . . . I 314  
—, Fließen in nicht gefüll-  
te Rohrleitg., Flüssen und  
Kanälen . . . I 310  
—, hydraulischer Druck u.  
Arbeitsvermögen aus-  
fließender Strahlen I 318  
—, Steighöhe und Sprung-  
weite freier Wasser-  
strahlen . . . I 317  
—, Widerstand v. Flüssig-  
keiten gegen bewegte  
Flächen u. Körper I 323  
**Dynamische Grund-  
gleichung** . . . I 165  
**Dynamomaschine** II 833  
—, Drehfeld, Drehstrom-  
motor . . . II 938  
— für konstanten Strom  
II 887  
—, Gleichstrom- s. a. dort  
II 883  
—, Induktion . . . II 867  
—, mechanische Anfor-  
derungen bei Parallelbe-  
trieb v. Wechselstrom-  
maschinen . . . II 922  
— m. gegenschalteter Ver-  
bundwicklung II 888  
—, Schaltung u. Regelung  
II 955  
—, Turbodynamo . . . II 930  
—, Wechselstrommaschine  
s. a. dort . . . II 924  
**Dynamometer** . . . II 327  
**Dyne** . . . I 166

## E.

**e** (Grundzahl d. nat. Log.)  
I 43\*, 48  
**e**, Reihenentwicklung I 57  
 $e^{\mu\alpha}$  . . . I 262\*  
**Ebene**, geeignete (Schiffs-  
hebewerk) . . . III 592  
— im Raume I 115, 116  
—, Schmiegungs- (Krumm-  
mungs-) . . . I 119  
**Economiser** . . . II 65  
**E-Eisen** . . . I 660\*  
— für Schiffbau . . . I 667\*  
Efeublattkurve I 114, 115  
**Effekt** . . . I 200  
—, elektrischer II 857, 864,  
873  
—, Ferranti . . . II 874  
—ive Spannung . . . II 871

- Effektiver Strom** . II 871  
 —Ivkraft . . . . . I 215  
 —kohlenlampen II 845, 846  
 —quotient . . . . . I 221
- Eigengewichte**, s. a. Gewichte, spezifische Gewichte . . . I 633\* u. f.
- , **Baustoffe u. Baukörper** . . . . . III 59  
 —, **Belag-Eisen** . . . I 662\*  
 —, **Beton** . . . . . I 723  
 —, **Dachverbände** . III 358  
 —, **Dächer** III 58, 418—421\*  
 —, **Decken** III 57, 408\* bis 413\*  
 —, **Doppel-T-Eisen** I 659\*  
 —, **Drähte** . . . . . I 640\*  
 —, **Eisenbeton** . . . III 273  
 —, **eiserner Brücken** III 65, 66, 67, 68, 70  
 —, **Erdarten** . . . . . II 514  
 —, **geschichteter Körper** . . . . . I 638\*  
 —, **Gewölbe** . . . . . III 57  
 —, **gewölbte Brücken** III 65  
 —, **Holz** . I 684\*, II 728\*, 725\*; III 89  
 —, **Kuppeldächer** . . III 190  
 —, **Profileisen** I 656\* u. f.  
 —, **Schiffe** . . . . . II 719\*  
 —, **Staugewichte** . I 638\*;  
 . . . . . II 703\*  
 —, **Straßenfahrw.** III 648\*  
 —, **T-Eisen** . . . . . I 661\*  
 —, **Turmspitzen** . III 192  
 —, **U-Eisen** . . . . . I 660\*  
 —, **Walzprofile** . I 656\* u. f.  
 —, **Winkelisen** I 656\*, 658\*  
 —, **Zahnräder** I 812, 813\*  
 —, **Z-Eisen** . . . . . I 662\*
- Eigenschaften verschiedener Stromsysteme**. Wahl, Regelung der Gleichstrommotoren . . . . . II 976  
 —, Wahl d. Systems. Regelung d. Wechselstrommotoren . . . . . II 979
- Eigenschwingung v. Massenpunkten** . . . . . I 207  
 —, **Eimerwerk** . . . . . II 596  
 —, **Einankerumformen** II 952
- Einfußfläche** . . . . . I 596  
 —, **linie** . . . . . III 94  
 —, **linie, parabelförmige** . . . . . III 142, 143\*, 163
- Einfriedigungen** . . . III 659
- Eingriffdauer (Zahnrad)** . . . . . I 791  
 —, **linie** . . . . . I 787  
 —, **sfeld** . . . . . I 798
- Einheitsgewichte f. Schiffbau** . . . . . II 720  
 —, **Wurzeln der** — . . . . . I 47
- Einhüllende Kurve** . . . I 97
- Einphasenmaschine** II 925  
 —, **Einsatzhärtung** . . . I 647
- Einschienenbahnkreisel** . . . . . I 230
- Einschneiden (Vermessungskunde)** . . . . . III 21
- Einspritzkondensator** II 210
- Einstauung (Bewässerung)** . . . . . III 608  
 —, **Einsteigeschacht** . . III 753  
 —, **Eintrittswinkel (Schiff b.)** . . . . . II 748\*
- Einzelantrieb, elektr.** III 497
- Eisen** . . . . . I 631, 634  
 —, **Bestandteile, Beimeigungen** . . . . . I 643  
 —, **blech s. a. Dampfkessel, Kessel** . . . . . I 654, 676  
 —, **draht, Gewicht** . I 640\*  
 —, **draht, Festigkeitszahlen** . . . . . I 521\*  
 —, **Einteilung** . . . . . I 644  
 —, **Erze** . . . . . I 643  
 —, **Erzeugung d. Roheisens** . . . . . I 648  
 —, **Festigkeitszahlen** . . . . . I 513\*, 521\*; II 334  
 —, **Formgebungsarbeiten** . . . . . I 652  
 —, **gewicht eiserner Brücken** . . . . . III 65, 66  
 —, **Glühfarben** . . . . . I 389  
 —, **Handelsfabrikate** I 653  
 —, **Härteskala** . . . . . I 645\*  
 —, **schmiedbares** — . I 650  
 —, **Schweiße** . . . . . I 651  
 —, **sorten** . . . . . III 983  
 —, **spez. Wärme** . . . I 394\*  
 —, **Thomas** . . . . . I 650  
 —, **Titan-, Festigkeitszahlen** . . . . . I 512\*  
 —, **zulässige Beanspruchung** . . . . . I 523\*, 524\*; III 62  
 —, **Zustandsänderungen u. Wärmebehandlg.** . I 646
- Eisenbahnachse** I 847;  
 . . . . . III 872, 907  
 —, **feder, zulässige Spannung** . . . . . I 524  
 —, **heizung** . . . . . III 934  
 —, **schiene s. Schiene**.  
 —, **schranke** . . . . . III 829  
 —, **schutzanlagen** . . III 830  
 —, **schwelle s. a. Schwelle**.  
 —, **schwelle, Eisenbeton-** . . . . . III 819  
 —, **wagenfeder** I 615; III 914, 930  
 —, **zug, größte Zuglänge u. Belastung** . . . III 770
- Eisenbahnbau, Bahnhofsanlagen s. dort** III 832  
 —, **Streckenbau s. dort** . . . . . III 786  
 —, **Vorarbeiten s. dort** . . . . . III 767
- Eisenbahnbau-Streckenbau** III 786  
 —, **Bahnkörper, Planum, Bahnkörper** . . . . . III 786  
 —, **Oberbau s. dort** III 795  
 —, **Schutzanlagen** . . III 830  
 —, **Unterbau s. dort** III 786  
 —, **Wegübergänge** . III 823  
 —, **Weichen u. Kreuzungen** . . . . . III 815
- Eisenbahnbau-Vorarbeiten** . . . . . III 767  
 —, **Arbeitsarten der Ausführung** . . . . . III 781  
 —, **Art u. Umfang** III 767  
 —, **ausführliche Vorarbeiten** . . . . . III 779, 780  
 —, **Ausführung der technischen** . . . . . III 780  
 —, **Flächen- und Massenermittlung** . . . III 781  
 —, **Form der allgemeinen Vorarbeiten** III 778, 780  
 —, **Form d. Entwurfs** III 778  
 —, **Geschäftsgang in Preußen** . . . . . III 767  
 —, **Gleisenfernung** III 775  
 —, **größt. Raddruck** III 778  
 —, **größte Zugstärken** . . . . . III 771  
 —, **Grundzüge für die** . . . . . III 767  
 —, **Kostenüberschlag**  
 —, **Krümmungshalbmesser** . . . . . III 776  
 —, **Linienvergleich** III 773  
 —, **Massenverteilung** III 784  
 —, **sachl. Vorsch.** III 774  
 —, **Spurweite, Normalprofile** . . . . . III 774  
 —, **Vorschriften** . . . III 773  
 —, **Widerstände, Zuglänge** . . . . . III 768  
 —, **Zuglänge und Belastung** . . . . . III 770  
 —, **zulässige Fahrgeschwindigkeit** . . . . . III 777  
 —, **zweckmäßigste Steigung** . . . . . III 772
- Eisenbahnbremse** III 877  
 —, **Bremsklötze** . . . III 877  
 —, **Bremsverzöger.** . III 886  
 —, **Bremswagenanzahl u. verteilung** . . . . . III 886  
 —, **Bremsweg** . . . . . III 885  
 —, **Durchgehende** — . III 882  
 —, **Gestänge** . . . . . III 879  
 —, **Gruppen-** . . . . . III 882  
 —, **Hand-** . . . . . III 881  
 —, **Zahnradb.** . . . . . III 966
- Eisenbahnbrücke s. a. Brücke, eiserne Brücken- u. Dachkonstrukt.**  
 —, **Allgemeines, Gesamtanordnung** . . . . . III 1054

**Eisenbahnbrücke,**  
 Belastung d. Lastenzüge  
 III 65, 71, 79, 81, 82  
 —, Brückenbahn . III 1057  
 —, Brücken i. Kurven  
 III 1089\*  
 —, Gewicht von Bogen-  
 trägerbrücken . III 70  
 —, Gewicht v. Balkenträger-  
 brücken . . . III 68  
 —, gewölbte III 1094\*—1096\*  
 —, Fahrbahn m. Kiesbett  
 III 1060  
 —, Konstruktionshöhe  
 III 1070, 1071\*  
 —, Querschwellenoberbau  
 III 1057, 1061\*—1063\*  
 —, Stützen zwischen Gleisen  
 III 1072  
 —, Walzträger i. Betondecke  
 III 1066, 1067\*

**Eisenbahnfahrzeuge,**  
 Allgemeines . III 870  
 —, Eisenbahn - Bremsen s.  
 dort . . . III 871  
 —, Eisenbahn - Triebwagen  
 s. a. dort III 921, 962, 964  
 —, Eisenbahnwagen s. dort  
 III 925  
 —, Leistung der — III 937  
 —, Lokomotiven u. Tender  
 s. dort . . . III 886  
 —, Lokomotiven (Zahnrad-  
 bahn) . . . III 958, 962  
 —, Radsätze . . . III 870  
 —, Unterhaltungskosten  
 III 938  
 —, Untersuchungszeit-  
 räume . . . III 937  
 —, Zug- u. Stofsvorrich-  
 tungen . . . III 873

**Eisenbahntriebwagen,**  
 Allgemeines . III 921  
 —, Dampftriebwagen III 921  
 —, Sammlertrieb w. III 924  
 —, Triebw. mit Verbren-  
 nungsmasch. . III 923

**Eisenbahnwagen** s. a.  
 Eisenbahnfahrz. III 925  
 —, Beleuchtung . II 854  
 —, Bezeichnung . III 927  
 —, Breiten- u. Höhenmaße  
 (Normalprofil) III 925  
 —, Gepäck- u. Postwagen  
 III 935  
 —, Güterwagen . III 936  
 —, Oberkasten u. Einrichtg.  
 d. Personenw. III 932  
 —, Radstand . . III 927  
 —, Untergestell . III 927  
 —, Wagen für besondere  
 Zwecke . . . III 937  
 —, Waggengattungen III 933\*  
 —, Werkstatt . . III 946  
 —, Widerstandszahl. III 769  
 —, Zahnradbahnw. III 968

**Eisenbahnwerkstätte,**  
 Allgemeines . III 937  
 —, Anordng u. Einrichtg.  
 d. Abteilungen. III 944  
 —, Desinfektionsanl. III 946  
 —, Dreherei . . . III 946  
 —, Gießerei . . . III 947  
 —, Hebevorrichtg. III 943  
 —, Kesselschmiede III 945  
 —, Kraftversorgung III 943  
 —, Lokomotivwerkst. III 944  
 —, Ort, Einteilung, Größe  
 III 938  
 —, Schmiede . . . III 947  
 —, Stellmacherei, Tischlerei,  
 Lackiererei, Sattlerei,  
 Putzerei, Klempnerei,  
 Abkchoerei . . III 948  
 —, Wagenwerkstatt III 946  
 —, Werkstattabteilungen,  
 Grundriffsarten III 939  
 —, Werkstattengebäude,  
 Zubehör . . . III 941  
 —, Werkzeugmacherei, We-  
 chenwerkst., Lehrlings-  
 werkst., Magazin III 949  
 —, Wohlfahrtseinrich-  
 tungen . . . III 950

**Eisenbahnwesen,** Ab-  
 kürzungsbezeichnungen  
 III 765  
 —, Bestimmen. üb. Bau u.  
 Betrieb d. Eisen. III 765  
 —, Eisen-Bahnbau s. dort  
 III 767  
 —, Reibungsbahnen III 765  
 —, Standseilbahnen s. dort  
 III 969  
 —, Zahnradbahnen s. dort  
 III 951

**Eisenbeton** . . . I 722  
 —, Anfangs- und Wärme-  
 spannungen . III 281  
 —, Berechnung der Bügel  
 III 292  
 —, Berechnung der Platten  
 III 270, 284, 285\*  
 —, Berechnung der Platten-  
 balken . III 270, 288  
 —, Berechnung d. Stabauf-  
 biegungen . . . III 293  
 —, Berücksichtigung d. Beton-  
 zugspannen. III 290  
 —, Eigengewicht . III 273  
 —, Elastizität u. Dehnungs-  
 fähigkeit . . . III 284  
 —, Festigkeit u. zuläss. Be-  
 anspruchung III 278,  
 282\*  
 —, Schub- u. Haftspannun-  
 gen . . . . . III 291  
 —, Theorie des . . . III 278  
 —, zulässige Beanspruchung  
 I 527; III 274, 277, 282\*

**Eisenbetonbau,** Allge-  
 meines . . . III 265

**Eisenbetonbau,**  
 Amtl. Best. für die Aus-  
 führung der Hochbau-  
 konstruktionen III 267  
 —, Anwendungen im Hoch-  
 und Tiefbau . III 297  
 —, Baustoffe . . . III 266  
 —, Behälter . III 304, 729  
 —, Bogenbrücken . III 312  
 —, Brücken m. Walzträgern  
 III 1066, 1067\*  
 —, Brunnen . . . III 247  
 —, Dächer u. Hallen III 300  
 —, Decken . . . III 276, 297  
 —, Gewölbe . III 272, 301  
 —, Grundformen . III 270  
 —, Grundlagen für die Be-  
 rechnung . . . III 277  
 —, Gründungen . III 303  
 —, Leitsätze f. d. statische  
 Berechnung . III 273  
 —, Platten- und Balken-  
 brücken . . . III 307  
 —, Röhren, Kanäle, Durch-  
 lässe . . . . . III 305  
 —, sonstige Anwendungs-  
 gebiete aus Hoch- und  
 Tiefbau . . . III 317  
 —, Spundwände . III 232  
 —, Stützen . III 272, 298  
 —, Stützen (Druckfestig-  
 keit) . . . . . III 278  
 —, Stützenberechng. III 294  
 —, Treppen . . . . . III 299  
 —, Wände u. Mauern III 302

**Eisenkonstruktionen**  
 III 358  
 —, Dachkonstruktionen  
 III 373  
 —, Dreigelenkbinder III 386  
 —, Kreuzverbände III 396  
 —, Nietungsvorsch. I 773  
 —, räuml. Fachwerk III 390  
 —, Reinigung und Anstrich  
 I 686  
 —, Schrauben- u. Nietver-  
 bindungen . . III 359  
 —, Stützen . . . . . III 364  
 —, Trägerlagen . . III 360  
 —, Treppen . . . . . III 406  
 —, Türen, Tore, Fenster  
 III 402  
 —, Zulage . . . . . III 358  
 —, zusammenhängende  
 III 397  
 —, Zweigelenkbinder  
 III 388

Eisen-Portlandzementanl.  
 Arbeitsdiagr. . III 474

**Eiserne Brücken** s. a.  
 Brücke . . . . . III 983  
 —, Allgemeines . . III 983  
 —, Baustoffe . . . . III 983  
 —, Eisengewicht III 65, 66  
 —, Haupttragwerke v. Trag-  
 werk . . . . . III 987

**Eiserne Brücken,**

- Lager . . . III 1035
- , Raumverbände III 1045
- , Verbindungsmittel

- III 983
- , Walzeisen . . . III 986

**Ejektor . . . II 598**

- , Asche- . . . II 563

**Elastische Dehnung I 504**

- s Gewicht, s. a. w-Gewicht.

- s Gewicht f. d. biegungs-

- festen Stabzug III 137

- Gewichte, Methode der

- III 127

- Kupplung . . . I 860

- Linie I 549, 564\* u. f.

- Linie d. einfachen voll-

- wändig Balkens III 138

- Nachwirkung (Festig-

- keitsl.) . . . I 505

- Querstützung . . I 538

- Schwingung . . . I 147

- r Stofs . . . I 242

- Steifigkeit . . . I 263

**Elastizität v. Flüssig-**

- keiten . . . I 265

- , Stofs . . . I 241

- sgleichungen f. stat. un-

- bestimmte Träger III 120

- sgrenze . . . I 504

- smals . . . I 503, 507\*

- smals für Beton III 284

- Elektra-Turbine . . II 245

**Elektrische Arbeit (Lei-**

- stung) . . . II 857, 864

- Beleuchtung s. a. Be-

- leuchtung, Lampe.

- Bremse . . . III 966

- Energieübertragung in

- Fabriken . . . III 497

- Hebemaschine . . II 893

- Heizung . . . III 444

- Kraftübertragung, s. a.

- Wasserkraftanlagen.

- Lokomotive (Zahnradb.)

- III 962

- r Aufzug . . . II 414

- r Einzelantrieb . III 497

- r Gruppenantrieb III 497

- r Leitungswiderstand

- II 862

- r Motorwagen . . II 824

- r Schmelzofen . . I 651

- r Widerstand II 857, 858

- s Bogenlicht II 842, 847

- s Glühlicht . . II 839, 841

- s Schweissverfahren I 686

**Elektrische Bahnen**

- II 1005

- , Fern-Vollb. . . II 1026

- , mit eigenem Bahnkörper

- II 1023

- , Städteverbindungs- und

- Ueberlandb. . . II 1023

- , Stadt-Schnellb. II 1025

**Elektrische Bahnen,**

- Straßenb. s. dort II 1005

- , Triebwagen . . III 921

- , Werkstätten . . II 1022,

- 1023; III 949

**Elektr.Fördermaschine**

- II 1029

- , Anordnung des elektr.

- Teiles . . . II 1030

- , Anordnung des mech.

- Teiles . . . II 1029

- , Antrieb d. Drehstrom-

- motor . . . II 1036

- , Antrieb d. Repulsions-

- oder Drehstromserien-

- motor . . . II 1037

- , Antrieb d. Steuerdynamo,

- Ausgleich d. Belastungs-

- schwankungen II 1032

- , Berechnungsdaten, Ge-

- schwindigkeitsdia-

- gramm . . . II 1040

- , Drehmomentdiagramm,

- Energieverbrauchsdi-

- agramm . . . II 1042

- , Gleichstrommotor,

- Ankeranlasserregelung

- II 1030

- , Gleichstrommotor,

- Leonardschaltg. II 1031

- , Leerlaufverbrauchs.

- II 1036

- , Leistungen u. Versuchs-

- ergebnisse ausgeführter

- Anlagen . . . II 1035\*

- , Leistungsdiagramm des

- Fördermotors . II 1041

- , Puffermaschine und

- Batterie . . . II 1043

- , Schwungradgew. II 1043

- , Sicherheitseinrichtungen

- II 1037

**Elektrische Leitung**

- II 985

- , Allgem. Gesichtspunkte

- für die Querschnittsbe-

- stimmung . . . II 985

- , Ausführung der Frei-

- leitungen . . . II 997

- , Berechnung d. Leitungs-

- querschn. . . II 990\*

- , Blanke Kupferleitung

- II 987

- , Geschlossene Leitungs-

- netze . . . II 995

- , Isolierte Kupferleitung,

- nicht unterirdisch ver-

- legte Kabel. . . II 987\*

- , Kabel, i. Erdbod. ver-

- legt . . . II 988, 989\*

- , Mehrere hintereinander-

- lieg. Abnahmestellen

- II 994

- , Stromentnahme nur am

- Endpunkt . . II 991

- Elektrizitätsmenge. II 857

**Elektrohängebahn II 591**

- lyse . . . II 864, 865\*

- magnetische Friktions-

- kupplung . . . I 870

- magnetische Wechsel-

- wirkungen . . . II 866

- seilbahn . . . II 592

- stahl . . . I 651

- stahlufen . . . I 651

- stahlverfahren . . I 651

**Elektromotor . . II 888**

- , Drehstrom II 938, 979

- , Gleichstrom II 916, 976

- für elektr. Hebemasch.

- II 393

- ische Gegenkraft II 865

- ische Kraft II 857\*, 858, 867

**Elektrotechnik, All-**

- gemeines . . . II 857

- , Deutsches Reichsgesetz

- betr. elektr. Mafsein-

- heiten . . . II 858

- , Dynamomaschinen und

- Motoren . . . II 883

- , Eigenschaften verschiede-

- ner Stromsysteme u.

- Wahl . . . II 976

- , Elektr. Bahnen s. dort

- II 1005

- , Elektr. Fördermaschinen

- s. dort . . . II 1029

- , Elektr. Leitungen s. dort

- II 985

- , Elektr. Mafseinheiten

- II 857

- , Grundgesetze . . II 861

- , Magnetismus . . II 859

- , Normalien f. Bewertg. u.

- Prüfg. elektr. Masch. u.

- Transformat. . . II 914

- , Schaltung u. Regelung d.

- Stromerzeuger . . II 955

**Elementararbeit . . I 196**

- arbewegung . . . I 154

- aräche . . . I 122

- e, chemische . . I 630\*

- e, galvanisches II 878, 879\*

**Elevator . . II 522, 543;**

- III 518

- , Dampfstrahl- . . II 598

- , pneumatischer . II 561

**Eliminationsverfahren**

- (Gleichung) . . . I 51

**E-Linie, Culmannsche**

- (Erddruck) . . . III 201

**Ellipse (Gleichg.) I 98, 99**

- , Abschnittschwerpunkt

- I 193

- , Flächenträgheitsmoment

- I 238

- , Konstruktion . . I 101

- , Querschnittsdrehmoment

- I 589, 591

- , Randspannung . . I 610

- , Trägheits- u. Wider-

- standsmoment . . I 555

**Ellipse, Umfangsträg-**  
heitsmoment . . . I 237  
— nlenker . . . I 950  
**Ellipsoid** . . . I 123, 140,  
III 1, 47, 49  
—, Schwerpunkt I 194, 195  
—, Trägheitsmoment I 240  
Elliptisches Zahnrad I 799  
Emaile . . . I 684  
Emissions- (Strahlungs-)  
vermögen . . . I 409  
Emscher-Brünnen . III 760  
Endgeschwindigkeit (Fall-)  
I 1030\*  
**Energie, kinetische** I 198  
—, potentielle . . . I 199  
Englischer Dachbinder  
III 108  
Enkegebläse . . . II 651  
Enteisung d. Wassers  
III 719  
Entfernungsmesser III 35  
Entleerungsvorrichtung,  
Kessel- II 75, 80, 803;  
III 903  
Entölung des Niederschlag-  
wassers . . . II 212  
**Entropie** I 414, 417  
— d. Wasserdampfes  
I 434\*, 436\*  
—diagramm . . . I 416  
Entstaubungsanlage III 508  
**Entwässerung, Eisen-**  
bahn . . . III 787  
—, Fabrik- . . . III 503  
—, landwirtschaftliche  
III 599, 603  
—, Städte- s. Städteentwä-  
serung.  
— v. Landstraßen III 653  
Envelope . . . I 97  
Entzündungstemperatur II 248  
Epizykloide . . . I 108  
**Erdarten, Gewicht** II 514\*  
— beschleunigung I 43\*, 164  
— bogen . . . III 238  
— en . . . I 698  
— förderung III 792\*, 793\*,  
794  
— gewinnung, Kosten  
III 791\*  
— öl, Heizwert . . . I 479  
**Erdarbeiten** . . . III 790  
— a. Kanälen . . . III 570  
—, Flächen- und Massen-  
**Erdruck** . III 243, 1092  
—, Coulombsche Theorie  
III 200  
—, Pressungen im Stütz-  
mauerquerschn. III 208  
—, Rankinesche Theorie  
III 208  
— ermittelung . . . III 781  
**Erde, s. a. Rotations-**  
ellipsoid . . . III 1, 49  
—, Achsen . . . III 1

**Erde, mittlere — Kugel**  
III 1  
—, Besselsche Elemente  
III 1  
—, Krümmung . . . III 27  
**Erdreich, Aufnahme von**  
Wasser . . . III 704\*  
—, Böschungswinkel III 201\*  
—, Durchlässigkeit III 709  
—, Fliesen des Wassers  
durch — . . . I 314  
Erg . . . I 196  
Ergin . . . II 251  
**Erhaltung der Energie,**  
Gesetz der — . . . I 193  
— d. Masse, Gesetz der —  
I 165  
Erregerschwingung I 207  
**Erwärmung d. Dynamo-**  
maschine . . . II 912, 913  
— d. Wassers l. Wasserleitg.  
III 734  
**Erzwungene Bewegung**  
I 210, 215  
— Schwingung . . . I 205  
**Estrich** . . . I 709, 712  
—, Zement- . . . I 720  
Eternit . . . I 705  
Etmal . . . II 740  
**Eulersche hydrodynam.**  
Grundgleichungen I 263  
— hydrostatische Grund-  
gleichungen . . . I 265  
— Knickformeln . . . I 533  
— Kreisgleichungen I 226  
— r Satz (Normalschn.) I 122  
Evansscher Lenker I 950  
Evolute . . . I 95  
**Evolvente** . . . I 95, 96  
—, Huygenssche Traktorje  
I 113  
—, Kreis- . . . I 110  
— nverzahnung . . . I 790, 793  
— nverz., Reibung . . . I 259  
**Expansion in Schiffs-**  
maschinen . . . II 761\*  
— kurven d. Dampfmasch.  
I 444  
— — vollkommener Gase  
I 423, 426  
— — von Dämpfen I 439  
— slinie (Dampf.) II 137  
— ssteuerung . . . II 160  
**Explosionsgrenzen** I 493\*  
— motor, s. Verbrennungs-  
motor  
**Exponent, Gas-** I 424, 425\*  
— ialreihen . . . I 57  
**Exzenter** . . . I 939  
—, Relativ- . . . II 162  
—, resultierendes . . . II 161  
— stange . . . I 940  
— umsteuerung . . . II 182  
**Exzentr. Zug- u. Druck** I 598  
**Exzentrität der Kegel-**  
schnitte . . . I 93, 100

Exzeffs, sphärischer I 64,  
III 43

## F.

**Fabrikanlagen s. a. Eisen-**  
bahnwerkstätte III 466  
—, Allgemeines für d. Ent-  
wurfsbearbeitung III 463  
—, Arbeitsdiagramme  
III 472  
—, Beleuchtung . . . II 853;  
III 502  
—, Be- u. Entwässerung  
III 502  
—, Dächer . . . III 476  
—, Einzelheiten . . . III 476  
—, Eisenbahnwerkstätte  
III 937  
—, Energieverteilung III 495  
—, Entstaubungsanlag. III 503  
—, Feuerschutz . . . III 503  
—, Fußböden . . . III 493  
—, Hallen . . . III 385  
—, Heizung . . . III 458, 498  
—, Kanäle . . . I 314  
—, Kranstützen . . . III 486  
—, Lichtstärke II 852\*, 853  
—, Lüftung . . . III 501  
—, Schutzvorricht. III 505  
—, Tagesbeleuchtung III 478  
—, Tore, Türen . . . III 493  
—, Treppen . . . III 491  
—, Wahl d. Bauplatzes  
III 468  
—, Wahl d. Fabrikortes  
III 466  
—, Wohlfahrtseinrichtungen  
III 511  
**Fachwerk** . . . I 163, 179  
—, Arbeitsgleichung  
III 117, 118  
—, Formänderungsarbeit  
III 139, 141  
—, graph. Bestimmung d.  
Stabkräfte . . . I 185  
—, Holz- . . . III 344  
—, Satz d. 3 Pole (Mechanik)  
I 163  
—, Stablängenänderg., Kno-  
tenpunktverschlebg. III 117  
—, stat. unbestimmt. I 176  
—, träger, statisch unbe-  
stimmter s. a. Träger  
III 117, 119  
—, trägersysteme . . . III 1014  
—, wand . . . III 353  
—, wand, eiserne . . . III 399  
**Fachwerkbalken** s. a.  
Dachbinder, Brücken-  
u. Dachkonstruktionen,  
Brückenbau, Eisenbahn-  
brücken, Tragwerk I 532  
—, auf 3 Stützen . . . III 166  
—, Dreigelenkbogen III 111  
—, einfacher, Konstr.  
III 1014

**Fachwerkbalken,**

- Englischer (Dreieck-) Dachbinder . . . III 108
  - , Formeln für Dreiecksysteme . . . III 89
  - , Gerberscher III 99, 1010, 1017
  - , Kranträger II 475, 481; III 110
  - , Parabelträger III 103, 378, 1035
  - , Parallelträger III 78, 102
  - , Pauliträger . . . III 105
  - , Polonceau-Binder III 106; 398
  - , Schwedlerträger III 105
  - , Sichelträger III 106, 170
  - , Spannkraft . . . III 87
  - , Spannkraftermittlung mittels Cremonaschen Kräfteplanes . . . III 94
  - , Spannkraftermittl. m. Einflußlinien . . . III 94
  - , Spannkraftermittl. nach d. Ritterschen Verf. III 87
  - , Ständerfachwerk III 89
  - , Strebenfachwerk III 91
  - , versteifte Kette III 115
  - , Verwertung der  $M_2$ -Linie d. einfach. Balkens III 101
  - , zeichnerische Bestimmg. d. Spannkraften infg. ein. bewegl. Gruppe v. Einzel-lasten . . . III 93
  - , Zeitdächer III 109, 349, 395
- Fachwerk, räumliches,**  
Ausführung . . . III 390
- , Führungsgestelle d. Gasbehälter . . . III 191
  - , Kraftzerlegung i. Raum III 185
  - , Kuppeldächer . . . III 188
  - , Turmspitzen . . . III 192
- Fahrbahn, Landstr.-** III 660
- — städt. Strafen III 690
  - — v. Eisenbahnbr. III 1060
  - korb . . . . . II 429
  - schacht . . . . . II 436
  - schalter . . . . . II 1020
  - stuhl, s. Aufzug.
  - wasserverhältn. deutscher Wasserstraßen III 569\*
  - widerstand (Automobilb.) II 806, 807\*
  - —, Eisenbahn- . . . III 768
  - Fahrenheit-Therm. I 388\*
- Fahrtgeschwindigkeit**  
v. Flußschiffen III 561
- v. Straßenbahnen II 1019
  - , Zahnradbahn- . . . III 968
  - , zuläss. (Eisenb.) III 778
- Fahrzeuggestaltung** I 158
- , Eisenbahn-, s. dort.
  - maschine, s. a. Verbrennungsmotor II 804, 810

**Fahrzeug, Strafen-**

- III 645\*
  - , Eigengewicht III 648\*
  - Fakultät . . . . . I 45
- Fallbeschleunigung**  
I 43\*, 164, 1080\*
- bremse . . . . . II 418
  - , freier . . . . . I 204, 1080\*
  - geschwindigkeit . . . I 204, 1080\*
  - hammer . . . . . II 335
  - höhe . . . . . I 204, 1080\*
  - höhe (Hydr.) . . . . I 283
  - rohr . . . . . II 559
- Fällmittel f. Abwässer-**  
reinigung . . . . . III 760
- Fangedamm** . . . . . III 234
- keil . . . . . II 418
  - vorrichtung an Aufzügen II 416, 427
- Farad** . . . . . II 857
- Faradaysche Scheibe** II 889
- s elektrolytisches Gesetz II 864, 865\*
- Farben** . . . . . I 686
- , Gewichte . . . . . II 724\*
  - verschiedener Lichtquellen . . . . . II 850
- Faschine** . . . . . III 541
- Fafs** . . . . . I 140
- Feder, Automobil-**  
II 814, 821
- , Biegungs- . . . . . I 613\*
  - , Drehungs- . . . . . I 616\*
  - , Eisenbahntrag- I 615; III 914, 930
  - , Festigkeit . . . . . I 612
  - hammer . . . . . II 335
  - , Kegelstumpf- . . . I 618\*
  - , Puffer- . . . . . III 876
  - regler . . . . . I 1025\*
  - rohr, kupfernes . . . I 970\*
  - , Schwingungszeit I 613
  - stahl, Chromsilicium- I 512\*
  - , zuläss. Spanng. I 524
  - , Straßenzug- . . . III 648
  - ungsarbeit . . . . . I 612
- Fehler, Beobachtungs-**  
I 86; III 49
- fortpflanzungsgesetz III 54
  - gleichungssystem (Vermessungskunde) III 50
  - grenzen (Vermessungsk.) III 30
  - grenzen, amtlich zulässige III 4, 19, 25
- Feinbleche** . . . . . I 676\*
- lehre . . . . . I 642\*
- Feldinstrument** . . . III 35
- magnet, Gleichstrommaschine- II 899, 909
  - , magnetisches II 859, 866
  - maß . . . . . I 1043\*
  - stärke . . . . . I 195; II 859
  - Felgenbreite . . . . . III 647\*

**Fellows Stirnräderstofs-**

- maschine . . . . . II 371
- Fenster** III 329, 402, 403, 478
- , Gewicht . . . . . II 727\*
  - glas . . . . . II 725
- Fernheizung** . . . . . III 461
- rohr . . . . . III 12, 36
  - übertragung der Wasserkraft . . . . . III 638
- Ferranti-Effekt** . . . . . II 874
- Festigkeitslehre, Allgemeines u. Versuchswerte** I 502
- , äquatoriale Trägheitsmom. u. Widerstandsmom. üblicher Querschnitte I 552\* u. fgd.
  - , Biegungsfestigkeit I 540
  - , Drehungsfestigkeit I 588
  - , Elastizitäts- und Festigkeitsz. I 507\*, 513—522\*
  - , Erklärungen . . . . . I 502
  - , Festigkeit einfach gekrümmter Stäbe I 608
  - , Festigk. d. Federn I 612
  - , Festigkeit der Platten u. Gefäße . . . . . I 620
  - , Festigkeit gerader Stäbe I 527
  - , Knickfestigkeit I 533
  - , Schubfestigkeit I 538
  - , Temperatureinfluss auf d. Festigkeit I 513\*, 515\*
  - , Träger a. mehreren Stützen . . . . . I 585
  - , Träger m. unverändl. Querschn. I 564\* u. fgd.
  - , Träger v. gleichem Widerstand geg. Biegung I 580\*
  - , Träger v. kleinst. Biegungswinkel a. Ende u. v. kleinst. Durchbiegung . . . I 584\*
  - , Zug- u. Druckfestigkeit I 527
  - , zuläss. Spanngen. f. d. Hochbau I 524\*; III 62
  - für d. Maschinenbau I 522, 523\*
  - , zusammengesetzte Festigkeit . . . . . I 592
- Festigkeitszahlen** I 507\*, 513\*
- , Eisenbeton . . . . . III 278
  - (Metallbearbeitg.) II 334, 343, 346
- Festigkeit, zusammengesetzte, Beanspruchung d. Normalspannung** I 592
- , Beanspruchung zug- u. druckfester Körper I 592
  - , Biegung u. Drehung I 605
  - , Biegung u. Schub I 604
  - , Einflußfläche . . . . . I 596
  - , exzent. Beanspruchung nur druckfest. Körper I 601

**Festigkeit, zusammengesetzte, Schub u.**  
 Drehung . . . I 603  
 —, Spannungsermittlung . . . I 593  
 —, Zug- (Druck) u. Biegung . . . I 592  
 —, Zug (Druck) u. Drehung . . . I 605  
 —, Zug (Druck) u. Schub . . . I 604

**Festpunkt** (kontinuierlich).  
 Träger III 147, 148, 159  
 — (Trägheitsellipse) I 235

**Fett** . . . . . I 684  
 —, Schmier- . . . . . I 746  
 —endach III 198, 345, 373  
 —gas . . . . . II 838

**Feuchtigkeit, Luft-** I 423  
 —, relative I 421; III 424

**Feuerbrücke** . . . . . II 46  
 —büchse . II 102; III 891  
 —büchskessel . . . . . II 13  
 —geschränkt . . . . . II 44  
 —löscheinrichtung III 942  
 —, Fabrik- . . . . . III 503  
 —schutz (Eisenbahn) III 831  
 —sichere Wand . . . . . III 327

**Feuerung, Dampfkessel**  
 II 12, 40, 793, 795  
 —, Flüss. Brennstoffe II 798  
 —sarten, Kessel- . . . . . II 46  
 Feldrohr . . . . . II 28

**Filter** I 315; III 716, 717  
 —, Abwässer- . . . . . III 761  
 —becken . . . . . III 717  
 —gang . . . . . III 707  
 —geschwindigkeit III 718  
 —, Luft- . . . . . III 433  
 —sand . . . . . III 717\*  
 —, Schnell- . . . . . III 719

**Filzplatte, Asphalt-** I 733  
**Finksche Steuerung** II 188

**Fixpunkt** (kontinuierliche Träger) . . . III 147, 159

**Flacheisen** . . . . . I 655  
 —, Gewichtstafel . . . . . I 670\*

**Fläche, Führungs-** I 212  
 —, Haupt- . . . . . I 123  
 —, krumme . . . . . I 121  
 —, Trägheitsmom. I 233, 237  
 —, wirksame . . . . . I 593  
 —nberechnung. (Schiffb.) II 656  
 —ndruck d. Getreides II 568  
 —ndruck s. a. Auflagerdruck, Leibungsdruck  
 I 846\*, 949; II 278, 280, 335, 470, 774\*  
 —ndruck (Kollektorbürsten) . . . . . II 908  
 —nermittlung (Eisenbahn-  
 bau) . . . . . III 751  
 —ngeschwindigkeit I 203  
 —nhelle . . . . . II 828  
 —nih. ebener Gebilde I 133  
 —nihalt (Kurve) . . . . . I 97

**Flächeninhaltsermittlung**  
 III 23  
 —nmafs . . . . . I 1050\*  
 —nnivellement . . . . . III 30  
 —nprofil (Eisenbahnbau) . . . . . III 784  
 —nprofil (Kanalbau) III 563  
 —nsatz . . . . . I 203  
 —nschwerpunkte I 188, 191  
 —nteilung . . . . . III 26

**Flammrohr** II 8, 36, 95  
 —kessel . . . . . II 6\*, 8

**Flanschen-Formstücke**  
 I 959, 961\*

**Flanschverbindung** I 957,  
 958, 964, 974, 975, 979, 980

**Flaschenzug** . . . . . II 887\*

**Flachtzaun** . . . . . III 542

**Fliegen** . . . . . I 355

**Fließfen d. Wassers durch Erdreich s. a. Versickerung** . . . . . I 814  
 — in nicht gefüllten Rohrleitgn., Flüssen, Kanälen . . . . . I 310

**Fließgrenze (Festigkeitsl.)**  
 I 504

**Floßholzförderung** II 518

**Flügelradmesser** II 324  
 —theorie . . . . . I 355  
 —, Widerstand . . . . . I 379

**Flußbreite** . . . . . III 546  
 —deich . . . . . III 611

—eisen, Amtl. Gew. III 60  
 —eisen, Festigkeitszahlen  
 I 507\*, 513\*, 521\*, 535\*  
 —eisen, zulässige Beanspr.  
 I 523\*, 524\*, 536; III 62, 76  
 —eisenplatte, Gewicht I 641\*  
 —mündung . . . . . III 594  
 —stahl, Festigkeitszahlen  
 I 507\*, 521\*, 535\*  
 —stahl, zulässige Beanspr.  
 I 523\*, 536; III 63  
 —stahlplatte, Gewicht I 641\*

**Flußbau, Allgemeines**  
 III 532  
 —, Bändigung der Gebirgsflüsse . . . . . III 545  
 —, Baustoffe, Baubestandteile . . . . . III 541  
 —, Bewegung d. Wassers in Krümmungen . . . . . III 536  
 —, Flößerei . . . . . III 558  
 —, Flussspaltgen., Vereinigungen (Mündgen) III 541  
 —, Hafen . . . . . III 556  
 —, Kanalisierung d. Flüsse . . . . . III 547  
 —, Linienführung . . . . . III 537  
 —, Mittel z. Regelg. III 538  
 —, Musterquerschnitte . . . . . III 533, 534, 535  
 —, Schleusenanlagen III 554  
 —, Verbesserung. und Regelg. schiffb. Flüsse III 546

**Flußbau, Vorarbeiten**  
 III 532  
 —, Wehranlage . . . . . III 550  
 —, Wildbachverbauung . . . . . III 544

**Flüssige Brennstoffe**  
 I 438\*, 499; II 793  
 —, Feuerung. II 49, 793

**Flüssigkeit, rotierende**  
 I 269  
 —sbehälter, s. Behälter, Hochbehälter.  
 —smafs . . . . . I 1043\*, 1051\*  
 —smessung . . . . . I 837  
 —, Spez. Gew. . . . . I 637\*  
 —, Zähigkeit I 361, 362\*, 400\*

**Flutkurve, —fläche (Entwässerung)** . . . . . III 739  
 —welle, Geschwindigkeit . . . . . III 595

**Förderband, —gurt** II 538  
 —gefäßs . . . . . II 405, 447  
 —haspel . . . . . II 443, 444\*  
 —kette . . . . . II 552  
 —körbe . . . . . II 447, 448\*  
 —mittel für Luftdruckgründung . . . . . III 253  
 —rinnen . . . . . II 543  
 —rohr . . . . . II 537  
 —seil . . . . . I 892\*  
 —wagen . . . . . II 448\*

**Fördermaschine, Berechnung** . . . . . II 453  
 —, Bobine . . . . . II 450, 1030  
 —, Bremse . . . . . II 465  
 —, Dampf — m. Maschinenantrieb ohne Uebersetzung . . . . . II 447  
 —, Dampfkabel (Haspel) . . . . . II 444\*  
 —, Dampfverbrauch II 459  
 —, Dampfzylinder . . . . . II 470  
 —, Einzelheiten . . . . . II 470  
 —, elektr. s. Elektr. Fördermaschinen . . . . . II 1029  
 —, Förderarten, Seilausgleichung . . . . . II 449  
 —, Fördergefäße II 447, 448\*  
 —, Göpel u. Haspel II 442  
 —, Kegeltrommel II 451, 1029  
 —, Kleinere Dampf . . . . . II 443, 445  
 —, Kondensation . . . . . II 458  
 —, Seile u. Seilgeschwindigkeit . . . . . II 448  
 —, Seilscheibe . . . . . II 472  
 —, Sicherheits- u. Regelvorrichtungen . . . . . II 468  
 —, Stauvorrichtung II 458  
 —, Steuerung . . . . . II 461  
 —, Treibscheiben II 452, 472  
 —, Triebwerk . . . . . II 470  
 —, Trommeln II 449, 470  
 —, Ventile . . . . . II 463  
 —, Vorgelegemaschinen . . . . . II 442

**Fördermaschine,**  
Zwillings-, Zweizylinder-  
Verbund-, Zwillings-  
tandemaschine  
II 456, 457

**Fördermittel für stückige,  
körnige und mehlförmige  
Schüttstoffe** II 513, 514

—, Bahnen . . . II 515

—, Beliebig gerichtete  
Dauerförderung II 552

—, Beliebig gerichtete För-  
derung . . . II 531, 552

—, Dauerförderung II 534

—, Drehkrane . . . II 531

—, Eimerkettentrocken-  
bagger II 555, 559\*

—, Einzelförderung in klei-  
nen Mengen . . . II 514

—, Elevator . . . II 522, 548

—, Förderrinnen . . . II 543

—, Förderrohre . . . II 537

—, Geschwindigkeit wäge-  
rechter Förderer II 543\*

—, Gurtförderer . . . II 538

—, Hochbahn-(Brücken-)  
krane . . . II 531

—, Kratzer . . . II 545

—, Kurvenkipper . . . II 529

—, Rollenförderer . . . II 543

—, Rutschen, Fall- oder  
Laufrohre . . . II 559

—, Saug- und Druckluft-  
förderer . . . II 561

—, Saug- u. Druckwasser-  
förderer . . . II 563

—, Schnecken . . . II 534

—, Schwebbahnen II 521

—, Senkrechte oder stark  
geneigte Dauerförderung  
II 548

—, senkrechte oder stark  
geneigte Förderg. II 521

—, Seilbahnkrane . . . II 533

—, Seil- und Kettenbahnen  
II 516

—, Spiralen . . . II 535

—, Sufessche Fördervor-  
richtung . . . II 537

—, wagerechte od. schwach  
geneigte Dauerförderung  
II 534, 543\*

—, wagerechte od. schwach  
geneigte Förderg. II 514

—, Waggonkipper . . . II 525

**Förderung, Erd-**

—sarten . . . II 792\*, 793\*, 794

—sarten . . . II 449

**Formänderung, elastische**

— gerader Träger I 549

—en, Gegenseitigkeit der  
III 121

**Formänderungsarbeit**

— im Stabwerk . . . III 140

**Formänderungsarbeit,  
Prinzip der kleinsten**

III 139

**Formeisen f. Schiffb. I 668\***

—faktor (Wechselstr.) II 871

—maschinen, Sand- II 332

—stücke f. Rohrleitungen  
I 958\*—961\*

—, unbestimmte — eines  
Bruches . . . I 69

—verhältnisse von Schiffen  
II 663, 664\*

—widerstand eingetauchter  
Körper . . . I 365

Format, Stein- I 707 III 321

Förstersche Decke III 412

Foucault-Ströme . . . II 860

Fouriersche Reihen I 128

Francis-Turbine . . . II 297,  
300, 302

**Fräser . . . II 347, 365**

—maschinen . . . II 364

—maschinen, Holz- II 381

—maschine, Räder- II 370

**Freibord . . . II 655, 691**

—e Achse . . . I 223

—er Fall . . . I 204, 1080\*

—lager . . . II 571, 572\*

—tragende Wände III 327

Fremderregung (Gleich-  
stromdyn.) . . . II 885

**Frequenz . . . I 123**

—, Kreis- . . . I 205

—, Schwingungs- . . . I 205

— (Wechselstr.) II 871, 933,  
934\*

**Friktionskupplung s. Rei-  
bungskupplung.**

—scheibe . . . I 813; II 387

Fuchs (Heizkanal) . . . II 53

**Führungsfäche, -Linie**

I 212

—kraft . . . . . I 214

—rolle, Tangential-(Gas-  
behälter) . . . III 191

**Fuhrwerk, Strafsen-**

III 645\*

— — Arbeitsleistung der  
Zugtiere . . . III 651

— — Arten, Hauptabmes-  
sungen . . . III 645

— — bauliche Einzelheiten  
III 646, 647\*

— — Bewegungswiderst. u.  
Zugkraft III 648, 649\*

— — Gewicht III 67, 648\*

**Füllrumpf . . . II 575**

—ung, Dampfmasch.-

— II 117, 121\*

—verfahren (Abwasserreini-  
gung) . . . III 761

Fundamentplatte, Eisen-  
beton . . . . . III 303

**Fundierung s. Grundbau.**

— v. Entwässerungskanälen  
III 753

**Funkenbildung (Strom-  
wender) II 899, 902, 905**

—fänger . . . . . III 901

—freie Kommuterg. II 905

—spannung . . . II 902, 905

**Funktion, Hyperbel- I 30\*,**

32\*, 52, 65

— m. 1 Veränderlich. I 69

— m. 2 Veränderlich. I 70

—, irrationale . . . I 74

—, Kräfte- . . . . . I 198

—, Kreis- I 26\*, 52, 57, 58, 66

—, periodische . . . I 129

—, Potential- . . . I 199

—, rationale . . . . . I 73

—, Strömungs- . . . . . I 84

—, transzendente . . . I 76

—, unentwickelte . . . I 70

—, zyklometrische s. Kreis-

**Fußboden, Fabrik-**

—gängerbrücke . III 65, 68

—maß I 1042\*, 1046\*, 1048\*

—pfund . . . . . I 1057\*

—weg . . . . . III 679

**G.**

g (Erdbeschl.) . . . I 43\*, 164

Gabbro . . . . . I 698

**Galleisches Gesetz d.**

— Schwere . . . . . I 164

— Trägheitsgesetz . . . I 164

— Galische Kette . . . . . I 889\*

**Galvanisches Element**

II 873, 879\*

Gangspill . . . . . II 710\*

Gartenstadt . . . . . III 698

**Gasanalysator . . . II 326**

—, Atomzahl. I 417, 418\*

—, Ausdehnung d. Wärme  
I 393

—, Bewegung in Rohr-  
leitungen . . . . . I 466

—behälter, Führungsgestüt  
III 191

—behälter, Nietung I 780

—dichte . . . . . I 418\*, 494\*

—, Druck-anlage . . . II 289

—, Entropie . . . . . I 417

—, Exponent zweiatomiger  
Gase . . . . . I 424, 425, 426

—feuerung . . . . . II 44, 48

—gemisch, Leucht-, Wärme-  
theoretische Werte  
II 254

—gemisch, Verbrennung  
I 493, 494\*

—generator . . . . . II 289

—glühlicht . . . . . II 836, 855\*

— — Gasverbrauch II 852\*

—heizung . . . . . III 443

—, Kohlenwasserstoff-,  
thermodyn. Werte  
I 418\*

—konstante . . . . . I 416, 418\*

**Gas**konstante v. Mischungen I 420  
 —, Kraft—anlage II 288  
 —lampe . . . II 834, 836  
 —leitung . . . I 466; II 288  
 —, Leucht- I 492\*, 493\*, 494\*, 496\*; II 248, 251\*, 836  
 —, Löslichkeit in Wasser I 399\*  
 —Luftgemisch, Explodierbarkeit . . . I 492  
 —maschine, s. a. Verbrennungsmotor, Kreisprozess . . . I 427, 428\*  
 —messer . . . I 383  
 —mischung (Thermodyn.) I 420; II 254  
 —, Molekulargewicht I 416, 418\*  
 —motor, s. Verbrennungsmotor.  
 —, Motoren- . . . II 248  
 —rohr . . . . . I 966\*  
 —rohrgewinde . . . I 767\*  
 —, Saug—anlage II 289  
 —, spez. Gew. I 418\*, 638\*  
 —, spez. Wärme I 416, 418\*  
 —strömung . . . I 458  
 —untersuchungsapparate II 326, 327  
 —, unvollkommenes I 440  
 —, Verbrennung I 489, 493, 494\*  
 —, Wasser-, Luft-, Azetylen-, Oel-, Fett- . . . II 838  
 —, Zähigkeit I 400, 401\*  
**Gas, vollkommenes, allgemeines** . . . I 416  
 —, Ausflus . . . I 460  
 —, Besondere Arbeitsprozesse . . . I 426  
 —, Drosselung . . . I 472  
 —, Expansionskurven I 428  
 —, Mischungen . . . I 420  
 —, spezifische Wärme I 417\*, 418\*  
 —, Zustandsänderung I 423  
 Gattersäge . . . II 877  
**Gaußsche Formeln** (Kugeldreieck) I 64  
 —r Satz (Vektorrechn.) I 128  
 Gay-Lussacsches Gesetz I 342, 416  
 Gebirgsfußabstufung III 545  
**Gebläse** . . . . . II 625  
 —, Dampfstrahl- . . . II 658  
 —, hydraul. Kompressor II 653  
 —, Kapsel- . . . II 651, 652\*  
 —, Kolben- s. a. dort II 639  
 —, Rad- . . . . . II 626  
 —, Schraubenrad- . . . II 635  
 —, Turbo- . . . . . II 636  
 —, Unterwind- . . . II 658

Gebrauchsmuster, Gesetz betr. Schutz von — n I 1076  
**Gebührenordnung** f. Architekten u. Ingenieure . . . I 1060  
 — für Zeugen u. Sachverständige . . . I 1078  
**Gedämpfte Schwingung** I 205  
**Gefährlicher Querschnitt** I 543, 565\*  
**Gefälle** s. a. Steigung.  
 —bahn . . . . . II 518  
 —, Eisenbahn- III 772, 777  
 —gewinnung . . . III 634  
 —, Kanalisationsleitungs- III 749\*  
 —, Schüttrinnen- III 560\*  
 —, (Wasserkraftanlage) III 626  
 —wechsel (Eisenb.) III 777  
**Gefäßs, Festigkeit** . . . I 620  
**Gefriergründung** III 260  
 —punkt . . . . . I 396, 397\*  
**Gegengewicht, Lokomotivrad-** . . . . . III 909  
 —seitigkeit der Formänderungen . . . III 121  
 —seitigk. d. Spanngen. I 596  
 —strom (Wärme) . . . I 407  
 —stromkondensation II 208  
**Gegliederte Stützen, Knickfestigkeit** . . . I 538  
**Geländeaufnahme** s. Triangulation.  
**Gelenkkette** . . . . . I 889\*  
 —lager (Hochbau) III 864  
**Gelochtes Blech** . . . I 676  
**Genauigkeit** v. Beobachtungen . . . III 50  
 —skoeffizient (Beobachtg.) I 86  
 —smasse (Vermessungsk.) III 3, 19, 30, 37, 48, 50  
**Geneigte Ebene** (Schiffshebewerk) . . . . . III 592  
**Generatorgas** I 494\*, 495\*, 499; II 289  
 —gas, Endtemperatur und Druckzunahme bei Verbrennung im geschloss. Raum . . . . . I 495  
 —gas, Verbrennung I 492\*, 494\*, 495\*  
 —senkbremse . . . . . II 399  
 Geodäsie s. Vermessungskunde . . . . . III 1  
 Geoid . . . . . III 1, 49  
**Geometrische Addition** I 125  
 —Bewegungslehre I 144  
 —Geschwindigkeitszunahme . . . . . I 208  
 —Reihen . . . . . I 56  
**Geradführung, Gelenk-** I 950

**Gerade Linie** (Gleichg.) I 90  
 —e Linie im Raume I 115, 116  
**Gerberbalken, Fachwerk-** III 99, 1010, 1017  
 —, vollwandiger . . . III 97  
 Gerichtete Größe I 124, 165  
 Gerinne, Ausflus. I 280  
 Geschichtete Körper, spez. Gew. u. Wagenladung. I 638\*  
 Geschiebebewegung III 533  
**Geschützbronz**e . . . I 695  
 —bronz, Festigkeit. I 514\*  
 —rohr, armiertes I 625  
**Geschwindigkeit** I 144  
 —, Fall- . . . . . I 204, 1080\*  
 —, Flächen- . . . . . I 203  
 —, ritische (Grenz-) I 282, 294, 363; II 932  
 —, lotrechte . . . . . I 161  
 —, Schiffs- . . . . . II 740, 742\*  
 —höhe . . . . . I 204, 1080\*  
 —höhe (Hydr.) . . . I 282  
 —höhe (Pitot-Röhre) I 385\*  
 —sparabel . . . . . I 1035  
 —spln . . . . . I 161  
 —spln (Dampfturb.) II 226  
 —potential (Hydr.) I 349  
 —sris . . . . . I 148  
 —stufen an Werkzeugmaschinen . . . . . II 352  
 —stufen (Dampfturb.) II 228  
 —sziffer (Flußbau) III 534  
 —szunahme . . . . . I 208  
 —szustand . . . . . I 161  
 —, Umfangs- . . . . . I 149  
 —, Wechsel- d. Poles I 161  
 —, Winkel- . . . . . I 149, 151\*  
 —, Zusammensetzg. d. —en I 152  
 Gesichtsfeld . . . . . III 13  
 Gesimse . . . . . III 329  
 Gesperre . . . . . I 906  
 Gesetz d. Schwere I 164, 196  
**Gestängeberechnung**, Schiffsmaschine II 772, 774\*  
 —schloß . . . . . I 755  
 —, Wasserhaltungs- II 621  
 Gestell, Verbrennungsmotor- II 268, 276  
**Getreidedruck** . . . . . I 568  
 —mafs . . . . . I 1043\*  
 —, Reibungswinkel II 560  
 —speicher . . . . . II 564  
 Getriebe, Kraft- u. Arbeitsverhältnisse . . . I 249  
**Gewicht** (Erkl.) . . . I 164  
 —, Raum- I 638\*; II 514\*  
 —, spezifisches . . . I 638\*  
 —, Stau- . . . . . II 514\*  
 Gewichtstafel verschiedener Länder . . . . . I 1051\*  
**Gewichte, s. a. Eigengewichte, spez. Gewicht,**

**Gewichte, Abflußrohre**

- I 964\*
  - , Brücken . . . III 1086
  - , Brückenfahrbahngerippe III 1080
  - , Drahtseil- I 832\*, 892\*; II 576\*, 726\*
  - , Drahtseilscheiben I 833\*
  - , Drainrohr . . . III 608
  - , geschweifte Rohre I 966\*, 967\*
  - , Gleichstromdynamomaschinen . . . II 916
  - , Hanfseilscheiben I 836\*
  - , Heizungsrohr . . . III 446\*
  - , Kupfer-, Bronze-, Messingrohr I 970\*—973\*
  - , Lokomotiven III 893\* bis 897\*
  - , Lokomotivräder III 909
  - , Lokomotivteile III 943\*
  - , Lokomotive (Zahnradb.) III 966
  - , Mannesmannrohr I 969
  - , Mauerwerk . . . III 322
  - , Metallplatten . I 641\*
  - , Riemenscheiben I 829\*
  - , Rohre . . . I 956\*, 957\*
  - , Rohrformstücke I 960\*, 961\*
  - , Schiffs- . . . II 720, 733\*
  - , Schiffsbesatzungen II 732
  - , Schiffskesselanlagen II 802\*, 803
  - , Schiffsmaschinenanlagen II 801\*, 808
  - , Steinschlag . . . III 663\*
  - , Straßensahwagen II 1022\*; III 646\*
  - , Vieh . . . II 732\*
  - , Walznormprofile I 656\* u. f.
  - , Warmwasserheizrohr III 446
- Gewindearten** . . . I 760
- lastdruckbremse II 384, 402
  - reibung . . . . . I 257
  - schneidmaschinen II 361
- Gewölbe** . . . III 211, 330
- , Abschätzung d. Gewölbstärke . . . III 211
  - , Amtl. Gewicht. III 57
  - , Berechnung d. Stützlinie . . . III 216
  - , Einseitig belastetes III 215, 221
  - , Eisenbeton III 272, 301
  - , Elastizitätstheorie III 217
  - , Ermittlung der Spannungen . . . III 223
  - , gleichmäßig belastetes III 215, 218
  - , gemauertes, Ausführung von Bogen . . . III 331
  - — Gewölbearten III 334

**Gewölbe, gemauertes,**

- Konstruktion . . . III 330
  - — Senkung d. Rüstungen III 339
  - , Gewölbeform u. Spannkraften . . . III 213
  - , gewölbte Decken III 408—411\*
  - , Kantenpressung III 216
  - , Kappen- III 336, 408 bis 411\*
  - , Kappen-, Inh., Oberfl. I 140
  - , Kloster- . . . III 337
  - , Kreuz- . . . III 338
  - , Kreuz-, Inh., Oberfl. I 140
  - , Kuppel- . . . III 337
  - mit schiefer Bewehrung (Eisenbeton) . . . III 312
  - mit steifen Einlagen (Eisenbeton) . . . III 315
  - Mittelkraftpolygon und Stützlinie . . . III 213
  - , Stern- . . . III 339
  - , Tonnen- . . . III 334
  - , umgekehrtes . . . III 238
  - , Widerlager . . . III 225
- Gichtaufzug** . . . II 524
- gas, Verbrennung I 494\*; II 248, 251\*
  - gas, Wärmeverlust durch die Verbrennungsgase I 487\*
  - seilbahn . . . . . II 593
- Gießerei** . . . I 652; III 947
- Gips** . . . . . I 700
- dielen . . . . . I 712
  - mörtel . . . . . I 711
- Gittermast** . . . . . II 1002\*
- Glas** . . . . . I 724
- baustein . . . . . I 728
  - dach . . . . . III 421
  - , Festigkeitszahlen I 517
  - , zuläss. Spanng. I 527
- Glasons Kegelräderröhlmachine** . . . II 374
- Gleichgangkoeffizient** . . . II 284\*
- gewicht . . . . . I 166
  - gewicht der Kräfte I 169
  - gewicht v. Gasballonen I 345
  - polmaschine . . . II 920
  - strom (Wärme) . . . I 407
  - stromdampfmaschine II 138, 179
  - stromverteilung II 977, 991
  - stromturbo . . . . . II 907
- Gleichdruckmotor** II 246, 256, 262
- turbine (Dampf) II 223, 783
- Gleichstromdynamomaschine** . . . II 883
- , Abmessungen u. Gewicht II 915

**Gleichstromdynamomaschine, Allgemeines**

- II 883
  - , Ankerberechnung II 894
  - , Ankerwicklungen II 889
  - , Berechnung . . . II 889
  - , Berechnung d. Feldmagnete, Magnetwicklung . . . . . II 899
  - , Betriebsverluste, Erwärmung II 911, 913\*
  - , Eigenschaften . . . II 883
  - , Erwärmung II 897, 902, 908, 911, 912
  - , Fremderregung II 885
  - , Hauptgleichungen II 883
  - , Mech. Konstr. . . II 910
  - , Ohmsches Gesetz II 884\*
  - , Parallelschaltung II 959
  - , Regelung . . . II 955, 959
  - , Schaltung . . . II 955
  - , Schaltung d. Anker- u. Schenkelwicklung II 883
  - , Stromwender u. Bürsten II 907
  - , Stromwendung II 902
- Gleichstrommotor** II 916
- , Anlaufvorrichtungen II 917
  - , Regelung . . . . . II 976
- Gleichungen** . . . . . I 50
- , Widerspruchs- . . . III 19
- Gleis, s. a. Weiche, Kreuzung, Eisenbahnoberbau, Drehscheibe, Schiene, Spurweite.**
- abzweigung . . . . . III 826
  - anlagen, Fabrik- III 506
  - anordnung a. Bahnhöfen III 835
  - anordnung f. Drehscheiben III 842, 843\*
  - , Bau d. — . . . . . III 793
  - beleuchtung II 855, 856\*
  - e d. Abstellanlage III 840
  - entfernung (-abstand) III 775, 776, 836
  - kreuzung . . . . . III 819, 824
  - , Lage des — . . . . . III 795
  - lose Bahnen . . . . . II 515
  - neigung . . . . . III 777
  - plan . . . . . III 823
  - seilbahn . . . . . II 516
  - sperre . . . . . III 834, 836
  - , Straßensb. . . . . II 1005
  - verbindung III 823, 824
  - verlegung, Straßensbahn II 1013
  - wage . . . . . III 869, 944
  - , Zahl u. Länge i. Verschiebeanlagen III 841
- Gleitbahn, Reibung** I 933
- kurve . . . . . I 160
  - linie (Erddruck) III 203

**Gleitmafs-(modul), (Festigkeitslehre)** I 506, 507\*  
 —schuh, Kolbenstangen- I 920  
 —verlust d. Zugmittel I 263  
 Gliederriemen . . . I 823  
 Glimmerschiefer . . . I 699  
**Glocke, Lampen-** II 849\*  
 —metall . . . . . I 695  
 —stuhl . . . . . I 295  
 —ventil . . . . . I 991  
**Glühfarben d. Eisens** I 389  
 —lampe, elektrische Kohlenfaden- . . . II 839, 840  
 — elektr. Metallfaden- . . . II 839, 841  
 — elektr. (Strafsenbeleuchtung) . . . II 855\*  
 — elektr., Stromverbrauch II 852\*  
 —lichtlampe . . . II 834, 835, 836, 837  
 —licht, Petroleum- II 835, 856\*  
 —licht, Spiritus- II 836, 856\*  
 Glyco-Metall . . . . . I 873  
 Gneis . . . . . I 698  
 Goniometrische Lösung von Gleichg. . . . . I 51  
 Gooch-Umsteuerung II 186  
 Göpel . . . . . II 2, 442  
**Graben, Abzug-** III 604  
 —, Entwässerungs- (Eisenbahn) . . . . . III 787  
 Gradient . . . . . I 127  
 Gräberwerk . . . . . II 219  
**Granit** . . . . . I 698  
 —, amtl. Eigengewicht III 59  
 —, Festigkeitsz. I 518\*, 519  
 —, zuläss. Beanspr. I 526; III 63  
 Graphische Statik . . . I 179  
 Graphitschmierung I 749  
 Grauwacke . . . . . I 700  
**Gravitationsgesetz** I 196  
 — konstante . . . . . I 196  
 Greifer, Last- II 407, 408\*, 409\*, 529\*  
**Grenzgeschwindigkeit** wirbelfreier Strömung I 363\*  
 —kurve (Grenz Zustand) v. Dämpfen . . . . . I 431\*  
 —kurven für nassen Dampf I 434\*, 439  
 —länge gedrückter Stäbe I 534, 535\*  
 —regulierung . . . . . III 26  
 —spannung . . . . . I 593, 596  
 Grey-Träger . . . . . I 655, 669\*  
**Grisongetriebe** . . . I 789  
 —Kupplung . . . . . I 863, 864\*  
 Grobblech . . . . . I 677\*  
 Gröfse, gerichtete I 124, 165  
 Großwasserraumkessel II 7, 8\*  
**Grubenlokomotive** II 516

**Grubenseilbahn** . . . III 970  
 —, Kraftbedarf III 971  
 —ventilator II 631, 634\*, 635\*  
 —wagen . . . . . II 530  
 Grudekoks . . . . . I 475  
**Grundbüchse** . . . . I 921  
 —lager . . . . . II 773  
 —mauer . . . . . III 325  
 —säge . . . . . III 523  
 —schwelle (Flusfb.) III 540  
 —stellung des Lastenzuges (Lastscheide) . . . III 89  
 —stück, Zweckmäßige Mafse für Bau- . . . . . III 688  
 —wasser III 699, 705, 708  
 —wasserabdichtung I 734  
 —wasserabsenkung III 531  
 —zahlen d. Logarithmen I 48  
**Grundbau** . . . . . III 226  
 —, Baggerarbeiten . . . III 228  
 —, Baugrund I 527; III 229  
 —, Berechnung von Bohrwerten und Verankerung . . . . . III 232  
 —, Brunnengründung III 246  
 —, Einschleifsung, Abdämmung, Trockenlegung d. Baugrube . . . . . III 231  
 —, Eisenbeton- . . . . . III 303  
 —, Gebäude auf Grubenboden, in Erdbebengebieten . . . . . III 264  
 —, Gefriergründung III 260  
 —, Gründung a. Beton unter Wasser . . . . . III 239  
 —, Gründung a. schlechtem Baugrund . . . . . III 237  
 —, Kaimauern III 243, 264  
 —, Kanalisations- . . . III 758  
 —, Luftdruckgründg. III 251  
 —, Mauer- u. Betonarbeiten III 228  
 —, Pfahlrost . . . . . III 240  
 —, Rammarbeiten . . . III 226  
 —, Schutz der Fundamente III 263  
 —, Senkkasten u. Schwimmpfeiler . . . . . III 245  
 —, Steinkistenbau . . . III 262  
 —, Steinschüttung . . . III 262  
 —, Versteinerungsgründung III 262  
 —, Wahl d. Gründungsart III 235  
**Gründungsarten** III 235, 236\*  
 — v. Drehkränen . . . II 492  
**Gruppenantrieb, elektr.** III 497  
 —ventil . . . . . I 992  
 Guldinsche Regel . . . I 141  
**Gummriemen** . . . . I 824  
 —ventilklappe . . . . I 994  
**Gürtförderer** II 538; III 517  
 —platte . . . . . III 989  
 —platte, Nietung III 1000

**Gurtplatte, Stofs** III 1002  
 —platte, Widerstandsmoment . . . . . III 990, 991\*  
 —spannkraft (Eisenbahnbrücke) . . . . . III 79  
**Gulsputzerlei** . . . . III 511  
**Gufseisen, Amtl. Gewicht** III 60  
 —arten . . . . . I 653\*  
 —, Festigkeitszahlen I 507\*, 513\*, 535\*  
 —platten, Gew. . . . . I 641\*  
 —, zuläss. Beanspr. I 523\*, 525\*, 536; III 63, 81  
 —, Zusammensetzung von Graugufs . . . . . I 653  
 Gutermuthventilklappe 1994  
**Güterschuppen** . . . III 833  
 —wagen . . . . . III 925, 936  
 Gut, stehendes u. laufendes (Schiff b.) . . . . II 706  
 Guttapercha . . . . . I 730

## H.

Hackworth-Umsteuerung II 193  
**Hafen, Flufs-** . . . . III 556  
 —, Kanal- . . . . . III 575  
**Haftfestigkeit (Eisenbeton)** III 280  
**Hahn, Absperr-** . . . I 998  
 —, Widerstandsz. I 307\*  
**Haken, Last-** I 899, 901\*;  
 II 404  
 —nagel . . . . . III 802  
 —platte III 804, 808, 809, 810\*  
 Halbsfeuerung . . . . II 48  
**Halde** . . . . . II 572\*  
 —ndrahtseilbahn . . . II 593  
 Halladay-Rad . . . . . II 4  
 Hall-Anker . . . . . II 708  
**Hallenbauten, Eisenbeton-** III 300  
 —beleuchtung . . . . . II 854\*  
 —binder . . . . . III 352  
 —dach . . . . . III 380  
 Halszapfen . . . . . I 845  
 Halvor Bredasches Wasserenteisungsverfahren III 721  
 Haltepunkt (Eisenb.) III 833  
**Hammer, Dampf-** II 337  
 —werk . . . . . I 652  
 —, Wipp-, Feder-, Fall- III 335  
 Handelsfabrikate d. Eisens I 653  
**Handkurbel** . . . . . I 938  
 —läufer (—leisten) — Eisen I 663\*  
**Hanfseil** . . . . . I 835\*, 898\*  
 —, Arbeitsverlust I 263, 264  
 —, Festigkeitszahlen I 521; II 726\*

- Hanfseilbetrieb** I 884\*;  
 —, Berechnung . . . III 496  
 —, Kammerers Versuche  
   I 840
- Hangbau** (Berieselg.) III 609
- Hängebahn** II 521, 590  
 —bahn, Elektro- . . II 591  
 —bahnschiene . . II 590  
 —lager . . . I 878, 879\*  
 —lager (Turbinen-) II 808  
 —werk . . . III 197, 344
- Harmonische Analyse**  
 — Schwingung I 128, 130  
 — Schwingung I 128, 205
- Hartgummi** . . . I 685  
 —gufs . . . . . I 653  
 —lot . . . . . I 697\*
- Härte d. Wassers** III 700  
 —n, Stahl . . . . . I 647  
 —skala für Eisen . I 645\*  
 —skala, mineralogische I 698
- Hartmannsche Doppelkegel-**  
 Reibungskupplg. I 868
- Hartung-Regler** . . I 1027
- Harzöl** . . . . . I 685, 749
- Häselersche Formeln** (Zug-  
 u. Druckspannung) I 582
- Haspel** . . . . . II 442, 443  
 —rad . . . . . II 382  
 Haufenlager . . . II 569
- Hauptbahn** . . . . III 773  
 —dehnung . . . . I 544  
 —fläche . . . . . I 123  
 —moment . . . . . I 173  
 —spannungen (Biegungs-  
 festigkeit) . . . I 544  
 —spant . . . . . II 655, 669  
 —strommaschine  
   II 883, 884\*, 885  
 —, Schaltg. u. Regelg.  
   II 956  
 —, Spannungserhöhg.  
   II 956  
 —strommotor . . . II 917  
 —system, statisch bestimm-  
   tes u. unbestimmtes  
   III 120, 122  
 —träglichkeitsachsen I 220, 232  
 —moment . . . . . I 232
- Hausschwamm** I 737, 739
- Hautreibung** . . . I 371
- Hebemaschinen**, s. a. Auf-  
 zug, Fördermaschine,  
 Fördermittel, Hebewerk,  
 Kran . . . . . II 882  
 —, Antrieb . . . . . II 382  
 —, Antrieb durch Verbren-  
   nungsmotoren . II 889  
 —, Aufhängung der Last  
   I 899; III 404  
 —, Aufzüge s. dort II 413  
 —, Bremsen s. dort II 388  
 —, Brückenkrane . . II 478  
 —, Dampftrieb . . . II 389  
 —, Drehkrane s. dort II 483
- Hebemaschinen**, Druck-  
 luftantrieb . . . II 391  
 —, Druckwasserantr. II 391  
 —, Elektr. Antrieb II 393  
 —, Fördermaschinen s. dort  
   II 442, 1029  
 — für Bauzwecke . III 525  
 —, Handantrieb . . II 382  
 —, Lastführung . . II 409  
 —, Laufkrane s. dort II 473  
 —, Maschinenteile für I 884  
 — mit unbegrenztem Ar-  
   beitsfeld . . . II 503  
 —, Schwimmkrane II 502  
 —, Stahlwerkskrane II 506  
 —, Transmissionsantrieb  
   II 887  
 —, Wasser-, s. a. Hebewerke  
   f. flüss. Körper, Pum-  
   pen, Wasserhaltungs-  
   maschinen . . . III 599  
 —, Winden . . . . . II 410
- Heber** . . . . . II 597  
 —, Stofs . . . . . II 598  
 —leitung . . . . . I 284
- Hebewerke für flüssige**  
 Körper II 596; III 599  
 —, Dampfdruckpumpen  
   II 597  
 —, Heber . . . . . II 597  
 —, Kolbenpumpen, s. a. dort  
   II 610  
 —, Kreiselpumpen, s. a. dort  
   II 599  
 —, Pumpen, s. a. dort II 597  
 —, Schöpfwerke . . II 596;  
   III 599  
 —, Strahlpumpen . . II 598  
 —, Wasserhaltungsmaschi-  
   nen, s. a. dort . . II 619
- Hebewerk, Schiffs-** III 592  
 —zeug . . . . . II 882
- Hefner-Kerze** II 827, 828
- Heißdampflokomotive**  
   III 916  
 —dampfmaschine II 135, 146  
 —laufen von Zapfen I 847,  
   848, 849  
 —luftmaschine, Kreisprozess  
   I 427  
 —wasserheizung . . III 451
- Heizfläche, Kessel-** II 41,  
 43\*, 65, 792; III 445, 889,  
 890\*, 962
- fläche, Luftheizung III 456  
 —fläche, Wärmeabgabe  
   III 439  
 —kammer, Luft- . . . III 434  
 —kanal, Luft- . . . . III 457  
 —körper III 439, 446, 499  
 —rohr I 402, 408, 964, 966\*;  
   II 13, 37; III 446\*  
 —rohr, Lokomotiv- III 899  
 —rohrkessel II 12\*, 37, 98
- Heizung** . . . . . III 436
- Heizung, Aussen- u. Raum-**  
 temperaturen III 438\*  
 —, Dampf- . . . . III 451, 499  
 —, Eisenbahn- . . . III 934  
 —, Eisenbahnwerkstatt-  
   III 941  
 —, elektrische . . . III 444  
 —, Fabrik- . . . . . III 498  
 —, Fernheizungen . III 461  
 —, Gas- . . . . . III 443  
 —, Kamin- . . . . . III 442  
 —, Kanal- . . . . . III 443  
 —, Lokal- . . . . . III 442  
 —, Luft- . . . . . III 455, 499  
 —, Ofen- . . . . . III 443, 498  
 —, Petroleum- . . . III 444  
 —, stündl. Wärmeverlust  
   geschloss.Räume III 436\*  
 —, Wärmeabgabe d. Heiz-  
   flächen . . . . . III 439\*  
 —, Wärmeverluste in Fa-  
   briken . . . . . III 500\*  
 —, Zentral-, s. dort III 444  
 —, Zentralheizung in Ver-  
   bindung mit Kraft-  
   betrieben . . . . III 458
- Heizwert** I 480, 481\*, 490;  
 —, II 251\*  
 — flüssig. Brennstoffe I 498\*,  
 499\*; II 251\*
- Heliotrop** . . . . . III 47  
 —lith . . . . . I 703
- Helllegat** . . . . . II 702\*  
 —igkeit . . . . . II 828  
 —ingkran . . . . . II 531  
 —ingseilbahn . . . II 594
- Hennebiquebau** s. a. Eisen-  
 betonbau . . . . . I 722
- Hertzische Gleichungen**  
 (Kugeldruck) I 529, 880
- Henry** . . . . . II 857
- Herzkurve** . . . . . I 110  
 —stück (Weiche) . III 817
- Heusinger-Umsteuerg.** II 187
- Heyland-Diagramm** II 941
- H-Fläche** (Statik) III 113
- Hill-Reibungskupplg.** I 867\*
- Hinterdrehbank** . . II 361
- H-Linie** (Statik) III 112  
 — (Zweigelenkbog.) III 168  
 —, parabolische (versteifte  
   Kette) . . . . . III 180  
 —, parabolische (Zweigelenk-  
   bogen) . . . . . III 169, 174
- Hobelmasch., Holz-** II 380  
 —maschinen, Metall- II 355  
 —stahl . . . . . II 345
- Hochbahnkran** . . . II 531  
 —bau . . . . . III 320  
 —bau, Dacheindeckungen s.  
   a. Dach . . . . . III 415  
 —bau, Decken s. dort III 407  
 —bau, Eisenkonstruktionen  
   s. dort . . . . . III 358  
 —bau, Holzkonstruktionen  
   s. dort . . . . . III 359

**Hochbau, Mauerwerk s. d.**

- bau, Nietungen . . . I 780
- bau, zulässige Beanspr. d. Baustoffe I 524; III 62
- bau, zulässige Belastungen u. Eigengewichte III 57
- behälter s. a. Behälter, Wasserturm . . . II 569; III 401, 722
- , Eisenbeton- III 304
- ofengas . . . I 500; II 252
- ofengas, Heizwert, Luftbedarf I 494; II 248, 251
- ofengebläse . . . II 639
- ofenschlacke . . . I 519
- Hodograph . . . I 148

**Höhenformel (Luftdruck)**

- I 342, 343\*
- messung, barometrische III 32
- , geometrische III 26
- , Staffelmethode III 35
- , trigonometr. III 31

**Hohlkugel, Festigkeit I 629**

- rad (Zahnrad) I 789, 792
- zylinder, Festigkeit I 624
- zylinder, gegen Innendruck bewehrter I 625
- zylinder, ovaler, Festigkeit I 628

**Holz als Ware . . . I 741**

- arten, spez. Gewichte I 634
- balken, Querschnittermittlung . . . I 580
- , Bau- I 741\*, 742\*, 748
- , Bau-, Abmessungen III 339
- , Eigengewichte (Amtl.) II 723\*, 725\*; III 59
- eisenkonstrukt. . . III 355
- , Festigkeitssz. I 517, 518\*
- , Heizwert . . . I 475\*
- , kohle. . . . I 475
- , Nutz- . . . . I 734
- , pfaster . . . . III 677
- , physik. Eigensch. I 734
- querschwelle . . . III 802
- , Rund —, Gewicht II 725\*
- , Schutzmittel . . . I 738
- , Schwinden und Quellen I 736, 737\*
- verband . . . . III 340
- vernad . . . . I 803, 811
- zementdach III 420, 422, 477
- , Zerstörung des — I 736
- , zulässige Beanspr. I 526\*, 536; III 63

**Holzbearbeitungs-**

- maschinen, Allgemeines III 376; III 507
- , Drehbänke . . . II 381
- , Fräsmaschinen. II 380
- , Hobelmaschinen II 381

**Holzbearbeitungs-**

- maschinen, Maschinen zur Locherzeugung II 382
- , Sägemaschinen, II 377
- , Schleifmaschinen II 381
- , Schutzvorrichtungen III 507

**Holzkonstruktionen**

- III 197, 339
- , Bauholzabmessungen III 339
- , Dachbinder mit 3 fachem Hängewerk . . . III 199
- , Dachverbände . . . III 344
- , Fachwerkwände III 353
- , Fettendach . . . III 198
- , Hänge- u. Sprengwerk III 197
- , Holzisenkonstrukt. III 355
- , Holzverbände . . . III 340
- , Kehl balkendach III 199
- , Lehbogen, — Gerüste III 354
- , Tragwerke . . . III 343
- , Verbundene Rüstungen III 353

**Homogene Differential-**

- gleichung . . . . I 82
- polare Dynamomaschine II 889
- Hookesches Gesetz (Festigkeitslehre) . . . I 503
- Horizontalschub (Bogen-träger) . . . III 112**
- alschub (Zweigelenkbogen) . . . . III 167
- alzug (Kette) III 116, 177
- korrektur . . . . III 32
- Huberpresse . . . . II 342
- Hubmagnet . . . . II 404, 861
- ventil . . . . I 984
- ventil, gesteuertes I 992
- zähler . . . . . II 331
- Hulettkran . . . . . II 410
- Hülfszug . . . . . III 870
- Hüllbahn . . . . . I 159
- kurve . . . . . I 97
- Hülsekupplung . . . I 856
- Huygenssche Traktorie I 113
- Hydrant III 694, 733, 860

**Homogene Differential-**

- Hydraulische Hebe-
- maschine . . . . II 391
- r Aufzug . . . . . II 422
- r Druck und Arbeitsvermögen frei ausfließender Strahlen . . . I 318
- r Kalk . . . . . I 718
- r Kompressor . . . II 653
- r Mörtel . . . . . I 712
- r Radius . . . . . I 310, 364
- r Regler . . . . . I 1029
- r Widder II 593; III 733
- Hydrodynamik s. a. Dynamik tropfbar flüssiger Körper . . . . . I 263

**Hydrodynam. Seitendruck**

- I 283
- mechanik . . . . I 265
- statik . . . . . I 265
- statische Geschwindigkeitsmessung . . . I 384
- statischer Druck I 266
- stat. Seitendruck I 283
- statischer Stau . . . III 543

**Hydrodynamik, theo-**

- retische, Bewegung d. vollkommenen Flüssigkeit . . . I 349
- , Flügeltheorie, Kut-tasche Strömung I 355
- , Geschwindigkeitspotential . . . . . I 349
- , Kennzeich. drehungs-freier Bewegung I 349
- , Kontinuitätsbeding., Druckgleichung I 350
- , Strahlbewegung I 353
- , Strömungen I 351, 352
- , Wirbel . . . . . I 350
- , Zirkulation, dynam. Auftrieb bei ebenen Strömungen . . . I 354
- Hygiene der Beleuchtung III 850
- Hygrometer . . . . I 423
- Hyperbel als Expansionskurve . . . . . I 426**
- funktionen I 30\*, 32\*, 52, 65, 79
- funktionen, Briggs'sche Logarithmen d. — I 32\*, 34
- , Gleichungen . . . I 98, 99
- , Konstruktion . . . I 101
- rad . . . . . I 795
- Hyperbolische Spirale I 111
- Hyperboloid . . . . I 123
- Hypozykloide . . . . I 108
- Hysterisis . . . . . II 860\***
- verlust (Gleichstrom-anker) . . . . . II 897

**I.**

- I-Eisen I 659\*, 666\*, 669\*
- I-Querschnitt I 539, 548, 553, 554, 590
- Ideale Hauptspannung I 544
- Ignor-Schwungrad II 1034
- Imaginäre Größen I 47
- Impedanz . . . . . II 872
- Imprägnieren v. Holz I 738
- Impuls . . . . . I 201, 218**
- moment . . . . . I 202, 216
- , Satz vom — . . . I 216
- schraube . . . . . I 216
- starrer Körper . . . I 219
- Indikator . . . . . II 330**
- diagramm . . . . . I 416, 444
- , Torsions . . . . . II 328
- Indizierter Schub (Schiff-schraube) . . . . . II 754

**Indizierter Wirkungsgrad** der Dampfmasch. I 443  
 — der Dampfturbine am Radumfang . . . II 226  
 — d. Luftkompressors I 430  
**Indizierte Spannung** (Luftpumpe) . . . II 643  
**Induktion** . . . II 867  
 —, gegenseitige . . . II 869  
 — in Dynamomasch. II 867  
 —, Magnetische . . . II 859  
 —, Selbst- . . . II 857, 868  
 —smotor . . . II 939  
 —sregler . . . II 952  
**Induktor** . . . II 919  
**Induzierter Strom, Richtung** II 870  
**Infusorienerde** (Kieselgur) I 406, 470  
**Inglefield-Anker** . . . II 708  
**Inhalt, Flächen-** (Gleichg.) I 97, 133\*  
 —, Körper- . . . I 137  
 —, Kreisflächen- . . . I 2\*  
 —, Kugel- . . . I 85\*  
**Injektor** . . . II 599  
**Innenbeleuchtung** II 852\*  
 —beleuchtung, Fabriken, Theater, Säle, Warenhäuser, Eisenbahnwag. II 853, 854  
 —feuerung . . . II 13, 46  
 —polmaschine . . . II 919  
**Integrale, bestimmte** I 79  
 —formeln . . . I 72, 79  
**Integration** durch Reihenentwicklung . . . I 79  
**Integrator** . . . II 674  
**Integrierender Faktor** I 81  
**Intensität, Feld-** . . . I 195  
**Interferenzerscheinung** I 207  
 —polationskurve . . . III 23  
**Intze-Behälter** III 728, 857  
**Invariante** . . . I 99  
**Inversion** (Determ.) I 49  
**J/S-Diagramm** (Entropie) I 416  
**Isodromregler** . . . I 1030  
**Isolation, Wärme-** I 471\*, III 442\*  
 —smesser . . . II 976  
**Isolator, Porzellan-** II 1003\*  
**Isolierstoff, elektrischer** I 729; II 923, 946  
 —stoff, Wärmeleit. I 405\*  
 —ter Punkt . . . II 96  
 —ung, Mauern- III 326, 328  
**Isotherme für Luft** I 429\*  
 —vollkomm. Gase I 424  
 —von Dämpfen . . . I 439

**J.**

**Johnson- und Ostenfeldsche Knick-Formeln** I 536

**Joule** . . . II 857  
 —sches Gesetz (Elektrot.) II 864  
 —sches Gesetz (Gasenergie) I 416  
**Joyische Umsteuerung** II 193

**K.**

**Kabel** (Haspel), s. a. Drahtseil, Seil . . . II 442  
 —bahn . . . II 518  
 —, Dampf- . . . II 444\*  
 —, elektr. II 987\*, 988, 989\*, 1004  
 —hochbahn-Kran . . . II 532  
 —winde . . . III 525  
**Kaimauern** III 243, 264  
 —, Eisenbeton- . . . III 303  
**Kaiser-Wilhelm-Kanal** III 597  
**Kalibrierte Kette** . . . I 887  
**Kalk, hydraulischer** I 713  
 —mörtel . . . I 709  
 —sandstein . . . I 702  
 —sandziegel . . . I 702  
 —stein . . . I 699  
 —stein, Festigkeitsz. I 519\*  
 —stein, Zuläss. Beanspr. I 526; III 64  
 —, Wasser- . . . I 713  
**Kalorie** . . . I 393  
 —meter . . . II 327  
 —metrische Bombe I 481  
 —sche Maschine . . . I 427  
**Kaltdampfmaschine** I 446  
 —luftmasch., Kreisproz. I 427  
**Kältemaschine, Kälteleistung** I 447, 454\*, 455\*  
 —maschine, Kreisprozefs. u. Leistungsziffer I 427  
 —maschine, Theorie I 446  
 —mischungen . . . I 396\*  
**Kameelhaarriemen** I 824  
**Kaminheizung** . . . III 442  
 —kühler . . . II 219  
**Kammrad** . . . I 803, 811  
 —zapfen . . . I 849  
**Kämpfer, s. a. Widerlager.**  
 —druck . . . I 182; III 111  
 —drucklinie . . . III 112, 175  
**Kanalbrücke** . . . III 311  
 —, Eisenbeton- III 305, 306  
 —, Fliesen in —en I 310  
 —, gemauerter . . . III 751  
 —, Geschwindigkeiten und Gefälle . . . I 314  
 —, Heiz- . . . III 457  
 —heizung . . . III 443  
 —isation, s. a. Städteentwässerung . . . III 735  
 —isierung v. Flüssigkeiten III 547  
 —, Luft- . . . III 435  
 —schieber . . . II 157, 778  
 —, See- . . . III 596  
 —, Triebwerk- . . . III 628

**Kanal, Turbinen-** III 636  
 —, Vorteilhaftester Querschnitt I 312; III 567  
 —wage . . . III 9  
**Kanalbau** . . . III 558  
 —, Abmessungen neu ausgeführter und geplanter Kanäle . . . III 569  
 —, Binnenschiffahrtskanäle III 558  
 —, Brücken . . . III 573, 574  
 —, Fahrtgeschwindigkeiten III 561  
 —, Hafen . . . III 575  
 —, Kanalbettichtg. III 570  
 —, Querschnitt der Kanalhaltungen . . . III 567  
 —, Schiffswiderstand III 559  
 —, Schleusen, s. dort III 572  
 —, Speisg. d. Kan. III 566  
 —, Uferbefestigung III 571  
 —, Vorarbeiten . . . III 561  
 —, Wasserbedarf d. Kanäle III 565, 566  
**Kantenpressung** (Spannungslinie) . . . III 210  
**Kaolin** . . . I 701  
**Kapazität, elektr.** II 857, 865  
 —, Akkumulator- . . . II 880  
**Kapillarität** . . . I 265  
**Kappengewölbe** III 336, 408—411\*  
 —, Gewicht . . . III 57  
 —, Inh. u. Oberfl. I 140  
**Kappesches Phasenverschiebungendiagramm** II 926  
**Kapselgebläse** II 651, 652\*  
**Kardangetriebe** . . . II 820  
**Kardioiden** . . . I 110  
**Karte, Land-** . . . III 49  
**Kaskadenschaltung** II 980  
 —umformer . . . II 954  
**Katarakt** . . . I 1016; II 170  
**Kautschuk** . . . I 729  
 —, Elastizitätsm. . . I 503  
**Kavalierverspektive** I 142  
**Kegel** . . . I 123, 139  
 —bremse . . . I 905  
 —feder . . . I 617, 618\*  
 —, Mantelschwerpunkt I 193  
 —, metrischer (Werkzeug) III 363  
 —, Morse- . . . II 362  
 —motor (Windrad) II 3, 4  
 —pendel . . . I 212  
 —rad . . . I 794, 807  
 —räderfräsmaschine II 373  
 —räderröhbelm. II 372, 374  
 —rad-Reibung . . . I 260  
 —scheibenriementrieb I 821  
 —schnitt (Gleichg.) I 93  
 —, Schwerpunkt . . . I 194  
 —stumpffeder . . . I 618\*  
 —, Trägheitsmoment I 239  
 —trommel II 451, 470, 1029

- Kehlbalkendach** . . . III 199  
**Keil** . . . I 138  
 —kette, Wirkungsgrad I 250  
 —rad . . . I 813, 814  
 —, Schwerpunkt . . . I 194  
 —nutrad . . . I 814; II 817  
 —nutreibung . . . I 249, 814  
 —verbindung I 753, 756\*,  
 757\*, 759\*  
**Keller** . . . III 328  
**Kennziffer d. Logarithm.** I 48  
**Keramoplatte** . . . I 728  
**Kern** eines Querschnittes  
 (Theorie) . . . I 594  
 —, Schornstein- II 60\*, 61\*  
 —punkt . . . III 209  
**Kernpunktmoment, Span-**  
**nungsermittlung in**  
**Stützmauern** . . . III 209  
 —momente, Zweigelenk-  
 bogen . . . III 174  
**Kessel** s. a. Dampfkessel.  
 —bekleidung, Lokomotiv-  
 (Isolation) . . . III 904  
 —blechstärke . . . II 27, 28\*  
 —blech, Ueberpreise f. Grob-  
 bleche, Böden usw. II 114  
 —blech, Vorschriften II 87  
 —boden, Festigkeit I 623;  
 II 96, 98, 99, 100  
 —boden, Ueberpreis II 115  
 —, Heizungs- III 445, 451  
 —nietung I 775; II 27, 28\*  
 —schmiede . . . III 945  
 —speisewasser II 68; III 855  
 —steinverhütung . . . II 68  
 —, Warmwasserheizungs-  
 . . . III 445  
**Kette** I 884, 886\*, 888\*, 889\*  
 —, Anker- . . . II 709, 726  
 —, Arbeitsverlust . . . I 263  
 —, Förder- . . . II 552  
 —, Gallsche . . . I 889\*  
 —, kalibrierte I 887, 888\*  
 —, Platten- . . . III 517  
 —, Rundseilen- I 884, 886\*  
 —, Treib- . . . I 843\*  
 —, versteifte . . . III 115  
 —, versteifte — durch ein-  
 fachen Balken III 177  
 —, versteifte — durch Paral-  
 lelträger . . . III 179  
 —, versteifte — durch voll-  
 wändigen Balken III 180  
 —nbahn . . . II 517, 518  
 —nzreifer II 407, 408\*, 409\*  
 —nkasten, Schiffs- II 702\*  
 —nlinie . . . I 118  
 —npumpe . . . II 596  
 —nrad . . . I 887, 888\*, 890  
 —nrolle, — Trommel I 886  
 —nrost . . . II 48  
 —nsäge . . . II 382  
 —nzug (Hebezeug) II 386  
**Kies** . . . I 701  
 —straße . . . III 668  
**Kieselgur** . . . I 406, 701  
 —isolation . . . I 470\*  
**Kilogramm**gewicht I 165  
 —masse . . . I 166  
 —meter, Vergleichstafel  
 . . . I 1057\*  
**Kilowatt** . . . II 857  
 —stunde . . . I 201  
**Kimmsente** . . . II 669, 670\*  
**Kinematische Geometrie**  
 . . . I 159  
**Kinetische Energie** I 198  
 — eines Gases . . . I 413  
**Kipper, Kurven-** . . . II 529  
 —er, Waggon- . . . II 525  
 —karre . . . II 515  
 —kübel . . . II 405, 406\*  
 —lager . . . I 177  
 —lager (Brückenb.) III 1037  
 —regel . . . III 40, 49  
 —wagen . . . II 515, 520\*  
**Kirchdach-Turm** III 192, 380  
**Kirchhofsche Gesetze**  
 (Stromverzweigung)  
 . . . II 862, 874  
 —scher Satz (Temperatur-  
 strahlung) . . . II 826  
 —sches Strahlungsgesetz  
 . . . I 409  
**Kirksche Formel** (Schiffs-  
 widerstand) . . . II 746  
**Kitt** . . . I 732  
**Klammer, Mauerwerk-**  
 . . . III 320  
**Klappen, Schiffs-** II 711\*  
**Klappmulde** II 405, 406\*  
 —tor, Schleusen- . . . III 585  
**Klappenventil** . . . I 993  
 —ventil, Luftpumpe II 217  
 —ventil, Widerstandsz. I 305  
 —wehr . . . III 554  
**Klärbecken** (Trinkwasser)  
 . . . III 716  
 —ung der Abwässer III 758  
**Kleinische Decke** III 407, 411  
**Kleinkessel, s. a. Dampf-**  
**kessel, Heizung** II 23, 84;  
 III 445, 451, 462, 464  
 —kessel f. Dampftriebwagen  
 . . . III 922  
 —pfasterstraße . . . III 669  
 —triangulation . . . III 20  
 —, Flächeninhaltsermitt-  
 lung . . . III 23  
 —, Flächenteilg., Grenz-  
 regulierung . . . III 26  
 —, Punktbestimmg. III 21  
**Kleinsches Verbindungs-**  
**stück** . . . I 949  
**K-Linie, Culmannsche** (Erd-  
 druck) . . . III 202  
**Klemmplatte** (Schienenbe-  
 festigung) III 809, 810\*  
**Kletterweiche** . . . III 818  
 —zahnstange (Zahnradbahn)  
 . . . III 955  
**Klinkengesperre** . . . I 906  
 —er . . . I 707  
**Klosett, Schiffs-** . . . II 713\*  
**Klosterformat** . . . I 708;  
 III 821  
 —gewölbe . . . III 337  
**Klingsche Umsteuerg.** II 192  
**Knickfestigkeit** gerader  
 Stäbe . . . I 588  
 —spannung, zulässige I 534,  
 535\*, 536  
**Knierohr** . . . I 970\*; II 208  
**Knoche Isolation**masse  
 . . . I 470\*  
**Knotenpunkt** (Tragwerk),  
 . . . II 740; III 1029  
 —, Winkeländerung am  
 steifen . . . III 186  
 —verschiebung . . . III 117  
**Kochsalzlösung, spezifische**  
**Wärme** . . . I 395\*  
**Koenensche Decke** III 297,  
 410, 414  
**Koepemaschine** . . . II 1029  
 —scheibe . . . II 452, 472  
**Koerzitivkraft** . . . II 880\*  
**Kohle** s. a. Braunkohle.  
 Steinkohle . . . I 474, 476  
 —breiverfahren (Klärung d.  
 Abwässer) . . . III 760  
 —, Lagerung . . . III 860  
 —nbunker (Schiffb.) II 701  
 —nfadenlampe . . . II 840  
 —nkipper . . . II 528  
 —verbrauch, —versorgung  
 d. Bahnhöfe . . . III 860  
**Kohlensäure, Aggregat-**  
**formänderung** . . . I 398  
 — als Verbrennungsprodukt  
 . . . I 488  
 —ausscheidung d. Menschen  
 u. Beleuchtung . . . III 424\*  
 —dampf, adiabatische Kom-  
 pression trocken gesät-  
 tigten — . . . I 454\*  
 —entwicklg. verschiedener  
 Lichtquellen . . . II 850\*  
 —, krit. Zustand . . . I 431\*  
 —, Löslichkeit im Wasser  
 . . . I 399  
 —, masch., Kälteleistg. I 455\*  
 —, Rauminhalt bei verschie-  
 denen Temperaturen u.  
 Drücken . . . I 448\*  
 —, spez. Gewicht . . . I 638  
 —, spezifische Wärme I 417  
 —, thermodyn. Werte I 417\*,  
 418\*, 453\*  
 —, Zähigkeit . . . I 401  
**Kohlenstoff** . . . I 631  
 —stahl, hochwertiger, Festig-  
 keitszahlen . . . I 508\*  
 —, Wärmeverl. durch die  
 Verbrennungsgase I 487  
**Kohlenwasserstoff** als  
 Brennstoff . . . I 489

**Kohlenwasserstoff,**

Heizwert I 479, 481\*  
 —, krit. Zust. . . . I 481\*  
 —, thermodyn. Werte

I 418\*, 498

Kohlmetzdecke . . . III 414

Koje, Schiffs- II 712, 727

**Koks** . . . I 479

— ofengas, Heizwert, Luft-

bedarf . . . II 251

**Kolben** . . . I 909, 910

—, Automobil- . . . II 813

—, Berechnung . . . I 913

—, beschleunigung . . . I 930

—, beschleunigungsdruck

I 931

—, dichtung . . . I 909, 909

—, druck, Verbrennungsmotor

II 275

—, gebläse, Abmessungen

II 639, 640\*

—, —, Anordnung, Antrieb,

Regulierung . . . II 649

—, —, Arbeitsbedarf II 641,

644

—, —, Kraftverhältn. II 645

—, —, Steuerg., Ventile II 645

—, —, Wirkungsgrad II 644

—, —, geschwindigkeit . . . I 929

—, —, der Dampfmaschinen

II 120\*

—, —, d. Luftpumpe I 215

—, —, f. Schiffsmasch. II 766\*

—, —, Lokomotiv- . . . III 906

—, —, ring . . . . . I 912

—, —, ring, Verbrennungsmotor

II 279

—, —, Schiffsmaschinen- II 771

—, —, stange . . . I 909, 917, 918;

II 772, III 906

—, —, stange, Befestigung I 917,

949

—, —, stange, Berechnung I 918

—, —, Uebersetzungs- II 424

—, —, Verbrennungsmotor

II 277

—, —, weg . . . I 927, II 155\*

**Kolbenpumpe** . . . II 610;

III 601

—, Abmessungen, Arbeits-

bedarf . . . . . II 615

—, Anordnung . . . II 616

—, Antrieb, Regelung II 618

—, Druckwirkung . . . II 613

—, Saugwirkung . . . II 610

—, Teile . . . . . II 615

Kolb-Turbine . . . II 245

**Kollektor** . . . II 907, 908

—, erwärmung . . . II 908

**Kollimationsachse** III 13

—, fehler . . . . . III 14

Kolmaton . . . . . III 603

Kombinationen . . . . . I 483

Kommutator . . . II 902, 907

**Kommutierung, funkenfreie**

II 905

**Kompensationsrohr**

I 970\*, II 203

—, wicklung . . . . . II 906

Komplane Bewegung I 163

Komplexe Größe . . . I 47

Komponente . . . . . I 168

Komposition (Lagermetall)

I 696

**Kompression** (Dampf-)

II 138

—, Kreisprozess I 428, 429\*

— (Verbrennungsmotor)

II 259

**Kompressor, s. a. Gebläse**

II 625, 636, 639

—, arbeit d. Kältemasch. I 449

—, für Luftdruckgründung

III 256

—, hydraulischer . . . II 653

—, Stufen- . . . . . II 643

Komprimierte Welle I 855

**Konchoide** . . . . . I 114

—, nlenker . . . . . I 951

**Kondensation, Dampf-**

maschinen- . . . II 207

—, v. Fördermasch. II 458

—, in Rohrleitungen I 470\*

—, Luftpumpe . . . . . II 213

—, Misch- . . . . . II 208

—, Oberflächen- . . . II 210

—, Rückkühlanlagen II 219

—, Schiffsmaschinen- II 779

—, Strahl- . . . . . II 212

—, swasserleitung . . . III 453

**Kondensator, Dampf-**

II 208, 210, 212, 779

— (Elektr.) . . . II 865, 874

Kondenstopf s. Wasserab-

scheider.

Konglomerate . . . . . I 700

Konischer Stift . . . . . I 759\*

Konjugierte Durchm. I 100

Konkavität einer Kurve I 96

Konsistentes Fett I 745, 749

Konsollager . . . . . I 880

Konstruktions - Wasserlinie

*C W L*, II 654, 655, 669

**Kontinuitätsbedingung f.**

vollkommene Flüssig-

keiten . . . . . I 350

—, gleichung . . . . . I 269

**Kontinuierlicher**

Träger, s. a. Balken

auf mehreren Stützen

I 585, 587\*; III 146

—, Stützenmom. III 146, 157

—, Verbiegung . . . . . III 146

**Kontraktion** . . . . . I 358

—, Strahl- . . . . . I 270

Kontrollflansch (Dampf-)

II 83

Konvexität einer Kurve I 96

Konveyor . . . . . II 552

**Koordinaten** . . . . . I 90, 92

—, Aufnahme rechtwinkl.

(Vermessungsk.) III 4

**Koordinaten, Raum-** I 115

—system, Rechts-, Links-

I 174

—, Umwandlung der — I 192

—, Umwandlung d. Raum-

II 118

—, verallgemeinerte I 220

**Korbgonn** . . . . . III 830

—, Absteckung . . . . . III 45

**Korkisolation** . . . . . I 470\*

—, stein . . . . . I 704

—, stein, Festigkeitsz. I 519

**Körper, ausbalancierte**

I 223

—, Bewegung starrer —

I 218, 220

—, geringsten Luftwider-

standes . . . . . I 372

—, inhalt . . . . . I 187\*

—, Oberfläche . . . . . I 187\*

—, Schwerpunktage I 193

—, starrer, s. Starrer Körper

I 220

—, Trägheitsmoment I 231,

239\*

**Kraft** (Erkl.) . . . . . I 164

— (Dynamik) . . . . . I 195

—, antrieb . . . . . I 202

—, band . . . . . I 824

—, Beschleunigungs- I 215

—, Coriolis- . . . . . I 214

—, eck . . . . . I 180

—, Effektiv- . . . . . I 215

—, Einheit der — I 165, 166

—, einschalter (Regler) II 312

—, feld . . . . . I 195

—, fuß . . . . . I 195

—, Führungs- . . . . . I 214

—, gas, Heizwert, Luftbedarf

II 251

—, gasanlagen . . . . . II 288

—, gasmotor . . . . . II 267\*

—, lebendige I 198, 212, 217,

218

—, linie . . . . . I 195, 545, 546

—, linie, —dichte, mag-

netische . . . . . II 859

—, maschinenkupplung I 870

—, messung . . . . . II 327

—, Mittel- . . . . . I 168

—, moment . . . . . I 169, 182

—, Relativ- . . . . . I 214

—, richtung (Elektr.) II 870

—, Schwer- . . . . . I 164

—, steuerung . . . . . II 194

—, übertragung . . . . . III 638

—, versorgung, Werkstatt —

III 948

—, wagen, Zuglast . . . . . III 650

—, wagenstahl . . . . . I 508\*

—, werk III 635, 637\*, 942

—, werkgebäude III 634, 637\*

—, werk, Straßensbahn-

II 1015

—, zahnrad . . . . . I 800

- Kraftzerlegung im Raum** III 185  
 —, Zusammensetzung, Zerlegung, Gleichgewicht der — I 168, 179  
 —, Zusatz- . . . I 214
- Kräfte am starren Körper** I 167  
 — an einem Punkt I 168  
 — an gestützt. Körper I 177  
 — dreieck . . . I 180  
 — freie Bewegung . I 216  
 — funktion . . . I 198  
 —, Mittelpunkt der Parallelen I 187  
 — mit verschiedenen Angriffspunkten I 172, 179  
 — paar . . . . . I 169  
 — plan, Cremonascher I 186; III 94  
 — systeme, Gleichgewichtsbedingungsgleichungen I 174  
 — zerlegung, graph. I 180  
 — zug . . . . . I 183  
 —, Zusammensetzung d. — im Raume . . . I 173  
 —, Zwangs- . . . . I 210
- Kraftmaschinen** II 1  
 —, Belebte Motoren II 1  
 —, Dampfkessel . . . II 6  
 —, Dampfmaschinen II 116  
 —, Dampfturbinen II 220  
 —, Meßinstrumente für Kraftwerke . . . II 321  
 —, Verbrennungsmotoren II 245  
 —, Wassermotoren II 290  
 —, Windräder . . . II 2
- Kraftsche Steuerung (Fördermaschinen)** II 462
- Kragdach** . . . . . III 379  
 — träger . . . . . III 1010
- Kran, Anordnung in Fabriken** . . . . . III 486  
 —, Bau- . . . . . III 526  
 —, Block- II 508\*, 509\*, 512  
 —, Brücken- — s. dort II 478, 531  
 —, Dreh- — s. dort II 483, 531  
 —, elektrischer Gieß- und Stahlwerks- . . . II 506  
 —, Fahrbarer Turm- II 500  
 —, gerüst (Statik) . . . III 182  
 —, Gießs- . . . . . II 506, 507\*  
 —, gleisträger, Querschnitts-ermittlung I 571, 572\*  
 —, Hochbahn- . . . . . II 531  
 —, Kabelhochbahn- II 532  
 —, Lauf- s. dort . . . II 473  
 —, Mulden- . . . . . II 508\*, 511  
 —, Portal- . . . . . II 500  
 —, Schiffsdampf- . . . II 711\*  
 —, Schwenk- . . . . . III 527  
 —, Schwimm- . . . . . II 502
- Kran, Stahlwerks-** II 506  
 —, Stripper- . . . II 510\*, 512  
 —, stützen . . . . . III 486  
 —, Temperley- . . . II 532  
 —, träger I 571; II 475, 481; III 110  
 —, Wasser- . . . . . III 859  
 —, Wipp- . . . . . II 494  
 —, Zweirad- . . . . . II 501
- Krängungsversuch** II 676
- Kreis, Gleichg.** I 98, 99  
 — abschnitt, Fläch.-Inh. I 36\*, 135  
 —, Schwerpunkt I 192  
 —, Trägheitsmom. I 238  
 — ausschnitt (Fläch.-Inh.) I 37, 135  
 —, Schwerpunkt I 192  
 —, Trägheitsmom. I 238  
 — bogen, Abstecken von — III 41  
 —, Länge u. Höhe I 36\*  
 —, Längs f. d. Halb. I 38\*  
 —, Schwerpunkt I 191  
 —, Trägheitsmom. I 236  
 — elbewegung . . . I 226  
 — el, Einschienenbahn- I 230  
 — elkondensator . . . II 213  
 — el, Schiffs- . . . . . I 230  
 — elpumpe II 599, 787; III 531, 600  
 —, Berechnung II 603, 609\*  
 —, Konstruktion II 599  
 — ende Bewegung . I 149  
 — evolvente . . . . . I 110  
 — fläche, Inh. . . . . I 2\*, 135  
 —, Trägheitsmom. I 237  
 — förmiger Querschnitt, Drehmoment I 589, 591  
 — frequenz . . . . . I 205  
 — funktionen I 26\*, 52, 57, 58, 66  
 —, Reihen für die I 57  
 — kegel . . . . . I 139  
 —, Kern des — . . . I 595  
 —, Krümmungs- . . . I 95  
 —, linie, Trägheitsmom. I 236  
 —, prozess . . . . . I 426  
 —, Gleichdruckmot. II 256  
 —, Indizierte Wärme- arbeit . . . . . II 257  
 —, Verpuffungsmot. II 254  
 —, Randspannung. I 610  
 —, ring, Drehmoment I 599, 591  
 — ringfläche, Trägheitsmoment . . . . . I 238  
 — ring, Fläch.-Inh. I 135  
 — ring, Kern . . . . . I 596  
 — ring, Trägheits- u. Widerstands- mom. I 554, 557\*  
 — ringstück, Schwerpunkt I 193  
 — säge . . . . . II 368, 507
- Kreissäge, Holz-** II 377  
 — schere . . . . . II 344  
 —, Sehnenlänge . . . I 36\*  
 — seiltrieb . . . . . I 838  
 — sichelstück, Fl.-Inh. I 136\*  
 —, Trägheits- und Widerstands- mom. I 554, 556\*  
 — transporteur . . . II 521  
 — umfang . . . . . I 2\*  
 —, Wechsel- . . . . . I 162  
 —, Wende- . . . . . I 161  
 — zylinder, Druck zwischen zwei — . . . . . I 530
- Kreuzgelenk Kupplung** I 859, 860\*  
 — gewölbe . . . . . III 338  
 — gewölbe (J u. O) I 140  
 — kopf I 946; II 772; III 907  
 — kopfzapfen . . . . . I 847  
 — kopf, Zapfenreibung I 933  
 — zug, Eisenbahn- III 815, 819, 824, 835  
 — verband, eiserner III 396
- Kriterium für ungünstigste Laststellung (einfacher Balken)** . . . . . III 85
- Kritische Geschwindigkeit (Grenz-)** I 282, 294, 363; II 932  
 — r Druck . . . . . I 431\*  
 — s Druckverhältnis (Luft-) I 387  
 — Temperatur . . . . . I 431\*  
 — Kröhne-Filter . . . III 720  
 — Kronendach . . . III 418, 422
- Krumme Linie (Gleichg.)** I 93  
 — Fläche . . . . . I 121
- Krümmung d. Kurve** I 95  
 — krummer Flächen I 122  
 — sebene . . . . . I 119  
 — shalbmesser . . . I 95, 120  
 — v. Eisenb. . . . . III 776  
 — d. Landstraß. III 655  
 — d. Zahnradb. III 954  
 — v. Straßensb. II 1006  
 — skreis . . . . . I 95  
 — smafs . . . . . I 122  
 — smittelpunkt . I 95, 120  
 — widerstand (Eisenbahn) III 770
- Kübel** . . . . . I 140; II 522  
 —, Kipp- . . . . . II 405, 406\*  
 —, Kubikwurzeln . . . I 2, 4, 3  
 —, Kubische Parabel I 105, 582  
 —, Kubisierapparat (Luftmessung) . . . . . I 383
- Küche, Schiffs-** . . . II 727\*
- Kugel** . . . . . I 139  
 — abschnitt, Schwerpkt. I 194  
 — Trägheitsmom. I 240  
 — ausschnitt, Schwerpunkt I 194  
 — Trägheitsmom. I 240  
 — dreieck . . . . . I 63  
 — druck . . . . . I 529

- Kugelgesperre** . . . I 908  
 —, Gleichg. der . . . I 124  
 —, Hohl-, Festigkeit I 629  
 —, inhalt . . . I 35\*, 139  
 —, lager . . . I 157, 880  
 —, lagerreibung . . . I 255  
 —, Stahl-, Festigkeit u.  
 —, zuläss. Bel. . . I 880  
 —, Trägheitsmoment I 240  
 —, zone, -haube, Schwer-  
 —, punkt . . . I 193  
 —, zweieck . . . I 139  
**Kühlanlagen, Rück-** II 219  
 —, fläche, spezifische  
 —, (Dynamomach.) II 914  
 —, kurve (Dynamom.) II 912  
 —, raumtemperatur . II 701\*  
 —, teich . . . II 219  
 —, wasserbedarf d. Motoren  
 —, II 250  
 —, wassermenge für Kon-  
 —, densation des Dampfes  
 —, II 208  
**Kühlung, Transformator-**  
 —, II 951  
 —, Zylinder- d. Automobile  
 —, II 814  
 —, — der Luftfahrz. II 816  
 —, — d. Verbrennungsmot.  
 —, II 286  
**Kulisse, Wasserrad-** II 293  
**Kulissensteuerung**  
 —, II 121\*, 122\*, 124\*, 128\*,  
 —, 183, 461; II 907  
 —, Anhängung d. Kulissen  
 —, u. Schieberschubstangen  
 —, II 189  
 —, f. Fördermasch. II 461  
 —, Füllungsungleich II 190  
 —, Konstruktive Ausbil-  
 —, dung . . . II 190  
**Kunstbronze** . . . I 695  
 —, stein . . . I 720  
 —, sandstein . . . I 702  
**Kunststraße, Durchlässe,**  
 —, Baumpflanzungen,  
 —, Sicherheitsanlagen  
 —, III 685  
 —, Entwurf . . . III 683  
 —, Lage und Gefälle des  
 —, Straßenzuges . III 684  
 —, Preufs. Bestimmungen  
 —, III 684  
 —, Straßenanlage . III 684  
**Kupfer** . . . I 631, 635, 691  
 —, Amtl. Gewicht . III 60  
 —, blech . . . I 692  
 —, dach . . . III 419, 422  
 —, draht s. a. elektr. Leitg.  
 —, I 640\*, 692  
 —, draht, elektr. Leitungs-  
 —, widerstand . . . II 863  
 —, Festigkeitszahlen I 514\*,  
 —, 515\*, 521\*  
 —, ne Schlange . . . I 973\*  
 —, platte, Gewicht . I 641\*
- Kupferrohr** . . . I 692, 969,  
 —, 970—973\*  
 —, rohr, umwickeltes I 975  
 —, zulässig. Spannung. I 523\*  
**Kuppeldach** III 188, 349  
 —, dach, Eisenkonstr. III 390  
 —, Eisenbeton . . . III 302  
 —, gewölbe . . . III 387  
 —, hänge . . . III 383  
 —, radsatz . . . III 907  
 —, stange, Lokomotiv- I 942;  
 —, III 907  
**Kupplung** . . . I 856  
 —, Ausdehnungs- I 853, 859\*  
 —, Automobilgetriebe II 817  
 —, Baumgartner — I 864  
 —, bewegliche . . . I 858  
 —, Bürsten . . . I 864  
 —, ein- und ausrückbare  
 —, I 864, 865  
 —, Eisenbahn- . . . III 875  
 —, elastische . . . I 860  
 —, elastische Bolzen- I 861,  
 —, 862\*  
 —, elastische Zahn- I 862,  
 —, 863\*  
 —, elektromagnetische  
 —, Friktions- . . . I 870  
 —, feste . . . I 856  
 —, gelenkige Sechskant-  
 —, I 860  
 —, Grisson- . . . I 863, 864\*  
 —, Hülsen- . . . I 856  
 —, Kraftmaschinen- I 870  
 —, Kreuzgelenk- I 859, 860\*  
 —, Kurbelwellen- . II 775  
 —, nachgiebige Stabfeder-  
 —, I 864  
 —, Reibungs- I 866\*, 867\*,  
 —, 868, 870; II 388  
 —, Ringrutsch. (Zahnradb.)  
 —, III 964  
 —, Schalen- . . . I 856  
 —, Scheiben- . . . I 857\*  
 —, Seilbahn- . . . II 587  
 —, Sellers- . . . I 858\*  
 —, Tender- . . . III 914  
 —, Zahn- (Hildebrandt)  
 —, I 865, 866\*  
 —, Zentrator- . . . I 816  
 —, Zodel-Voith- I 860, 861\*
- Kurbel** I 933, 934; II 352  
 —, druck (Diagramm) I 1004  
 —, getriebe, Verbrennungs-  
 —, motor . . . II 279  
 —, Hand- . . . I 933  
 —, kröpfung . . . I 935  
 —, lager, Dampfmasch.- II 205  
 —, lagerdruck . . . I 932  
 —, schleife . . . I 938  
 —, Sicherheits- I 908; II 383  
 —, stange . . . I 940; II 773;  
 —, III 907  
 —, welle I 935, 987; II 774  
 —, —, Automobil- . II 811  
 —, —, Verbrennungsm. II 279
- Kurbelwelle, Zapfen-**  
 —, reibung . . . I 933  
 —, winkel u. Kolbenwege  
 —, II 155\*  
 —, zapfen . . . I 847, 933  
 —, —, Reibung . . . I 933  
 —, —, Verbrennungsm. II 280  
**Kurbeltrieb** . . . I 927  
 —, Arbeitsverhältnisse  
 —, I 931, 932  
 —, Bewegungsverhältnisse  
 —, I 927  
 —, Gelenkgeradfürungen  
 —, I 950  
 —, Kraftverhältnisse I 931  
 —, Kurbel u. Exzenter I 933  
 —, Kreuzköpfe . . . I 946  
 —, massendruck . . . I 1007  
 —, Reibungsverhältn. I 933  
 —, Schubstangen I 940  
**Kurve doppelt. Krümmung**  
 —, I 119  
 —, einhüllende . . . I 97  
 —, Gleichg. der . . . I 93  
 —, Herz- . . . I 110  
 —, Leit- . . . I 159  
 —, nabsteckung . . . III 40  
 —, nblatt (Schiff b.) . II 661  
 —, n-Schwerpunkt . I 191  
 —, Pol- . . . I 159  
 —, Roll- . . . I 160  
 —, Stern- . . . I 110  
 —, System- . . . I 159  
 —, zyklische . . . I 107  
**Kurzschlusfsanker** II 939  
 —, senkbremse . . . II 399  
 —, spannung . . . II 902, 904  
 Kuttasche Strömung I 355
- L.**
- L-Eisen** I 656\*, 658\*, 664\*  
 —, 665\*  
 —, Querschnitt I 554, 590  
 $\lambda$  (Weisbachsche Zahl) I 293  
 Labyrinthdichtung  
 —, I 810, 909, II 229  
**Ladeanlage (Eisenb.)**  
 —, III 838, 839  
 —, baum (Schiffb.) . II 706  
 —, gewicht f. Fuhrwerk  
 —, III 647\*  
 —, kran (Eisenb.) . . III 839  
 —, luke, Schiffs- . . II 712  
 —, mafs (Eisenb.) . . III 839  
 —, n einer Batterie . II 957  
 —, rad (Schiffb.) . . II 707\*  
 —, rampe . . . III 839  
 —, raum (Schiffb.)  
 —, II 694\*, 703\*, 704\*  
 —, spannung . . . II 961  
 —, winde, Schiffs- . II 711\*  
**Ladung, Akkumulatoren-**  
 —, II 882, 957  
 —, (Elektr.) . . . II 865  
 —, agewichte . . . I 689\*

Lageplan . . . . . III 1  
**Lager**, Brücken- III 1035  
 —, bewegliches III 1040  
 —, Dampfmaschine — Kurbel-  
 lager . . . . . II 205  
 —entfernung (Triebwerk-  
 welle) . . . . . I 853  
 —, Gelenk-(Hochb.) III 864  
 —, Grund- (Schiff) II 773  
 —, Hänge- I 878, 879\*  
 —, Kipp- . . . . . I 177  
 —, Konsol- . . . . . I 880  
 —, Kugel- . . . . . I 137, 880  
 —metall . . . . . I 696  
 —reaktion . . . . . I 167  
 —reibung . . . . . I 251  
 —, Rollen- . . . . . I 884  
 —schale . . . . . I 872, 873  
 —, Sellers- I 876, 877\* 878\*  
 —, Steh- I 874, 875\*, 876\*  
 —, Turbinen- . . . . . II 308  
 —, Weilen- . . . . . I 872  
**Lagermittel für körnige  
 Stoffe** . . . . . II 513, 564  
 —, Bodenspeicher . . . . . II 464  
 —, Freilager . . . . . II 571  
 —, Füllrumpf, Tasche II 575  
 —, Gebüdelager . . . . . II 564  
 —, Haufenlager, Taschen  
 . . . . . II 569  
 —, Hochbehälter . . . . . II 569  
 —, Silo- od. Zellenpeicher  
 . . . . . II 565  
 —, Tiefbehälter . . . . . II 575  
 Lagrangesche Gleichg. I 220  
 Lambertsches Strahlungs-  
 gesetz . . . . . I 409  
**Lampen**, Anordng. II 853  
 —, elektr. Bogenlampe mit  
 Kohleelektroden II 842  
 —, elektr. Bogenlampe mit  
 Metallelektroden II 847  
 —, elektrische Glüh- II 839  
 —, elektrische Quecksilber-  
 dampf- . . . . . II 847  
 — f. flüssige Brennstoffe  
 . . . . . II 834, 835  
 — f. Steinkohlengas II 834,  
 836  
 — f. verschiedene Gasarten  
 . . . . . II 838  
 — für Leuchtöle . . . . . II 836  
 —, Moorelicht . . . . . II 848  
 —, Reflektoren u. Glocken  
 . . . . . II 849  
 Lancashire-Zusatzmaschine  
 . . . . . II 963  
**Landestriangulation**  
 . . . . . III 46  
 —, Basismessung . . . . . III 48  
 —, Meßtischblätter III 40, 49  
 —, Netzbedingungs-  
 gleichungen . . . . . III 47  
 Landkarte . . . . . III 49  
 Landsbergische Formeln  
 (Zugspannung) I 531

**Landsche Nulllinien-**  
 ermittlung . . . . . I 593  
 —r Trägheitskreis . . . . . I 235  
 —s Spannungsermittlungs-  
 verfahren . . . . . I 546  
**Landstrafse**, s. a. Kunst-  
 strafse . . . . . III 653  
 —, Allgemeine Anordnung  
 . . . . . III 654  
 —, Baumpflanzungen III 658  
 —, Baustoffe III 662, 663\*  
 —, Breite . . . . . III 656  
 —, Einfriedigungen III 659  
 —, Entwässerung . . . . . III 658  
 —, Kiesstrafsen . . . . . III 668  
 —, Krümmungshalbmesser  
 . . . . . III 655  
 —, Linienführung . . . . . III 653  
 —, nbrücke . . . . . III 65  
 —, Nebenanlagen . . . . . III 670  
 —, Oberbau d. Schotter-  
 strafsen . . . . . III 660  
 —, Pflasterstrafsen III 668  
 —, Stoff bedarf der Schotter-  
 strafsen . . . . . III 663\*  
 —, Steigungsverhältnisse  
 . . . . . III 655  
 —, Teermakadam- . . . . . III 668  
 —, Unterbau . . . . . III 659  
 —, Unterhaltung . . . . . III 666  
 —, Walzen . . . . . III 664  
 —, Wirtschaftliche Linien-  
 führung . . . . . III 653  
 Landungssteg . . . . . III 312  
**Landwirtschaftlicher  
 Wasserbau**, Bewässe-  
 rung . . . . . III 608  
 —, Deichbau . . . . . III 611  
 —, Drainagen . . . . . III 604  
 —, Entwässerung d. offene  
 Gräben . . . . . III 603  
 — d. Versenken III 602  
 — mit Masch. . . . . III 599  
 —, Entwässerungsanlagen  
 . . . . . III 599  
**Längenänderung** (Festig-  
 keitslehre) . . . . . I 502  
 —änderung, Arbeitsver-  
 mögen . . . . . I 505  
 —mafs . . . . . I 1050\*  
 —messung . . . . . III 2  
 —, Genauigkeit III 3  
**Langlochbohrmaschinen**,  
 Holz- . . . . . II 342  
 —fräsmasch. (Metall-) II 368  
 Langschwelle . . . . . III 814  
**Längsbauten** (Flufsb.)  
 . . . . . III 538  
 —keil . . . . . I 755  
**Laschennietung** I 778;  
 . . . . . II 28\*, 32  
 —, Schrauben- . . . . . III 811  
 —, Schienen- III 811, 814\*  
**Lastdruckbremse** . . . . . II 383  
 —drucksenkbremse II 401  
 —enaufzug II 414, 428, 429

**Lastenzug** III 71, 79, 81, 82  
 —haken I 899, 901\*; II 404  
 —scheide . . . . . III 89  
 —, Tau- . . . . . II 702\*  
**Laterne** (Kuppeld.) III 189  
 —, Strafsen- . . . . . III 694  
**Laufafse**, verschiebbare  
 Lokomotiv- . . . . . III 913  
 —krane . . . . . II 473, 479\*  
 —, Bau- . . . . . III 529  
 —, Hubwerk . . . . . II 473  
 —, Kranfahrwerk II 477  
 —, Laufwinde II 473, 475,  
 478, 504  
 —, Schienen . . . . . II 474\*  
 —, Träger . . . . . II 475  
 —steg . . . . . I 580  
 —welle (Schiff-) . . . . . II 776  
 Lavalturbine II 232, 233\*,  
 235\*  
**Lebendige Kraft** I 198,  
 212  
 — der Massenpunktgruppe  
 . . . . . I 217  
 — starrer Körper I 219, 221  
 Leckrechnung II 680, 686  
**Lederriemen**, Festigkeits-  
 zahlen . . . . . I 521  
 —stulp (Manschette) I 309,  
 909  
 —stulpreibung . I 247, 910  
 —treibriemen . . . . . I 750  
 Leer- (Los-) Scheibe I 830  
 Legierungen . . . . . I 694  
**Lehmörtel** . . . . . I 709  
 —steine . . . . . I 701  
**Lehrbogen-, Gerüste** III 354  
 —en, Blech- u. Draht-  
 . . . . . I 642, 690  
 Leibungsdruck . . . . . I 731;  
 . . . . . III 62, 76  
 Leinwanddach . . . . . III 421  
**Leistung** . . . . . I 200  
 — bewegter starrer Körper  
 . . . . . I 221  
 —, elektrische II 857, 864  
 —, menschliche II 1, 2\*;  
 . . . . . III 322\*, 791\*, 792\*  
 —, tierische II 2\*; III 651,  
 793  
 —sfaktor (Elektr.) . . . . . II 873  
 —smessung . . . . . II 327  
 —quotient . . . . . I 221  
 —regler . . . . . I 1019  
 —versuche a. Dampfkesseln  
 u. Maschinen . . . . . II 103  
 —, zeichn. Darst. . . . . I 201  
 —sziffer, Kältem. I 427, 447  
**Leiterzahnstange** (Zahnrad-  
 bahn) . . . . . III 953  
 —linie (Kegelschnitt) I 98  
 — (Lade-) -rad (Schiffb.)  
 . . . . . II 707\*  
 —rad (Turb.) . . . . . II 305  
 —strahlen . . . . . I 100  
 —werk (Flufsbau) . . . . . III 538

**Leitung, Druckrohr-**(Entwässerung) . . . III 756  
 —, Durchfluß durch Rohr-  
 en . . . I 281  
 —, elektr., s. elektr. Leitung  
 II 985  
 —, Entwässerungs- III 749  
 —, Heizrohr- III 446\*, 447,  
 452, 454, 465  
 —smast II 1000, 1002\*;  
 III 694  
 —squerschnitt, Dampf-,  
 zweckmäßigster I 470  
 —widerstand, elektr. II 862,  
 863\*, 864\*, 990  
 —, Wärme- . . . I 401  
 —, Wasser- III 729, 857, 941  
 —, Wasser- f. Kraftanlagen  
 III 631  
 Lemniskate . . . I 114  
 Lemniskoidenlenker I 952  
 Lenix-Spannrolle . I 823  
**Lenkachse** . . . III 931  
 —er . . . I 950  
 —ersteuerung . . . II 191  
 —ersteuerung (Förder-  
 maschine) . . . II 462  
 —ung, Automobil- II 822  
 Lentzsteuerung . . II 171  
**Lenzleitung** . . . II 791  
 —pumpe . . . II 788  
 Leonardschaltg. II 978, 1031  
 Letternmetall . . I 697  
**Leuchtgas, Endtempera-  
 tur u. Druckzunahme  
 bei Verbrennung im  
 geschloss. Raum I 496\***  
 —, Heizwert, Luftbedarf  
 II 250  
 —motor s. a. Verbrennungs-  
 motor . II 267\*, 268  
 —, spez. Gew. . . I 638  
 —, Verbrennung . I 492\*,  
 493\*, 494\*, 496\*  
 Leuchtkraft . . . II 827  
 Libelle . . . III 9  
**Lichtabgabe** . . . II 828  
 —einheit . . . II 828  
 —empfindlichkeit des  
 menschl. Auges II 826  
 —intensität . . . II 827  
 —messung . . . II 830  
 —stärke, Berechnung II 831  
 —stärke, erforderl. II 852\*  
 —stärkenmessung II 827, 828  
 —stärke verschiedener  
 Lichtquellen . II 850\*  
 —strom (-fluß, -menge)  
 II 828  
 Liderung I 909, 912, 921, 922  
**Lieferungsgrad** d. Luft-  
 kompressors . I 430  
 — d. Luftpumpe . II 641  
**Lieferungsvorschriften**  
 s. a. Amtl. Vorschriften.

**Lieferungsvorschriften**  
 Eisenkonstr., Brücken,  
 Hochbau . . . I 782  
 — für Eisen u. Stahl I 683  
 — für Schmieröle . I 750  
 —, Portlandzement I 714, 716  
 —, Reinigung u. Anstrich  
 v. Eisenkonstrukt. I 686  
 —, Ueberpreis v. Grobblech-,  
 Böden usw. . II 114  
 —, Material f. Kessel II 85  
 Limbus . . . . . III 14  
**Lineare, Differential-  
 gleichung** . . . I 81, 84  
 —s Voreilen . . . II 150  
**Linie, gerade** (Gleichg.)  
 I 90, 115, 116  
 —, gerade, Trägheitsmoment  
 I 236  
 —, krumme (Gleichg.) I 93,  
 119  
 —nris . . . . . II 656, 668  
 —n, Trägheitsmomente I 236  
 —, Schwerpunktlagen I 190  
 Linoleum . . . . . I 704  
**Linse** . . . . . III 11  
 —, Dichtungs- . . . III 904  
 Lipowitz-Metall . I 697  
 Lippenventil . . . I 995  
**Lochbohrer** . . . II 348  
 —erache Zahnstange (Zahn-  
 radbahn) . . . III 954  
 —leibungsdruck, zuläss.  
 I 781; III 62, 76  
 —maschinen . . . II 343  
**Logarithmen** . . . I 48  
 —, Briggsche — der Hyper-  
 belfunktionen I 32\*, 54\*  
 — der Hyperbelfunkt. I 32\*  
 —, Mantissen d. Briggschen  
 I 24\*  
 —, nat. . . . . I 2\*  
**Logarithmische Reihen**  
 I 57  
 —s Dekrement der Schwin-  
 gung . . . . . I 206  
 — Spirale . . . . . I 112  
 Logleine . . . . . II 740  
 Lokalbahn . . . . . III 773  
**Lokomotive** . . . III 886  
 —, Achse . . . . . I 847, 937  
 —, Anfahrvorrichtung für  
 Verbund- . . . III 916  
 —, Beispiel einer —, Be-  
 rechnung . . . III 917  
 —, Bezeichnung . III 886  
 —, Breiten- u. Höhenmaße  
 III 887  
 —, Bremse . . . . . III 881  
 —, C:H . . . . . III 890  
 —, Dampfrohr . . . III 904  
 —, Dampfspannung III 899  
 —, Dom . . . . . III 899  
 —, Drehgestell III 911, 913  
 —, Drehscheibe . III 846  
 —, elektrische . . . II 516

**Lokomotive, elektrische**  
 Zahnradbahn- III 962  
 —, Feuerbüchse u. -Mantel  
 III 891  
 —, Gegengewicht . III 909  
 —, Gestell . . . . . III 911  
 —, Gewichte III 894—897\*  
 —, Gewichte f. Brückenbau  
 (s. a. Lastenzug) III 82  
 —, Gewichte von -teilen  
 III 943\*  
 —, Gewichtsverteilg. III 914  
 —, Gruben- . . . . . I 516  
 —, Hauptabmessung ausge-  
 führter f. Normalspur-  
 III 893\*—895\*  
 —, Hauptabmessung auger-  
 führter Schmalspur-  
 III 896\*, 897\*  
 —, Heißdampf- . . III 916  
 —, Heizrohre . . . III 899  
 —, Jährl. Leistung III 937  
 —, Kessel, s. a. Dampfkegel  
 III 889  
 —, Kesselausrüstung III 901  
 —, Kesselbekleidg. III 904  
 —, Kohlenverbrauch III 860  
 —, Kolben I 914; III 906  
 —, Kreuzkopf I 949; III 907  
 —, Kuppelstange . I 843  
 —, Langkessel . . III 892  
 —, Maschinensteuerung  
 III 907  
 —, Maschinenzugkraft,  
 Leistung . . . . . III 904  
 —, Maschinenzyl. . III 906  
 —, N:H . . . . . III 890  
 —, Prüfung u. Untersuchung  
 III 919  
 —, Räder . . . . . III 903  
 —, Radstand . . . . III 912  
 —, Rahmen . . . . . III 911  
 —, Rauchkammer . III 900  
 —, Regler . . . . . III 903  
 —, Rost- u. Heizfläche  
 III 889, 890\*, 891\*  
 —, schmalspurige III 516;  
 III 886  
 —, Schornstein . . . III 900  
 —, Schubstange . I 941  
 —, Schuppen . . . . III 862  
 —, Sicherheitsventil III 902  
 —, Speisevorrichtg. III 901  
 —, Speisewasser . . III 855  
 —, Tender . . . . . III 913  
 —, Tenderkupplung, Bahn-  
 räumler, Bremse III 914  
 —, Tragfedern u. Ausgleich-  
 hebel . . . . . III 914  
 —, Trieb- u. Kuppelradsätze,  
 Gegengewichte III 907  
 —, Verbund- . . . . III 915  
 —, verschiebb. Laufachsen  
 u. Drehgestelle III 913  
 —, Treibachsen III 912  
 —, Verschub- . . . . II 516

**Lokomotive, Wasser-**  
 bedarf . . . III 854  
 —, Wasserstandszeiger . . . III 902  
 —, Werkstand . . . III 944  
 —, Widerstandszahlen . . . III 769  
 — (Zahnradb.) . . . III 958  
 —, Gewicht . . . III 968  
 —, Heizfläche, Rostfläche . . . III 962  
 —, Sicherheitsank. III 967  
 —, Zugkraft, Leist. III 967  
**Löschgrube** . . . III 866  
 —rad . . . II 707\*  
**Lösung v. Gasen in Wasser**  
 I 399\*  
**Lot** . . . I 696\*, 697\*  
 —gabel . . . III 8  
**Löten, elektr.** . . . II 864  
**Löwenherzgewinde** I 760,  
 768\*  
**Luft, Ausfußformeln** 1386,  
 463  
 —bedarf f. Verbrenng. I 482  
 —bedarf verschiedener  
 Lichtquellen . . . II 850\*  
 —befeuchtung . . . III 434  
 —, Drosselung . . . I 472  
 —druck . . . III 83  
 —druck im offenen u. ge-  
 schlossenen Luftraum  
 I 342, 343\*  
 —druckbremse . . . III 883  
 —druckgründung . . . III 251  
 —druckgründung, Sicher-  
 heitsmittel . . . III 253  
 —druckgründung, Taucher-  
 glockengründung II 259  
 —erwärmung f. Lüftung  
 III 434  
 —fahrzeugmotor . . . II 816  
 —, feuchte I 421, 422\*, 423  
 —filter . . . III 433  
 —gas (Aerogen-, Benoidgas)  
 I 501; II 838  
 —heizung . . . III 455, 499  
 —, isothermische und adia-  
 batische Kompression  
 II 641\*  
 —, Kohlensäuregehalt  
 II 850\*; III 424\*  
 —kompression, Kreisprozefs  
 I 428, 429\*  
 —kompressor I 428; II 625  
 —leitung . . . I 469  
 —, Löslichkeit im Wasser  
 I 899  
 —messung, Geschwindig-  
 keitsmessung . . . I 384  
 —, stat. Raummessg. I 383  
 —, Dynamische Raum-  
 messung . . . I 385  
 —, mittelfeuchte . . . II 640\*  
 —mörtel . . . I 709  
 —pumpe . . . II 213, 639, 785

**Luftpumpe für Luftdruck-**  
 gründung . . . III 256  
 —reibung . . . I 371  
 —reinigung . . . III 438  
 —saugbremse . . . III 884  
 —schicht, Wärmelübergang  
 I 402  
 —schleuse III 251, 253, 258  
 —, spez. Gewicht I 418, 638  
 —, spez. Gewicht mittel-  
 feuchter . . . II 640\*  
 —, spez. Rauminhalt mittel-  
 feuchter . . . II 640\*  
 —, Strömung . . . I 458  
 —, Strömung in Rohr-  
 leitungen . I 466, 469  
 —, thermodyn. Werte  
 I 418\*  
 —, trockene, spez. Gew.  
 I 638  
 —überschufs (Verbrennung)  
 I 482  
 —waschen . . . III 434  
 —wechsel, allgemeine An-  
 nahmen . . . III 426\*  
 — auf Schiffen II 714\*  
 —, Erzielung des — III 427  
 —, Größe des — III 424  
 —, Notwendigk. III 423  
 —, stündlicher, bei be-  
 stimmtem Kohlensäure-  
 gehalt . . . III 426\*  
 —, stündl. — für 1000  
 abzufuhr. WE III 425\*  
 —widerstand I 204, 364,  
 368, 371, 374\*, II 807  
 — v. Eisenbahnen III 769  
 — von Flügeln I 379  
 — von Geschossen I 348  
 — Wasserdampfemischung  
 I 421, 422\*  
 —, Zähigkeit . . . I 401  
 —, Zusammensetzung I 482  
**Lüftung, s. a. Luftwechs.**  
 III 423  
 —, Ausführung v. Lüftgs-  
 Anlagen . . . III 433  
 —, Bedienung d. Lüftungs-  
 Anlagen . . . III 435  
 — durch Temperaturdiffe-  
 renz . . . III 428  
 —, Druckverhältn. im ge-  
 schlossenen Raum III 427  
 —, Eisenbahn- . . . III 935  
 —, Eisenbahnwerkstatt  
 III 941  
 —, Fabrik- . . . III 501  
 —, Größe d. Luftwechsels  
 III 424  
 —, künstliche . . . III 428  
 —, Luftbefeuchtung, Er-  
 wärmung . . . III 434  
 —, Luftentnahme u. Reini-  
 gung . . . III 433  
 — mittels Prefs- bzw. Sang-  
 köpfe . . . III 431

**Lüftung mit Ventilatoren**  
 III 431  
 —, natürliche . . . III 427  
 —, Schiffs- . . . II 714\*  
 —, Zu- und Abfußkanäle  
 III 435  
**Lumen** . . . . . II 828  
**Lupe** . . . . . III 12  
**Lux** . . . . . II 828, 829\*  
 —ferprisma . . . . . I 727

## M.

**Maclaurinsche Reihen** I 68  
**Magnalium** . . . . . I 697  
 —, Festigkeitsz. I 517, 521\*  
**Magnesium** . . . I 631, 635  
 —, Festigkeitszahlen I 517  
**Magnetbremse** . . . II 397  
 —, Bremsluft- II 398\*, 401\*  
 —, Feld- . . . . . II 899  
 —gestell der Gleichstrom-  
 dynamom. II 900, 909  
 —maschine . . . . . II 884\*  
 —pol . . . . . II 859  
 —rad . . . . . II 919  
 —senkbremse II 400, 403  
 —, Trag- . . . . . II 404  
 —, Tragkraft . . . . . II 861  
 —wicklung (Gleichstrom)  
 II 899, 901, 910, 958  
**Magnetische Induktion**  
 II 859  
 —es Feld II 859, 866, 923  
 —r Kreis . . . . . II 861  
 —r Widerstand . . . . . II 861  
**Magnetisierungskurve**  
 —ierungstafel . . . II 900\*  
 —mus . . . . . II 859  
**Magnetomotorische Kraft**  
 II 861  
**Makadamstraße** . . . III 661  
 —straße, Teer- . . . III 668  
 —, Zement- . . . . . III 675  
**Mammtpumpe** . . . II 597  
**Mangan** . . . . . I 631, 635  
 —bronze, Festigkeit I 514\*  
 —Siliciumstahl, Festig-  
 keitszahlen . . . I 512\*  
**Mannesmannrohr** 1968, 969\*  
**Mannloch** . . . . . II 39, 103  
**Manometer** I 337; II 77, 82,  
 83, 321; III 902  
**Mansarddach** III 309, 347,  
 348, 384  
**Manschette** . . . I 309, 909  
**Mantisse d. Logarithmen**  
 I 24\*, 48  
**Marine-Kessel** II 798, 799\*  
**Marriottsches Gesetz** I 342,  
 416  
**Marshall-Umsteuerung**  
 II 192  
**Marx-Steuerung** . . . II 175

**Maschinenteile, Achsen**  
 und Wellen . . . I 850  
 —, Bremsen . . . I 901  
 — d. drehenden Bewegung  
 I 784  
 —, Drahtseile . I 831, 890  
 — für Hebemaschinen I 884  
 —, Gelenkgeradfürungen  
 I 950  
 —, Gesperre . . . I 906  
 —, Hanfseile . . . I 898  
 —, Hanfseil- u. Baumwoll-  
 seilbetrieb . . . I 834\*  
 —, Hilfsmittel z. Verbindg.  
 v. Maschinenteilen I 753  
 —, Keile . . . . . I 753  
 —, Ketten . . . . . I 843, 884  
 —, Kolben, Kolbenstangen,  
 Stopfbüchsen . I 909  
 —, Kupplungen . . . I 927  
 —, Kurbeltrieb . . . I 872  
 —, Lager . . . . . I 872  
 —, Lasthaken I 899; II 404  
 —, Niete . . . . . I 772  
 —, Reib- u. Keilräder I 813  
 —, regelnde . . . . . I 999  
 —, Riemen- u. Seilbetrieb  
 I 816, 831  
 —, Schrauben . . . I 759  
 —, Sperrabremsen I 908  
 —, Treibketten . . . I 843  
 —, Zahnräder . . . I 784  
 —, Zapfen . . . . . I 845  
 — z. Aufnahme u. Fortleitg.  
 v. Flüssigkeiten I 954  
**Mafseinheiten, elektrische**  
 II 857\*, 858  
 —einheiten für Laderäume  
 II 704\*  
 —einheiten (Vermessungsk.)  
 III 2  
 —e und Gewichte verschiede-  
 ner Länder I 1050\*  
 —stab von Biegunslinien  
 III 129  
 —system, absolutes (C-G-S-  
 System) I 166; II 857  
 —, physikalisches I 166  
 —, technisches I 165  
 —vergleichstafeln I 1042 bis  
 1049, 1056  
 —verwandlg. I 1044\*, 1056\*  
**Masse, Einheit der** I 166  
 — (Erkl.) . . . . . I 165  
 —anziehung . . . . . I 195  
 —ausgleich (Schiffsmasch.)  
 II 766  
 —nberechnung (Bahnbau)  
 III 784, 785\*  
 —ndruck, Kurbeltrieb-  
 I 1007, 1008  
 —nermittlung (Eisenbahn-  
 bau) . . . . . III 781, 784  
 —nkraft . . . . . I 195  
 —nprofil (Eisenbahnbau)  
 III 784

**Massentransport s. a.**  
 Fördermittel II 513, 514  
 —verteilung (Eisenbahn-  
 bau) . . . . . III 784, 785\*  
 —nwuchtdiagramm I 1011,  
 1013  
 —, Reduktion d. —n I 222  
 —, reduzierte (Kurbeltrieb)  
 I 1012  
**Massenpunkt, Bewegung**  
 durch Kräfte . . . I 204  
 —, Eigenschwingung I 207  
 —, freie geradlinige Bewe-  
 gung . . . . . I 204  
 —, freie krummlinige Bewe-  
 gung . . . . . I 208  
 —, unfreie Bewegung I 210  
**Massenpunktgruppe,**  
 d'Alembertsches Prinzip  
 I 214  
 —, Impuls, Drall, Trägheits-  
 gesetz . . . . . I 215  
 —, lebendige Kraft u. Arbeit  
 I 217  
 —, Lagrangesche Gleichun-  
 gen . . . . . I 220  
 —, Schwerpunktsätze I 216  
 —, starrer Punkthaufen, Ar-  
 beit d. äußeren Kräfte,  
 lebendige Kraft, Impuls,  
 Drall . . . . . I 218  
**Mast** . . . . . II 725  
 —enkrän . . . . . III 529\*  
 —, Eisenbeton- . . . III 319  
 —enzubehör II 705, 706\*  
 —, Leitungs- II 1000, 1002\*  
**Mathematik** . . . . . I 1  
**Mathematischer Pendel** I 213  
**Mauerfrais** . . . . . I 701  
 —steine . . . . . I 707  
 —, Stütz- . . . . . III 788  
 —, Trocken- . . . . . III 789  
**Mauerwerk** . . . . . III 320  
 —, Beton- . . . . . III 320  
 —, Bruchstein- . . . III 320  
 —, Eisenbetonmauern  
 III 302  
 —, Fachwerkwände III 327,  
 353  
 —, freistehende Mauern  
 III 325  
 —, Gesimse . . . . . III 329  
 —, Gew. (amtl.) III 59, 322  
 —, Gewölbe . . . . . III 330  
 —, Keller . . . . . III 328  
 —, Kessel- . . . . . II 50  
 —, Materialbedarf . III 322  
 —, Maueröffnung . III 329  
 —, Mauerwerkarten III 320  
 —, Mauerstärken III 323,  
 325\*  
 —, Mörtel . . . . . III 321  
 —, Quader . . . . . III 320  
 —, Rauchröhren, Schorn-  
 steine . . . . . III 327  
 —, Steinverbände . III 323

**Mauerwerk, Ziegel-III 321**  
 —, zulässige Beanspr.  
 I 526\*; III 64  
**Maurertagewerk** . . . III 322  
 Maxima u. Minima I 69  
**Maxwellscher Satz** (Gegen-  
 seitigkeit d. Formände-  
 rungen) . . . . . III 121  
**Mechanik luftförmiger**  
**Körper, Allgemeines**  
 I 341  
 —, Dynamik s. a. dort I 347  
 —, Geschwindigkeits- und  
 Mengenmessung I 333  
 —, Statik . . . . . I 342  
**Mechanik starrer**  
**Körper** . . . . . I 144  
 —, Dynamik . . . . . I 195  
 —, geom. Bewegungslehre  
 I 144  
 —, physikalische Mechanik  
 I 164  
 —, Statik . . . . . I 166  
**Mechanik tropfbar**  
**flüssiger Körper,**  
 Dynamik . . . . . I 268  
 —, Statik . . . . . I 265  
**Mechanisches Wärmeäqui-**  
**valent** . . . . . I 413  
 Meerseilbahn . . . . . II 594  
**Mehrpfasenmaschine**  
 II 919, 925, 938, 963,  
 967, 969  
 —strom II 876, 945, 952, 963  
 Meile . . . . . I 1043\*  
 Melms & Pfenninger-  
 Turbine . . . . . II 243  
 Membranpumpe . . . III 530  
**Mensch, Ausatmung und**  
**Ausdünstung** . III 424\*  
 —, Kraft und Leistung  
 III, 2, III 322\*, 791\*,  
 792\*  
 —engedränge . . . . . III 68  
 —, Wärmeabgabe . III 423  
 —, Wasserdampfabschei-  
 dung . . . . . III 424  
 Mergel . . . . . I 699  
**Messband-, -kette, -rad III 3**  
 —geräte (Vermessungsk.)  
 III 2, 8  
 —instrumente, elektr. II 975  
 —instrumente für Kraft-  
 werke . . . . . II 321  
 —instrumente, Höhen-  
 III 27  
 —instrumente, Winkel-  
 III 14  
 —tischblatt . . . . . III 40, 49  
 —verfahren (Schiffb.) II 692  
 —ung, Flüssigkeits- I 337  
**Messing** . . . . . I 694  
 —, Festigkeitszahlen  
 I 514\*, 515\*, 521\*  
 —draht, Gewicht . . . I 640\*  
 —platte, Gewicht . . . I 641\*

**Messingrohr** I 969, 972\*  
**Metall** (Stoffkunde) I 640\*  
 —, amtl. Gewicht III 60  
 —, spez. Gewichte I 641\*  
 —barometer . . . III 33  
 —fadenlampe . . . II 841  
 —legierung . . . I 694  
 —linderung . . . I 912, 922  
 —platten, Gewichte verschiedenener —. I 641\*  
 —rohr . . . . . I 969  
 —schlauch . . . . . I 983  
 —überzug . . . . . I 684  
 —zement, Festigkeit I 517  
**Metallbearbeitungs-**  
**maschinen** . . . II 332  
 —, Lochmaschinen und  
 Scheren . . . . . II 343  
 —, Pressen . . . . . II 341  
 —, Richt- und Biegemasch.  
 . . . . . II 340  
 —, Sandformmasch. II 332  
 —, Schmiedemasch. II 333  
 —, Spanabhebende — II 345  
**Metazentrische Höhe**  
 . . . . . II 672, 673\*  
 —um . . . . . I 267, II 656, 659  
 — von Gasballonen I 347  
**Meterkerze** . . . . . II 828  
 —kilogramm, Vergleichs-  
 tafel . . . . . I 1057\*  
 Methode der kleinsten Qua-  
 drate . . . . . I 87, III 49  
**Meunierscher Satz** (Schiefer  
 Schnitt) . . . . . I 122  
**Meyerstenerung** . . . II 163  
**Middendorfsche For-**  
**meln**, Tafeln für Ein-  
 trittswinkel für  $\zeta$ ,  $\epsilon$ ,  
 $\eta$ ,  $\nu$  . . . . . II 748—750\*  
 — (Schiffswiderstand)  
 . . . . . II 747  
**Mikroskop** . . . . . III 13  
**Militärspektive** . . . I 142  
**Mineralog. Härteskala** I 698  
**Mineralöl** . . . . . I 747  
**Minima** . . . . . I 69  
**Minimum d. Deformations-**  
**arb.** i. Stabwerk III 142  
**Mischgas** . . . . . I 495; II 898  
 —kondensation . . . II 208  
 —maschine f. Mörtel und  
 Beton . . . . . III 523  
**Mischung, Gas-** . . . I 420;  
 . . . . . II 254  
 —temperatur . . . . . I 396\*  
 — v. Luft u. Wasserdampf  
 I 421, 422\*  
**Mittelachse, verschiebbare**  
 . . . . . III 931  
 —kraft . . . . . I 168  
 —kraftlinie (Seileck) I 182  
 —punktfläche . . . . . I 123  
 —schiene (Zahnrb.) III 951  
**M-Linie** (Statik) I 540; III 99  
**Modellregel** (Hydr.) I 327

**Modellschleppversuch**  
 (Schiffb.) II 744, 745\*  
**Mohrsche Nullinienermitt-**  
**lung** . . . . . I 592  
 —s Durchbiegungsermit-  
 tungsverfahren I 550  
 —s Spannungsermittlungs-  
 verfahren . . . . . I 601  
 —r Trägheitskreis I 235  
**Moivrescher Satz** . . . I 47  
**Molekulargewicht** I 630\*  
 —flüssiger Brennstoffe  
 . . . . . I 498\*  
 —, scheinbares . . . . . I 420  
 —vollkommener Gase  
 . . . . . I 416, 418\*  
 — von Gasen . . . . . I 494\*  
 Molekulärwärme I 485\*, 486\*  
**Momentanstofs** . . . I 241  
 —, Deviations- . . . . . I 232  
 —enkurve . . . . . III 84  
 —ensatz . . . . . I 172  
 —, Haupt- . . . . . I 173  
 —, Impuls- . . . . . I 202  
 —, Kraft- . . . . . I 169, 182  
 —, statisches . . . . . I 188  
 —, *T* — (kontinuierlicher  
 Träger) . . . . . III 150  
 —, Trägheits- . . . . . I 231  
 —vektor . . . . . I 170  
**Monelmetall, Festigkeits-**  
**zahlen** . . . . . I 515  
**Monierbau**, a. Eisenbeton-  
 bau . . . . . I 722  
 —decke . . . . . III 297, 410\*  
 —wand . . . . . III 327  
**Monozyklisches System**  
 (Wechselstrom) II 877  
**Montejus** . . . . . II 597  
**Moorelicht** . . . . . II 848  
 —, Stromverbrauch II 852\*  
 Morsekegel . . . . . II 362\*  
**Mörtel** . . . . . I 709; III 321  
 —, Elastizitätsm. I 519\*, 520\*  
 —, Festigkeitsz. I 518\*, 519\*  
 —, Luft- . . . . . I 709  
 —mischmaschine . . . III 523  
 —, Wasser- . . . . . I 712, 717  
**Moseleysche Stabilitäts-**  
**formel** . . . . . II 671  
**Motor, belebter** II 1, 2\*  
 —bootmaschine . . . II 815  
 —droschke, vorgeschr. Mafse  
 . . . . . II 806  
 —fahrzeug . . . . . II 804  
 —gerade (Regler) . . . I 1035  
 —wagen, elektrische II 824,  
 1019  
**Muffendruck** (Regler) I 1017  
 —verbind. I 957, 963; III 631  
**Mulde, Klapp-** II 405, 406\*  
 —nkipper . . . . . II 520\*  
 —nkran . . . . . II 508\*, 511  
**Müller-Breslausches Ver-**  
**fahren** (Berechnung d.  
*te*-Gewichte) . . . III 131

**Müllersches Schieberdia-**  
**gramm** II 152, 158, 162  
**Mundstück** (Ausfluszzahlen)  
 . . . . . I 280, 817  
**Munition, Schiffs-** (Gew.)  
 . . . . . II 731\*  
**Muntzmetall** (Festigkeitsz.)  
 . . . . . I 515  
**Münztafel** . . . . . I 1037\*  
**Muschelkurve** . . . . I 114  
 —schieber . . . . . II 151  
**Mutterschraube** . . . I 761\*  
 —, Schrauben-, Gewicht  
 . . . . . I 762\*, 768

## N.

**Nabe, Riemenscheiben-**  
 . . . . . I 830  
 —, Zahnrad- . . . . . I 810  
**Nadelwehr** . . . . . III 552  
**Nagel** . . . . . I 679, 683  
 Näherungswerte . . . . I 53  
**Naphtalin, thermodyn.**  
 Werte . . . . . I 498\*  
**Naviersche Knickformel**  
 . . . . . I 537  
**Nebenbahn** . . . . . III 773  
 —schlußmaschine II 883,  
 884\*, 886  
 —schlußmaschine, Schal-  
 tung u. Regelung II 955  
 —schlußmotor . . . . . II 916  
**Neperische Analogien** I 64  
**Nernstlampe** . . . . . II 842  
**Netzbedingungsgleichung**  
 (Vermessungsk.) III 47  
 —, Entwässerungskanal-  
 . . . . . III 735  
 —schaltung . . . . . II 877  
 —, Wasserleitungs- III 730  
**N: H** (Lokomotive) III 890\*  
**Neusilber** . . . . . I 697  
**Neutrale Achse, Biegungs-**  
**festigkeit** . . . . . I 541  
 — Faserschicht . . . . . I 541  
**Newtons Ähnlichkeits-**  
**gesetz** (Hydr.) . . . . I 327  
 —sches Gesetz der Schwere  
 . . . . . I 164, 196  
 —sches Potential . . . . I 200  
 —sches Verfahren (Gleichg.)  
 . . . . . I 54  
**Nickel** . . . . . I 632, 635  
 —stahl . . . . . I 644\*  
 —stahl, Festigkeitszahlen  
 . . . . . I 507\*, 509\*  
 —stahl, Chrom-, Festigkeits-  
 zahlen . . . . . I 510\*  
**Niederschlagshöhe**  
 . . . . . III 703, 737, 738\*  
 —menge . . . . . III 604, 618, 620\*  
**Niet** . . . . . I 679, 722  
 —arbeit . . . . . III 359  
 —beanspruchung b. Stofsver-  
 bindgen. III 1004, 1005\*

**Nieteisen**, Vorschr. II 89, 92  
 —, Gewichte eiserner Schließköpfe I 773\*  
 —, Gewichte schweißeiserner e. . . . . II 723\*  
 —maschinen . . . . . II 339  
 —tafel für Winkeleisen III 985\*  
 —verbindung III 77, 359  
**Nietung** beim Brückenb. III 983  
 —, Berechnung . . . . . I 774  
 —, Brücken-, zulässige Beanspruchung III 76  
 —, Dampfkessel-I 775; II 27  
 — für Brücken u. Hochbau I 780  
 — für Flüssigkeits- u. Gasbehälter . . . . . I 780  
 —, Gurt . . . . . III 1000  
 — für Maschinenteile I 783  
 —, Kessel . . . . . II 27, 28\*  
 —, Laschen-I 778; II 34\*, 35\*  
 —, Ueberlappungs- I 777; II 34\*, 35\*  
 — v. Eisenkonstrukt., Materialverfügung I 773  
**Niklauss-Kessel** II 798, 799\*  
**Niveau** . . . . . III 9  
 —fläche . . . . . I 195  
 —fläche (Hydrostat.) I 266  
**Nivellement** . . . . . III 27  
 —plan . . . . . III 1  
**Nivellierinstrum.** III 27  
 —latte . . . . . III 28  
 —methoden . . . . . III 28  
 —ungsarbeiten . . . . . III 29  
 Nockensteuerung II 171, 282  
**Nomineller Expansionsgrad** . . . . . II 117  
**Nonius** . . . . . III 15  
**Normalbeschleunig.** I 148  
 —druck (Hydr.) . . . . . I 266  
 —e, Gleichg. der — I 94, 121  
 —ebene, Gleichg. . . . . I 119  
 —element . . . . . II 878  
 —flamme, -kerze II 828, 829\*  
 —format von Mauersteinen I 707; III 321  
 —gleichungssystem (Vermessungsk.) . . . . . III 52  
 —höhe v. Gasballonen I 345  
 —null . . . . . III 26  
 —profil (Eisenbahn) III 774, 887, 888, 925, 926\*  
 —profile, Deutsche — für Walzeisen . I 656\* u. f.  
 —profile für Schiffbaustahle . . . . . I 664\*  
 —profile v. Bauholz I 742\*  
 —sand . . . . . I 715  
 —schiene (preufs.) III 801\*  
 —spannung (Festigkeitslehre) . . . . . I 502  
 —spannung im Schiffsquerschnitt . . . . . II 737

**Normaltender** . . . . . III 919  
**Normalien**, Abfußrohre I 964\*  
 —, Abfußrohre a. Blei od. Steinzeug . . . . . I 982  
 —, Bauholz . . . . . I 742  
 —, Bewerlg. u. Prüf. elektr. Masch. u. Transformat. II 914  
 —, Formstücke f. Rohrleitg. I 958\*, 959\*, Gew.: 960\*, 961\*  
 —, gußeiserne Muffen- u. Flanschenrohre I 956\*, 957\*  
 —, Rohrleitungen f. hochgespannt. Dampf I 974, 976\*, 978\*  
 —, Schrauben- d. preufs. Staatsbahnen . I 764\*  
**Normand-Kessel** II 799\*, 800  
**Normen** f. Leistungsversuche an Dampfkesseln und Dampfmaschinen II 103  
**Notauslaß** . . . . . III 754  
 —ausschalter . . . . . II 1039  
**Nullleiter** . . . . . II 876  
 —linie, Biegungsfestigkeit I 541, 546  
 —linie(exzentr.beanspruch. Kreisring) Werte z:r . . . . . I 602\*  
 —linie(zusammenges.Festk.) Bestimmung nach Mohr u. Land . . . . . I 592  
 —schicht . . . . . I 541  
**Nut** . . . . . I 756, 757\*  
**Nutation** . . . . . I 230  
**Nutzholz** . . . . . I 734  
 —lasten, amtliche . . . . . III 60  
 —wasserbeschaffung III 467

### Ö.

**Obelisk** . . . . . I 138, 141  
 —, Schwerpunkt . . . . . I 194  
**Oberbau**, Grubenb. III 970  
 —, Vergnügungsb. III 975  
 —, Zahnradbahn- . . . . . III 956  
**Oberbau, Eisenbahn-** III 795  
 —, Bau d. Gleises III 798  
 —, Bettung . . . . . III 814  
 —, Materialkosten III 814  
 —, Lage d. Gleises III 795  
 —, Langschwelen III 814  
 — m. flusseisernen Querschwellen . . . . . III 806  
 — m. Holzquerschwellen III 802  
 —, Stofsverbindung III 810  
 —, Straßensbahn- II 1008  
**Oberleitungsbetrieb** (Straßenb.) . . . . . II 1016  
 —licht . . . . . III 480, 485  
 —schlächtiges Wasserrad . . . . . II 291

**Oberfläche**, benetzte Schiffs- . . . . . II 751  
 —, bewegter Flüssigkeiten I 269  
 —nkondensation . . . . . II 210  
 —nkraft . . . . . I 195  
 —nwidderstand . . . . . I 371  
 —nwidderstand eingetauchter Körper . . . . . I 364  
 — v. Körpern . . . . . I 137  
**Objektivsystem** . . . . . III 12  
**Ofenheizung** III 443, 498  
 —kachel . . . . . I 709  
**Ohm** . . . . . II 857, 858  
 —sches Gesetz . . . . . II 861  
 —schesGesetzf.Gleichstromdynamomach. II 884\*  
**Ohnesorge-Kupplung** I 871  
**Okularsystem** . . . . . III 12  
**Oelfarbenanstrich** . I 685  
 —feuerung . . . . . II 793  
 — für Dieselmotoren. thermodyn. Werte I 499\*  
 —gas . . . . . II 898  
 —, Heizwert . . . . . I 479, 481  
 —, Schmier- . . . . . I 744  
 —, Treiböl für Motoren . . . . . II 249, 251\*  
**Optik** (Vermessungsk.) III 11  
**Oerlikoner Bronze**, Festigkeitszahlen . . . . . I 514\*  
**Orsatapparat** . . . . . II 326  
**Ostramlampe** . . . . . II 841  
**Oestensches Wasserent-eisenungsverf.** III 721  
**ω-Tabelle** (Kontinuierlich. Träger) . . . . . III 152\*  
**Oxydationskörper** III 719, 761

### P.

**π** (Zahl) . . . . . I 43\*  
**Packlage** (Straßenb.) III 660  
 —ung (Dichtung) I 809, 909, 921  
 —wagen . . . . . III 935  
 —werk . . . . . III 542  
**Panzerung**, Schiffs- (Gew.) II 730\*  
**Papier**, Festigkeitsz. I 517  
**Pappdach** III 420, 422, 477  
**Pappusche Regel** I 141, 190  
**Parabel** (Gleichg.) I 98, 104  
 —fläche, Schwerpunkt I 193  
 —, Trägheitsmom. I 298  
 —, Konstruktion . . . . . I 106  
 —, kubische . . . . . I 105, 552  
 —, semikubische II 105, 582  
 —träger III 103, 378, 1035  
**Paraboloid** . . . . . I 140  
 —, Gleichg. . . . . I 124  
 —, Schwerpunkt . . . . . I 195  
 —, Trägheitsmoment I 240  
**Paraffinöl** . . . . . I 499\*  
**Parallaxe** . . . . . III 13

- Parallelbetrieb** v. Wechselstrommasch., Mech. Anforderg. . . . II 938  
 —kräfte . . . I 187  
 —perspektive . . . I 142  
 —schaltung u. -betrieb d. Wechselstrom- u. Drehstromgeneratoren II 967  
 —stromkondensation II 209  
 —träger . . . III 78, 102  
 —wicklung (Anker) II 890
- Parallelogramm** (Inh.) I 184  
 — der Winkelgeschwindigkeiten . . . I 157  
 —gesetz . . . I 152  
 —, Schwerpunkt . . . I 191  
 —, Trägheitsmoment I 237  
 —, Watsches . . . I 953
- Parallelepiped**, Trägheitsmoment . . . I 239
- Parameter** . . . I 93, 100
- Parsonsturbinen** . . . II 235
- Partialbruch** . . . I 70  
 —turbinen . . . II 297, 301
- Paskalsche Kurve** I 160  
 —s Gesetz (Hydrost.) I 185
- Patentgesetze**, deutsche und ausländische Bestimmungen . . . I 1068\*
- Paternosteranlauf** (Personen-) . . . II 433, 440  
 —werk . . . II 548
- Pauliträger** . . . III 105
- Pech** . . . III 685
- Pedometer** . . . III 3
- Pegelkurve** . . . III 638
- Peltonrad** II 298, 302, 309
- Pendel**, Kegel- . . . I 212  
 —länge, reduzierte . . . I 224  
 —, mathematisches I 213  
 —, physisches . . . I 224  
 —regler . . . I 1023  
 —, Sekunden- . . . I 213  
 —n d. Wechselstrommasch. bei Parallelbetr. II 934  
 —stützen . . . III 868
- Pennische Sicherung** I 766\*  
 —scher Schieber II 158, 778
- Periode** (Wechselstr.) II 871  
 —envergleich . . . II 967  
 —ische Bewegung . . . I 147  
 —ische Funktion . . . I 129
- Peripherie** d. Kreises I 2\*  
 —perkinshheizung . . . III 451  
 —permeabilität . . . II 859  
 —permuationen . . . I 48
- Perpendikel** . . . II 654
- Personenaufzug** II 415, 428  
 —wagen . . . III 925, 932
- Perspektive** . . . I 142
- Petroleum**, Destillationsprodukte . . . I 479  
 —glühlicht . . . II 835, 856\*  
 —heizung . . . III 444
- Petroleum**, Heizwert, Luftbedarf I 479; II 251  
 —lampe . . . II 835  
 —motor, s. a. Verbrennungsmotor . . . II 967  
 —, spez. Gew. . . . I 637  
 —, thermodyn. Werte I 498\*, 499\*  
 —, Zusammensetzung I 479
- Pfahl**, Beton- . . . III 244  
 —bock . . . III 242  
 —, Eisenbeton- . . . III 303  
 —, Ramm-, Tragfähigkeit III 226, 232  
 —rost . . . III 240  
 —, Schrauben- . . . III 245  
 —schutz . . . III 244  
 —, Simplex- . . . III 245
- Pfannendach** . . . III 419, 422
- Pfeiler**, Brücken- III 1089  
 —, Eisenbeton- . . . III 278, 294, 298  
 —gründung . . . III 245  
 —mauer . . . III 325
- Pfeilrad** . . . I 806
- Pferd**, Kraft u. Leistung II 2; III 650\*, 651\*, 793  
 —estärke (PS) I 200; II 857  
 —estärke, Vergleichstafel I 1057\*
- Pfette** . . . III 878  
 —ndach . . . III 198, 345
- Pflanzenöl** . . . I 746  
 —ung (Flußb.) . . . III 543
- Pflaster** aus künstlichen Steinen . . . III 675  
 — a. natürl. Steinen III 672  
 —, Brücken- . . . III 1078  
 — (Flußb.) . . . III 542  
 —, Holz- . . . III 677  
 —, Klein- . . . III 669  
 —, Klinker- . . . III 669  
 —strafe . . . III 668
- Phasenmesser** . . . II 873  
 —regler . . . II 939  
 —transformator . . . II 952  
 —vergleich . . . II 967  
 —verschiebung . . . I 207  
 —, sdiagr. . . . II 926  
 —swinkel . . . I 129  
 —winkel . . . I 128
- Phoronomie** . . . I 144
- Phosphorbronze** I 694, 695  
 —, Festigkeitssz. I 514\*, 521
- Photometer** . . . II 830  
 —rische Einheiten II 827  
 —rischer Körper . . . II 827  
 —Physikal. Mechanik I 164  
 —Physisches Pendel I 224
- Piefkesches Wasserrentenverfahren** III 719
- Piezometer** . . . I 337
- Piranischaltung** . . . II 962
- Pisé-Wand** . . . I 702
- Pissoir** . . . III 693
- Pitot-Darcysche Röhre** I 838, 884
- Pius Fink-Umsteuerung** II 188
- Plan**, Auftragen eines —es (Vermessungsk.) III 39
- Planetenrädergetriebe** I 157; II 853
- Planimeter** . . . III 25
- Planksche Versuche** (Stickstoffdampf) . . . I 457
- Planum**, Bahn- . . . III 786
- Platindraht**, Festigk. I 521
- Platte**, ebene, Festigkeit I 620; II 96  
 —, Eisenbeton- . . . III 270  
 —, gewölbte (Festigk.) I 623  
 —, Metall-, Gew.-Taf. I 641\*  
 —brücke, Eisenbeton- . . . III 807  
 —kette . . . III 517  
 —, städtischer . . . III 696
- Plenelstange** I 932, 940; II 773  
 —, Automobil- . . . II 811
- Plunger** . . . I 909
- Pneumatischer Elevator** II 661
- Pohlmannsche Bulbeendecke** . . . III 414
- Pol** . . . I 159  
 —bahn . . . I 159  
 —, Beschleunigungs- I 162  
 — (Kräfteplan) . . . I 180  
 —kurve . . . I 159  
 —, Satz der drei —e I 163  
 —schub . . . II 905, 909  
 —estärke, Magnet- . . . II 859  
 —umschaltung . . . II 980  
 —, Wechsel- . . . I 162  
 —weite . . . I 182  
 —, Wende- . . . I 161  
 —, Wende- (Elektr.) II 906
- Polarachse** (Seileck) I 182  
 —isation (elektromotorische Gegenkraft) . . . II 865  
 —koordinaten . . . I 92  
 —koordinaten, Raum- I 118  
 —normale (Gleichg.) I 94  
 —subtangente . . . I 94  
 —tangente . . . I 94
- Poller**, Schiffs- . . . II 710\*
- Polonceau-Dachbinder** III 106, 398
- Polygon** s. a. Vieleck.  
 —, A- (Statik) . . . III 85  
 —, Seil- . . . I 172, 180  
 —züge, Anordnung von — (Vermessungsk.) III 17
- Polysiusische Zahnkupplg.** I 862, 863\*  
 —, Umdrehungsregler I 822
- Polytrope**, Konstr. I 426  
 —e vollkommener Gase I 424, 425\*  
 —ische Werte . . . II 260

- Ponceletsche Erddruck-  
konstruktion . . . III 203  
Popperturm . . . II 220  
Porphyr . . . I 698  
Portalkran . . . II 500  
Portlandzement. I 685, 714  
Postwagen . . . III 925, 935  
**Potenzen** . . . I 2\*, 45  
—gesetz (Festigkeitsl.) I 503  
**Potential** . . . I 198  
—funktion . . . I 199  
Prahm . . . III 517  
Präzession . . . I 229  
**Prellbock** . . . III 836  
—ung . . . I 242  
**Pressgaslicht** . . . II 837  
—kopf . . . III 431  
—werk . . . I 652  
—zylinder . . . I 954  
—zylinder, Festigkeit I 624  
**Pressung, Luft-** . . . II 627  
—e, Huber- . . . II 812  
—e, Präge- . . . II 342  
—e, Schmiede- . . . II 338  
—e, Stössel- . . . II 341  
—e, Zieh- . . . II 341  
Primzahlenteilung. II 367  
**Prinzip d. Erhaltung der lebendigen Kraft** I 199  
— der virtuellen Verschiebungen . . . I 175  
**Prisma** . . . I 137  
—, Schwerpunkt . . . I 198  
—, Trägheitsmoment I 239  
—toid . . . I 141  
**Prismeninstrumente** III 6  
—kreuz. . . III 7  
Probefahrt (Schiffb.) II 740  
Probierventil . . . II 803  
**Profilaufnahme (Vermessungsk.)** . . . III 29  
—eisen . . . I 654, 656\* u. f.  
—geschwindigkeit. I 338  
—maßstab . . . III 781  
Progressionen . . . I 56, 68  
Projektion . . . I 142  
Pronyscher Zaun . . . II 327  
**Propeller, Schiffs-** II 752  
—rinne . . . II 544  
Proportionalitätsgrenze  
I 503, 507\*  
**Proviant f. Schiffe** II 732  
—raum (Schiffs-) . . . II 700\*  
Prüfung, Lokomotiv- III 919  
Prüfswand . . . III 327  
Pseudoastatischer Regler  
I 1015  
Psychrometer . . . I 423  
**Pufferbatterie** II 961, 962  
—batterie, Strafsenb. II 1016  
—, Eisenbahn- . . . III 875  
—, Luft-, Oel- . . . II 170  
—maschine . . . II 1043  
Pulsometer . . . II 597  
Pultdach . . . III 848, 379  
**Pumpgrad** . . . II 596  
**Pumpstation (Entwässerung)** . . . II 755  
—werk, Wasser- . . . III 858  
**Pumpe** . . . II 597  
—, Abteuf- . . . II 620  
—, Ballast- . . . II 738  
—, Bau- . . . III 530  
—, Differential- . . . II 617  
—, Hebung durch Luft- od. Dampfdruck . . . II 597  
—, Ketten- . . . II 596  
—, Kolben- s. a. dort II 610; III 601  
—, Kreisel- II 531, 599, 787; III 600  
—, Luft- II 639, 785; III 256  
—, Lenz- u. Spül- . . . II 788  
—nplan, Schiffs- . . . II 791  
—nzylinder . . . I 954  
—, Rittinger- . . . II 620  
—, Schiffs- II 715, 727\*, 735  
—, Schleuder- II 599; III 600  
—, Speise- . . . II 788  
—, Strahl- . . . II 598  
—, Wasserhaltungsmasch. . . II 619  
—, Windkessel II 612, 614  
—, Wirkungsgrad . . . II 615  
—, Zirkulations- . . . II 787  
**Punktabsteckung in Bogen** III 41  
—, asymptotischer . . . I 112  
—bahn . . . I 159  
—bestimmung, trigonometrische . . . III 21  
—, Bewegung eines —es . . . I 144  
—haufen, starrer, Lebendige Kraft, Arbeit, Impuls, Drall . . . I 218  
— im Raume . . . I 115  
— in der Ebene (Gleichg.) . . . I 90  
—, isolierter . . . I 96  
—, Rückkehr- . . . I 96  
—, System- . . . I 159  
—, unendlich ferner . . . I 94  
—, zugeordneter . . . I 96  
Putz, Wand- I 712; III 321  
**Puzzolan** . . . I 712, 713  
—erde . . . I 700  
**PV- (Indikator-) Diagramm** I 416, 439  
**Pyramide** . . . I 138  
—, Mantelschwerpunkt I 193  
—, Schwerpunkt . . . I 194  
—, Trägheitsmoment I 239  
Pyrometer . . . I 389
- Quadermauerwerk III 320  
**Quadrant-Eisen** . . . I 663\*  
—, Umrechnung d. 90°-Teilg. in d. 100°-Teilg. I 42\*
- Quadrat-Eisen (Gewicht)** I 675\*  
—, Methode der kleinsten —e . . . I 87, III 49  
—querschnitt, Drehmoment I 539, 591  
—, Kern . . . I 595  
—, Trägheits- u. Widerstandsmom. I 539, 552, 559\*  
—wurzeln . . . I 2\*, 43\*  
**Quarz** . . . I 698  
—it . . . I 699  
—lampe . . . II 843  
**Quecksilberdampf-lampe** . . . II 847  
—, Elastizität . . . I 265  
—höhen I 342\*, 412, 1057\*  
—, Zähigkeit . . . I 400  
Quellfassung. III 705, 706\*  
**Queraussteifung (Brückenbau)** . . . III 1045  
—bauten (Flußst.) . . . III 539  
—felddynamomasch. II 837  
—keil . . . I 753  
—kraft . . . I 184, 538, 540  
—kräfte (Eisenbahnbrücke) . . . III 72\*, 78\*, 79  
—kräfte im einfachen Balken . . . III 83, 87  
—neigung, Eisenbahn- . . . III 782, 783\*  
—profil von Strafsen III 656, 673, 676, 678  
—schnitt, gefährlicher . . . I 543, 565\* u. f.  
—schnittsmomente I 552\* u. f.  
—schnittsverhältnisse in stat. unbest. Konstr. . . . III 181, 184  
—schwelle, eiserne III 806  
—schwelle, hölzerne III 802  
—schwellenoberbau f. Eisenbahnbrücken III 1057\*  
—schwelle, Weichen- III 819  
—sieder . . . II 23  
—stützung, elastische I 538  
—zusammenziehung (Festigkeitsl.) . . . I 502  
Quetschgrenze (Festigkeitsl.) . . . I 505, 507\*  
**Q-Linie (Fläche) (Statik)** . . . I 540; III 95, 99
- R.**  
Rabitzwand I 712; III 327  
**Raddruck, Eisenb.** III 778, 869  
—druck, Strafsenfuhrwerk . . . III 647\*  
—, Eisenbahn- . . . III 870  
—, Grubenbahn- . . . III 971  
—lenker . . . III 818  
—, Lokomotiv- . . . III 908  
—reifen, Eisenbahn- III 871